8 Вычисление интегралов - 2

8.1 Преобразование Фурье

Пример 8.1. Проверить равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \qquad \text{при } 0 < \operatorname{Re} a < 1.$$

Пример 8.2. Проверить равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\operatorname{ch} \pi x}\,dx = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi\xi}.$$

8.1.1 Рациональный случай

Интеграл вида

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, R(x)\, dx \tag{8.1}$$

представляет собой преобразование Фурье рациональной функции $R(x)$.

Для нахождения таких интегралов нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 8.3 (Лемма Жордана). *Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия*

1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе

$$S = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| > R_0 > 0\};$$

2) $M_R = \max\limits_{z \in C_R} |f(z)| \to 0$ *при* $R \to \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, то есть $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| = R\}$.

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\, f(z)\, dz = 0.$$

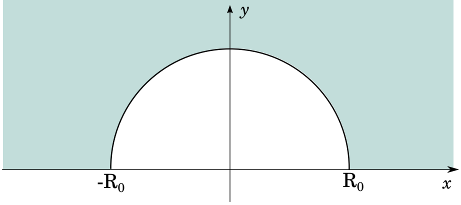


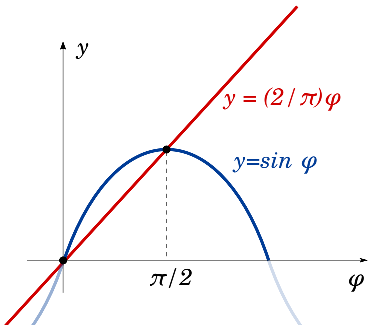
Рис. 11: Функция непрерывна в закрашенной области.

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

В силу выпуклости функции $\sin\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$ выполняется неравенство

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\ \varphi.$$



Теперь несложно получить требуемую оценку для интеграла

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz \right| \leq R M_R \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2RM_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\varphi}\, d\varphi \leq 2RM_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi}\varphi}\, d\varphi \leq$$

$$\leq M_R \frac{\pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi}{\alpha} M_R \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

$\square$

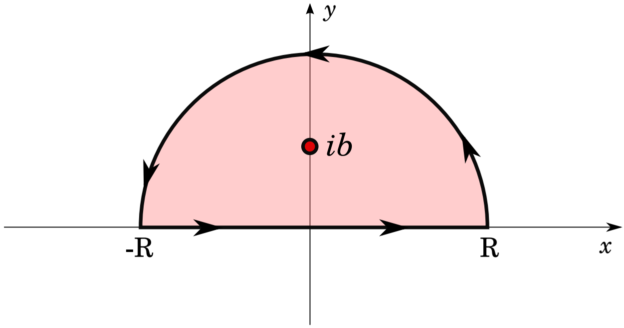
Пример 8.4. Найдём интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\, dx}{x^2 + b^2},$$

параметры $a, b > 0$.

Решение. 1) Рассмотрим замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и верхней полуокружности

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}.$$



2) Имеем

$$\oint\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} = \int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} + \int\limits_{[-R,R]} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2}.$$

Первый интеграл

$$\int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} \to 0 \qquad \text{при } R \to \infty,$$

по лемме Жордана 8.3.

Второй интеграл

$$\int\limits_{[-R,R]} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+b^2} \qquad \text{при } R \to \infty.$$

3) Функция $\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ имеет полюс первого порядка в точке ib. Тогда по основной теореме теории вычетов 6.2

$$\oint\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{2\pi i e^{ia(ib)}}{2(ib)}.$$

4) Таким образом, искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

△

Задача 24. *Доказать, что утверждение леммы Жордана останется верным если* $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| > R_0 > 0\}$ *заменить на* $S_a = \{\operatorname{Im} z \geq a,\ |z| > R_0 > 0\}$, *а* $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| = R\}$ *на* $C_{R,a} = \{\operatorname{Im} z \geq a,\ |z| = R\}$, *где* $a < 0$.

Задача 25. *Доказать, что утверждение леммы Жордана останется верным если* $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| > R_0 > 0\}$ *заменить на* $S_b = \{\operatorname{Re} z \leq b,\ |z| > R_0 > 0\}$, *а* $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| = R\}$ *на* $C_{R,b} = \{\operatorname{Re} z \leq a,\ |z| = R\}$, *где* $b > 0$.

Задача 26. *Будет ли утверждение леммы Жордана верным если вместо* C_R *рассматривать окружность целиком? Ответ обосновать.*

8.1.2 Вывод общей формулы

Теперь мы можем получить формулу для вычисления интеграла Фурье (8.1) при $\alpha > 0$. Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{|z| = R, \quad z \geq 0\}$. Выберем такое значение $0 < R < \infty$, чтобы все конечные особые точки функции $R(z)$ лежали в круге $|z| < R$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} e^{i\alpha x}\, R(x)\, dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z}\, R(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ z_k>0}} \left(e^{i\alpha z}\, R(z)\right). \tag{8.2}$$

Для сходимости интеграла (8.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $R(z)$ не имела полюсов на действительной оси и $R(x) \to 0$ при $x \to \infty$, т.е. $R(x) \sim Cx^{-k}$ при $x \to \infty$ и $k \geq 1$. Это означает, что $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$ и $k \geq 1$, т.е. $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |R(z)| \to 0$ при $R \to \infty$.

Согласно лемме Жордана при $R \to \infty$

$$\int\limits_{C_R} e^{i\alpha x} R(z) dz \to 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (8.2), получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ z_k > 0}} (e^{i\alpha z} R(z)).$$

Замечание. При $\alpha < 0$ заменяя контур Γ_R на симметричный ему относительно действительной оси контур Γ_R^-, получим формулу

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x)\, dx = -2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{\substack{z=z_k \\ z_k < 0}} (e^{i\alpha z} R(z)).$$

8.2 Рациональные интегралы

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \tag{8.3}$$

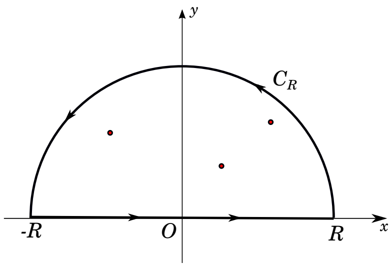
где $f(x)$ – рациональная функция.

Пусть $f(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и

$Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, то для сходимости интеграла (8.3) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m - n \geq 2$.

Поскольку рациональная функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ может иметь лишь конечное[13] количество полюсов, то можно выбрать такое значение $0 < R < \infty$, что все конечные особые точки функции $f(z)$ будут лежать в круге $|z| < R$.

Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.



По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{8.4}$$

Поскольку при $R \to \infty$

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)d\,z \right| \leq CR^{-2} 2\pi R \to 0,$$

[13]почему конечное?

то переходя к пределу в равенстве (8.4), получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\,x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов можно выбрать такой контур интегрирования, который содержит внутри себя всего одну особую точку.

Пример 8.5. Вычислим интеграл

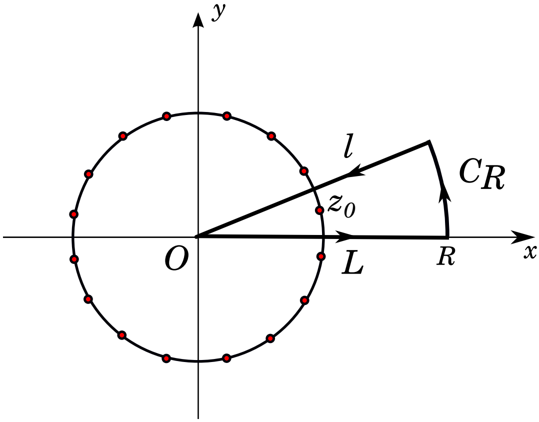
$$I_n = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \qquad n \geq 1.$$

Решение. Функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

имеет $2n$ особых точек.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R, состоящему из отрезка действительной оси $L = [0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi},\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n},\ \ 0 \leq r \leq R\}$.



Внутри контура Γ_R функция $f(x)$ имеет единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{l} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Поскольку $|f(z)| \sim \dfrac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \to \infty$, то

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz \ \to\ 0, \qquad (R \to 0).$$

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $L =$

$[0; R]$

$$\int_l f(z)\,dz = \int_R^0 f(re^{i\pi/n})\,e^{i\pi/n} dr = -e^{i\pi/n} \int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$I_n - e^{i\pi/n} I_n = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \int_0^\infty \frac{d\,x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin\frac{\pi}{2n}}.$$

$\triangle$