9 Вычисление интегралов - 3

9.1 Рациональные интегралы

Рассмотрим интеграл

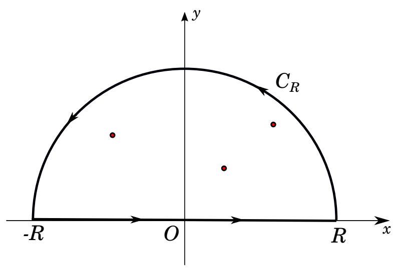
$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{9.1}$$

где $f(x)$ – рациональная функция.

Пусть $f(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, то для сходимости интеграла (9.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m - n \geq 2$.

Поскольку рациональная функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ может иметь лишь конечное[14] количество полюсов, то можно выбрать такое значение $0 < R < \infty$, что все конечные особые точки функции $f(z)$ будут лежать в круге $|z| < R$.

Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и верхней полуокружности $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$.



[14] почему конечное?

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{9.2}$$

Поскольку при $R \to \infty$

$$\left|\int_{C_R} f(z)d\,z\right| \le CR^{-2} 2\pi R \to 0,$$

то переходя к пределу в равенстве (9.2), получаем

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\,x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов можно выбрать такой контур интегрирования, который содержит внутри себя всего одну особую точку.

Пример 9.1. Вычислим интеграл

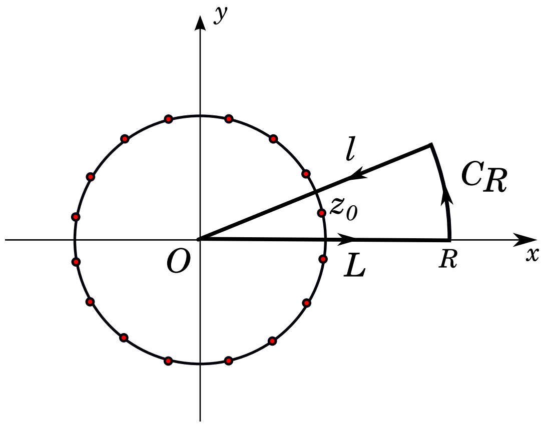
$$I_n \;=\; \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \qquad n \ge 1.$$

Решение. Функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

имеет $2n$ особых точек.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R, состоящему из отрезка действительной оси $L = [0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi},\;\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n},\;\; 0 \le r \le R\}$.



Внутри контура Γ_R функция $f(x)$ имеет единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{l} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Поскольку $|f(z)| \sim \dfrac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \to \infty$, то

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz \;\to\; 0, \qquad (R \to 0).$$

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $L =$

$[0;R]$

$$\int_l f(z)\,dz = \int_R^0 f(re^{i\pi/n})\,e^{i\pi/n}dr = -e^{i\pi/n}\int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$I_n - e^{i\pi/n}I_n = -\frac{\pi i}{n}e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \int_0^\infty \frac{d\,x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

$\triangle$

9.2 Комплексный логарифм

Прежде чем переходить в вычислению интегралов, содержащих нецелые степени и логарифмы, мы введём понятие комплексного логарифма и степенной функции.

Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда, определяя логарифм как обратную функцию к экспоненте, естественно считать, что $\ln(z) = \ln r + i\varphi$, или с учётом $2\pi i$-периодичности

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z. \tag{9.3}$$

Действительно $\exp(\ln z) = |z|e^{i\operatorname{Arg} z} = z$ для всех $z \ne= 0$. С другой стороны, равенство (9.3) определяет многозначную функцию, что не всегда удобно. Покажем, что в некоторых областях удаётся выделить аналитическую ветвь логарифма.

Теорема 9.2. *Пусть Ω — односвязная область такая, что $1 \in \Omega$, а $0 \notin \Omega$. Тогда в Ω можно выделить ветвь логарифма $\ln_\Omega(z)$, обладающую свойствами*
1) $\ln_\Omega(\cdot)$ аналитична в Ω;
2) $\exp(\ln_\Omega(z)) = z$ для всех $z \in \Omega$;
3) $\ln_\Omega(x) = \ln(x)$ для всех $1-\delta < x < 1+\delta$, для некоторого $\delta > 0$.

Доказательство. Построим $\ln_\Omega(z)$ как первообразную к функции $1/z$. Поскольку $0 \notin \Omega$, функция $1/z$ аналитична в Ω. Положим

$$\ln_\Omega(z) = \int\limits_{\widehat{1z}} \frac{dw}{w},$$

где $\widehat{1z}$ — кривая в Ω, соединяющая 1 и $z \in \Omega$.

1) Аналитичность $\ln_\Omega(z)$ практически очевидна[15].

2) Докажем, что $z\exp(-\ln_\Omega(z)) = 1$. Действительно,

$$(z\exp(-\ln_\Omega(z)))' = 0.$$

С другой стороны, $1 \cdot \exp(-\ln_\Omega(1)) = 1$.

3) Поскольку $1 \in \Omega$, найдётся $\delta > 0$ такое, что $[1-\delta, 1+\delta] \subset \Omega$. Тогда для $x \in [1-\delta, 1+\delta]$

$$\ln_\Omega(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x).$$

$\square$

Задача 27. *Показать, что для* $z \in \Omega$

$$\ln_\Omega(z) = \ln|z| + i\varphi, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z, \ |\varphi| < \pi.$$

Замечание 9.3. Для наших целей более удобной оказывается ветвь логарифма

$$\ln_-(z) = \int\limits_{\widehat{-1z}} \frac{dw}{w} + i\pi.$$

Эта функция аналитична в комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. В частности для $x > 0$ имеем $\ln_-(x+i0) = \ln(x)$ и $\ln_-(x-i0) = \ln(x) + 2\pi i$. И вообще,

$$\ln_-(z) = \ln|z| + i\arg z, \quad \arg z \in [0, 2\pi).$$

[15] см. также задачу 6

Для $a \in \mathbb{C}$ определим степенную функцию

$$z^a = \exp(a \cdot \operatorname{Ln} z).$$

Ветви степенной функции определяются соответствующими ветвями логарифма.

9.3 Интегралы со степенным весом

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\, dx, \tag{9.4}$$

где α — нецелое действительное число, а $f(x)$ — рациональная функция.

Без ограничения общности можно считать, что $f(0) \neq 0$ и $f(0) \neq \infty$, поскольку иначе $f(x) = x^m f_1(x)$, $f_1(0) \neq 0$, $f_1(0) \neq \infty$ и $x^{\alpha-1} f(x) = x^{\beta-1} f_1(x)$. Также при $z \to \infty$ выполняется оценка $f(z) \sim Cz^{-k}$, где k — целое число, так как $f(z)$ — рациональная функция.

Для сходимости интеграла необходимо:

1) чтобы функция $f(x)$ не имела полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $\alpha > 0$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim x^{\alpha-1} f(0)$, при $x \to +0$;

3) $\alpha < k$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim Cx^{\alpha-k-1}$, при $x \to +\infty$.

Продолжим подынтегральную функцию $f(x)$ в комплексную плоскость, при этом следует учесть, что функция $z^{\alpha-1}$ является многозначной. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $f(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| =$

$r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

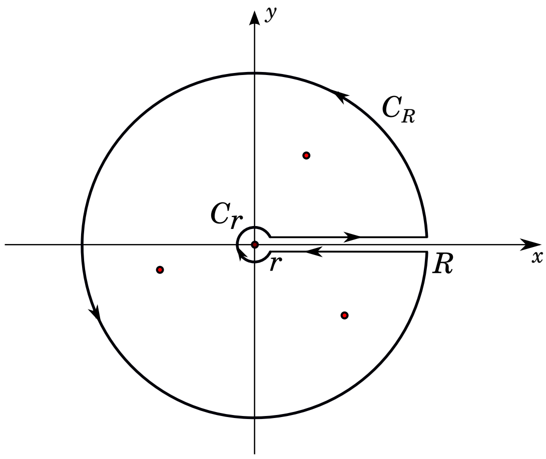


Рис. 12: Контур $\Gamma_{r,R}$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\, f(z)\, d\,z = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\, f(x)\, d\,x + e^{i2\pi\alpha} \int\limits_R^r x^{\alpha-1}\, f(x)\, d\,x +$$

$$+ \int\limits_{C_R} h(z)\, f(z)\, d\,z + \int\limits_{C_r^-} h(z)\, f(z)\, d\,z = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (h(z)\, f(z)). \quad (9.5)$$

Из условий 2) и 3) следует, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} h(z)\, f(z)\, d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)\,f(z)\,d\,z=0.$$

Переходя в равенстве (9.5) к пределу при $r\to 0$ и $R\to\infty$, получаем

$$I-e^{i2\pi\alpha}\cdot I=2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,f(z)).$$

Окончательно, имеем:

$$I=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,f(x)\,dx=\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,R(z)).$$

Замечание. Достаточно часто встречающиеся интегралы вида

$$\int\limits_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha f(x)\,d\,x$$

при помощи замены переменной $y=\dfrac{x}{1-x}$ сводятся к интегралам со степенным весом вида (9.4).

Пример 9.4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\,dx,\qquad -1<p<1.$$

Решение. Обозначим $I=\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$.

Рассмотрим замкнутую кривую $\Gamma_{R,r}$ как на рис. 12. Пусть $h(z)$ — однозначная ветвь функции z^p такая, что $h(x+i0)=x^p$ (в области, ограниченной кривой $\Gamma_{R,r}$, $h(z)=e^{p\ln|z|+i\arg z}$).

Особыми точками функции $\frac{h(z)}{1+z^2}$ внутри кривой являются $-i, i$ — полюса первого порядка. Найдём вычеты в этих точках

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{h(z)}{1+z^2} = \frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{h(z)}{1+z^2} = -\frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i}.$$

Устремляя $R \to \infty$ и $r \to 0$, приходим к уравнению

$$I - e^{pi2\pi} I = 2\pi i \left(\frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i} - \frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i} \right) = \pi (e^{ip\frac{\pi}{2}} - e^{ip\frac{3\pi}{2}}),$$

откуда находим

$$I = \frac{\pi}{2\cos(\pi p/2)}.$$

△

9.4 Интегралы с логарифмическим весом

Рассмотрим интеграл вида

$$I_m = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x)\, dx, \tag{9.6}$$

где α – действительное число, $m \in \mathbb{N}$, а $R(x)$ – рациональная функция.

Как и в предыдущем параграфе будем считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, и $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$.

Условия сходимости интеграла (9.6) оказываются такими же как и для интегралов со степенным весом в пункте 9.3:

1) функция $R(x)$ должна не иметь полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $0 < \alpha < k$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть

$h(x+i0) = x^{\alpha-1}$, и однозначную ветвь функции $\ln z$, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $\ln(x+i0) = \ln x$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$, $\ln(x-i0) = \ln x + 2\pi i$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $R(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза (см. рис. 12).

Задача 28. *Доказать, что функция* $h(z) = e^{\alpha(\ln|z|+i\arg z)}$ *является аналитической в области ограниченной кривой* $\Gamma_{r,R}$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\,(\ln x)^m R(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz + e^{i2\pi\alpha}\int\limits_R^r x^{\alpha-1}\,(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,(\ln z)^m R(z)). \quad (9.7)$$

Из условия 2) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0.$$

Переходя в равенстве (9.7) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx - e^{i2\pi\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,d\,x =$$
$$= 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,(\ln z)^m R(z)). \quad (9.8)$$

Возможны два различных случая.

1. **Число α является нецелым.** В этом случае множитель $e^{i2\pi\alpha}$ перед вторым интегралом в формуле (9.8) отличен от единицы. Наиболее простой вид формула (9.8) имеет при $m = 1$

$$(1 - e^{i2\pi\alpha})I_1 - 2\pi i \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,d\,x = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,\ln z\, R(z)). \quad (9.9)$$

Если ввести обозначение

$$J = \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,d\,x,$$

и выделить в формуле (9.9) действительную и мнимую части, то мы получим линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_1 I_1 + a_2 J = A \\ b_1 I_1 + b_2 J = B, \end{cases}$$

из которой можно найти значение интеграла I_1. Зная значение I_1, по формуле (9.8) можно последовательно найти значение интегралов $I_2,\ I_3,\ \ldots\ I_m$.

2. **Число α является целым.** В этом случае мы имеем интеграл вида

$$I_m = \int_0^\infty (\ln x)^m R(x)\,dx,$$

формула (9.8) принимает вид

$$\int_0^{\infty}(\ln x)^m R(x)\,dx - \int_0^{\infty}(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(\ln z)^m R(z) \tag{9.10}$$

и не позволяет найти интеграл I_m.

Для нахождения интеграла I_m в формуле (9.10) в качестве подынтегральной функции следует взять функцию $(\ln z)^{m+1}R(z)$.

Если рациональная функция функция $R(x)$ является чётной, то для вычисления интеграла I_m можно использовать контур $\gamma_{r,R}$, состоящий из отрезков действительной оси $[-R,-r]$, $[r,R]$ и верхних полуокружностей C_r^+, C_R^+.