

6 Элементы теории вычетов

В этой лекции мы введём важное для приложений понятие *вычета* аналитической функции в изолированной особой точке. Немного о самом термине. Считается, что его развил Коши основываясь на работах Эйлера. Название вычет (residue), по видимому, происходит от того, что нас интересует остаток после интегрирования ряда Лорана. Точный смысл этого выражение должен быть понятен после приведенных ниже рассуждений.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz.$$

Задача 20. Пусть $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z}$. Найдите $\operatorname{Res}_{z=\pi} f(z)$.

Лемма 6.1. Пусть $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^k$ для $1 < |z| < R$, тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Доказательство. Проинтегрируем функцию f по окружности $|z - z_0| = \rho < R$:

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz &= \int_{|z-z_0|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^k dz. \end{aligned}$$

Вспомним (см. задачу 4), что

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (6.1)$$

□

Если посмотреть с другой стороны, то можно сказать, что интеграл равен вычету:

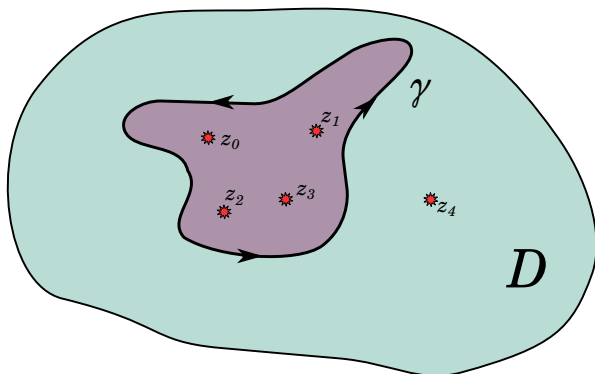
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

На самом деле справедливо более общее свойство.

Теорема 6.2 (Основная теорема теории вычетов). Пусть f — аналитична в $D \subset \mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $\{z_j\}$, γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, не содержащая особых точек $\{z_j\}$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z),$$

где суммирование ведётся по всем точкам z_j , находящимся внутри.



Доказательство. Выберем достаточно малое $r > 0$ так, чтобы замкнутые круги $\overline{B(z_k, r)}$ лежали в области D и не пересекались между собой. Обозначим через C_k^+ окружность $|z - z_k| = r$. Функция $f(z)$ является аналитической в области

$$D^* = D \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{B(z_k, r)}$$

и непрерывной в ее замыкании. Согласно интегральной теореме Коши интеграл функции $f(z)$ по ориентированной границе области D^* равен нулю, т.е.

$$\int_{\partial D^*} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k^-} f(z) dz = 0.$$

Следовательно

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

□

Суть теоремы 6.2 состоит в том, чтобы вместо непосредственного интегрирования $\int_{\gamma} f(z) dz$ вычислять вычеты $\operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$ в изолированных особых точках.

6.1 Вычисление вычетов

Теорема 6.3 (Теорема о сумме вычетов). Пусть $f(z)$ — аналитична, за исключением конечного числа особых точек $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$. Тогда сумма вычетов по всем особым точкам (включая $z = \infty$) равна нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

Доказательство. Выберем достаточно большое значение $R < \infty$ так, чтобы все конечные особые точки z_1, z_2, \dots, z_n лежали в круге¹² $|z| < R$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^-} f(z) dz = 0.$$

□

Лемма 6.4. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

Доказательство. Действительно, если z_0 — устранимая, то, в частности, $c_{-1} = 0$. □

Далее мы рассмотрим приёмы, которые позволяют находить вычеты в полюсах.

¹²Почему это возможно?

Лемма 6.5. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — простой полюс (т.е. полюс первого порядка) функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) \cdot f(z)).$$

Доказательство. Если z_0 — простой полюс, то

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Тогда

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \dots$$

и

$$(z - z_0)f(z) \rightarrow c_{-1} \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

□

Последние две леммы являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема 6.6. Если z_0 — полюс порядка m функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \cdot f(z)).$$

Сравните приведённое выше утверждение с теоремой 2.6.

Лемма 6.7. Пусть f, g — голоморфные в точке z_0 функции и z_0 — ноль функции g порядка 1 (т. е. $g(z_0) = 0$, но $g'(z_0) \neq 0$) и $f(z_0) \neq 0$. Тогда функция $f(z)/g(z)$ имеет полюс первого порядка в точке z_0 и

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Доказательство. По лемме 6.5

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) \cdot \frac{f(z)}{g(z)} \right).$$

В силу непрерывности $f(z)$, дифференцируемости $g(z)$ и $g'(z_0) \neq 0$ получаем требуемое. □

6.2 Вычет в бесконечно удалённой точке

Пусть бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т. е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке $z = \infty$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где интеграл берётся по ориентированной в отрицательном направлении (по часовой стрелке) кривой γ .

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки (см. пункт 5.2), то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Задача 21. Доказать, что

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{w=0} \frac{f(1/w)}{w^2}.$$

Лемма 6.8. Если $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \left(\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) - f(z) \right).$$

Доказательство. Действительно, если ∞ — устранимая особая точка, то ряд Лорана имеет вид

$$\dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0.$$

При этом $\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) = c_0$. Далее очевидно. □

Задача 22. Пусть ∞ — устранимая особая точка функции f , доказать формулу

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z).$$