11 Принцип аргумента и теорема Руше

11.1 Логарифмическая производная

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области Ω. Функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ называется ***логарифмической производной*** функции $f(z)$ (действительно, $(\ln f)' = f'/f$).

Логарифмическая производная обладает следующим свойством

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f' \cdot g + f \cdot g'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}, \tag{11.1}$$

то есть логарифмическая производная произведения равняется сумме логарифмических производных.

Пусть теперь $f(z)$ — аналитическая в области Ω функция, имеющая конечное число нулей $z_1, \ldots, z_j$ кратности $n_1, \ldots, n_j$. По теореме 4.10 функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (z - z_j)^{n_j} \cdot g(z),$$

где $g(z)$ — аналитическая функция, не имеющая нулей в области Ω. Используя свойство (11.1), вычислим логарифмическую производную функции $f(z)$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \dots + \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{11.2}$$

В случае если f имеет конечное число полюсов $p_1, \ldots, p_k$ порядка $m_1, \ldots, m_k$, логарифмическая производная примет вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_1}{z - p_1} - \dots - \frac{m_k}{z - p_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{11.3}$$

где $g(z)$ — аналитическая функция, не имеющая полюсов в области Ω.

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области Ω, за исключением конечного числа полюсов, $\gamma \subset \Omega$ — замкнутая, кусочно-гладкая кривая без самопересечений и не проходящая через полюса функции f. Введём следующие обозначения:

$N(f, \gamma)$ — число нулей функции f внутри γ,
$P(f, \gamma)$ — число полюсов функции f внутри γ.

Теорема 11.1. *Пусть функция f и кривая γ удовлетворяют описанным выше условиям. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(f, \gamma) - P(f, \gamma).$$

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_j$ — нули кратности $n_1, \ldots, n_j$, $p_1, \ldots, p_k$ — полюса порядка $m_1, \ldots, m_k$ функции f, находящиеся внутри γ.

По (11.2) и (11.3) получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{n_j}{z - z_j} - \frac{m_1}{z - p_1} - \cdots - \frac{m_k}{z - p_k} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

где $g(z)$ — голоморфная функция, не имеющая нулей и полюсов. Тогда $\frac{g'(z)}{g(z)}$ — голоморфная функция и по теореме Коши 2.3

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0.$$

Используя равенство (2.4), выводим

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i(n_1 + \cdots + n_j - m_1 - \cdots - m_k),$$

что и завершает доказательство. □

Доказанное утверждение позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 11.2 (теорема Руше)**.** *Пусть f и g — голоморфные функции, γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений и $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in \gamma$. Тогда*

$$N(f + g, \gamma) = N(f, \gamma).$$

Доказательство. По теореме 11.1 имеем

$$N(f+g,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{(f+g)'}{f+g}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\left(f\left(1+\frac{g}{f}\right)\right)'}{f\left(1+\frac{g}{f}\right)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz =$$

$$= N(f,\gamma) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz.$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Заменим переменную $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz = \int\limits_{\gamma'} \frac{1}{w}\,dw.$$

Контур $\gamma' = 1 + \frac{g(\gamma)}{f(\gamma)}$ не обходи точку 0. Действительно, в силу того, что $|g(z)/f(z)| < 1$ при $z \in \gamma$ контур γ' целиком содержится внутри круга $B(1,1)$. Следовательно $1/w$ аналитична внутри и по теореме Коши 2.3 интеграл равен нулю.

В итоге получаем требуемое $N(f+g,\gamma) = N(f,\gamma)$. □

Пример 11.3. Сколько нулей в единичном круге имеет функция $h(z) = e^z - 4z^n + 1$, где $n = 1, 2, 3, \dots$?

Решение. Пусть $f(z) = -4z^n + 1$, а $g(z) = e^z$. На единичной окружности $|z| = 1$ имеем цепочку неравенств

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x \le e^1 < 3 = |-4z^n| - 1 \le |-4z^n + 1|.$$

То есть $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -4z^n + 1$ имеет n нулей в единичном круге (это $\sqrt[n]{1/4}$). Следовательно, по теореме Руше функция $h(z) = f(z) + g(z) = e^z - 4z^n + 1$ имеет n нулей в единичном круге. $\triangle$

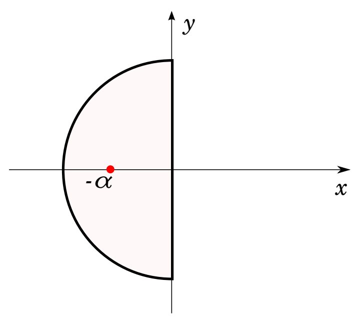
Пример 11.4. Сколько корней имеет уравнение

$$\alpha + z - e^z = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 1 < \alpha < +\infty$$

в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \le 0$?

Решение. Положим $f(z) = \alpha + z$, $g(z) = -e^z$. Заметим, что $f(z)$ имеет только один ноль: $z = -\alpha$.

В качестве замкнутой кривой выберем полуокружность C_R некоторого радиуса $R > \alpha + 1$, находящуюся в левой полуплоскости.



Для всех точек $z \in C_R$ имеет место следующая цепочка неравенств

$$|\alpha + z| \ge ||z| - \alpha| = R - \alpha > 1 \ge e^x = |-e^z|.$$

Следовательно, $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in C_R$, и по теореме Руше $f(z) + g(z)$ имеет столько же нулей, что и $f(z)$ внутри C_R. В силу произвольности R уравнение $\alpha + z - e^z = 0$ имеет один корень в левой полуплоскости. $\triangle$

С помощью теоремы Руше можно получить простое доказательство основной теоремы алгебры: *Всякий многочлен степени n имеет на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, где $a_n \neq 0$. Положим $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$.

Поскольку
$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty,$$
то существует такое значение R_0, что при всех $|z| > R_0$ выполняется неравенство $|f(z)| > |g(z)|$.

Согласно теореме Руше, это означает что во всяком круге $B(0, R)$ при $R > R_0$ (а следовательно и во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$) функции $f(z)$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое количество нулей с учетом их кратности.

Очевидно, что точка $z = 0$ является нулём порядка n для функции $f(z) = a_n z^n$. Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

Задача 31. *Почему многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей за пределами круга $B(0, R_0)$?*

Задача 32. *Пусть $f(z) \neq \mathrm{const}$ аналитическая функция. Доказать, что для любого открытого множества $E \subset \mathbb{C}$ образ $f(E)$ является открытым множеством.*