7 Вычисление интегралов - 1

7.1 Тригонометрические интегралы

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi,$$

где $R(\xi, \eta)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Сделаем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$d\varphi = -i\,\frac{dz}{z}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Следовательно,

$$I = -i \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} =$$

$$= \int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R_1(z).$$

Здесь $R_1(z)$ — это некоторая рациональная функция комплексного переменного, которая определяется через исходную рациональнцю функцию $R(\xi, \eta)$ очевидным образом.

Пример 7.1. Пусть $|a| < 1$, разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

7.2 Стационарное уравнение теплопроводности

7.2.1 Суммирование по Абелю и ряд Фурье

Будем говорить, что ряд сходится по Абелю и $\sum c_k \overset{A}{=} s$ если ряд $A(r) = \sum c_k r^k$ сходится для всех $r \in [0,1)$ и $s = \lim\limits_{r\to 1} A(r)$. Например

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \cdots \overset{A}{=} \frac{1}{2}.$$

Задача 23. *Вычислить сумму по Абелю*

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \overset{A}{=} ?$$

Заметим, что если ряд сходится в обычном смысле, его сумма совпадает с суммой по Абелю.

Рассмотрим функцию $f(\theta) : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ и её ряд Фурье

$$f(\theta) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta}.$$

Обозначим

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_k e^{ik\theta}.$$

7.2.2 Решение задачи Дирихле в $\mathbb{D}$

Покажем, что решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге является функция

$$u(r,\theta) = A_r(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi}(f * P_r)().$$