5 Ряд Лорана и Сингулярности

5.1 Ряд Лорана

Теорема Тейлора 4.8 предоставляет мощный инструмент описания аналитических функций. Однако, не все функции являются аналитическими. Далее мы увидим, что некоторые не аналитические функции можно представлять в виде суммы рядов с целыми степенями. Например, для функции $e^{\frac{1}{z}}$ вполне естественной была бы запись в виде ряда с отрицательными степенями

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Обозначим

$$S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Пусть радиус сходимости ряда

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

равен R. Тогда функция $S_1(z)$ будет аналитической в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменной $w = \dfrac{1}{z-z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменной w

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ, тогда его сумма (как функция переменной w) будет аналитической функцией в круге $|w| < \rho$, и, следовательно, функция $S_2(z)$ будет голоморфной при $|z - z_0| > r$ (здесь $r = 1/\rho$).

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

будет аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$.

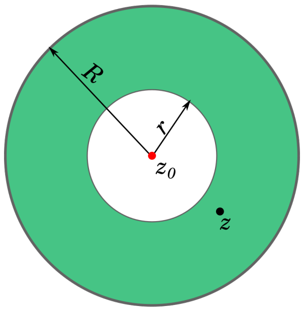

Рис. 5: Кольцо K.

Теорема 5.1 (Теорема Лорана)**.** *Аналитическая в кольце* $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ *функция* $f(z)$ *в каждой точке* $z \in K$ *представима в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\, dw}{(w - z_0)^{k+1}},$$

$\gamma \subset K$ *— простой замкнутый кусочно-гладкий контур, обходящий точку* z_0*.*

Полученный в теореме 5.1 ряд называют ***рядом Лорана***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \textit{правильная часть ряда Лорана}$$

и

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \textit{главная часть ряда Лорана.}$$

Доказательство. Фиксируем точку $z \in K$, тогда найдутся радиусы r_1, r_2 такие, что $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Рассмотрим замкнутый контур Γ из двух окружностей $|z - z_0| = r_1$, $|z - z_0| = r_2$ (см. рис. 6). Обозначим эти окружности γ_1, γ_2.

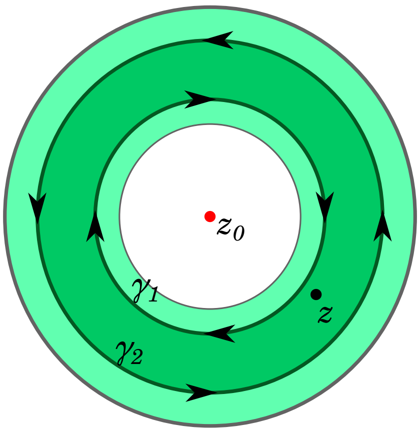

Рис. 6: Кольцо K.

По интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \right). \qquad (5.1)$$

1. Сначала преобразуем интеграл по γ_2. Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)}$$

$$= \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k. \qquad (5.2)$$

Ряд (5.2) сходится равномерно на окружности γ_2 (поскольку $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$), поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} f(w) \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k dw =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k.$$

2. Перейдём к интегралу по γ_1. В этом случае используем следующее разложение, которое приводит к равномерно сходя-

щемуся ряду на окружности γ_1:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)}$$

$$= \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^k. \quad (5.3)$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = -\int\limits_{\gamma_1} g(w) \frac{-1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^k dw$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^k\, dw \right) (z - z_0)^{-(k+1)}$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k.$$

Подставляя полученные интеграл в (5.1) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k. \right)$$

По интегральной теореме Коши интегралы по γ_1 и γ_2 можно свести к интегралу по кривой γ. Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw \right) (z - z_0)^k.$$

$\square$

Задача 16. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$. Обозначим $M(\rho) = \max\limits_{z \in C_\rho} |f(z)|$, где $r < \rho < R$. Вывести следующую оценку для коэффициентов ряда Лорана*[9]

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}. \tag{5.4}$$

5.2 Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удалённой точки, то есть существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Тогда функция $f(1/t)$ является голоморфной в кольце $0 < |t| < 1/R$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменной $t = \dfrac{1}{z}$ и, полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удалённой точки ***правильной частью*** ряда Лорана называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

[9] Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

5.3 Изолированные особые точки

Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если существует окрестность $B(z_0, \rho)$ точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (так как в точке z_0 функция может быть не определена).

Рассмотрим функции $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z^4}$, $e^{-\frac{1}{z^4}}$. Для каждой из этих функций точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой. Однако, оказывается, что характер особенности (сингулярности) в каждом случае разный.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется
1) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;
2) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3) ***существенно особой точкой***, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0.

• Для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, поскольку

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

△

• Для функции $f(z) = \dfrac{1}{z^4}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом (4-го порядка), поскольку

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{1}{z^4} \right| = \infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{z^4} = \infty$. $\triangle$

• Предела $\lim\limits_{z\to z_0} e^{-\frac{1}{z^4}}$ не существует. Поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = e^{-\frac{1}{z^4}}$. $\triangle$

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки.

Теорема 5.2. *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$.*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Тогда
1) z_0 — устранимая $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана нет членов с отрицательными номерами, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

2) z_0 — полюс $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит лишь конечное число членов с отрицательными номерами, то есть

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

3) z_0 — существенно особая $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными номерами, то есть имеет вид

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Доказательство. 1) Если z_0 — устранимая особая точка, что существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, и, следовательно $|f(z)| < M$ на некоторой окрестности $B(z_0, r)$. Тогда для произвольного $\rho < r$ имеет место оценка (5.4):

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}.$$

В силу произвольности ρ получаем $|c_n| = 0$ для $n < 0$.

Ели ряд Лорана не имеет членов с отрицательными степенями, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, то есть z_0 — устранимая особая точка.

2) Пусть z_0 — полюс. Тогда $f(z) \ne 0$ в некоторой окрестности $B(z_0, r)$, а функция

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \ne z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

аналитична[10] в $B(z_0, r)$. Заметим, что $g(z_0) = 0$. По теореме 4.10 $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ для некоторого $m \in N$ и аналитической функции $h(z)$, $h(0) \ne 0$. Функция $1/h(z)$ является аналитической, выпишем её в ряд Тейлора и выразим $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m}(a_0 + a_1(z - z_0) + \dots).$$

Полученное разложение и есть ряд Лорана для $f(z)$, в котором конечное число членов с отрицательными степенями (не больше m). Обратное утверждение очевидно[11].

3) следует из 1) и 2). □

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс. Максимальный номер m такой, что $c_{-m} \ne 0$ называется *порядком полюса*. И говорят: z_0 — ***полюс порядка*** m.

Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $m = 2$, поскольку ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots .$$

[10] В силу пункта 1) функция $g(z)$ представляется степенным рядом.

[11] $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, где $g(z)$ — аналитическая и $g(z_0) \ne 0$

$\triangle$

При доказательстве пункта 2) теоремы 5.2 фактически было получено следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ её нуль порядка m. Тогда функция $1/f(z)$ имеет в z_0 полюс порядка m.*

Задача 17. *Пусть $f(z)$ аналитична на множестве $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ и ограничена $|f(z)| < M$. Доказать, что $f(z)$ можно продолжить до аналитической на всём круге $B(z_0, R)$ функции $\tilde{f}(z)$.*

Итак, в зависимости от типа особой точки функция ведёт себя по-разному: в устранимой особой точек функцию можно продолжить до аналитической, в полюсе значения функции уходят в бесконечно удаленную точку. Что происходит в существенно особой точке?

Теорема 5.4 (Сохоцкого). *Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа $z \in \mathbb{C}$ существует последовательность $z_n \to z_0$ такая что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = a$.*

Доказательство. Сначала заметим, что существует последовательность $z_n \to z_0$ такая, что $f(z_n) \to \infty$, иначе z_0 — устранимая.

Пусть $a \in \mathbb{C}$. Возможны два случая.

1) Любая окрестность z_0 содержит точки z такие, что $f(z) = a$. Таким образом искомая последовательность существует и в этом случае теорема доказана.

2) Допустим нашлась такая окрестность $B(z_0, r)$, что $f(z) \neq a$ для всех $z \in B(z_0, r)$. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$ аналитична в $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Точка z_0 является существенно особой для $g(z)$ (т. к. предела не существует). Но, как мы заметили в самом начале найдётся последовательность $z_n \to z_0$ такая, что $g(z_n) \to \infty$. Следовательно, $f(z_k) = a + 1/g(z_k) \to a$.

$\square$

Задача 18. *Рассмотрим функцию* $f(z) = \exp(1/z)$*. Точка* $z = 0$ *является существенно особой. Имеем* $\exp(z_n) \to \infty$ *для* $z_n = 1/n$, $\exp(z_n) \to 0$ *для* $z_n = -1/n$*. Найти такую последовательность* $z_n \to 0$*, что* $\exp(z_n) \to \pi$*.*

Замечание 5.5. Более точный результат даёт теорема Пикара: *В окрестности существенно особой точки функция принимает все значения кроме, быть может, одного.*

5.3.1 Изображения функций

Используя метод цветных областей приведём изображения функций в окрестности особой точки.

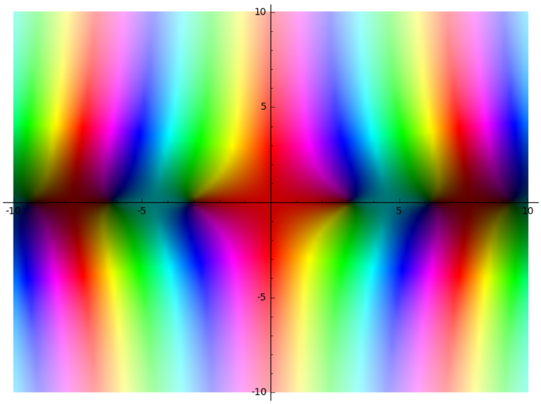

Рис. 7: Функция $\frac{\sin z}{z}$.

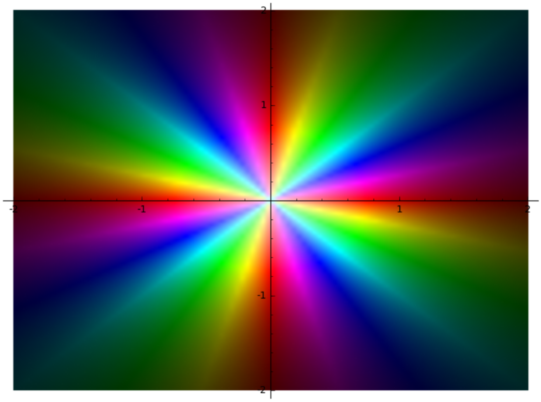

Рис. 8: Функция $\frac{1}{z^4}$. В 0 полюс 4-го порядка.

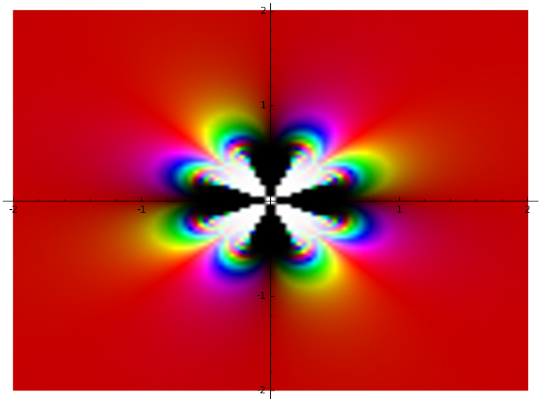

Рис. 9: Функция $e^{-\frac{1}{z^4}}$. В 0 полюс существенная особенность.

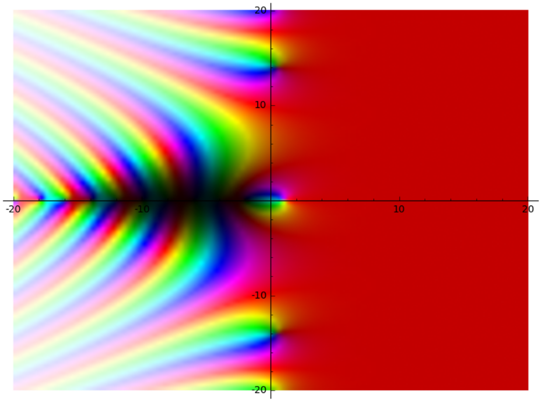

Рис. 10: На изображение попытайтесь найти полюс и нули функции $\zeta(z)$.