10 Преобразование Лапласа

10.1 Функции ограниченного роста (оригинал)

Лоально интегрируемая функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется функцией ограниченного роста, если найдутся постоянные $M > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, что для всех $t \in [0, +\infty)$

$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

Точная нижняя граница всех таких a называется показателем роста функции f и обозначается через $a(f)$. В частности, если $b > a(f)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|e^{-bt}\,dt < \infty.$$

Пример 10.1. Проверить являются ли функции

$$H(x), \quad e^x, \quad \sin x$$

функциями ограниченного роста. Найти показатель роста.

10.2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Функция, называемая ***изображением***, $F(p)$ определена в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$. В свою очередь, функция $f(t)$ называется ***оригинал***.

Пример 10.2. Пусть $f(t) = H(t)$, тогда

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} H(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \frac{1}{p}.$$

То есть $\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{p}$. $\triangle$

Пример 10.3. Пусть $f(t) = t^n$, $t > 0$. Вычислить преобразование Лапласа $\{f(t)\}$.
Hint: сначала показать, что $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{p}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$.

10.3 Аналитичность изображения

Теперь нашей задачей будет исследование регулярности изображения $F(p)$.

Теорема 10.4. *Если функция $f(z,\zeta)$ аналитична по z в односвязной области D, кусочно-непрерывна по совокупности переменных и интеграл*

$$F(z) = \int\limits_C f(z,\zeta)\, d\zeta$$

сходится равномерно в области D, то функция $F(z)$ является аналитической в области D.

Доказательство. Пусть Γ — произвольный замкнутый кусочногладкий контур в D. Тогда по теореме Коши $\int\limits_\Gamma f(z,\zeta)\, dz = 0$. В силу равномерной сходимости можно переставить интегралы

$$\int\limits_\Gamma F(z)\, dz = \int\limits_\Gamma \int\limits_C f(z,\zeta)\, d\zeta\, dz = \int\limits_C \int\limits_\Gamma f(z,\zeta)\, dz\, d\zeta = 0.$$

По этому по теореме Морера $F(z)$ — аналитическая функция в D. $\square$

Теорема 10.5. *Изображение*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \tag{10.1}$$

является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > a(f)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} p > a(f)$. Тогда

$$|e^{-pt} f(t)| \le M e^{\frac{-\delta t}{2}},$$

где $\delta = a(f) - \operatorname{Re} p$. Поэтому интеграл (10.1) сходится равномерно в круге $B(p, \delta/2)$. По теореме 10.4 $F(p)$ аналитична круге $B(p, \delta/2)$. В силу произвольности выбора точки p получаем требуемое. □

Задача 29. *Исследовать множество равномерной сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{zt}\,dt.$$

11 Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}$, это такое преобразование, что

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(t))) = f(t).$$

Теорема 11.1. *Если 1)* $F(p)$ *аналитична в полуполосе* $\operatorname{Re} p > \alpha$,
2) $\max\limits_{|p|=R, \operatorname{Re} z > \alpha} |F(p)| \to 0$ *при* $R \to \infty$.

3) интеграл $\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\,dp$ *сходится абсолютно.*

Тогда $F(p)$ *является изображением функции*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$$

12 Теоремы разложения

Теорема 12.1 (Первая теорема разложения)**.** *Пусть $F(p)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки и её разложение в ряд Лорана имеет вид*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Тогда $F(p)$ служит изображением оригинала

$$f(t) = H(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n.$$

Теорема 12.2 (Вторая теорема разложения)**.** *Пусть $F(p)$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением полюсов. Причём в каждой ограниченной области содержится только конечное количество полюсов. Тогда если выполнены условия*

1) существует полуплоскость $\operatorname{Re} p > \alpha$ не содержащая полюсов $F(p)$,

2) найдётся последовательность окружностей $C_n = \{|z| = R_n\}$ так, что

$$R_n \to \infty \text{ и } \max_{C_n} |F(p)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

3) при любом $a > \alpha$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(a + is)|\, ds < \infty,$$

то $F(p)$ является изображением оригинала

$$f(t) = H(t) \sum_{p_k} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}.$$

Задача 30. *Пусть 1)* $F(p)$ *аналитична в полуполосе* $\mathrm{Re}\, p > \alpha$, *2)* $\max\limits_{|p|=R, \mathrm{Re}\, z>\alpha} |F(p)| \to 0$ *при* $R \to \infty$.

3) интеграл $\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)\, dp$ *сходится абсолютно.*

Определим[16]

$$f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{-pt}\, dp.$$

Проверить, что $f(t) = 0$ *при всех* $t < 0$.

[16]т.е. не предполагаем, что $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$