

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Физический факультет

Кафедра общей физики

**КУРС ЛЕКЦИЙ «ФИЗИКА 2»
МОДУЛИ (МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ТЕРМОДИНАМИКА,
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ)**

Новосибирск

2013

Кочеев А.А. Курс лекций Физика 2, (модули: Молекулярная физика, термодинамика, электричество и магнетизм), НГУ, Новосибирск, 2013. 86с.

Данное пособие является кратким изложением лекционного курса «Физика 2» читаемого студентам второго курса ФИТ в третьем семестре. В связи с изменением программы обучения по курсу «Физика», общий объем курса сократился до трех семестров. Это вызвало необходимость объединить в семестровом лекционном курсе разделы физики традиционно читаемые в разных семестрах. Так в данном курсе представлены разделы «Молекулярная физика», «Термодинамика», «Электричество и Магнетизм». Основная цель курса – дать представление об основных фундаментальных физических законах данных разделов физики, основных методах и подходах анализа физических явлений, показать методы решения основных задач, научить делать оценки, сформировать умение ориентироваться в широком круге явлений связанных с разделами курса. Учитывая важность разделов электродинамика, оптика и квантовая физика для будущей профессиональной деятельности выпускников факультета информационных технологий, был сокращен объем материала по молекулярной физике, термодинамике, с тем, что бы познакомить с основными закономерностями электростатики и магнитостатики. Это позволяет начинать следующий семестр с электродинамики.

Для более глубокого усвоения курса, приведены характерные задачи, часть из которых решены, остальные предлагаются для самостоятельного решения. Приведены так же задачи контрольных и заданий.

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ НГУ на 2009-2018гг.

Новосибирский государственный университет, 2013г.
Кочеев А.А. НГУ 2013

Оглавление

Предисловие	4
Глава 1. Молекулярная физика.....	5
§1. Введение	5
§2. Температура.....	6
§3. Эмпирические законы	8
§4. Введение в теорию вероятностей.....	8
§5. Равновесное давление газа на стенку.....	12
§6. Распределение Максвелла.....	13
§7. Столкновения молекул, средняя длина свободного пробега.....	18
§8. Поток молекул через малое отверстие.....	21
§9. Газ во внешнем поле, распределение Больцмана.....	22
§10. Распределение Максвелла-Больцмана.....	23
§11. Закон равнораспределения.....	25
§12. Процессы релаксации. Локальное равновесие.....	26
§13. Явления переноса.....	27
Глава 2. Термодинамика.....	34
§1. Введение	34
§2. Первый закон термодинамики.....	34
§3. Работа газа	35
§4. Теплоёмкость.....	36
§5. Термодинамические процессы	38
§6. Циклические процессы. К.п.д. тепловых машин.....	40
§7. Цикл Карно	43
§8. Тепловые насосы.....	44
§9. Давление насыщенного пара	45
§10. Второй закон термодинамики.....	47
§11. Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса	49
§12. Равновесие фаз. Диаграммы состояния	53
§13. Термодинамика излучения.....	55
§14. Примеры задач, заданий и контрольных по модулю «Молекулярная физика и термодинамика»	58
Задачи задания по модулю «Молекулярная физика и термодинамика».....	58
Задачи контрольной.....	59
Задачи для семинарских занятий и для самостоятельного решения.....	59
Глава 3 Электричество и магнетизм	64
§1. Введение. Системы единиц	64
§2. Электрическое поле в вакууме	64
§3. Теорема Гаусса.....	66
§4. Типичные задачи электростатики	67
§5. Проводники в электрическом поле	69
§6. Электрическое поле в диэлектриках	70
§7. Электрическая ёмкость. Конденсаторы.....	71
§8. Электрический ток.....	73
§9. Магнитное поле.....	74
§10. Методы расчета магнитных полей.....	76
§11. Магнитное поле в веществе	78
§12. Граничные условия для В и Н	79
§13. Электромагнитная индукция	81
§14. Энергия магнитного поля.....	82
§15. Уравнения Максвелла	83

Предисловие

При формировании данного учебного пособия, кроме трудностей связанных с объединением в одном лекционном курсе различных разделов физики, существенной проблемой являлось отсутствие у многих студентов ФИТ нормального школьного образования по физике. Это привело к необходимости, начиная изложения со школьных основ доводить объём и уровень знаний до традиционных уровней «Общей физики» инженерных специальностей. К сожалению, в последние годы, из-за существенного сокращения школьного объёма физики большинство первокурсников в начале занятий, в лучшем случае могут только «вспомнить формулу и подставить», умение творчески применять полученные знания, умение думать, анализировать появляются в лучшем случае к концу первого курса. В связи с этим теоретический материал сопровождается решением характерных задач, разбором явлений повседневной жизни связанных с разделами курса. Поскольку, глубокое понимание физических законов студентом происходит не только на лекциях и семинарах, а в основном путем самостоятельного решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения.

Глава 1. Молекулярная физика

§1. Введение

Уже в глубокой древности люди догадывались, что все окружающие нас тела состоят из мельчайших частиц – атомов. По современным представлениям атом представляет конструкцию из положительно заряженного ядра, вокруг которого движутся электроны. Заряд ядра в точности равен суммарному заряду электронов, так что атом в целом электрически нейтрален. Ядро в свою очередь состоит из положительно заряженных протонов и нейтронов. Атом водорода состоит из протона и электрона. Последовательное увеличение электронов и протонов в атомах приводит к изменению их свойств. Всего в природе насчитывается чуть более 100 различных атомов, если не учитывать изотопы, в ядре которых разное число нейтронов. Атомы способны объединяться в молекулы, при этом в этом объединении могут участвовать как несколько атомов, так и великое множество. Так в молекулах аминокислот, белков, ДНК число атомов может достигать до десятков и сотен тысяч. Таким образом, из сотни «кирпичиков» построено все многообразие окружающего нас мира. Человечество увлеченно придумывает и синтезирует все новые и новые молекулярные объединения. Однако первенство здесь заслуженно принадлежит природе, которая создала молекулярные объединения способные не только создавать подобные себе живые организмы, но и научила их думать.

Это объединение в молекулы, а также молекул в еще более сложные кластеры было бы невозможно при отсутствии взаимодействия атомов и молекул друг с другом. Это взаимодействие приводит еще и к тому, что одно и то же вещество в зависимости от внешних условий может находиться в различных агрегатных формах – газообразном, жидком, твердом. Если под влиянием внешних условий или под действием высокой температуры происходит значительная ионизация, такое агрегатное состояние называют плазмой. Величина взаимодействия уменьшается с увеличением расстояния между частицами, в модели, так называемого идеального газа этим взаимодействием пренебрегают. Размеры атомов и простых молекул достаточно малы и составляют несколько ангстрем. Один ангстрем $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$. Так атом аргона Ar имеет размер около $2,99 \text{ \AA}$, CO_2 – $3,45 \text{ \AA}$, H_2 – $2,2 \text{ \AA}$, H_2O – $2,27 \text{ \AA}$. В твердых и жидких телах расстояние между частицами соизмеримо с их размерами, в газообразном состоянии среднее расстояние между частицами значительно больше их размеров и они узнают о существовании других в процессе столкновений, когда при взаимном движении подходят на расстояния, при которых энергия взаимодействия становится соизмеримой с энергией их движения.

Таким образом, в газообразном состоянии кинетические энергии хаотического движения частиц существенно больше их энергии взаимодействия друг с другом. Это приводит к тому, что газ занимает весь предоставленный ему объем. В такой ситуации упрощается нахождение общих закономерностей описывающих изменение давления газа при изменении объема и его температуры. Модель газа, в котором расстояние между частицами значительно больше их размеров, а взаимодействие между ними происходит в результате двойных или еще более редких тройных столкновениях называют моделью идеального газа. Казалось бы, такое упрощение даст результаты сильно отличающиеся от реального поведения газа, однако при обычных условиях: температура около $20 \text{ }^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении поведение газов с очень хорошей точностью описываются соотношениями, полученными в рамках этой простой модели, называемой моделью идеального газа.

Прежде чем переходить к модели идеального газа напомним основные физические величины, которые нам понадобятся. Эта необходимость вызвана тем, что в молекулярной физике и термодинамике до сих пор используется множество внесистемных единиц, что затрудняет использование справочных данных при реальных расчетах. Объем обычно

обозначают знаком V и измеряют в m^3 , однако в обычной жизни, справочниках и литературе до сих пор используют литр, который соответствует объёму куба с ребром 10 см. Более сложная ситуация с давлением которое обозначается P . Атмосфера, техническая атмосфера, паскаль, бар, торр, мм.рт.ст., все это до сих пор используемые единицы давления. Начнем с СИ. В международной системе единиц давление измеряется в ньютонах на метр квадратный $\frac{H}{M^2}$, единица измерения получила название паскаль в честь известного французского

физика Паскаля, $1 \frac{H}{M^2} = 1 \text{ паскаль}$. Итальянский физик Торричелли поместив, стеклянную вертикальную трубку одним концом в сосуд с ртутью и откачивая её с верхнего конца, обнаружил, что ртуть поднимается до высоты примерно 760 мм. Он понял, что подъем столбика ртути прекращается, когда давление атмосферного воздуха уравнивается давлением ртути. Естественно, что атмосферное давление зависит от высоты над уровнем моря, погоды, влажности поэтому приняли считать нормальным атмосферным давлением 760 мм.рт.ст. которое получило название одна атмосфера. Поскольку плотность воды меньше, для такого равновесия, высота столба в аналогичном опыте будет больше и будет составлять около 10 м. Именно поэтому нельзя откачивать воду из скважины глубиной более 10 м, создавая разрежение в верхней части трубы. Зная плотность ртути несложно посчитать, что одна атмосфера составляет $1,01325 \cdot 10^5$ паскалей. В технике иногда используют давление, измеряемое в барах, $1 \text{ бар} = 10^5 \frac{H}{M^2}$. Используется также техническая атмосфера, которая равна давлению тела массой в 1 Кг на площадку в 1 см^2 при ускорении свободного падения равным $9,81 \text{ м/сек}^2$. Получается что одна техническая атмосфера = 0,981 бар, а одна нормальная атмосфера = 1,01325 бар. Часто используемая единица $1 \text{ мм.рт.ст} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ бар}$.
= 1 тор

§2. Температура

Температура. С одной стороны мы все с детства знакомы с этим понятием. Знаем, что более нагретое тело имеет большую температуру и при контакте двух тел более нагретое тело охлаждается, отдаёт тепло менее нагретому, пока их температуры не выравниваются. Давайте разберемся, почему так происходит, что такое температура и что такое ноль температуры.

Строгое изложение этих вопросов заняло бы не одну страницу, потребовало бы привлечения квантовой механики и квантовых статистик, что явно выходит за рамки настоящего курса. Пойдем более коротким, но позволяющим с небольшими неточностями разобраться в сути этих явлений, путем. Рассмотрим нагревание газа. При определенной температуре молекулы газа двигаются хаотически сталкиваясь друг с другом, в результате у одних из них скорость больше у других меньше, у всех разная кинетическая энергия

движения $K = \frac{m V_n^2}{2}$, такое движение называют тепловым движением. Поскольку нагревание связано с подводом энергии, это должно приводить к росту средней энергии

хаотического движения, которую мы определим как $\bar{K} = \frac{m \bar{V}^2}{2}$ т.е при одинаковых

молекулах средняя энергия хаотического движения определяется средним квадратом поступательной скорости. Если у нас смесь молекул с разной массой мы неизбежно приходим к выводу, что будут одинаковыми средние энергии хаотического движения, при этом среднеквадратичные скорости будут естественно разными. Таким образом, при прочих равных условиях средняя энергия хаотического движения молекул у более нагретого тела больше. При контакте двух тел, нагретых до разных температур, средние энергии хаотического движения молекул должны сравняться. Более горячее тело остынет, холодное

нагреется, пока температуры не сравняются. Отсюда мы делаем вывод, что температура определяется средней энергией теплового движения и должна иметь размерность энергии. Но атомы составляющие молекулу могут колебаться относительно равновесного состояния, а молекула в целом вращаться и с этими движениями тоже связана энергия. Поскольку эти движения также возбуждаются при столкновениях, их средняя энергия будет неизбежно равна средней энергии поступательного движения. Возможно, для такого выравнивания потребуется определенное время, но при приходе к равновесию это неизбежно произойдет. Такие же механизмы обмена энергией будут происходить и при контакте жидких и твердых тел.

Принято определять температуру как величину пропорциональную средней энергии.

В идеальных газах коэффициент пропорциональности оказывается равным $\frac{2}{3}$

соответственно $T_{\text{энерг}} = \frac{2}{3} \bar{K} = \frac{2}{3} \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{1}{3} m\bar{V}^2$ но такое определение температуры уводит

нас от привычных градусов и не очень удобно, так при 20°C средняя энергия в джоулях будет $\bar{K} \approx 4 \cdot 10^{-21}$ дж., очень маленькой величиной. Привычнее и удобнее пользоваться исторически появившейся раньше условной температурой градусом Цельсия. Цельсий предложил принять температуру замерзания воды за ноль градусов, а температуру её кипения за 100 градусов. Однако выбранный таким образом 0 температурной шкалы не соответствует нашему предположению, что температура определяется средней энергией теплового движения. Опыт показывает, что и при температурах ниже выбранного таким образом 0 тепловое движение не прекращается, это происходит при температурах намного меньших, при $-273,15^{\circ}\text{C}$. (заметим, что квантовые движения при этом не прекращаются). Именно эту температуру приняли за 0, а величину одного градуса оставили прежней, и назвали определенную так температуру абсолютной, а соответствующую температурную шкалу – шкалой Кельвина, который её предложил. Но если температуру измерять в градусах, а не джоулях появится коэффициент связывающий градус с энергией, он называется постоянной Больцмана, обозначается $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}}$. Пользуясь этим легко

получить, что средней энергии в 1 эв соответствует температура примерно 11 600 градусов, попробуйте рассчитать это сами.

Таким образом $kT = \frac{1}{3} m\bar{V}^2$, определенную так температуру называют абсолютной.

«0» этой температуры соответствует прекращению теплового движения. Шкалу этой температуры отсчитывают от этого нуля и называют температурной шкалой Кельвина, соответствующий градус – градусом Кельвина и обозначают $^{\circ}\text{K}$, в отличие от градуса Цельсия, обозначаемого $^{\circ}\text{C}$.

Еще одной величиной, которая нам потребуется, является моль. Модем вещества называют количество вещества, содержащее столько частиц, сколько атомов содержится в 12 граммах изотопа углерода C^{12} . Это число молекул называют числом Авогадро, которое равно $6,022 \cdot 10^{23}$ столько же атомов будет содержаться в 1 грамме атомарного водорода H или молекул в двух гаммах молекулярного водорода H_2 или частиц в определенном количестве любого другого вещества, если мы возьмем его количество в граммах численно равное его атомарному или молекулярному весу. Так моль молекулярного кислорода O_2^{16} содержится в 32 граммах, моль воды H_2O в 18 граммах и.т.д. Число молей обозначают значком - ν

§3. Эмпирические законы

Давление, объём, температура и количество газа должны находится в функциональной связи друг с другом. Исследователями было установлено несколько важных соотношений.

Закон Бойля-Мариотта. При наблюдении поведения газов при обычных условиях было установлено, что произведение объёма данной массы газа на давление зависит только от температуры и пропорционально ей, т.е. $PV = \text{const}$, при постоянной температуре T . Это утверждение является сутью закона Бойля-Мариотта.

Уравнение Клапейрона. Для одного моля газа было получено, что $PV = RT$, где $R = 8,31434$ Дж/К*моль. Для ν молей соответственно получено $PV = \nu RT$, это соотношение обычно называют уравнением **Клапейрона**. Из этого уравнения следует, что при нормальных условиях $P = 1,01325 \cdot 10^5$ паскаль и температуре 0°C объём одного моля идеального газа составит $2243,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ т.е. примерно 22,4 литра.

Закон Дальтона. Дальтон эмпирически установил, что если в сосуде находится смесь нескольких различных газов при одинаковой температуре то их результирующее давление будет суммой их парциальных давлений $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \nu_1 RT + \nu_2 RT + \nu_3 RT \dots$. Здесь P_n давление n газа, а $\nu_1 - \nu_3$ и т.д. соответствующее число молей.

Закон Гей-Люссака. При увеличении температуры увеличивается объём и давление. Если выразить температуру в градусах Цельсия через градусы Кельвина мы получим $t = T - 273,15^\circ\text{C}$, пользуясь этим мы можем записать уравнение Клапейрона в виде $PV = P_0V_0(1 + \alpha t)$. Здесь P_0V_0 давление и объём при 0°C , а PV при температуре $t^\circ\text{C}$. При постоянном давлении это переходит в $V = V_0(1 + \alpha t)$, а при постоянном объёме в $P = P_0(1 + \alpha t)$. Таким образом, мы получим, что относительное изменение объёма при постоянном давлении и изменении температуры и относительное изменение давления при постоянном объёме при изменении температуры $\frac{\Delta P}{P_0 \Delta t} = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} = \alpha = \frac{1}{273,15}^\circ\text{C}^{-1}$ одинаковы. То что

коэффициент α одинаков для всех идеальных газов называется законом Гей-Люссака.

Хотя эти законы точно выполняются для идеальных газов, их использование для реальных газов при не очень больших давлениях, чаще всего даёт вполне приемлемую точность. Уравнение **Клапейрона** можно записать и в таком виде $P = nkT$, здесь n объёмная концентрация молекул т.е. число штук в единице объёма, k постоянная Больцмана, T абсолютная температура. Действительно записав уравнение Клапейрона в виде $P = \frac{\nu RT}{V}$, а

затем умножив и поделив правую часть на число Авогадро N мы получим $P = \frac{\nu NRT}{VN} =$

$\frac{\nu N}{V} * \frac{R}{N} * T$, первый член будет числом частиц в единице объёма, второй член численно

равен $1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}}$ т.е. равен постоянной Больцмана, соответственно мы получим

уравнение **Клапейрона** в виде $P = nkT$

§4. Введение в теорию вероятностей

Оказывается эти закономерности поведения идеального газа можно получить пользуясь законами классической механики и элементарными сведениями из теории

вероятностей. Считая, что классическую механику вы ещё помните, сделаем небольшой экскурс в теорию вероятностей. Эта наука, как это часто бывало в истории, создавалась физиками, затем, в 20 годах прошлого века за неё принялись математики навели строгости, все доказали, только при этом исчезло само понятие вероятности, зато появилось «математическое ожидание». Для сокращения изложения воспользуемся основами, которые заложили физики, слегка поступившись строгостью и точностью. Будем использовать подход, который существовал примерно до середины 20 годов, прошлого столетия, в котором вероятность связана с её конкретной интерпретацией.

Событиями будем называть явления, которые могут произойти или не произойти. Если в данном опыте событие обязательно происходит, его называют достоверным, если оно не может произойти в любом случае, его называют невозможным

В случае если событие может произойти или не произойти его называют случайным. Если в коробке положено n разноцветных шаров, то достать при первой же попытке, хоть какой либо шар событие достоверное, а достать кубик – невозможное, там их просто нет. Назовем вероятностью события ожидаемую меру его появления, т.е. : отношение опытов, в котором это событие произошло к общему количеству опытов. Подбросим вращающуюся монетку, при её абсолютной симметрии, при большом количестве подбрасываний следует ожидать, что в половине случаев будет «орёл» в половине «решка». Действительно всего равновероятных случая два или «орёл» или «решка», а событие выпадения «орла» одно из равновероятных. Соответственно вероятность выпадения «орла» $\frac{1}{2}$. Какова вероятность

выпадения «орла» дважды подряд. Для сокращения обозначим «орёл» - 1, а «решку» - 0 Тогда при двух бросаниях возможны случаи 11, 10, 01, 00 всего четыре, других нет, благоприятным является первый вариант, когда дважды подряд появляется «орёл». Таким образом вероятность выпадения «орла» дважды подряд $\frac{1}{4}$, а вероятность выпадения хотя бы одного «орла» при двух бросаниях будет $\frac{3}{4}$. Можете сами оценить вероятность

выпадения орла трижды подряд при трех бросаниях (получим $\frac{1}{8}$) Пусть в в коробке находится 35 красных, 40 зелёных и 25 белых шаров, всего 100. Тогда вероятность вынуть красный шар $\frac{35}{100}$, белый шар $\frac{1}{4}$, зелёный $\frac{4}{10}$. Естественно, что если мы 100 раз вытащим шар, затем положим обратно перемешаем и снова вытащим мы получим результаты близкие к указанным выше, но отличающиеся. Лишь при достаточно большом числе испытаний получаемые результаты будут стремиться к указанным выше.

Суммой событий А и Б, мы назовем событие состоящее в появлении или А или Б и обозначим А + Б. Соответствующая вероятность будет $P(A + B) = P(A) + P(B)$ т.е. вероятность вытащить при первой попытке цветной шар будет $\frac{35}{100} + \frac{4}{10} = 0,75$.

Произведением событий А и Б назовем событие, состоящее в появлении и А и Б. Если события не зависимы, т.е. вероятность появления Б не зависит от появления А то соответствующая вероятность будет обозначаться $P(AB) = P(A)*P(B)$. Понятно, что максимальная вероятность равна 1, а вероятность невозможного события 0.

Рассмотрим вероятность обнаружения студента ФИТ с ростом лежащем в некотором диапазоне от h до $h + dh$. В приведенной ниже таблице 1 указан с точностью до сантиметра рост всех студентов ФИТ посетивших первую лекцию по молекулярной физике.

Таблица 1

Рост студентов 2 курс ФИТ (см)					
150	167	175	180	184	187
160	167	176	180	184	187
160	167	176	180	184	188
162	169	177	181	185	188
162	169	177	181	185	189
163	169	177	181	186	190
164	171	177	182	186	
165	172	179	182	187	
166	173	179	182	187	
166	174	180	183	187	

Зададим вопрос, чему равен средний рост студента ФИТ. Если бы студентов было только два, мы должны были к росту меньшего прибавить половинку разности их роста.

Нетрудно убедиться, что это даст $\bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2}$. Чертой над выражением мы будем в

дальнейшем обозначать усреднение. Несложное обобщение на случай, когда студентов n ,

даст $\bar{h} = \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n}$. Но к этой задаче можно подойти и по другому.

Давайте спросим с какой вероятностью можно обнаружить студента с ростом от 169см до 170см. Чтобы ответить на этот вопрос разобьём студентов на группы через один см. Например в 150-151 см. отнесем всех студентов у которых рост ровно 150см но меньше 151см. и так далее пока не будут учтены все студенты. Предположим, что в первой группе оказалось n_1 студентов, во второй n_2 студента и т.д. Тогда полное число студентов будет очевидно равно $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots$. Назовем вероятностью W встретить студента из

первой группы отношение $W = \frac{n_1}{N}$ аналогично и для группы с ростом от 169см до 170см.

Логика наших рассуждений проста, мы назвали вероятностью отношение числа благоприятных случаев о общему числу случаев. Важно только, чтобы эти встречи были совершенно случайны. Бросая монетку и предполагая её симметрию, мы получили вероятность выпадения «орла» равной $\frac{1}{2}$. Т.к. равновозможных случаев два – или орел или решка, а благоприятный один

Вернёмся к нашей задаче определения среднего роста и вероятности обнаружения студента с определённым ростом. Пользуясь нашей таблицей разобьём всех студентов на группы. В диапазон 160-163 см. отнесем всех студентов у которых рост начинается со 160см но меньше 163см. , будем считать что у них у всех рост 161,5 см. и так далее пока не будут учтены все студенты. Результат представлен на гистограмме 1. Полное число студентов будет очевидно равно $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots$ В этом случае можно записать средний рост как

$\bar{h} = \frac{n_1 h_1 + n_2 h_2 + \dots + n_n h_n}{N}$ где N есть сумма всех студентов или $\bar{h} = \frac{\sum_j n_j h_j}{\sum_j n_j}$ здесь n_j число

студентов в j группе, а h_j их рост. Учтя, что $\frac{n_j}{N} = W_j$ вероятности обнаружить студента j группы мы получим $\bar{h} = \sum_1^N h_j W_j$, понятно что $\sum_1^N W_j = 1$, а вероятность обнаружить студента короче самого короткого или выше самого высокого будет равна 0, нет в нашей выборке таких студентов. Виден двойной максимум, понятно, что первый максимум определяют девушки, второй юноши.

При достаточно большом числе студентов, говорят достаточно большой выборке, можно уменьшить интервалы скажем с 1 см до 1мм, наша гистограмма будет не такой ребристой, а в пределе вершины столбиков опишут плавную кривую которую называют функцией распределения $f(h)$. Не сложно сообразить, что вероятность обнаружить студента в диапазоне высот от h до $h+dh$, будет определяться отношением «площади» столбика $f(h)dh$ к площади Z под кривой $f(h)$, которую мы найдем проинтегрировав $\int_0^{\infty} f(h)dh = Z$.

Пределы интегрирования мы выбрали 0 и ∞ так, как вероятность обнаружить студента короче самого короткого или выше самого высокого будет равна 0, а интегрировать в этих пределах, как мы увидим ниже, проще.



Гистограмма 1

После этой операции, которую называют нормировкой $dW(h) = \frac{1}{Z} f(h)dh$, будет задавать вероятность обнаружения студента в диапазоне высот dh . Понятно, что если dh стремится к нулю, вероятность также стремится к нулю, так как обнаружить студента с точно заданным ростом невозможно. Средний рост определится интегралом $\bar{h} = \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} hf(h)dh$ при этом если нам понадобится вдруг средний квадрат роста студента $\bar{h}^2 =$

$\frac{1}{Z} \int_0^{\infty} h^2 f(h) dh$, заметим что он не будет равен $(\bar{h})^2$. Теперь мы можем вернуться к расчету давления газа на стенку.

§5. Равновесное давление газа на стенку

Прежде всего, отметим, что при динамическом равновесии, число молекул летящих к стенке должно быть равно числу летящих от неё, при этом средняя тепловая энергия тех и других должна быть одинакова. Равенство средних кинетических энергий означает равенство температур газа и стенки, а равенство потоков означает равенство потоков сорбции и десорбции, при равновесии. Разместим стенку в плоскости (y z), тогда в расчете давления на стенку будет играть роль только x компонента скорости частиц v_x (см. рисунок 1).

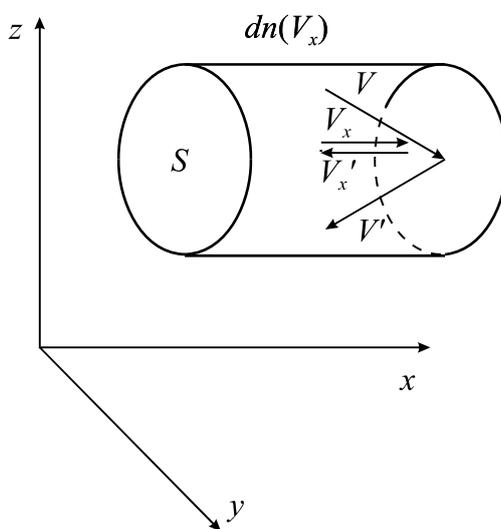


Рис. 1. Давление молекул на стенку

Поскольку $\frac{dp}{dt} = F$, если мы найдем импульс, передаваемый всеми молекулами стенке в единицу времени и поделим на площадь стенки, мы найдем давление молекул на стенку. Сделаем сначала маленькое замечание. Обилие физических величин не позволяет их обозначать разными буквами, поэтому одну и ту же букву используют часто для обозначения разных физических величин. Когда это использование относится к разным разделам физики, больших неудобств не возникает. Но ниже мы будем оперировать давлением и импульсом, объёмом и скоростью которые традиционно имеют одинаковые обозначения. Чтобы не возникло путаницы будем обозначать давление большой буквой P, а импульс маленькой p, объём большой буквой V, а скорость маленькой v. Молекула имеющая скорость v_x после столкновения со стенкой в силу наших предположений, будет иметь скорость $-v_x$ и передаст стенке импульс $\Delta p = 2mv_x$. Предположим что в небольшом диапазоне скоростей $v_{xi} + d v_x$ концентрация молекул $dn(v_{xi})$, тогда до стенки за время dt долетят молекулы из объема $v_{xi} * dt * S$, где S некоторая выбранная на стенке площадь. Полный импульс переданный этими молекулами за время dt будет $\Delta p_i = 2mv_{xi} v_{xi} dt S dn(v_{xi})$, а давление $P = \frac{F}{S}$ найдется интегрированием выражения $P = \int_0^{\infty} 2mv_{xi} v_{xi} dn(v_{xi}) =$

$\int_0^{\infty} 2mv_x^2 dn(v_x) = \int_0^{\infty} 2mv_x^2 n dW(v_x)$, последнее следует из того, что если полная концентрация

частиц n то отношение $\frac{dn(v_x)}{n} = dW(v_x)$ дает вероятность обнаружить частицу в диапазоне

$v_{xi} + d v_x$. Учтя что масса и концентрация - константы, направления x и $-x$ у нас равноправны т.е. сколько летит частиц в направлении x , столько же и в обратном $-x$ и распределение по скоростям тоже должно быть одинаковым мы получим

$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x^2 dW(v_x) = nm \overline{v_x^2}$, вспомните наш краткий экскурс в теорию вероятности, для

нахождения среднего значения необходимо интегрировать по всем возможным скоростям т.е. и положительным и отрицательным, учитывая, что частиц с очень большими скоростями очень мало мы не сильно ошибемся беря интеграл в бесконечных пределах. Беря половину интеграла, мы учитываем, что давление создают частицы, летящие к стенке, а их из симметрии ровно половина. В отсутствие внешних полей у нас нет выделенного направления, поэтому абсолютно аналогичные результаты мы получили бы и для других осей. По этим же причинам среднеквадратичные значения скоростей по разным осям должно быть одинаковым т.е. $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Если учесть что

$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ получается, что $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ среднеквадратичное значение скорости по

одной из координат равно одной трети среднеквадратичного значения полной скорости.

Учтя наше определение температуры через среднюю энергию хаотического движения:

$T_{\text{энерг}} = \frac{2}{3} \overline{K} = \frac{2}{3} \frac{m \overline{V^2}}{2} = \frac{1}{3} \frac{m \overline{V^2}}{3}$ а также, что для использования привычных градусов мы

получили $kT = \frac{1}{3} \frac{m \overline{V^2}}{3}$, k постоянная Больцмана, T температура в градусах Кельвина, мы

придем к уравнению состояния идеального газа $P = nkT$, кроме этого получается, что $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$, а $\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$ Мы получили эти важные результаты даже не зная вида функции

распределения молекул по скоростям. Отсюда понятно насколько важно знать вид функции распределения по скоростям т.е. $dW(\vec{v}) = g(\vec{v}) d\vec{v}$ которое задает вероятность найти молекулу не только с некоторой скоростью но и имеющей заданное направление. Эта, трудно решаемая, на первый взгляд задача, на самом деле требует некоторого терпения, умения логически мыслить, немного уметь интегрировать и дифференцировать. Это точно есть у дочитавшего до этого места студента и неплохо иметь будущему профессионалу программирования не любящему читать книжки. И так к делу.

§6. Распределение Максвелла

Из соображений симметрии распределение по разным осям координат должно в отсутствие внешних полей иметь одинаковый вид:

$dW(v_x) = f(v_x) dv_x$ $dW(v_y) = f(v_y) dv_y$ $dW(v_z) = f(v_z) dv_z$ а функции распределения $f(v)$ будут отличаться только индексами. С другой стороны вероятность обнаружить частицу с скоростью в диапазоне $v_x + dv_x$, не должна зависеть от того какую величину скорости по оси y и z она имеет. В этом случае вероятность обнаружить частицу имеющую полную скорость лежащую в диапазоне $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$,

$dW(\vec{v}) = dW(v_x) dW(v_y) dW(v_z)$ должна равняться произведению вероятностей или $g(\vec{v}) d\vec{v} = f(v_x) dv_x * f(v_y) dv_y * f(v_z) dv_z$ а так как $d\vec{v} = dv_x * dv_y * dv_z$ В итоге мы получим $g(\vec{v}) = f(v_x) *$

$f(v_y) * f(v_z)$. Прологарифмируем это выражение $\ln g(\vec{v}) = \ln f(v_x) + \ln f(v_y) + \ln f(v_z)$, а затем продифференцируем по v_x , в итоге получим:

$$\frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} \frac{dv}{dv_x} = \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x}, \text{ Найдем производную } \frac{dv}{dv_x} = \frac{d(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2})}{dv_x} = \frac{v_x}{v}$$

Аналогичные выражения мы получим дифференцируя по dv_y и dv_z , в итоге получим

$$\frac{1}{v} \frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x}$$

это может быть только если левая и правая часть равны некоторой константе, обозначим её -2α . Тогда

$$\frac{1}{v} \frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x} = -2\alpha \text{ или } \frac{1}{v_x} \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x} = -2\alpha.$$

Разделяя переменные получим $\frac{df(v_x)}{f(v_x)} = -2\alpha v_x dv_x$ и после интегрирования

$$\ln f(v_x) = -\alpha v_x^2 + \ln Z \text{ или } f(v_x) = \frac{1}{Z} e^{-\alpha v_x^2}. \text{ Аналогичные выражения мы получим для}$$

распределений по скоростям v_y и v_z , что естественно вытекает из предполагаемой нами симметрии пространства. Поскольку $g(\vec{v}) = f(v_x) * f(v_y) * f(v_z)$ для распределения по величине и направлению скорости мы получим $g(\vec{v}) = \frac{1}{Z^3} e^{-\alpha v^2}$. Чтобы закончить

нахождение функций распределения мы должны найти две константы Z и α . Чтобы найти Z вспомним условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} dW(v_x) = 1$ или $\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = 1$ или $Z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

этот так называемый интеграл Пуассона легко вычислить перейдя к полярным координатам, произведение аналогичных интегралов будет

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr = \pi. \text{ Чтобы найти константу } \alpha \text{ найдем средеквадратичное}$$

значение скорости $\overline{v_x^2}$ и подставим это значение в найденные ранее выражения для

$$\text{давления газа на стенку } P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x^2 dW(v_x) = nm \overline{v_x^2} = nkT.$$

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dW(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{1}{2\alpha}, \text{ сравнивая с предыдущим выражением получим для}$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT}, \text{ а } \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}.$$

В окончательном виде функция распределения по проекциям скорости, например v_x будет

$$dW(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \text{ распределения по скоростям } v_y \text{ и } v_z \text{ будут отличаться только}$$

сменой индексов. Распределение по величине и направлению скорости будет

$$dW(\vec{v}) = dW(v_x) dW(v_y) dW(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \text{ пользуясь полученными}$$

выражениями мы можем находить любые усреднения скорости, в том числе найти значение среднего квадрата скорости $\overline{v^2}$, который определяет среднюю кинетическую энергию

хаотического движения $\frac{mv^2}{2}$ которая связана с температурой. Для этого удобнее преобразовать распределение, что бы в нем фигурировала только величина скорости. Мы сделаем это чуть позже. Попробуем обойтись без интегрирования. Воспользуемся полученным выражением для $\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$ и так как $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, а $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$ получаем, что $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$. Таким образом мы получили формально введенное ранее выражение для температуры газа $kT = \frac{1}{3} m\overline{v^2}$.

При решении задач часто необходимо знать: средний модуль скорости, наиболее вероятную скорость, как будет выглядеть распределение только по величине скорости. Найдем распределения отвечающие за это. Если в какой-то момент времени определить величины и направления скоростей частиц в некотором объёме, а затем построить все вектора скоростей из общего начала, у нас получится сферически симметричный ёжик. «Иголочки» этого ёжика будут разной длины, но иголочки одинаковой длины будут распределены сферически симметрично. Вероятность обнаружить молекулу со скоростью лежащей между некоторой v_x и $v_x + dv_x$ будет в этой модели задаваться отношением числа векторов заканчивающихся между этими плоскостями к общему числу векторов. См рис 2.

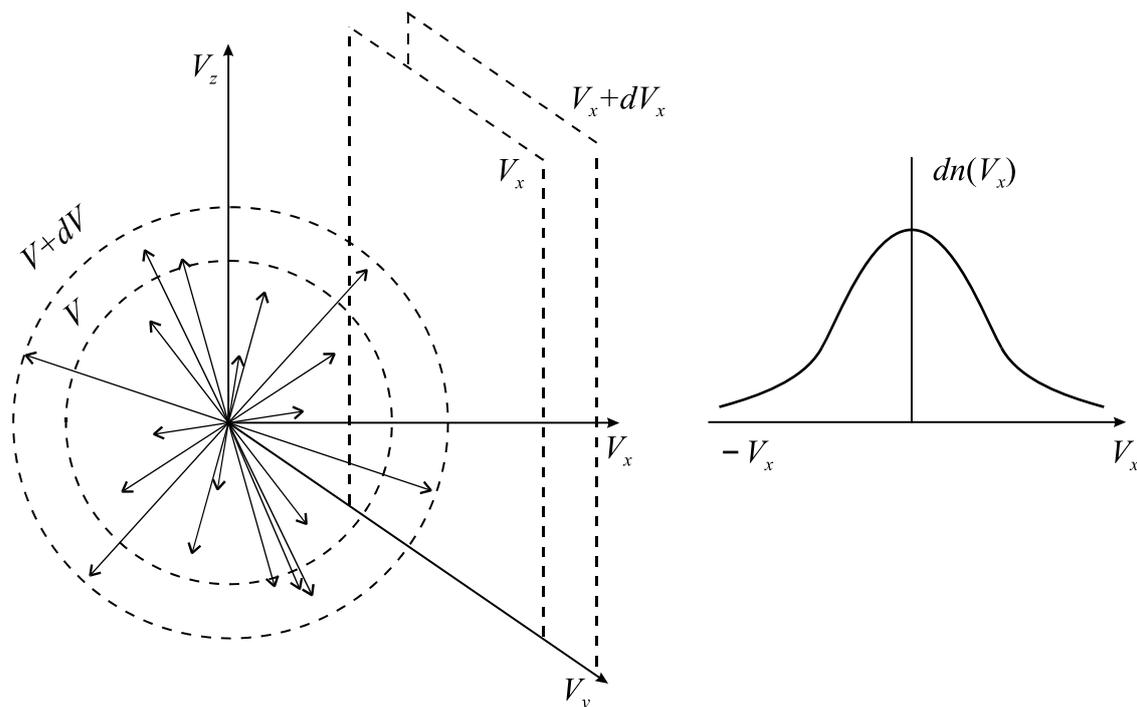


Рис. 2. Распределение молекул по скоростям V_x

Из рисунка также понятно почему плотность вероятности $f(v_x)$ имеет максимум при $v_x=0$. и, что вероятность найти частицу со скоростью в диапазоне v и $v + dv$, будет задаваться отношением числа векторов заканчивающихся между сферами v и $v + dv$ к общему числу векторов. Для нахождения распределений перейдем в сферическую систему координат. В этом случае элемент «объёма» $dv_x dv_y dv_z$ перейдет в $v \sin \theta v d\theta d\varphi = v^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Полученное ранее распределение по величине и направлению скорости в декартовой системе координат $dW(\vec{v}) = dW(v_x) dW(v_y) dW(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$,

перейдет в $dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$ в сферической системе координат.

Если нас интересует только величина скорости, безотносительно к её направлению, нужно проинтегрировать последнее выражение по всем возможным углам, и мы получим распределение только по величине скорости

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

Поскольку, в этом случае вероятность обнаружить частицу с нулевой скоростью и очень большой скоростью стремится к нулю, то в этом диапазоне есть наиболее вероятная

скорость $v_{нв}$. Максимум выражения $e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$ найдется из условия $\frac{d}{dv} (e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2) = 0$, или

$$2v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} - 2v^3 \frac{m}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0, \text{ отсюда } v_{нв} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Средняя скорость \bar{v} найдется интегрированием $\bar{v} = \int_0^{\infty} v dW(v)$ или

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv, \text{ отсюда } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Введя относительную скорость $u_{от} = \frac{v}{v_{нв}}$, как отношение скорости молекулы к наиболее вероятной получим распределение по абсолютной величине скорости в виде

$dW(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du$. Отсюда доля молекул имеющая скорость больше u будет

определяться интегралом $\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} u^2 e^{-u^2} du$. В таблице 2 приведены некоторые значения этого

интеграла. Из таблицы следует, что только около 20% молекул имеют скорость превышающую $1,5 v_{нв}$ и только 5% превышающую $2 v_{нв}$.

u	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	1,8	2
∫	0,994	0,96	0,87	0,73	0,57	0,41	0,21	0,09	0,046

На рис.3 приведено распределение вероятности обнаружения частицы в зависимости от величины относительной скорости $v_{от} = \frac{v}{v_{нв}}$. Из этого рисунка видно, что основная часть

молекул имеет скорости в диапазоне $0,5 < \frac{v}{v_{нв}} < 2$.

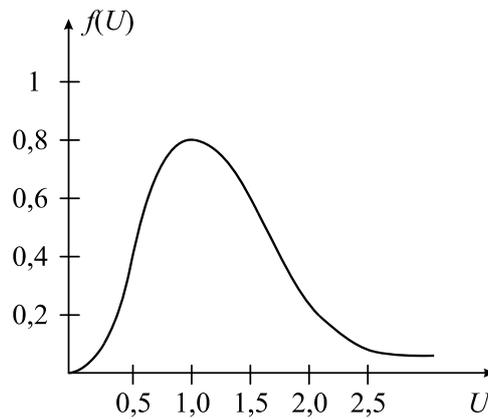


Рис. 3. Распределение Максвелла $f(U) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} U^2 e^{-U^2} dU$
в относительных скоростях $U = \frac{V}{V_{н.в.}}$

Средняя энергия хаотического движения определяется $\bar{K} = \frac{m\bar{v}^2}{2}$ среднеквадратичной скоростью \bar{v}^2 , которую мы уже находили, но её можно также найти интегрированием $\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 dW(v) = \int_0^\infty v^2 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$ в результате которого мы снова получим $\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}$, а для средней энергии хаотического движения $\bar{\varepsilon} = \bar{K} = \frac{3kT}{2}$ Подводя итог, приведем снова наиболее важные результаты:

распределение по проекции скорости v_x

$$dW(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$$

распределение по величине и направлению скорости в декартовой системе координат будет

$$dW(\vec{v}) = dW(v_x) dW(v_y) dW(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

в сферической системе координат будет

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$$

распределения по абсолютной величине скорости скорости будет

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

Из этих распределений мы получили что:

Наиболее вероятная скорость $v_{нв} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Средний модуль скорости $\bar{v} = \int_0^\infty v dW(v) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

Средняя проекция скорости на любую ось будет равна нулю. $\overline{v_x} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x dW(v_x)$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} v_x \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = 0.$

Средний модуль скорости $\overline{|v_x|}$ можно найти взяв этот интеграл в пределах от 0 до ∞ и удвоив его. $\overline{|v_x|} = 2 \int_0^{\infty} v_x \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$ отсюда получается что $\overline{|v_x|} = \frac{1}{2} \overline{v}$

Средний квадрат скорости $\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 dW(v) = \frac{3kT}{m},$

а среднеквадратичная скорость $v_{ср. кв.} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

Получается, что все эти скорости имеют один порядок и отличаются в пределах 20%

Средняя кинетическая энергия хаотического движения $\overline{K} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3kT}{2}$

В заключение оценим среднюю скорость молекул воздуха приняв их средний молекулярный вес 29 и подставив соответствующие данные в выражение для средней

скорости получим $\overline{v} = \int_0^{\infty} v dW(v) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 460$ м/сек, что близко к скорости звука и

наводит на мысль, что скорость распространения звуковых колебаний определяется средней скоростью молекул.

§7. Столкновения молекул, средняя длина свободного пробега

Для кинетики химических реакций важна частота столкновений молекул, т.к взаимодействие молекул начинается при достаточно близком приближении друг к другу. Для анализа процессов теплопроводности, вязкости, диффузии, течения газа по трубам важным параметром является длина свободного пробега т.е среднее расстояние, которое молекула преодолевает между столкновениями. Процесс столкновения также отличается от столкновения твердых шариков. При достаточно близком приближении друг к другу начинают деформироваться электронные оболочки молекул, на это уходит часть кинетической энергии, возникает сила отталкивания, также как при сжатии пружинки ударившимся о неё шариком. Шарик, сжимая пружинку останавливается, а затем пружинка разжимаясь отправляет его обратно с той же скоростью. А как же тогда химические реакции. Дело в том, что в некоторых случаях при дальнейшем приближении друг к другу молекулам становится выгодно объединить свои электронные оболочки, образовав новую молекулу. Так углерод (в первом приближении древесный уголь для шашлыков) не загорается сам собой в атмосфере кислорода, образуя молекулу углекислого газа CO_2 . Необходимо поджечь уголь нагрев его до примерно $400^{\circ}C$. Нагревание приводит к тому, что появляется достаточно много молекул способных преодолеть потенциальный барьер сил отталкивания, образование молекул CO_2 приводит к выделению энергии и при её достаточной величине реакция становится самоподдерживающейся.

Хотя размеры молекул малы, и их представление твердыми шариками будет большим упрощением, на рис. 4

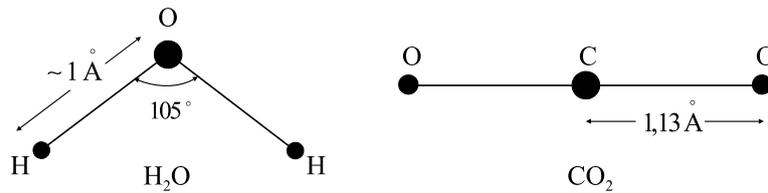


Рис. 4. Схематичное изображение молекул воды и углекислого газа

приведены конфигурации и размеры двух распространенных молекул воды H_2O и углекислого газа CO_2 . Очевидно, что такие образования трудно представить шариками. Поэтому размеры молекул, которые получаются из анализа явлений переноса, называют газокинетическими размерами и именно они чаще всего фигурируют в данном конспекте лекций и в справочниках.

Начнем оценку длины свободного пробега с такой простой модели, когда мы представляем молекулы шариками. Для начала оценим насколько расстояние между молекулами в газе при нормальных условиях больше их размеров. Большинство простых молекул имеют размеры в пределах

$2\text{-}4 \text{ \AA}$, т.е. $2\text{-}4 \cdot 10^{-10}$ м. Так молекулы составляющие воздух имеют размер O_2 $3,1 \cdot 10^{-10}$ м, а молекула азота $3,8 \cdot 10^{-10}$ м. Как указывалось выше один моль составляет $6,022 \cdot 10^{23}$ шт. и при нормальных условиях занимает объем 22,4 литра. Отсюда в 1 м^3 содержится около $26,9 \cdot 10^{23}$ шт. Учтя, что расстояние между молекулами $L = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$, мы получим что $L = 3 \cdot 10^{-9}$ м.

Таким образом при нормальных условиях расстояние между молекулами в примерно 10 раз больше их размеров. С учетом этого понятно, что длина пробега без столкновения – длина свободного пробега будет существенно больше межмолекулярных расстояний. Хаотически двигаясь молекулы тем не менее периодически сталкиваются друг с другом. Для начала оценим частоту столкновений молекул легкого примесного газа с массой молекул m_1 , имеющего концентрацию n_1 , с молекулами основного газа массой m_2 с концентрацией $n_2 \gg n_1$. В этом случае молекулы легкого газа в основном будут сталкиваться с молекулами

тяжелого газа, если ещё учесть что их средняя скорость много больше $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, а

$m_1 \ll m_2$, то получается, что легкая молекула двигается, периодически сталкиваясь с почти неподвижными тяжелыми молекулами. Столкновения будут происходить, когда центр легкой молекулы будет проходить мимо центра тяжелой молекулы на расстоянии меньшим их суммарного радиуса $r_1 + r_2$. В итоге легкая молекула за некоторое время Δt сталкиваясь вырежет в пространстве ломанную трубу сечением $\pi (r_1 + r_2)^2$ (которое мы назовём сечением столкновения σ_{12}) (рис.5), и длиной $\bar{v}_1 \cdot \Delta t$, объем этой трубы будет

$\pi (r_1 + r_2)^2 \cdot \bar{v}_1 \cdot \Delta t$. Умножив этот объем на концентрацию частиц второго типа n_2 мы получим число столкновений частицы первого типа, с почти неподвижными второго типа за время Δt , тогда число столкновений в единицу времени будет $\pi (r_1 + r_2)^2 \cdot \bar{v}_1 \cdot n_2$. или $\sigma_{12} \cdot \bar{v}_1 \cdot n_2$.

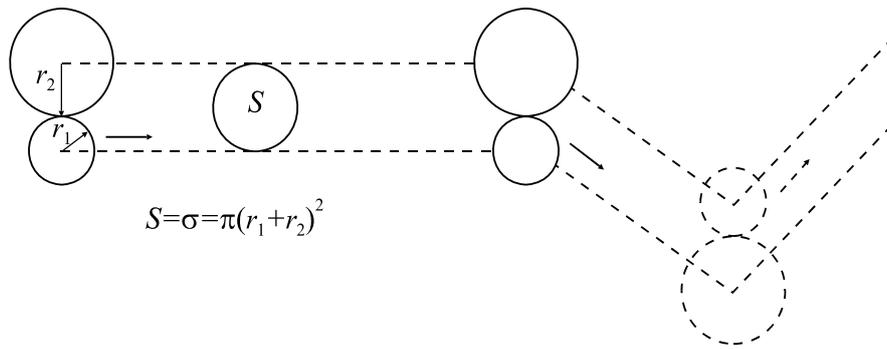


Рис. 5. Столкновения молекул

Соответственно частота столкновений частицы первого типа, с частицами второго $\nu_{12} = \sigma_{12} * \bar{v}_1 * n_2$, а среднее время между столкновениями будет обратная величина $\tau_{12} = \frac{1}{\nu_{12}}$.

Умножив это время движения между столкновениями на среднюю скорость движения, мы найдем среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda} = \bar{v}_1 \tau_{12} = \frac{\bar{v}_1}{\sigma_{12} * \nu_{12}} = \frac{1}{\sigma_{12} n_2}$ легкой частицы в

газе тяжелых частиц. Используем полученные выражения для нахождения длины пробега молекул в собственном газе. Примем, что масса молекул m , концентрация n , диаметр молекул d , тогда сечение столкновения будет $\sigma_{11} = \pi d^2$. Средняя скорость $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ будет

определяться массой и температурой газа. При подсчете числа столкновений в единицу времени будет входить теперь средняя относительная скорость, её подсчет несколько трудоёмкая задача, поэтому приведем легко запоминающийся результат этого подсчета. Оказывается в выражении для средней относительной скорости будет входить не масса частицы а её приведенная масса $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ т.е $\bar{v}_{omni} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}}$. Таким образом в случае

тождественных частиц $\bar{v}_{omni} = \sqrt{\frac{16kT}{\pi m}} = \sqrt{2} \bar{v}$ будет в $\sqrt{2}$ раз больше средней скорости.

С учетом этого мы получим, что в этом случае $\bar{\lambda} = \bar{v}_1 \tau_{11} = \frac{\bar{v}_1}{\sigma_{11} * \bar{v}_{omni} n_1} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_{11} n_1}$

Полученные результаты легко обобщить на случай смеси газов. В случае смеси двух газов с массой молекул m_1 и m_2 , концентрациями n_1 и n_2 действуя аналогично мы получим для средней длины пробега:

$$\text{молекул первого типа } \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{2} n_1 \sigma_{11} + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} n_2 \sigma_{12}},$$

$$\text{а для молекул второго типа } \bar{\lambda}_2 = \frac{1}{\sqrt{2} n_2 \sigma_{22} + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} n_1 \sigma_{21}},$$

понятно что $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

В заключение этой темы давайте оценим длину пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Поскольку воздух составляют в основном молекулы азота и молекулы кислорода, в расчете используем их средний молекулярный вес равный 29, т.е. 29 граммов воздуха содержат примерно $6 * 10^{23}$ молекул и занимают объем 22,4 литра. Примем газокинетический диаметр молекул равным примерно $3 \text{ \AA} = 3 * 10^{-10} \text{ м}$. Из этих данных

концентрация молекул $n = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 1000}{22,4} = 2,7 \cdot 10^{25} \frac{шт}{м^3}$, подставив эти данные в

выражение для длины пробега $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{11}n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \approx \frac{1}{1,4 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \cdot 2,7 \cdot 10^{25}} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Заметим, что это существенно больше межмолекулярного расстояния оцененного нами при тех же условиях в $3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$. Из полученных соотношений легко получить оценку длины пробега молекул воздуха при различных давлениях. $\lambda(см) = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{P_{мм.рт.ст.}}$

§8. Поток молекул через малое отверстие.

Полученные выше результаты позволяют найти поток молекул в вакуум через малое отверстие в стенке сосуда. Если размер отверстия много меньше длины пробега, то столкновений в отверстии не будет, а концентрация будет возмущена в области порядка размера отверстия. Подавляющая часть молекул будет прилетать к отверстию из невозмущённых областей. Если отверстие находится в стенке лежащей в плоскости z, y то попадание на стенку и соответственно в отверстие будет определяться молекулами имеющими не нулевую v_x компоненту скорости (рис 6).

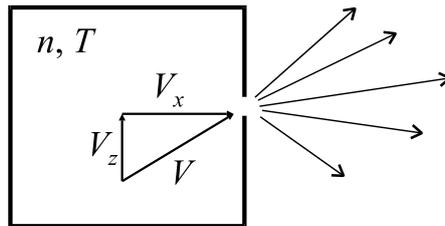


Рис. 6. Истечение газа через малое ($\lambda \gg d_{отверстия}$) в вакуум

Плотность потока молекул имеющих компоненту скорости от v_x до $v_x + dv_x$ будет $dj = \frac{dN(v_x)}{Sdt}$, где $dN(v_x) = v_x dn(v_x) Sdt$

Поделив и умножив последнее выражение на концентрацию частиц в объеме, получим:

$$dj = \frac{dN(v_x)}{Sdt} = n v_x dW(v_x), \text{ а } j = n \int_0^{\infty} v_x dW(v_x) = \frac{1}{2} n \overline{|v_x|}, \text{ поскольку } |v_x| = \frac{1}{2} \overline{v}$$

получаем что плотность потока частиц через малое отверстие $j = \frac{1}{4} n \overline{v} = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Отметим, что более быстрые молекулы чаще сталкиваются со стенкой и соответственно чаще вылетают из отверстия, поэтому средняя скорость и энергия в пучке будет больше чем в сосуде.

Их значения будут $\overline{v_j} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$, $\overline{K} = 2kT$, напомним, что в сосуде $\overline{K} = \frac{3}{2} kT$.

Соответственно будет больше и средний квадрат скорости $\overline{v_j^2} = \frac{4kT}{m}$

§9. Газ во внешнем поле, распределение Больцмана.

Возьмем цилиндрический сосуд и взвешивая его наполненный газом и откачанный, мы получим разность веса равную весу газа. Но эта разность может появиться только если концентрация молекул у верхнего торца и нижнего в поле тяжести разная, причем большая концентрация должна быть у нижнего торца. Действительно учитывая, что $P = nkT$, при постоянной температуре газа по высоте суммарный вес молекул

$\sum mg = (P_0 - P_h) \cdot S = (n_0 - n_h) kTS$ не равен нулю, только если концентрация молекул у нижнего торца выше. Отсюда следует, что в силовом поле происходит перераспределение концентрации молекул. Попробуем найти это распределение. Возьмем в сосуде наполненном молекулами массой m , имеющим постоянную по высоте температуру T , тонкий слой толщиной dh на некоторой высоте h , примем что в этом слое концентрация $n(h)$ (рис 7) тогда разность силы давления будет:

$(P(h+dh) - P(h))S = -dP \cdot S = mgn(h)dhS$ отсюда:

$$\frac{dP}{dh} = -mgn(h) \text{ утя, что } P = nkT \text{ получим } kT \frac{dn}{dh} = -mgn(h) \text{ разделяя переменные}$$

получим: $\frac{dn}{n} = -mgdh$ интегрируя имеем $\ln(n) = -\frac{mgh}{kT} + C$. Константу C найдем полагая, что при $h=0$ $n=n_0$ в итоге мы придем к соотношению:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \text{ которое переходит в } P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \text{ с учетом } P = nkT$$

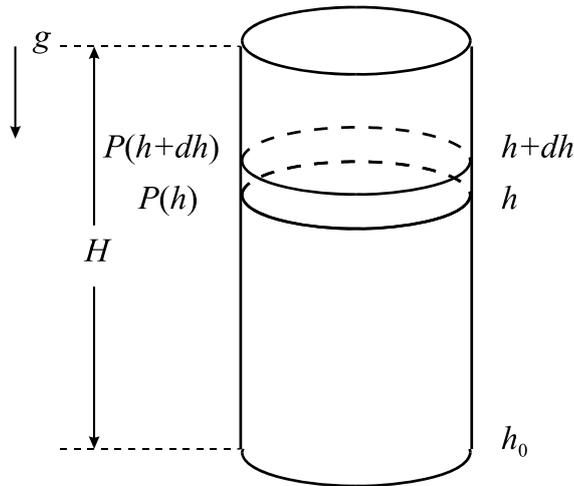


Рис. 7. К выводу зависимости концентрации молекул от высоты $n(h)$ в поле тяжести

Такая зависимость давления от высоты в поле тяжести Земли носит название барометрической формулы. Если нам известны n_0 или P_0 задача по нахождению концентрации и давления на разных высотах решена. Чему будут равны эти величины, если в поле тяжести, в цилиндрический сосуд высотой H , площадью основания S , поместили N частиц, массой m при температуре T ? Найдем n_0 . Предположим, что n_0 нам известна, тогда интегрируя по всему объёму сосуда мы получим N

$$N = \int n(x, y, z) dV = S \int_0^H n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} dh = \frac{S n_0 kT}{mg} (1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}) \text{ отсюда } n_0$$

$$n_0 = \frac{Nmg}{kTS(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}})}, \text{ а зависимость } n(h) = \frac{Nmg}{kTS(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}})} e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Силовое поле можно создать, заставив сосуд с газом вращаться вокруг своей оси с большой угловой скоростью ω . В этом случае концентрация будет уменьшаться от стенки сосуда к его оси. Если сосуд наполнен газообразной смесью изотопов, то соотношение концентраций изотопов на оси и у стенок сосуда будет разная. Таким образом в многочисленных последовательно соединённых центрифугах разделяют изотопы урана. Рассмотрим эту задачу подробнее. Поместим в сосуд высотой H , радиуса R частицы массой m . В количестве N штук и раскрутим его вокруг оси с угловой скоростью ω . В отсутствие вращения концентрация частиц постоянна по объёму $n(r,h)=\text{const} = \frac{N}{V} = \frac{N}{\pi R^2 H}$. При вращении на

частицы будет действовать сила $F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{mv^2}{r} = -\frac{m\omega^2 r^2}{r} = -m\omega^2 r$, отсюда

$U = -\int_0^r F(r)dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$, соответственно распределение частиц будет иметь вид

$n = n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}$ если n_0 известна- задача решена, если известно N , тогда поскольку вероятность обнаружить частицу в некоторой области пространства внутри сосуда будет:

$dW(r, \theta, \varphi) = \frac{dn(r, \theta, \varphi)}{N}$, тогда в цилиндрической системе координат

$$N = \int W(r, \theta, \varphi) dV = \int_0^H \int_0^R \int_0^{2\pi} n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} r dr dz d\varphi = n_0 \frac{2\pi H kT (e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1)}{m\omega^2}$$
 отсюда мы

найдем n_0 . В итоге мы получим распределение концентрации частиц в зависимости от радиуса r

$$n(r) = \frac{Nm\omega^2 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}}{\frac{m\omega^2 R^2}{2\pi H kT (e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1)}}$$
, зависимость концентрации частиц от их массы приводит

различному соотношению концентраций смеси частиц на оси цилиндра и у его стенки, что позволяет разделять изотопы. Эффект небольшой и приходится последовательно, во многих центрифугах накапливать изменение концентраций.

В заключение оценим массу Земной атмосферы. Исходя из того, что давление у поверхности Земли примерно 1 атмосфера, что примерно соответствует давлению тела массой в 1 кг на 1 квадратный сантиметр. Получается, что масса атмосферы Земли $M=1\text{кг}4\pi R^2_3=4*10^{17}\text{кг}$.

§10. Распределение Максвелла-Больцмана.

В случае однородного распределения концентрации частиц по объёму мы нашли распределение частиц по скоростям – распределение Максвелла:

$$dW(\vec{v})=dW(v_x) dW(v_y) dW(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

в сферической системе координат будет

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$$

распределения по абсолютной величине скорости скорости будет

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

заметим, что при выводе этих распределений мы не использовали вида взаимодействия молекул и эти распределения справедливы как в модели твердых шариков, так и в модели взаимодействующих молекул.

Похожие распределения мы получили в случае нахождения распределения концентрации частиц в силовом поле:

$$\text{В гравитационном поле Земли} \quad n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

$$\text{Во вращающемся сосуде} \quad n = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}$$

В терминах вероятности обнаружения частицы в кубике объемом dx, dy, dz в силовом поле с потенциалом $U(xyz)$ это можно записать как $dW(x,y,z) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(xyz)}{kT}} dx dy dz$. Такое распределение называется распределением Больцмана. Объединив эти распределения, получим вероятность обнаружения частицы в заданной части пространства, с заданной скоростью

$$dW(v,r) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(xyz)}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z \text{ которое называют распределением}$$

Максвелла-Больцмана.

Во всех этих распределениях присутствует экспонента, в показателе которой энергия частицы деленная на kT . В случае распределения Максвелла это кинетическая энергия, в распределениях Больцмана потенциальная. Собственно основная заслуга Больцмана заключается в том, что он понял, в распределении частиц обязательно будет присутствовать экспонента, в показателе которой энергия частицы деленная на kT . Не вдаваясь в подробности, укажем, что это присутствует даже в квантовых статистиках, когда энергия ε может принимать дискретный ряд значений - уровней. Для средней заселённости

i уровня получим, $\bar{N}_i = N_0 g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$. В формуле Планка для средней энергии гармонического осциллятора, который может принимать дискретные значения энергий $\varepsilon_i = (i + \frac{1}{2})h\nu$.

$$\text{Средняя энергия } \bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Заметим также, что пока kT меньше разности энергий между основным и первым возбужденным состоянием подавляющее число молекул находится в основном состоянии. Говорят, что эти степени свободы выморожены. Поэтому колебательные и вращательные степени свободы начинают проявляться при достаточно высокой температуре. Эти температуры естественно будут разными для различных молекул, а также будут зависеть от агрегатного состояния вещества – газ, твердое тело. Для поступательных степеней свободы молекул в газообразном состоянии эти эффекты проявляются при температурах близких к абсолютному нулю, поэтому для них справедлив классический подход выражающейся распределением Максвелла.

§11. Закон равнораспределения

Как мы уже получили, средняя энергия поступательного движения $\bar{\varepsilon} = \bar{K} = \frac{3kT}{2}$, учитывая независимость распределения по скоростям по различным осям

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \text{ а } \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2},$$

мы приходим к выводу, что на каждую поступательную степень свободы приходится энергия $\frac{kT}{2}$. Этот результат можно получить,

проводя усреднение по распределению молекул по скоростям. $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 dW(v) = \frac{3kT}{m}$ или

для средней кинетической энергии. $\bar{\varepsilon} = \bar{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \int_0^\infty v^2 dW(v) = \frac{3kT}{2}$. Заметим, что

средняя энергия не зависит от массы молекулы, т.е. молекулы в смеси газов будут иметь разные скорости, но такие, что их средние кинетические энергии $\bar{K}_i = \frac{m_i \overline{v_i^2}}{2}$ будут

одинаковы и равны $\frac{3kT}{2}$. Но если молекула состоит из нескольких атомов, появляется

энергия связанная с её вращением и колебаниями атомов относительно равновесного положения. С этими движениями также будет связана соответствующая энергия. Разберем ситуацию для случая двухатомной молекулы. Направим ось z вдоль линии соединяющей молекулы. Тогда момент инерции $I_z = 0$. а энергия связанная с вращениями по осям x и y

будет $\varepsilon_x = \frac{I_x \omega_x^2}{2}$ и $\varepsilon_y = \frac{I_y \omega_y^2}{2}$ согласно распределению Больцмана в экспоненте вместо

кинетической энергии поступательного движения $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ будет $e^{-\frac{I\omega^2}{2kT}}$ и для средней

энергии вращательного движения при усреднении мы получим опять по $\frac{kT}{2}$ каждую ось.

Для двухатомной молекулы $\frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT$, тоже самое для трехатомной линейной молекулы (молекула CO_2), в случае когда все три момента инерции не равны нулю (молекула воды H_2O), мы получим $\bar{\varepsilon} = \frac{3kT}{2}$, как для поступательных движений. Рис 4

При колебаниях в произвольной фазе колебаний энергия будет состоять из потенциальной энергии связанной с смещением молекул x относительно положения

равновесия и кинетической энергией их движения в этот момент. $\varepsilon = \frac{kx^2}{2} + \frac{p^2}{2m}$. **Учитывая**

эти два члена в энергии колебаний и аналогию с разобранными выше ситуациями получим, что на каждую колебательную степень свободы приходится по

$$\frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT$$

Квантовая природа молекулярных движений вносит коррективы в эту простую картину. Энергия может изменяться дискретными порциями – квантами. Поэтому когда температура мала – меньше первого уровня изменения энергии, соответствующая степень свободы не возбуждена и не вносит вклад в энергию хаотического движения. Поступательные степени свободы появляются при очень низких температурах, затем при повышении температуры, когда $kT \approx \Delta E_{sp}$ начинают возбуждаться вращательные степени

свободы, при дальнейшем повышении температуры, когда $kT \approx \Delta E_{\text{кол}}$, возбуждаются колебательные степени свободы. Соответственно теплоемкость газов будет увеличиваться с увеличением температуры, достигая максимума, когда возбуждены все степени свободы.

§12. Процессы релаксации. Локальное равновесие

Полученные результаты относятся к равновесному состоянию вещества, когда средняя энергия и концентрация, соответственно давление постоянна по объёму и не изменяется во времени. Такое состояние называется состоянием термодинамического равновесия. Учитывая хаотическое движение молекул, их число и энергия в некотором небольшом выделенном объёме будет то больше, то меньше их средних значений. Это явление называют флуктуацией. Величина флуктуации естественно будет зависеть от числа частиц в выделенном объёме. Так если в нашем объёме всего две частицы, они с равной вероятностью могут быть обнаружены в той или другой половине объёма. В итоге равновесное распределение, когда частицы распределены равномерно по объёму будет иметь вероятность $W = \frac{1}{2}$ (рис.8)

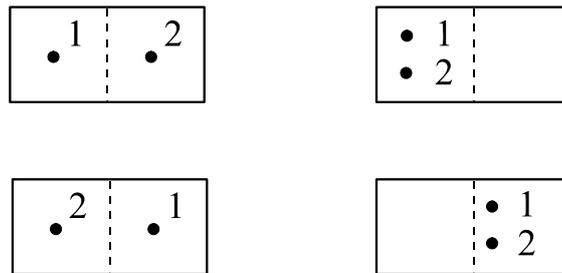


Рис. 8. Возможные случаи распределения двух молекул по половинкам объема

Для четырех частиц неравномерность распределения по объёму проявиться значительно меньше. Учитывая огромное количество частиц в термодинамических системах, напомним, что при нормальных условиях моль газа занимает около 22 литров и состоит из примерно $6 \cdot 10^{23}$ частиц, т.е. около $10^{19} \frac{шт}{см^3}$ флуктуации в реальных

термодинамических системах очень малы $\frac{\Delta n}{n} \ll 1$, $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \ll 1$.

Если в какой либо точке рассматриваемой системы мы изменим равновесное значение T , p или n начнется процесс выравнивания возмущенного параметра – так называемый процесс релаксации т.е приход системы к новым равновесным значениям и через некоторое характерное время τ , называемое временем релаксации система неизбежно придет к новому равновесному состоянию. Эта неизбежность связана с тем, что при заданной полной энергии системы, равновесное состояние имеет значительно более высокую вероятность. Время релаксации не очень чётко определённый параметр. Обычно имеют ввиду время, через которое неравновесный параметр отличается от равновесного значения на какую-то небольшую величину 1%, $\frac{1}{e}$ и т.д. Время релаксации для различных параметров меняется в широких пределах для выравнивания давления доли секунды, выравнивание концентрации примесных ароматических молекул з счет диффузии часы.

Локальное равновесие

Нагреем стержень с разных концов до различных температур. В различных частях стержня установятся разные температуры. В неравномерно нагретом теле изолированном от нагревателей неизбежно начнётся процесс выравнивания температуры – релаксация. И в том и в другом случае если мы выделим какой-то небольшой объем тела и теплоизолируем его, процесс изменения температуры в нём почти прекратится, и в нем будет оставаться температура, достигнутая на момент изоляции. Конечно, изменение температуры произойдет, но это изменение ΔT за время релаксации, будет очень мало, так что $\frac{\Delta T}{T_{\text{равовесн.}}} \ll 1$. В этом случае мы говорим о локально равновесном параметре, в данном

случае температуре. Во всех таких случаях когда изменение параметра системы происходит за времена значительно большие, чем время релаксации говорят, что идет квазиравновесный процесс. Квазиравновесный, потому, что при равновесии изменения параметров происходить не должно. Эти замечания нам понадобятся при анализе процессов связанных с возникновением тепловых потоков, анализа возникновения вязкости, процессов диффузии.

§13. Явления переноса

Теплопроводность. Эмпирически было установлено, что при наличии градиента температуры вдоль оси x возникает тепловой поток (поток энергии) плотность которого пропорциональна этому градиенту температуры $j = -\chi \frac{dT}{dx}$, в общем случае $j = -\chi \text{grad}T$, знак минус указывает что поток тепла направлен от более нагретой части к менее нагретой. Этот закон носит название закона передачи тепла Фурье. С хорошей точностью это выполняется для твердых и жидких тел. Уточнения этого закона для теплопроводности в газах мы сделаем ниже.. Плотность теплового потока j имеет размерность $\frac{дж}{сек * м^2}$ или $\frac{вт}{м^2}$. Коэффициент пропорциональности χ называют коэффициентом теплопроводности, размерность которого $\frac{вт}{м * град}$.

Найдем коэффициент теплопроводности для газа. Для этого рассмотрим модельную ситуацию когда между двумя параллельными стенками, нагретыми до температур T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$ находится газ. Стенки ортогональны оси x и поддерживаются при постоянных температурах. Согласно закону Ньютона появится тепловой поток $j_x = -\chi \frac{dT}{dx}$.

Выделим мысленно некоторую плоскость параллельную стенкам и рассмотрим поток молекул через неё с поверхностей двух вспомогательных плоскостей отстоящих от выделенной с обеих сторон на длину свободного пробега молекул. Для простоты примем, что в каждый момент времени вдоль каждой из трех осей движется треть частиц, соответственно вдоль положительного и отрицательного направления оси x будет двигаться $\frac{1}{6}$ часть молекул. Соответствующие потоки будут $\frac{1}{6} n_1 v_1$, в противоположном направлении будет поток $\frac{1}{6} n_2 v_2$. Средние энергии молекул вылетающих к нашей поверхности будут

соответственно $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{3kT_1}{2}$ и $\bar{\varepsilon}_2 = \frac{3kT_2}{2}$, Результирующая плотность потока энергии

(плотность теплового потока) будет $j = \frac{1}{6} n_1 v_1 \frac{3kT_2}{2} - \frac{1}{6} n_2 v_2 \frac{3kT_1}{2} = -\frac{1}{6} n \bar{v} \frac{3k}{2} \frac{dT}{dx}$ здесь

мы пренебрегли изменением концентрации частиц на длине пробега, взяв её среднее значение n , и считая изменение температуры на длине пробега небольшим использовали среднее значение скорости соответствующее температуре на нашей вспомогательной плоскости

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. В результате мы получим $j = -\frac{1}{3} n \bar{v} \lambda \frac{3}{2} k \frac{dT}{dx}$. Таким образом наша

оценка теплопроводности газа через его параметры дает $\chi = \frac{1}{3} n \bar{v} \lambda \frac{3}{2} k$. Где

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}}$ постоянная Больцмана. Умножив и поделив последнее выражение

на число Авогадро получим $\chi = \frac{1}{3} n \bar{v} \lambda \frac{c_v}{N_0}$. Где c_v теплоёмкость газа при постоянном

объёме. Получается, что теплопроводность газов не зависит от давления. Действительно

произведение $n \lambda = \frac{n}{n \sigma \sqrt{2}}$ не зависит от концентрации частиц, соответственно при заданной

температуре от давления. Получается, что мы зря откачиваем воздух из пространства между стенками термоса, теплопроводность воздуха не меняется. Это действительно так пока длина пробега молекул меньше расстояния между стенками. Когда длина пробега становится равна расстоянию между стенками, дальнейшая откачка приводит к уменьшению n , а длина пробега больше увеличиваться не может и произведение $n \lambda$ начинает уменьшаться линейно с давлением. (рис 9)

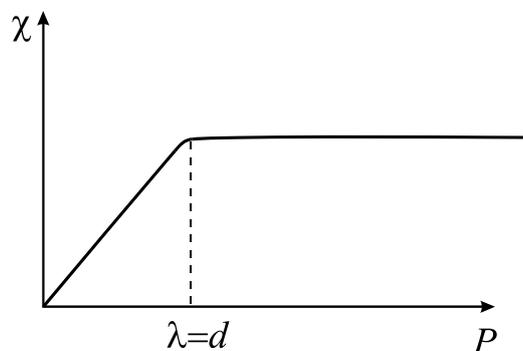


Рис. 9. Зависимость теплопроводности газа от давления $\chi(P)$ между двумя стенками, расположенными на расстоянии d

Для расстояния между стенками около одного сантиметра это произойдет при давлении примерно $5 \cdot 10^{-3}$ мм.рт.ст. но тепловой поток будет примерно таким же что и у не откачанного термоса. Получается, что для того чтобы в откачке был прок, нужно откачивать до давлений порядка $10^{-5} - 10^{-6}$ мм.рт.ст. Поэтому плохо откачанный термос будет остывать также быстро, что и не откачанный.

Полученные нами соотношения имеют в силу сделанных предположений приближенный характер, хотя и отражают основные закономерности. Прежде всего заметим что теплопроводность зависит от температуры газа и массы газа, поскольку в полученный нами коэффициент теплопроводности входит средняя скорость зависящая от

температуры и массы молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ Когда градиенты температуры не очень высоки,

т.е. $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$ этой зависимостью можно пренебречь взяв среднюю температуру между

стенками. Но если стенки имеют форму цилиндров или сферических поверхностей основной градиент температур будет у внутренней стенки и потребуется более точный расчет с использованием уравнения теплопроводности, что мы сделаем позже. В случае плотных газов в замкнутом объёме, между двумя вертикальными, нагретыми до разных температур поверхностями возникает конвекционный поток. У стенки с высокой температурой газ поднимается вверх из-за меньшей плотности, у холодной остывая, опускается вниз. Это приводит к циркуляции газа между стенками и к значительно более интенсивному теплообмену по сравнению с рассмотренным случаем. При низких давлениях конвекция не развивается, но поток от горячей стенки будет больше потока от холодной т.к. \bar{v} у горячей стенки выше. Это приведет к перераспределению концентраций, у горячей стенки концентрация будет ниже, чем у холодной так чтобы потоки молекул пропорциональные \bar{v} сравнялись.

Теплопроводность газов мала см таблицу 3, именно поэтому тепло сохраняют пуховики, пенопласт и прочие аналогичные утеплители. Тепло сохраняет газ, ворс пуховиков и ячейки пенопласта не дают развиваться конвекции. Зависимость теплопроводности от массы молекул приводит к тому, что теплопроводность аргона почти на порядок ниже теплопроводности водорода, однако от воздуха отличается в 1,5 раза, поэтому наполнение стеклопакетов пластиковых окон аргоном больше рекламный ход.

Таблица 3

Газ	H ₂	H ₂ O	N ₂	O ₂	CO ₂	Воздух	Ar
Теплопроводность $\frac{мвт}{м * град}$	168	16	24,3	24,4	23,2	24,1	16,2

Вязкость

Механизмы возникновения вязкости в газообразном и жидком состоянии сильно отличаются, но в обоих случаях, при возникновении градиента скорости в направлении ортогональном потоку (ось z) возникает тангенциальная сила, препятствующая развитию градиента скорости. Величина этой силы на единицу площади скользящих друг относительно друга слоёв пропорциональна градиенту скорости, коэффициент пропорциональности называют коэффициентом вязкости – закон Ньютона.

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{du}{dz}$$

Рассмотрим механизм возникновения вязкости в газах. В достаточно разреженных газах, когда длина свободного пробега значительно больше размеров молекул, их взаимодействие друг с другом осуществляется при столкновениях. Рассмотрим модельную ситуацию, когда относительно бесконечной плоскости движется параллельно ей вторая плоскость, расстояния z_0 , со скоростью U_0 , вдоль оси x. Пространство между плоскостями заполнено газом, возникнут потоки газа вдоль оси x, за счет взаимодействия молекул газа с плоскостями, скорость потока при $z = 0$, будет нулевой, при $z=z_0$ будет U_0 . Таким образом скорость направленного движения слоев газа будет нарастать от нижней к верхней плоскости. Рис.10

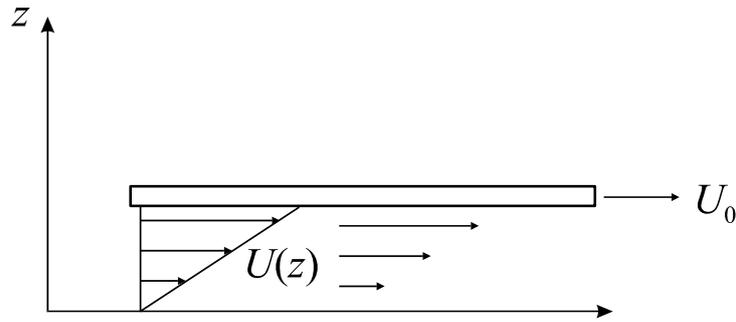


Рис. 10.

Выделим внутри потока газа некоторую плоскость параллельную потоку и на расстоянии длины пробега с обеих сторон от неё ещё две плоскости. В случае градиента скорости в потоке средняя скорость частиц в направлении потока, в районе этих плоскостей, будет разной. Хаотически двигаясь со скоростями значительно превышающими скорости потока, частицы будут попадать из слоя в слой, что приведет к обмену импульсами между слоями. Для простоты примем, что в каждый момент времени вдоль каждой из трех осей движется треть частиц, соответственно вдоль положительного и отрицательного направления оси z будет двигаться $\frac{1}{6}$ часть молекул. Соответствующие потоки переноса импульса будут

$$j_+ = \frac{1}{6} n \bar{v} m u_1, \text{ в противоположном направлении будет поток } j_- = \frac{1}{6} n \bar{v} m u_2. \text{ Здесь } u_1 \text{ и } u_2$$

скорость потока на расстоянии длины свободного пробега λ от выделенной плоскости. В результате переноса импульса в выделенную плоскость, через единицу площади, в единицу времени, мы получим

$$\frac{1}{6} n \bar{v} m u_2 - \frac{1}{6} n \bar{v} m u_1 = -\frac{1}{6} n \bar{v} m 2 \lambda \frac{du}{dz} = -\frac{1}{3} n \bar{v} m \lambda \frac{du}{dz} = \frac{F}{S} = -\eta \frac{du}{dz}$$

Таким образом за счет обмена импульсами между слоями верхняя пластина будет испытывать сопротивление движению, за счет вязкого сопротивления газа величиной

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{du}{dz}, \text{ в нашем случае } \frac{F}{S} = -\eta \frac{u_0}{z_0}$$

При других геометриях сила трения будет другой, так Стокс получил для силы вязкого сопротивления шарика, радиуса R , со скоростью $v_{\text{движ}}$, в безграничной среде $F = 6\pi\eta R v_{\text{движ}}$.

Полученный нами коэффициент вязкости газов $\eta = \frac{1}{3} n \lambda \bar{v} m$ пока λ меньше характерных размеров не зависит от давления т.к. $n \lambda = \text{const}$, и растёт с увеличением температуры поскольку при этом увеличивается \bar{v} . Такая же зависимость удельной силы

от градиента скорости $\frac{F}{S} = -\eta \frac{du}{dz}$ наблюдается и в жидкостях. Однако механизм

возникновения вязкости связан непосредственно с взаимодействием соседних молекул, которое ослабевает с ростом температуры, поэтому вязкость жидкостей падает с ростом температуры. Вязкость измеряют в пуазах, в честь Пуазейля. $1 \text{ пуаз} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см.сек.}}$,

соответственно $1 \frac{\text{кг}}{\text{м.сек.}} = 10 \text{ пуаз}$. Коэффициент вязкости определяет скорость передачи

импульса из слоя в слой, т.к. скорость $\approx \frac{p}{m}$, поэтому скорость выравнивания потока будет

определяться $\frac{\eta}{\rho}$ это так называемая динамическая вязкость, размерность которой соответственно $\frac{м^2}{сек}$.

Диффузия

В процессе хаотического движения молекула постепенно смещается из первоначального положения. Это приводит к тому, что даже в неподвижном воздухе молекулы ароматических веществ, помещенные в одном месте постепенно занимают весь объем и мы начинаем ощущать запах. Понятно, что результирующие диффузионные потоки будут связаны с градиентом концентрации, опыт показывает что поток $j = -D \frac{dn}{dx}$ в общем случае

пропорционален градиенту концентрации $j = -D \text{grad } n$ –закон Фика. Коэффициент пропорциональности D называют коэффициентом диффузии. Найдём этот коэффициент при диффузии в газах. Предположим, что вдоль оси x концентрация молекул примесного газа уменьшается. Рассмотрим поток молекул через некоторую плоскость ортогональную оси x . Последнее столкновение молекулы испытывают на расстоянии длины свободного пробега от данной плоскости. Результирующий поток молекул вдоль оси x j_+ в обратном направлении j_- будет $j = j_+ - j_- = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} - \frac{1}{6} n_2 \bar{v} = -\frac{2}{6} \bar{v} \lambda \frac{dn}{dx}$, получается что коэффициент

диффузии в газах $D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$, размерность которого $\frac{м^2}{сек}$. Приведём для примера величину

этого коэффициента для некоторых случаев диффузии $D(\frac{см^2}{сек})$:

Водород в кислороде	0,7
СО ₂ в воздухе	0,14
Пары Н ₂ О в воздухе	0,23
Сахар в воде	0,3*10 ⁻⁵

Оценим время выравнивания концентрации при диффузии используя метод размерностей. Время выравнивания не может зависеть от концентрации т.к. возникающий поток пропорционален концентрации. Пусть L характерный размер области с неоднородной концентрацией частиц коэффициент диффузии которых D . Из этих величин можно составить лишь одну комбинацию имеющую размерность времени $t \approx \frac{L^2}{D}$ сек. Это

соотношение можно записать как $L \approx \sqrt{Dt}$ дающее оценку характерного расстояния, на которое распространятся частицы в процессе диффузии. Такая зависимость подтверждается в опытах, например при смещении броуновской частицы в процессе её хаотического движения.

Завершая раздел связанный с явлениями переноса рассмотрим два полезных примера использующих полученные закономерности.

Найдем связь объёмного расхода вязкой жидкости при течении через трубу, с её размерами и перепадом давления на концах трубы. Пусть на концах трубы длиной L , радиуса R давление P_1 и P_2 , при этом $P_1 > P_2$. За счет этого перепада давлений возникает течение вязкой жидкости, так называемое течение Пуазейля. В стационарном режиме перепад давлений уравнивается силами вязкого трения.

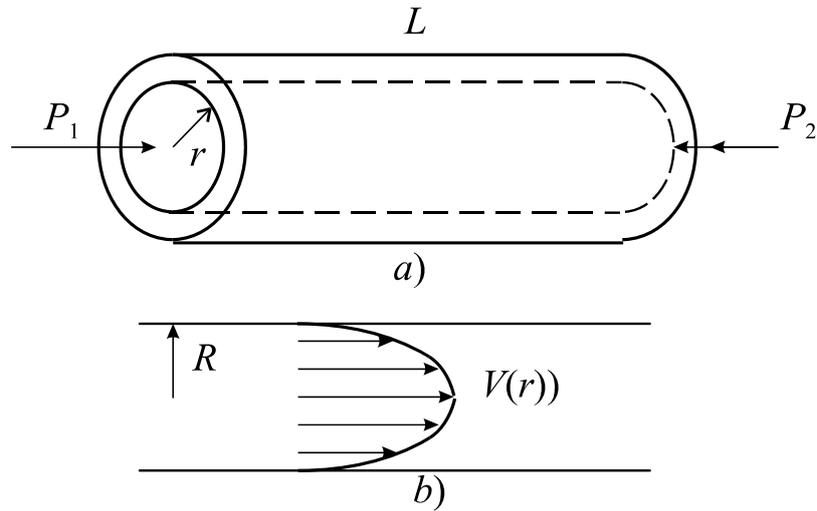


Рис. 11. а) к расчету профиля скорости; б) найденный профиль скорости в круглой трубе

Выделим цилиндр (рис 11) текущего радиуса r и запишем это условие:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = (P_1 - P_2) \pi r^2, \text{ разделяя переменные } dv = \frac{(P_1 - P_2) r dr}{2L\eta} \text{ и интегрируя}$$

получим $v = -\frac{(P_1 - P_2) r^2}{4\eta L} + C$, найдя константу из условия $v=0$ при $r=R$ окончательно

получим $v(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$. Интегрируя профиль скорости по сечению трубы получим

объёмный расход $Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi(P_1 - P_2)R^4}{8\eta L}$. Таким образом, при одном и том же

перепаде давлений увеличение радиуса трубы в два раза приведет к увеличению расхода в 8 раз.

Решение задачи распределения температуры в процессах теплопередачи связано с решением уравнения теплопроводности. Рассмотрим одномерную задачу передачи тепла вдоль оси x . Если в некоторый элементарный объём $dx dy dz$ втекающий тепловой поток $j(x)$ больше вытекающего $j(x+dx)$ и при этом за счет, например химической реакции выделяется тепло с объёмной плотностью q это приведет к росту температуры рассматриваемого объёма. Для баланса энергий получим уравнение

$$(j(x+dx) - j(x)) dy dz dt + q dx dy dz dt = \rho c dx dy dz dT, \text{ здесь } c \text{ удельная теплоемкость,}$$

ρ плотность, dT – изменение температуры. Заменив $j(x+dx) - j(x)$ на $-\frac{dj}{dx} dx$, после

несложных преобразований, получим $-\frac{dj}{dx} + q = \rho c \frac{dT}{dt}$, при произвольной ориентации

теплового потока относительно осей получится $-\left(\frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} + \frac{dj_z}{dz}\right) + q = \rho c \frac{dT}{dt}$ или

$-\text{div} j = \rho c \frac{dT}{dt}$. Учтя, что $\vec{j} = -\chi \text{grad} T$ получим уравнение теплопроводности в общем виде

$$\text{div}(\chi \text{grad} T) + q = \rho c \frac{dT}{dt},$$

в случае стационарного распределения температур и отсутствия объёмных источников тепла получится $\text{div}(\chi \text{grad} T) = 0$.

Найдем температуру кристалла микропроцессора выделяющего мощность W , который через подложку микросхемы теплопроводностью χ , толщиной d , соединен с радиатором охлаждения с температурой T_0 . (рис 12)

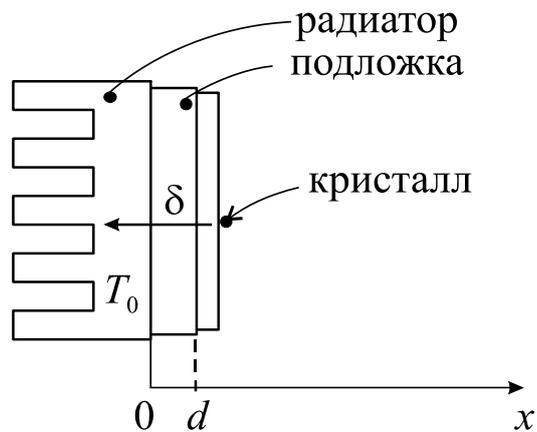


Рис. 12. К расчету температуры микросхемы процессора

В стационарном режиме полный тепловой поток должен равняться выделяемой мощности $j \cdot S = W$. Решение уравнение теплопроводности

$\frac{d}{dx}(\chi \frac{dT}{dx}) = 0$ при первом интегрировании даст $\chi \frac{dT}{dx} = C_1 = -j$ плотности теплового потока,

который по условию $j = \frac{W}{S}$ используя это $-\chi \frac{dT}{dx} = -\frac{W}{S}$ и интегрируя ещё раз получим

$$T = \frac{Wx}{\chi S} + C_2, \text{ приняв что при } x=0 \text{ температура } T_0=C_2, \text{ получим, что при } x=d, T=T_0 + \frac{Wd}{\chi S}.$$

Глава 2. Термодинамика

§1. Введение

Термодинамика, как наука зародилась в позапрошлом веке, как наука о тепловых процессах. Появление тепловых машин (паровые двигатели) заставило человечество думать об их эффективности – как сжигая меньше дров получать большую работу. Основоположителем данной науки видимо является Сади Карно. Путем длительных наблюдений и размышлений он придумал циклически работающую машину, коэффициент полезного действия которой, при заданных температурах нагревателя и холодильника максимален. Этот цикл получил название в честь изобретателя – цикл Карно. В оставшейся после его смерти записной книжке присутствуют рассуждения, которые показывают, что он пришел также к пониманию существования абсолютного нуля температуры и существования энтропии.

Долгие годы термодинамика развивалась как феноменологическая наука и основные её выводы базировались на опытных фактах. Во многих учебниках по термодинамике остались с тех времен рассуждения о тепловых машинах, сжигании дров или угля. В наследство от начального периода развития этой науки осталось также несколько не очень удачных терминов. Во первых название этой науки – строго говоря основные выводы этой науки для равновесных систем или квазиравновесных процессов, какая уж тут динамика. Хотя от термина теплород (невесомая субстанция, которая передается от более нагретого тела к менее нагретому) отказались еще в 19 веке, но производные от этого понятия – количество тепла и производные от него теплоёмкость, скрытая теплота, теплота парообразования и.т.д используются до сих пор.

Не смотря на обилие явлений которые описывает термодинамика, она опирается на несколько фундаментальных законов или начал.

Прежде всего постулируется, что каким бы не было состояние изолированного тела оно неизбежно придет к равновесному состоянию при котором прекратятся все макроскопические процессы. Это положение иногда называют общим началом термодинамики.

Нулевое начало термодинамики постулирует существование функции состояния – температуры. Можно говорить, что это понятие играет такую же важную роль, как время в механике. С этим понятием связаны также термины «абсолютная температура» и «абсолютный ноль температуры». Как мы разобрали в первом разделе это понятие связано с хаотическим, говорят тепловым движением частиц, составляющих термодинамическую систему.

§2. Первый закон термодинамики

Первое начало термодинамики фактически является законом сохранения энергии. $\delta Q = dU + \delta A$. Если мы подведем к телу некоторое количество тепла δQ , оно пойдет на увеличение внутренней энергии тела dU и на совершение телом работы δA . Внутренняя энергия тела состоит из энергии хаотического движения и энергии взаимодействия частиц друг с другом. Значки δ мы используем, поскольку подводимое тепло и совершенная работа будут разными при разных процессах. Действительно, для одного и того же изменения внутренней энергии при совершении телом работы потребуется большее количество тепла, по сравнению с ситуацией когда $\delta A = 0$.

Прежде чем обсуждать остальные начала термодинамики, рассмотрим некоторые результаты, следующие из приведенных выше начал.

Прежде всего, отметим, что к понятию абсолютной температуры и абсолютного нуля можно прийти, наблюдая зависимости давления газа от температуры. Наполним разными количествами гелия три сосуда одинакового объема. При равных температурах в них будут естественно разные давления. Выбор гелия обусловлен тем, что он сжижается при очень низкой температуре. Охлаждая сосуды, мы получим три линейных зависимости давления от температуры (Рис 13), при экстраполяции эти линии пересекутся в точке $-273,15^{\circ}\text{C}$.

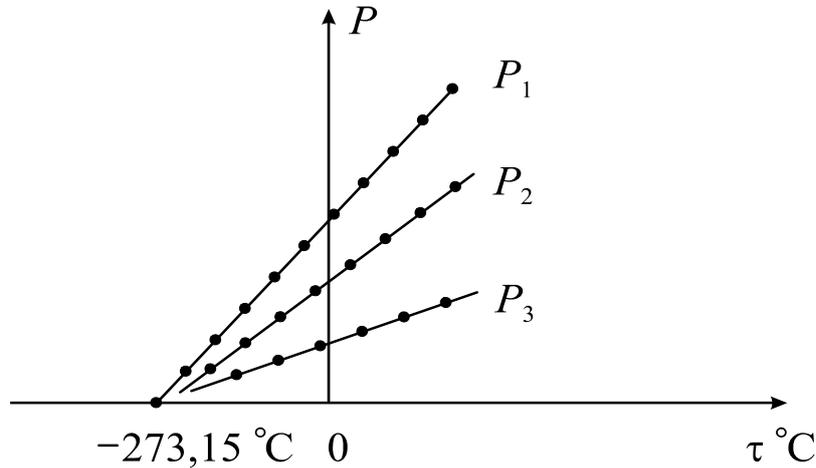


Рис. 13. Зависимость давления гелия от температуры при $V_1 = V_2 = V_3 = \text{const}$

Отсутствие давления в классической физике означает прекращение поступательного хаотического движения. Именно эту точку и принимают за ноль абсолютной температуры и от него отсчитывают температуру по шкале Кельвина. Квантовые движения при этом не прекращаются, но энергию связанную с этими движениями невозможно отнять у тела, её называют нулевой энергией.

Для упрощения изложения будем первоначально пользоваться моделью идеального газа. В этой модели внутренняя энергия будет определяться поступательными степенями свободы и как мы установили в первом разделе, для одного моля будет $N_0 \frac{3}{2} kT$. Для удобства рассуждений будем изображать процессы на PV диаграммах. Зависимость давления газа от объема согласно уравнению состояния $PV = RT$ для разных температур будет изображаться семейством кривых $P = \frac{RT}{V}$. При переходе от одной изотермы $T = \text{const}$ к

другой различными путями изменение dU будет одинаковым поскольку $dU = N_0 \frac{3}{2} k(T_2 - T_1)$,

определяется только начальной и конечной температурой и не зависит от пути перехода между ними. Термодинамические функции, которые определяются состоянием системы, мы будем называть функциями состояния. В этом смысле внутренняя энергия является функцией состояния.

§3. Работа газа

Поместим в цилиндрический сосуд с поршнем некоторое количество газа, оказывая давление на поршень газ начнет совершать положительную работу $\delta A = Fdx = PSdx = PdV$. Тот же результат мы получим рассматривая расширение газа в эластичной оболочке произвольной формы. Если газ сжимается, то его работа отрицательна $\delta A < 0$. Работа газа

зависит от процесса, в котором совершается эта работа. На рис.14 на PV диаграмме приведены три варианта перехода из точки 1 в точку 2.

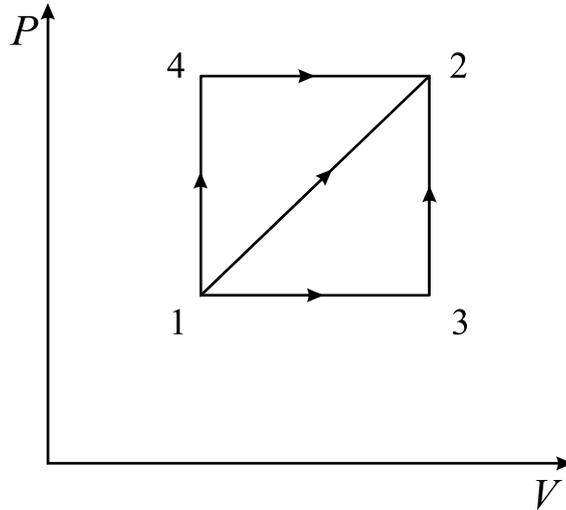


Рис. 14. Работа газа $A_{142} > A_{12} > A_{132}$

Легко видеть, что работа совершенная газом в этих процессах разная $A_{142} > A_{12} > A_{132}$.

§4. Теплоёмкость

В общем случае работа при произвольном переходе из состояния 1 в состояние 2 будет даваться интегралом

$$A = \int_1^2 PdV \text{ и будет зависеть от пути интегрирования. Поскольку } \delta Q = dU + \delta A \text{ то и}$$

количество тепла тоже будет разным и будет зависеть от траектории процесса.

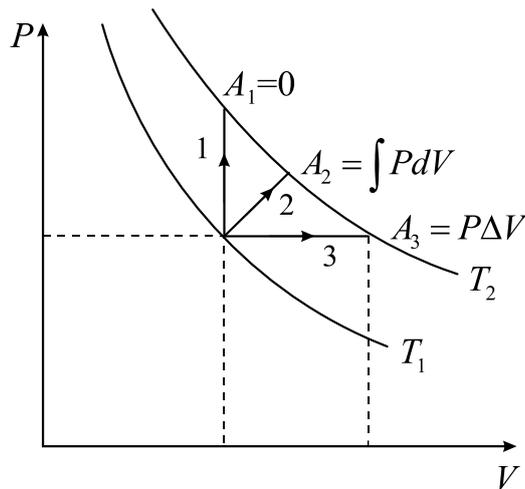


Рис. 15. Работа газа при переходе между двумя изотермами

Для примера на рис15 приведены три разных перехода от одной изотермы T_1 к изотерме T_2 . В первом случае мы нагреваем газ не изменяя его объём, такой процесс называется изохорическим. Во втором случае мы нагреваем газ, одновременно увеличивая его объём,

так что давление в этом процессе остается постоянным, такой процесс называется изобарическим. В третьем случае мы нагреваем газ одновременно расширяя его. Получаем для этих случаев:

$$\Delta Q_1 = \Delta U$$

$$\Delta Q_2 = \Delta U + P\Delta V$$

$\Delta Q_3 = \Delta U + \int PdV$ Поскольку ΔU во всех трех случаях одинаково, количество тепла будет во всех случаях разным. Будет разной и теплоемкость в этих процессах, ей мы будем называть количество тепла необходимое для поднятия температуры на один градус $C = \frac{\delta Q}{dT}$ так как эта величина зависит от количества частиц, обычно имеют ввиду удельную

теплоемкость и измеряют в $\frac{дж}{\text{моль}}$ или в $\frac{дж}{кг}$, зная молярную массу легко пересчитать одну

в другую. В справочниках встречаются теплоёмкости, выраженные в калориях на моль. С этим наследием теплорода легко бороться, если знать, что 1калория $\approx 4,18$ джоулей, а $R \approx 2\text{кал}$. Таким образом, теплоёмкость зависит от конкретного процесса и важными характеристиками являются теплоёмкость при изохорическом процессе $V=\text{const}$, её обозначают c_v и теплоёмкость в изобарическом процессе $P=\text{const}$, её обозначают c_p . Легко понять, что последнем случае теплоёмкость c_p больше, так как газ расширяясь совершает работу и для этого требуется дополнительное тепло т.е энергия. Теплоемкость будет так же зависеть от структуры молекул и температуры. В одноатомном газе его внутренняя энергия будет связана только с поступательными степенями свободы на каждую из которых, как мы уже получили, будет приходится по $\frac{1}{2}$ кТ, т.е $\frac{3}{2}$ кТ на каждый атом. В случае многоатомных молекул возможны так же колебательные и вращательные степени свободы. Согласно закону равнораспределения энергии между степенями свободы на каждую вращательную степень свободы приходится так же по $\frac{1}{2}$ кТ, а на каждую колебательную степень свободы по кТ. При колебаниях энергия определяется смещением от положения равновесия и скоростью в этот момент, усреднение по каждому из параметров даст по $\frac{1}{2}$ кТ

и соответственно в сумме кТ. Ситуация с теплоёмкостью связанной с вращательными и колебательными степенями свободы осложняется тем, что из-за квантовых эффектов они возбуждаются при достаточно высоких температурах, которые отличаются для колебательных и вращательных степеней свободы и тем более разные для разных молекул. В связи с этим обстоятельством, при решении задач в которых требуется теплоёмкость многоатомных газов, без справочника не обойтись. Отметим только, что вращательные степени свободы возбуждаются при достаточно низких температурах. Колебательные степени свободы возбуждаются при достаточно высоких температурах, так что некоторые молекулярные образования распадаются на атомы раньше, чем возбуждятся все колебательные степени свободы.

Исходя из первого закона термодинамики $\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV$ теплоёмкость при постоянном объёме для идеального газа будет $C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_v + P\left(\frac{dV}{dT}\right)_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_v$ Индекс v у производной обозначает, что мы берём её при постоянном давлении. Для идеального газа внутренняя энергия определяется только температурой, так, что для моля идеального газа $dU = \frac{3}{2}kN_0dT = \frac{3}{2}RdT$. С учетом этого получаем $c_v = \frac{3}{2}R$. Для теплоёмкости идеального газа при постоянном давлении мы получим

$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{dU}{dT}\right)_p + P\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = C_v + R$, т.к. из уравнения состояния идеального газа $V = \frac{RT}{P}$ для одного моля получим $\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = R$. Соотношение $c_p - c_v = R$ называют уравнением Роберта Майера. В реальных газах, из-за взаимодействия молекул это уравнение выполняется приближенно. Так в случае газа Ван-дер-Ваальса $P = \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2}$ $c_p - c_v = R \left(1 + \frac{2a}{RTV}\right)$, поскольку a маленькая поправка, учитывающая взаимодействие молекул, для не плотных реальных газов для оценок можно пользоваться соотношением Роберта Майера.

§5. Термодинамические процессы

Если какой-либо параметр системы медленно изменяется, так что скорость изменения меньше чем при приходе системы к равновесию в процессе релаксации, мы говорим, что идет термодинамический процесс. Рассмотрим основные закономерности, связанные с процессами в идеальном газе. Уравнение состояния для идеального газа $PV = \nu RT$ в случае одного моля $PV = RT$ связывает три основных параметра определяющих его состояние P, V, T . Процессы, которые идут так, что давление P остаётся постоянным называют изобарическими. На диаграммах PV и PT это прямая линия $P = const$, называемая изобарой. Процессы, которые идут так, что объём V остаётся постоянным называют изохорическими. На диаграммах PV и PT это прямая линия $V = const$, называемая изохорой. Процессы, которые идут так, что температура T остаётся постоянным называют изотермическими. На диаграммах PV и PT это прямая линия $T = const$, называемая изотермой. Важным случаем являются термодинамические процессы, которые идут без подвода или отвода тепла. Такие процессы называют адиабатическими. Примером может служить сжатие газа в теплоизолирующей оболочке, которую будем называть адиабатической. Кривую $P(V)$, на диаграмме PV в этом случае называют адиабатой.

Найдем связь давления с объёмом для идеального газа в адиабатическом процессе. Первый закон термодинамики в этих условиях даст $\delta Q = 0 = c_v dT + PdV$. Из уравнения состояния идеального газа $PV = RT$ получим, $d(PV) = RdT$ или $dT = \frac{d(PV)}{R} = \frac{PdV + VdP}{R}$ подставив это выражение для dT в $c_v dT + PdV = 0$ получим $c_v \frac{PdV + VdP}{R} + PdV = 0$. Используя соотношение Роберта Майера $c_p - c_v = R$ и скомбинировав члены уравнения мы придем к выражению $\frac{c_p}{c_p - c_v} PdV + \frac{c_v}{c_p - c_v} VdP = 0$ или $\frac{c_p}{c_v} PdV + VdP = 0$, поделив на PV и введя обозначение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ получим дифференциальное уравнение $\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$ решение которого приводит $\gamma \ln V + \ln P = const$ или $PV^\gamma = const$. Таким образом при адиабатическом сжатии газа $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ произведение давления на объём в степени γ остаётся постоянным. Заменяя объём или давление используя уравнение состояния

$PV = RT$, мы получим так же, что в адиабатическом процессе $TV^{\gamma-1} = const$ или $T^\gamma P^{1-\gamma} = const$

Работа идеального газа в термодинамических процессах

1. При изобарическом процессе $P = const$, работа $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1)$

2. При изотермическом процессе $T = const$, $P = \frac{RT}{V}$ и $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$

3. В изохорическом процессе $V = const$ $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = 0$

4. При адиабатических процессах $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$ или $P = \frac{P_0V_0^\gamma}{V^\gamma}$ работа $A = \int_{V_1}^{V_2} PdV$ будет

равна $A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_0V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_1V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \frac{RT_1}{\gamma-1} (1 - \frac{T_2}{T_1}) = \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = c_v(T_2 - T_1)$. Это работа

по сжатию газа, для работы газа нужно изменить знак. То, что $A = \tilde{n}_v(T_2 - T_1) = \Delta U$ можно было записать сразу, т.к. в адиабатическом процессе вся работа идет на увеличение внутренней энергии.

Политропические процессы.

Рассмотренные выше процессы являются частными случаями более общего политропического процесса. Политропическими процессами называют процессы, которые идут при постоянной теплоёмкости. Тогда $c = const$ и первый закон термодинамики запишется как $\delta Q = cdT = c_v dT + PdV$ Найдя из уравнения состояния идеального газа

$dT = \frac{d(PV)}{R} = \frac{PdV + VdP}{R}$ и заменив на него dT в предыдущем выражении после группировки мы получим, действуя также как и в случае адиабатического процесса

$\frac{c - c_p}{c - c_v} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$. После интегрирования это даст $PV^n = const$, здесь $n = \frac{c - c_p}{c - c_v}$ называют

показателем политропы. Получается, когда $c = 0$ то $n = \frac{c_p}{c_v}$ - это адиабатический процесс.

Если $c = \infty$ $PV = const$ - это изотермический процесс. При $c = c_v$, $V = const$ изохорический процесс, при $c = c_p$, $P = const$ изобарический процесс.

Уже из выражений для работы в различных процессах видно, какую важную роль в практической термодинамике играют теплоёмкости c_v и c_p , а также их отношение $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Для идеального газа $c_v = \frac{3}{2} N_0 k = \frac{3}{2} R = 12,5 \frac{дж}{градмоль}$, соответственно

$c_p = R + c_v = \frac{5}{2} R = 20,5 \frac{дж}{градмоль}$ к этим значениям близки теплоёмкости благородных

газов – гелия, неона, аргона, ксенона, криптона. Для одноатомных газов получаем

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,67$$

Для многоатомных газов, при температурах близких к комнатным возбуждены в основном поступательные и вращательные степени свободы. Для двухатомных газов составляющих воздух теплоёмкости в этих условиях близки к теоретическим значениям и составляют

$$c_v = \frac{5}{2}R = 20,8 \frac{\text{дж}}{\text{град.моль}}, \text{ а } c_p = \frac{7}{2}R = 29,1 \frac{\text{дж}}{\text{град.моль}}, \text{ соответственно } \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

Если мы сжимаем газ из одного исходного состояния, уменьшая объём в два раза, в первом случае изотермически, во втором адиабатически. В каком случае работа по сжатию газа больше. На этот вопрос легко ответить нарисовав на PV диаграмме из исходной точки изотерму $PV = const$ и адиабату $PV^\gamma = const$. Рис 16

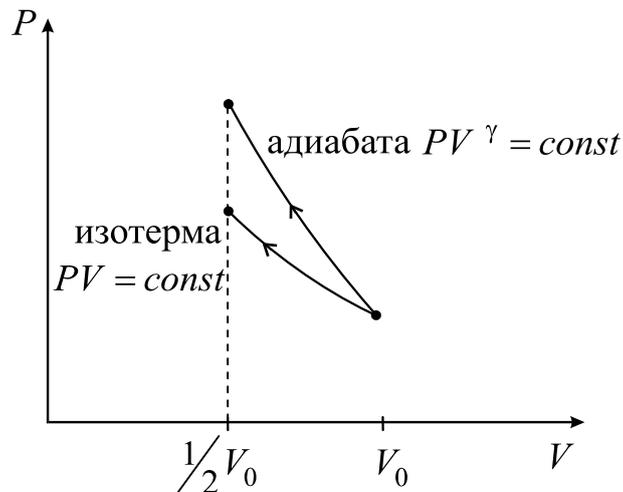


Рис. 16. Работа газа при изотермическом и адиабатическом сжатии

Поскольку $\gamma > 1$, адиабата идет круче. (рис.16) Легко видеть, что площадь под адиабатой больше, а значит и больше работа.

§6. Циклические процессы. К.п.д. тепловых машин

Циклические процессы

Циклическими процессами называют процессы, при которых, после завершения цикла система возвращается в исходное состояние. Важность рассмотрения этих процессов связана с тем, что большинство тепловых машин используют циклические процессы в своей работе. Кроме этого, рассмотрение соответствующего циклического процесса позволяет получать термодинамические закономерности. В дальнейшем мы найдем таким способом связь давления насыщенного пара с теплотой испарения и его температурой.

Рассмотрим простейший цикл состоящий из двух изобар $P_2 = 2P_1$ и двух изохор $V_2 = 2V_1$

Рис 17

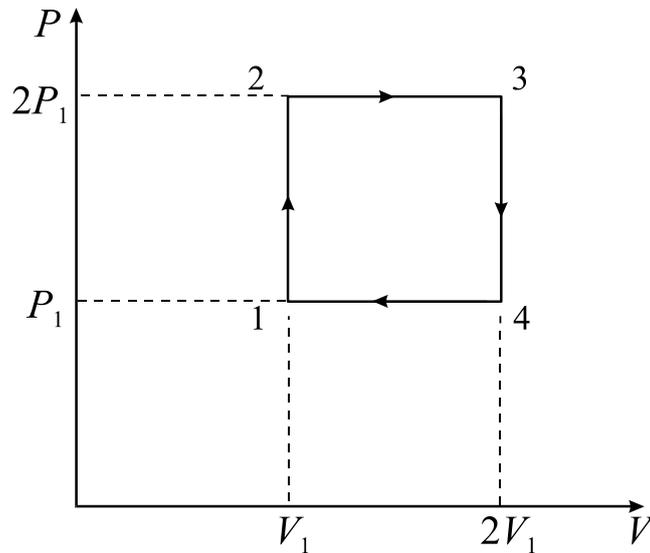


Рис. 17.

Работа на участках 1-2 и 3-4 не совершается т.к. $V = \text{const}$. На участке 2-3 газ расширяясь совершает положительную работу, что бы газ не уменьшал давление мы должны подводить тепло, на участке 4-1 мы сжимаем газ отводя тепло для постоянства давления. В итоге пройдя цикл 1-2-3-4-1 газ вернётся в исходное состояние. Работа совершённая газом за цикл будет $A = P_2(V_2 - V_1) - P_1(V_2 - V_1) = \Delta P \Delta V = P_1 V_1$ равна площади цикла на диаграмме PV . На двух участках цикла мы подводили тепло – нагревали при постоянном объёме участок 1-2 $Q_{12} = c_v(T_2 - T_1)$ и нагревали при постоянном давлении участок 2-3, $Q_{23} = c_p(T_3 - T_2)$ и в итоге мы подвели тепло $Q = c_v(T_2 - T_1) + c_p(T_3 - T_2)$. Из уравнения состояния идеального газа $P_1 V_1 = RT_1$, для второй точки $2P_1 V_1 = RT_2$ температура $T_2 = 2T_1$. Аналогично $T_3 = 4T_1$, а $T_4 = 2T_1$.

Отсюда $T_2 - T_1 = T_1$ и $T_3 - T_2 = 2T_1$, откуда $Q = (c_v + 2c_p)T_1 = (3c_v + 2R)T_1$ со всеми последствиями. Например к.п.д. для одноатомного газа – около 15%.

Назовём коэффициентом полезного действия тепловой машины $\eta = \frac{A}{Q}$ отношение полученной работы к количеству тепла, полученного от нагревателя. В рассматриваемом случае он будет равен $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{P_1 V_1}{(c_p + c_v)T_1} = \frac{RT_1}{(c_p + c_v)T_1} = \frac{1}{1 + \frac{2c_v}{R}} = 25\%$. Мы получили бы

тот же результат рассуждая следующим образом. Разность подведенного к рабочему телу тепла и тепла отданного им за цикл естественно равна работе полученной за цикл тогда к.п.д. $\eta = \frac{Q_{\text{подв.}} - Q_{\text{отд.}}}{Q_{\text{подв.}}} = 1 - \frac{Q_{\text{отд.}}}{Q_{\text{подв.}}}$. Возникают вопросы:

1. Какой цикл будет иметь максимальный к.п.д. при заданных температурах нагревателя и холодильника?
2. Нельзя ли придумать циклическую машину, которая обходилась бы без холодильника? Ведь тогда всё тепло полученное от нагревателя можно превратить в работу. (Такое устройство называют Вечным двигателем второго рода)

Давайте сначала рассмотрим цикл работы тепловой машины более близкой к реальной жизни. Работу двигателя внутреннего сгорания можно смоделировать двумя

адиабатами и двумя изохорами эту модель предложил немецкий инженер Николаус Отто (заметим ещё в 1876г.). Сейчас 21 век, но думаю, многие водители знают о своём двигателе, что он под капотом, иногда ломается и без бензина он не поедет. Простейший, одноцилиндровый двигатель состоит из цилиндра, в верхней части которого расположены два клапана. Внутри цилиндра двигается поршень, соединённый с коленчатым валом, при этом поступательные движения поршня преобразуются во вращательные. Рис 18

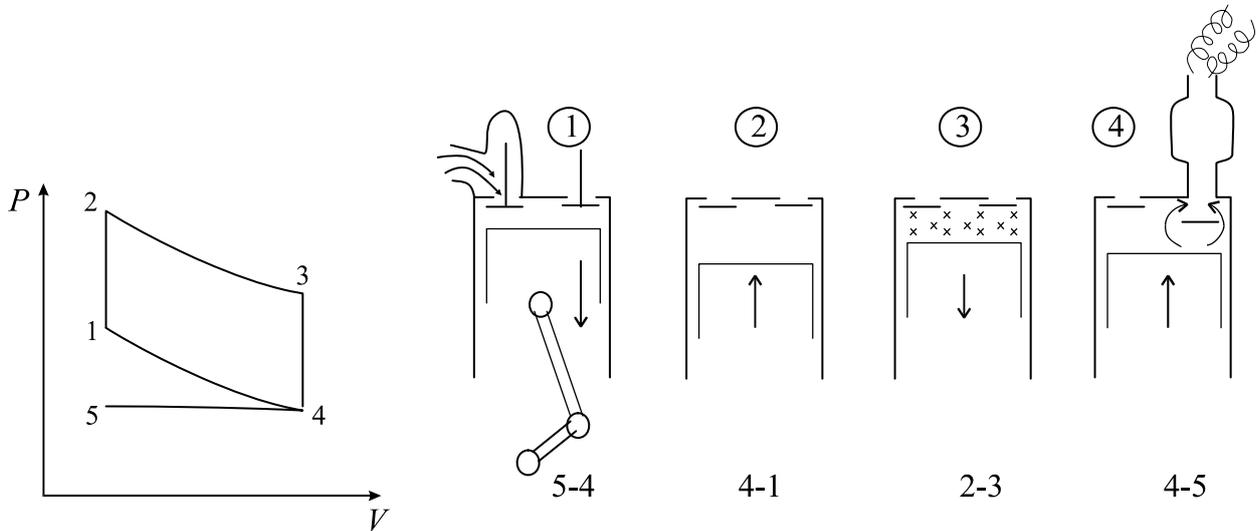


Рис. 18. Работа двигателя внутреннего сгорания по циклу Отто

Один из клапанов 2 соединен с выхлопной трубой, другой 1 с системой подготовки рабочей смеси бензина и воздуха. До недавних пор эту роль выполнял карбюратор, в настоящее время система электронного впрыска. Главная задача этих устройств готовить оптимальную смесь воздуха и бензина на любых режимах работы. Начинается работа нашего двигателя, когда поршень находится в верхней точке, а клапан 1 открыт, клапан 2 закрыт. Двигаясь вниз цилиндр засасывает рабочую смесь, участок 5-4, при этом давление в цилиндре практически равно атмосферному. Затем клапан 1 закрывается а поршень начинает двигаться вверх, сжимая рабочую смесь. Поскольку движения поршня в реальности происходят быстро, теплообмен газа со стенками мал и процесс можно моделировать адиабатой – участок 4-1. Давление и температура растут и около верхнего положения поршня, в свече зажигания инициируется высоковольтный электрический разряд, поджигающий рабочую смесь. Сгорание бензиновоздушной смеси происходит быстро, участок 1-2, так что объем над поршнем за счет его движения не успевает измениться. Возросшее, в процессе сгорания давление, толкает поршень вниз, Сгоревшие газы расширяясь почти адиабатически, совершают работу, участок 2-3. В нижней точке движения поршня открывается выпускной клапан и давление быстро сравнивается с атмосферным, участок 3-4, а оставшиеся после этого газы выталкиваются поршнем в атмосферу при движении поршня вверх, участок 4-5. Далее все повторяется. Цикл реализуется при двух движениях поршня вверх и двух вниз, поэтому такой двигатель называется четырехтактным.

Оценим теперь к.п.д. такого двигателя. Поскольку тепло подводится (сгорание топлива) на изохоре 1-2 $Q_2 = c_v(T_2 - T_1)$, а отводится в нашей модели на изохоре 3-4 $Q_{34} = c_v(T_3 - T_4)$ то к.п.д.
$$\eta = \frac{Q_{подв} - Q_{отд}}{Q_{подв}} = 1 - \frac{Q_{отд}}{Q_{подв}} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$
 (Здесь V_1 – объём при максимальном сжатии, точки 1 и 2 на рис. 18. V_2 – максимальный объём расширения, точки 3,4) действительно учтя что на адиабатах $T_3 = T_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, а $T_4 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$

мы получим этот результат. Если ввести степень сжатия $\varepsilon = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$, то к.п.д. будет $\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$.

Степень сжатия ограничен возможностью самовоспламенения рабочей смеси при больших адиабатических сжатиях и соответственно больших температурах, в обычных двигателях порядка 10. Соответственно к.п.д. получается порядка 70%. В реальных двигателях он конечно ниже и составляет 40-50% из-за потерь на трение, потерь тепла на стенки цилиндра и с выхлопными газами. В дизельных двигателях степень сжатия значительно больше, так что топливо впрыскиваемое в цилиндр после максимального сжатия воздуха самовозгорается, так что температуры и давления в начале цикла больше чем в цикле Отто, соответственно и к.п.д. получается выше.

§7. Цикл Карно

Возникает вопрос, какой цикл нужно реализовать, чтобы при заданных максимальной – температура нагревателя и минимальной -температура холодильника получить максимальный к.п.д. На заре промышленной революции вопрос стоял так, по какому циклу должна работать тепловая машина, чтобы сжигать меньше дров и получать большую работу? Таким идеальным циклом оказался предложенный французским военным инженером Николи Карно. Карно понял, что нужно делать.

1. Процессы цикла должны быть равновесными и обратимыми, т.е. достаточно медленными.
2. Непосредственный контакт нагретых до разных температур тел приведет к передаче тепла без совершения работы. Нужно третье – «рабочее» тело, которое забирая у нагревателя тепло и расширяясь совершает работу, после этого его нужно охлаждать и сжимать до исходного объёма обратимым образом.
3. Процесс нагрева и охлаждения должен идти при минимальных перепадах температур $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$, чтобы избежать необратимых потерь тепла.

Такой цикл состоящий из двух изотерм и двух адиабат, представлен на рис. 19 . Почему две адиабаты понятно, на них внутренняя энергия тела без потерь тепла превращается в работу при расширении. Понять, почему используется изотерма труднее. При непосредственном контакте двух тел нагретых до разной температуры одно из них теряет энергию, другое получает, но работа при этом не производится. Такой процесс передачи тепла является не обратимым, самопроизвольно он не пойдёт вспять. Можно приложить к горячему телу цилиндр с поршнем, тогда газ расширяясь будет совершать работу. Но чем больше будет разность температур, тем больше будут необратимые потери. Чтобы их избежать нужно расширять газ так, что его температура равна температуре нагревателя, т.е. в изотермическом процессе. Найдем к.п.д. такого цикла оставив за рамками данного конспекта строгое доказательство его максимальности.

Приведем рабочее тело в контакт с нагревателем и дадим ему медленно расширяться так, что температура рабочего тела остается все время $\approx T_{нагр}$. Затем дадим ему медленно расширяться адиабатически (рис 19). Расширяясь рабочее тело совершает работу. Когда, при адиабатическом расширении температура рабочего тела станет равной температуре холодильника $T_{хол}$, мы приведём его в тепловой контакт с холодильником и будем медленно сжимать рабочее тело, при этом оно будет отдавать тепло холодильнику. В соответствующий момент отключим рабочее тело от холодильника и продолжим сжимать его адиабатически, при этом температура тела будет расти. Когда температура достигнет температуры нагревателя цикл будет завершен.

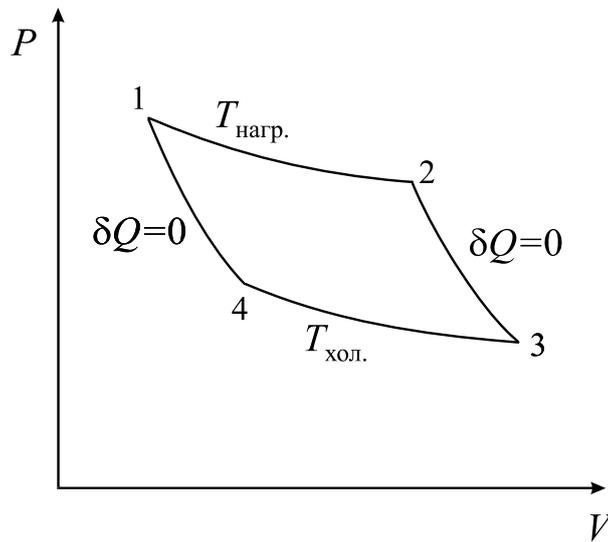


Рис. 19. Цикл Карно

На адиабатах 2-3 и 4-1 теплообмена нет и $Q_{23} = Q_{41} = 0$. На изотерме 1-2 мы подводим тепло Q_{12} к рабочему телу, а на изотерме 3-4 рабочее тело отдаёт тепло Q_{34} . Работа цикла $A = Q_{12} - Q_{34}$ соответственно к.п.д.

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}}. \text{ Найдем эти теплоты } Q_{12} = \int c_v dT + \int PdV = RT_{нагр.} \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ поскольку}$$

на изотерме $dT = 0$, а $P = \frac{RT_{нагр.}}{V}$. Аналогично $Q_{34} = \int c_v dT + \int PdV = RT_{хол.} \ln \frac{V_3}{V_4}$. В итоге

$$\text{получим } \eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{RT_{нагр.} \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_{хол.} \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_{нагр.} \ln \frac{V_2}{V_1}}, \text{ на адиабатах } V_1 T_1^{\gamma-1} = V_4 T_4^{\gamma-1} \text{ и}$$

$V_2 T_2^{\gamma-1} = V_3 T_3^{\gamma-1}$, поскольку $T_1 = T_2$, а $T_4 = T_3$, получаем что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Учтя это получаем для

$$\text{цикла Карно } \eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{T_{нагр.} - T_{хол.}}{T_{нагр.}} \text{ или } \eta = 1 - \frac{T_{хол.}}{T_{нагр.}}. \text{ Цикл Карно дает предельный}$$

или максимальный коэффициент полезного действия при заданных $T_{нагр.}$ и $T_{хол.}$ и если бы двигатель внутреннего сгорания автомобиля работал бы по этому циклу, то при степени сжатия 10, рассмотренном выше, к.п.д. составлял бы около 85%. Почему же японские инженеры не создают двигатель с таким циклом. Всё просто, в цикле Карно процессы должны идти медленно, а соответственно мощность двигателя будет незначительной.

§8. Тепловые насосы

В последнее время много говорят о тепловых машинах, к.п.д. которых больше 100%. На самом деле журналисты имеют ввиду тепловые насосы придуманные ещё Томпсоном. Заставим рассмотренную выше тепловую машину работать в обратную сторону т.е. последовательность этапов цикла обратная. Приведа в контакт с холодильником будем расширять рабочее тело, отбирая от него тепло, затем адиабатически сожмем повысив его

температуру. Приведя в контакт с нагревателем продолжим его сжатие при этом рабочее тело будет отдавать тепло нагревателю, затем адиабатически увеличим объём рабочего тела, пока температура не упадет до температуры холодильника. Каково отношение тепла отданного нагревателю в этом случае, к совершенной работе назовем его эффективностью теплового насоса

$$\alpha = \frac{Q_{21}}{A} = \frac{Q_{21}}{Q_{21} - Q_{43}} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_{нагр}}{T_{нагр} - T_{хол}}. \quad \text{Это отношение действительно}$$

больше единицы. Такие тепловые насосы действительно создают, автор этих строк видел реализованный и действующий проект отопления горнолыжного отеля, за счет тепла подземных вод. Вы можете сделать тепловой насос из старого холодильника. Поместите морозилку в незамерзающий или подземный источник, а радиатор расположенный на задней стенке холодильника под окно вместо радиатора отопления. Если вас устроит температура радиатора в 30 °С, т.е. около 300 °К, а подземный источник имеет температуру 10 °С то $\alpha = \frac{300}{20} = 15$. Учтя, что мощность двигателя компрессора холодильника 200вт.,

радиатор можно рассматривать как источник тепла мощностью 200вт*15= 30000вт. На самом деле эффективность значительно ниже, но коэффициенты больше 2-3 получаются. Во первых батарея с температурой 30 °С греть будет плохо, надо бы градусов 60-70, во вторых подземные воды имеют температуру меньшую 10 °С и при интенсивном отборе тепла замерзнут, что собственно и происходило в горнолыжном отеле в морозы. Но если учесть,

что к.п.д. реальных машин меньше чем в цикле Карно, то $\alpha = \frac{Q_{21}}{A} = \frac{1}{\eta}$ будет больше нашей оценки.

§9. Давление насыщенного пара

Цикл Карно до разработки методов термодинамических функций часто использовали для установления термодинамических закономерностей. Найдем зависимость давления насыщенного пара над поверхностью жидкости от её температуры. Обсудим для начала механизм установления равновесного давления. Жидкость непрерывно испаряется с поверхности. Преодолеть взаимодействие с оставшимися могут только наиболее быстрые молекулы, поэтому этот процесс будет сопровождаться охлаждением жидкости. Чтобы при постоянной температуре испарить моль или килограмм жидкости требуется подвести тепло.

Это тепло называют удельной теплотой испарения q и измеряют соответственно в $\frac{дж}{моль}$ или

в $\frac{дж}{кг}$. Наряду с испарением идет обратный процесс конденсации и давление, при котором

установится динамическое равновесие между числом испарившихся и числом сконденсировавшихся называют давлением насыщенного пара. Естественно это давление будет разным при разных температурах, чем выше температура, тем выше давление. Для нахождения зависимости давления от температуры рассмотрим и обсудим следующий мысленный эксперимент. Поместим в цилиндрический сосуд моль исследуемой жидкости и сразу над её поверхностью подвижный поршень. Рис20

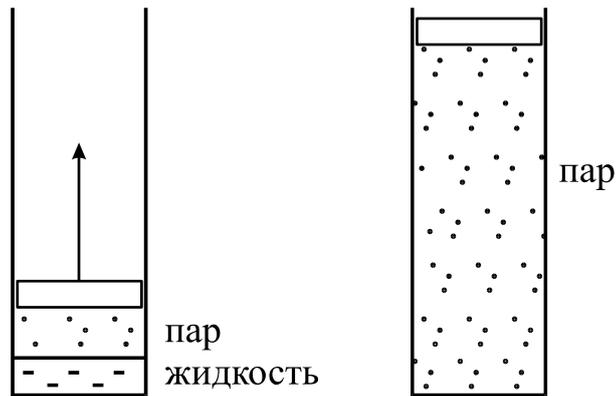


Рис. 20.

Начнем медленно поднимать поршень, поддерживая температуру сосуда постоянной T при этом жидкость будет испаряться, отнимая тепло у термостата. Увеличим объем так, что испарится моль жидкости поскольку температуру мы поддерживаем постоянной, будет постоянным и давление. На диаграмме (рис.21) это изобразится прямой 1-2.

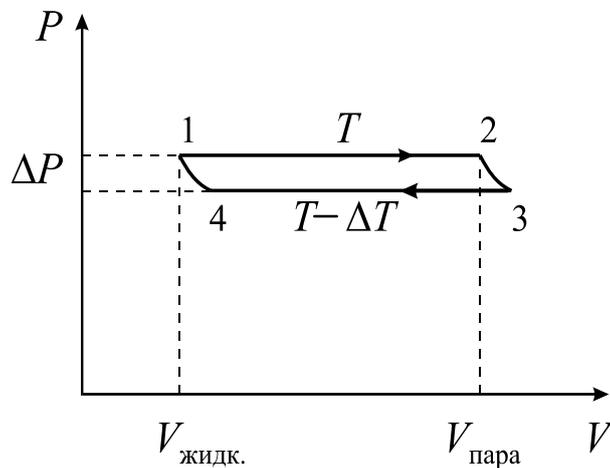


Рис. 21. Определение давления насыщенных паров от температуры

Затраченное при этом тепло Q_{12} будет как раз равно удельной молярной теплоте испарения q . Отсоединим сосуд от термостата и медленно расширим немного газ адиабатически. Температура уменьшится на некоторую величину dT , а давление уменьшится на величину dP . Подсоединим сосуд к термостату с температурой $T - dT$ и начнем изотермически сжимать при этой температуре, затем теплоизолируем сосуд и сожмем адиабатически, чтобы температура поднялась до исходной T , завершив цикл. Наш цикл из двух изотерм и двух адиабат есть цикл Карно и его к.п.д. $\frac{T_{нагр.} - T_{хол.}}{T_{нагр.}} = \frac{T - (T - dT)}{T}$ с другой стороны он

есть $\eta = \frac{A}{Q_{12}}$ где работа равна площади цикла $dP(V_{пара} - V_{жидкости})$, т.к. объем изменился на разность объемов моля жидкости в газообразном и жидком состоянии. Приравнявая выражения для к.п.д. получим $\frac{dT}{T} = \frac{dP(V_{пара} - V_{жидк.})}{q}$ переписав в виде $\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(V_{пара} - V_{жидк.})}$

получим уравнение Клапейрона-Клаузиуса по имени физиков впервые их получивших. Такое же соотношение будет справедливо при переходе из твердого в жидкое состояние, только q в этом случае будет теплотой плавления, а объемы – удельные объемы в твердой и

жидкой фазе. Пользуясь полученным уравнением найдем зависимость давления пара от температуры. Немного упростим уравнение, учтя что удельный объем пара много больше удельного объема жидкости, пренебрежем объемом последней. У воды моль в жидком состоянии 18 миллилитров, а в газообразном около 22 литров. Затем заменим объем пара из уравнения состояния газов $PV = RT$ на $V = \frac{RT}{P}$. Подставив это в уравнение Клапейрона

Клаузиуса получим $\frac{dP}{dT} = \frac{qP}{RT^2}$, разделяя переменные и интегрируя получим $P = P_0 e^{-\frac{q}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}$,

т.е. с ростом температуры давление растет. У воды при комнатной температуре давление паров 17тор, при температуре 100 °С давление равно атмосферному и вода интенсивно кипит. Растягивая и сжимая аналогичным образом по циклу Карно мыльную пленку, мы получим зависимость поверхностного натяжения σ от температуры $\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}$, здесь q удельная теплота образования поверхности плёнки.

§10. Второй закон термодинамики

Цикл Карно дает максимальный к.п.д. при заданных температурах нагревателя и холодильника. Но в нём мы неизбежно часть тепла полученного от нагревателя отдаём холодильнику и не превращаем в работу. Возникает вопрос – нельзя ли построить циклически работающую тепловую машину, в которой всё полученное тепло от нагревателя превращалось в работу. Такую машину называют вечным двигателем второго рода.

1. Утверждение о невозможности построения вечного двигателя второго рода является сутью второго начала или закона термодинамики.
2. Томпсон, затем Кельвин дали такую формулировку II закона: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы, за счет охлаждения теплового резервуара.
3. Клаузиус в 1850г. сформулировал этот закон так: теплота не может самопроизвольно передаваться от менее нагретого тела к более нагретому (без изменения в третьих телах).

Для понимания сути этих утверждений можно сказать, что кирпич не может самопроизвольно охладиться и подпрыгнуть на высоту определяемую $mgh = c_v \Delta T$, хотя это и не противоречит закону сохранения энергии. Получается асимметрия, работу мы можем полностью превратить в тепло $A \rightarrow Q$, а тепла для производства работы мы всегда должны потратить больше $Q > A$.

В цикле Карно разность теплот, полученные рабочим телом от нагревателя и отданные им холодильнику равны работе за цикл $\delta Q_{12} - \delta Q_{34} = \delta A$. Клаузиус заметил, что если в цикле Карно теплоту, полученную от нагревателя и теплоту отданную холодильнику поделить на соответствующие температуры то эта разность будет равна нулю $\frac{\delta Q_{12}}{T_1} - \frac{\delta Q_{34}}{T_2} = 0$. Получается, что величина $\frac{\delta Q}{T}$ при возвращении в исходную точку не изменилась. Клаузиус понял, что существует функция состояния, изменение которой определяется в квазиравновесных процессах начальным и конечным состоянием и не зависит от пути перехода т.е. $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$. Он предложил назвать эту функцию энтропией.

Приращение этой функции $dS = \frac{\delta Q}{T}$, тогда $\delta Q = TdS$. С учетом этого мы можем записать

первый закон термодинамики в виде $\delta Q = TdS = c dT + PdV$, что позволяет рассчитывать

изменение энтропии $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c(T)}{T} dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{P}{T} dV$. Чтобы посчитать к.п.д. цикла Карно нам

пришлось немного потрудиться. Пользуясь неизменностью суммарного изменения энтропии за цикл, можно легко посчитать к.п.д. Сумма изменений энтропий при нагревании

рабочего тела и его охлаждения на изотермах даёт $\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\delta Q_{12}}{T_1} - \frac{\delta Q_{34}}{T_2} = 0$, отсюда

$Q_{12} = \frac{T_1}{T_2} Q_{34}$, работа цикла $A = \delta Q_{12} - \delta Q_{34}$ отсюда $\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} - Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{T_{нагр.} - T_{хол.}}{T_{нагр.}}$ или

$$\eta = 1 - \frac{T_{хол.}}{T_{нагр.}}$$

Поскольку энтропия является функцией состояния, это позволяет найти изменение

энтропии и при неравновесных процессах, хотя прямой расчет из $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c(T)}{T} dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{P}{T} dV$

невозможен, т.к. это соотношение справедливо только для равновесных процессов. В случае неравновесных процессов, если известны начальное и конечное состояние, мы можем подобрать процесс или сумму процессов, переводящих систему из начального состояния в конечное. Найденное в этом случае изменение энтропии будет таким же как и при неравновесном процессе, поскольку начальные и конечные состояния совпадают, а энтропия является функцией состояния. Рассмотрим это на примере необратимого расширения газа. Пусть в цилиндре в одной его половине объёмом V_1 находится идеальный газ при температуре T_1 , во второй половине, отделенной тонкой, хрупкой перегородкой вакуум. Перегородка мгновенно ломается, и газ занимает весь объём $2V_1$. Найти изменение энтропии. В конечном состоянии температура останется прежней T_1 , т.к. газ не совершает работу и тепло не подводится. Поэтому естественно найти изменение энтропии при изотермическом расширении газа от V_1 до $2V_1$. В этом случае

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c(T)}{T} dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{P}{T} dV = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{P}{T} dV \text{ при этом } P = \frac{RT}{V} \text{ получаем } \Delta S = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{RT}{TV} dV = R \ln 2$$

Возникает вопрос почему возросла энтропия в этом неравновесном процессе. Мы не подводили тепло, газ не совершил работу, внутренняя энергия при таком необратимом процессе тоже не изменилась, а ведь мы вводили энтропию как функцию состояния изменение которой $dS = \frac{\delta Q}{T}$. При заданной энергии изолированной системы её переход из

не равновесного состояния к равновесному на самом деле является переходом от менее вероятного состояния к более вероятному. Предположим для простоты, что в нашем случае длина пробега больше размеров сосуда. Тогда с вероятностью $\frac{1}{2}$ мы можем обнаружить

молекулу в любой половинке сосуда. Если молекул две, то обнаружить их одновременно в одной половине уже $\frac{1}{4}$, при 10 молекулах вероятность обнаружения в одной части будет

$(\frac{1}{2})^N = \frac{1}{1024}$, при 100 молекулах $(\frac{1}{2})^{100} \approx (10)^{-30}$. Если вспомнить, что при нормальных условиях в 1 см^{-3} примерно $3 \cdot 10^{19}$ молекул то понятно, что ожидать их самопроизвольного

собрания в одной половинке ждать не приходится. Вероятность же равномерного распределения частиц по объёму будет максимальной. Конечно небольшие отклонения от равновесных параметров будут, их называют флуктуациями. Флуктуирует давление, температура, плотность но величина этих отклонений очень мала. Так температура 1 миллиграмма воды при комнатной температуре будет испытывать колебания около 10^{-8} °С.

Таким образом количественной характеристикой термодинамического состояния тела, описывающей его стремления перехода к равновесию является число микроскопических способов, которым это состояние может быть осуществлено, при заданной энергии. Чем больше таких способов, тем больше вероятность состояния. Это число называют статистическим весом и обычно обозначают буквой Γ , а энтропией S в статфизике называют величину $S = k \ln \Gamma$, здесь k постоянная Больцмана. В учебниках встречается определение энтропии, как $S = k \ln W$, где W вероятность состояния, оно отличается на константу, но поскольку энтропия определена с точностью до константы, можно считать эти определения эквивалентными. В статфизике так же показывается, что для не замкнутой системы изменение энтропии связано с количеством подводимого тепла и температурой как $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Таким образом, в замкнутой системе энтропия при приходе к равновесию возрастает, а максимальное её значение достигается при равновесии. Это утверждение является более точной формулировкой второго закона термодинамики, открытого Клаузиусом, а его молекулярно-кинетическое истолкование дал Больцман. В заключение заметим, что из-за логарифмической зависимости энтропии от статистического веса или вероятности состояния энтропия сложной системы $S = k \ln W_1 W_2 = k \ln W_1 + k \ln W_2 = S_1 + S_2$, т.е. является аддитивной функцией.

§11. Реальные газы. Газ Ван-дер-Вальса

Модель идеального газа позволила нам получить многие закономерности поведения молекулярных и термодинамических систем. Для не плотных газов при достаточно высоких температурах она позволяет получать достаточно точные количественные оценки. Однако без учета взаимодействия молекул невозможно объяснить переход в жидкое и твердое состояние. Пока энергия хаотического движения много больше энергии взаимодействия атомов и молекул друг с другом, только весьма незначительная часть из них может на какое-то время объединиться, но уже в следующее мгновение их объединение будет разрушено за счет столкновения с их энергичным соседом. При понижении температуры это будет происходить реже и при некоторой температуре, называемой температурой фазового перехода, большая часть вещества окажется в жидком состоянии. При этом у молекулы остается возможность дрейфовать по всему объёму жидкости. Дальнейшее понижение температуры приведет к объединению молекул в кристаллические структуры, в соответствии со структурой их электронных оболочек, для минимизации энергии взаимодействия, молекулы при этом в основном могут колебаться около положения равновесия. Отметим также, что есть аморфные твердые тела, которые при нагревании постепенно размягчаются, постепенно переходя в жидкое состояние без фазового перехода. Фазовые переходы кристаллических тел, при заданном давлении всегда происходят при одной и той же температуре. Так лед при атмосферном давлении плавится при 0 °С, железо при 1806 °С, вольфрам при 3653 °С, алмаз при 4000 °С. Фазовые переходы более широкое понятие и связано не только с переходом в жидкое и твердое состояние. Многие кристаллические тела при изменении температуры могут изменять свою кристаллическую структуру – это, так называемые, фазовые переходы второго рода. Эти переходы не связаны

с изменением удельного объёма, происходит например скачкообразное изменение теплоёмкости. Не углубляясь дальше в эти проблемы, которые рассматриваются в физике твердого тела, отметим только, что исследования гетероструктур в полупроводниках, кристаллических соединений углерода – графена и филурена (две Нобелевских премии россиян) открыли перед человечеством широчайшие технологические применения.

Вернёмся к газообразному состоянию вещества. Многие проявления поведения реальных газов естественно никак не следуют из уравнения состояния идеального газа. Отсюда многочисленные попытки получить уравнение состояния реального газа, которое бы точно описывало его поведение, т.е. давало функциональную связь $P(V,T)$, в учебниках вы можете встретить упоминание о многочисленных подходах. Наиболее удачной, видимо нужно признать модель предложенную Ван-дер-Ваальсом. Удачной, здесь, в смысле прозрачности физической интерпретации, а также достаточно точно описывающее процессы перехода газа в жидкое состояние. В большинстве физических справочников обычно приводятся «константы» входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса.

На первый взгляд уравнение Ван-дер-Ваальса $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ сильно отличается от уравнения состояния идеального газа $P = \frac{RT}{V}$, но если учесть, что с учетом размеров молекул им будет предоставлен не весь объём V , а только объём сосуда за вычетом суммарного объёма молекул b , повышение давления $P = \frac{RT}{V-b}$ кажется естественным.

Взаимодействие молекул друг с другом будет уменьшать импульс молекул летящих к стенке и соответственно уменьшать давление на стенку. Величина этого эффекта пропорциональна числу летящих молекул к стенке и числу оставшихся в объёме и тормозящих движение. И то и другое число пропорционально концентрации молекул в объёме, что в итоге даёт $-\Delta P \approx an^2$ понижение давления пропорциональное квадрату концентрации. Здесь a небольшой коэффициент пропорциональности, определяющий величину поправки. Поскольку молярный объём $V = \frac{1}{n^2}$ мы приходим к уравнению Ван-

дер-Ваальса для одного моля в его традиционном написании $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, это не трудно обобщить для ν молей. Если газ занимает объём V , то молярный объём будет $\frac{V}{\nu}$ с учётом

этого уравнение для ν молей будет $P = \frac{RT}{\frac{V}{\nu} - b} - \frac{a\nu^2}{V^2}$. Для количественных оценок уравнение

Ван-дер-Ваальса можно использовать при $V \gg b$ и $P \gg \frac{a}{V^2}$, для плотных газов это уравнение, как количественное соотношение не годится. Но качественно оно правильно передаёт поведение газа и при больших плотностях. Рассмотрим ход изотерм газа в этой модели его поведения. На изотермах для идеального газа произведение PV остаётся постоянным. В случае газа Ван-дер-Ваальса при больших разрежениях, когда преобладают силы притяжения между молекулами, он будет сжиматься сильнее идеального газа, а при больших плотностях, когда преобладают силы отталкивания слабее, для повышения давления нужны меньшие изменения объёма.

Наиболее интересные результаты получаются при исследовании поведения газа вблизи критической точки $P_{кр}, V_{кр}, T_{кр}$, которая отделяет область изотерм, где возможны фазовые переходы от остальных изотерм. Для такого анализа умножив все члены уравнения на $V^2(V-b)$ приведём его к уравнению третьей степени $PV^3 - PV^2b - RTV^2 + aV - ab = 0$

или $V^3 - (b + \frac{RT}{P})V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0$. Это означает, что на изотерме $T = const$ возможны три значения V (три корня этого уравнения), дающих одинаковое значение P . Это хорошо видно на рис. 22

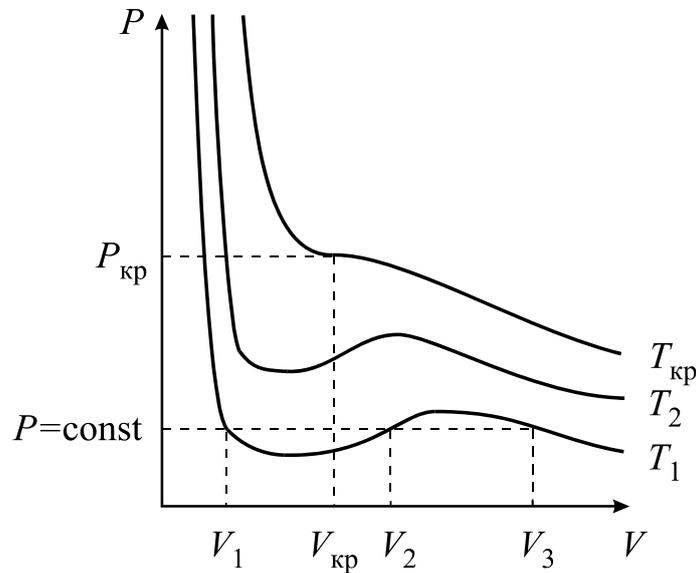


Рис. 22. Изотермы Ван-дер-Ваальса $V^3 - (b + \frac{RT}{P})V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0$

При повышении температуры эти значения V сближаются пока на изотерме, температуру которой мы назовём критической $T_{кр}$, они не сольются в один корень, значение которого мы назовём критическим объёмом $V_{кр}$, давление, соответствующее этому удельному объёму $V_{кр}$ и температуре $T_{кр}$, назовём критическим давлением $P_{кр}$. Уравнение Ван-дер-Ваальса в этой точке запишется в виде: $V^3 - (b + \frac{RT_{кр}}{P_{кр}})V^2 + \frac{a}{P_{кр}}V - \frac{ab}{P_{кр}} = 0$, равенство трех корней означает, что в этой точке $(V - V_{кр})^3 = V^3 - 3V_{кр}V^2 + 3V_{кр}^2V - V_{кр}^3 = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях V мы получим $(b + \frac{RT_{кр}}{P_{кр}}) = 3V_{кр}$, $\frac{a}{P_{кр}} = 3V_{кр}^2$ и $\frac{ab}{P_{кр}} = V_{кр}^3$. Из двух последних соотношений $V_{кр} = 3b$, подставляя это во второе соотношение,

получим $P_{кр} = \frac{a}{27b^2}$, а далее $T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}$. Из рис.22 также видно, что критическим

параметрам соответствует точка перегиба на изотерме $T_{кр}$. Как выглядят изотермы реальных газов? Опыт показывает, что если сжимать газ изотермически, при температуре ниже $T_{кр}$, то по мере уменьшения объёма, сначала давление будет расти, но с некоторого момента будет оставаться постоянным из-за того, что часть газа будет переходить в жидкое состояние. Дальнейшее уменьшение объёма будет увеличивать эту часть, пока весь газ не перейдет в жидкое состояние. После этого дальнейшее уменьшение объёма будет приводить к резкому увеличению давления из-за небольшой сжимаемости жидкости. Постоянство давления при конденсации следует из зависимости давления насыщенных паров от температуры и теплоты испарения полученных выше $P = P_0 e^{-\frac{q}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}$. При постоянной температуре попытка

увеличения давления путём сжатия будет приводить к конденсации «лишних» молекул, поскольку динамическое равновесие между потоками испарившихся и сконденсировавшихся молекул достигается только при определенной концентрации молекул в газовой фазе, при данной температуре. Эта ситуация показана на рис 23 демонстрирующем последовательное уменьшение объёма, на котором приведены реальный ход изменения давления при уменьшении объёма на различных изотермах.

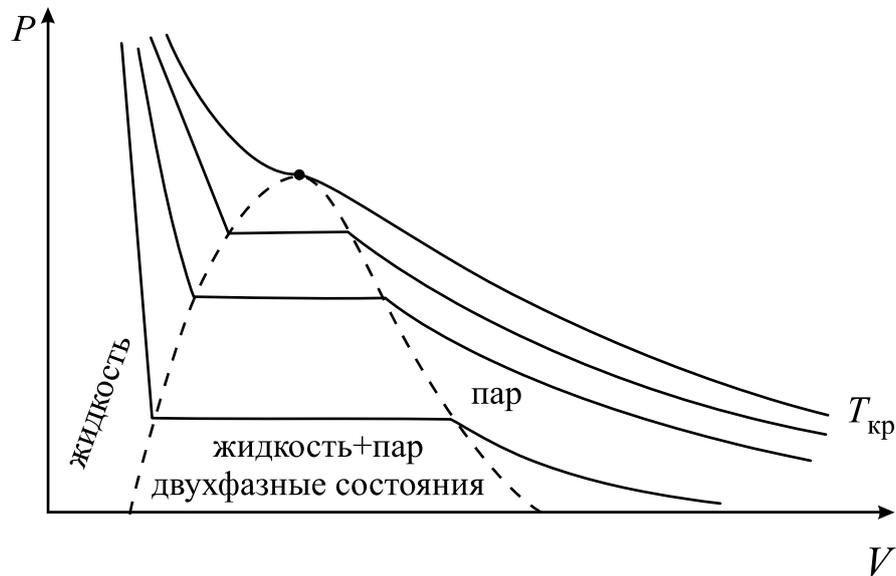


Рис. 23. Изотермы реального газа

На рис 23 пунктирная кривая отделяет двухфазные состояния жидкость-пар для температур ниже $T_{кр}$. Правее этой кривой газообразное состояние, левее жидкое состояние. Под этой пунктирной кривой двухфазные состояния. При сжатии газа на изотермах с $T > T_{кр}$ удельная плотность газа монотонно растет и в итоге достигает плотности жидкого состояния минуя двухфазные состояния. Вдали от критической точки для описания реальных газов с хорошей точностью можно использовать уравнение состояния идеального газа.

Из критических параметров можно получить безразмерный коэффициент $k_{кр} = \frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = \frac{8}{3} = 2,67$. Для реальных газов этот коэффициент больше и различен для различных газов. Так для H_2 он 3,03, для He – 3,13, для N_2 -3,42, O_2 -3,42, H_2O – 4,46, CO_2 – 4,49. Вышеизложенное показывает, что модель Ван-дер-Ваальса достаточно хорошо описывает качественное поведение реальных газов, количественные отличия конечно есть, но и они не так значительны. Итак в области двухфазных состояний волнообразный ход изотермы Ван-дер-Ваальса мы должны заменить прямой $P = const$. Возникает вопрос, при какой величине P кривая $P(V)$ переходит в прямую. Для решения этого вопроса пройдем по реальной изотерме $P = const$ из точки 1 (рис 24) в точку 3, а затем вернемся обратно в точку 1 по изотерме Ван-дер-Ваальса по пути 3-4-2-5-1.

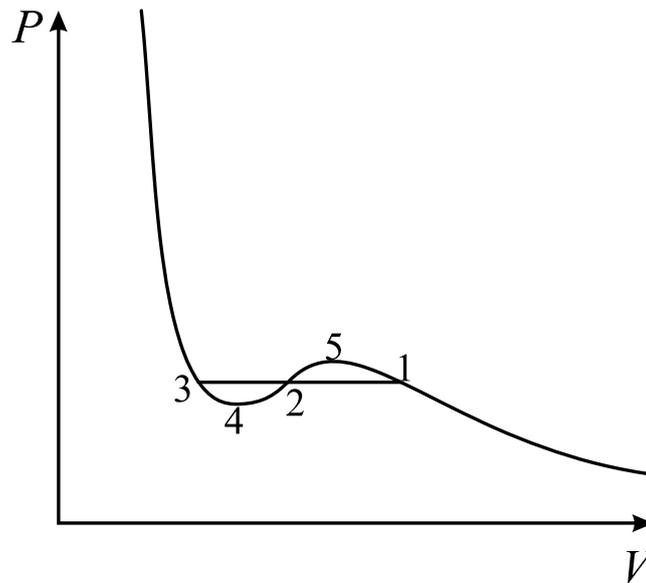


Рис. 24. Правило Максвелла $\int_{3243} P dV = \int_{2512} P dV$

Поскольку энтропия функция состояния $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$, т.к. мы все время двигались по изотерме $T = const$ отсюда следует, что $\oint \delta Q = 0$ и $\oint dU = 0$. Из первого закона термодинамики $\delta Q = dU + PdV$ мы в этом случае получим $\oint PdV = 0$ или $\int_{123} PdV = \int_{34251} PdV$. Таким образом прямая $P = const$ должна быть при таком $P = const$, чтобы площадь изотермы Ван-дер-Ваальса над ней и под ней была одинакова.

§12. Равновесие фаз. Диаграммы состояния

Равновесные двухфазные состояния жидкость-пар могут существовать только при определенных давлениях и температурах $P(T)$. На диаграмме P, T Рис 25 эти точки дадут кривую заканчивающуюся в точке $P_{кр}, T_{кр}$.

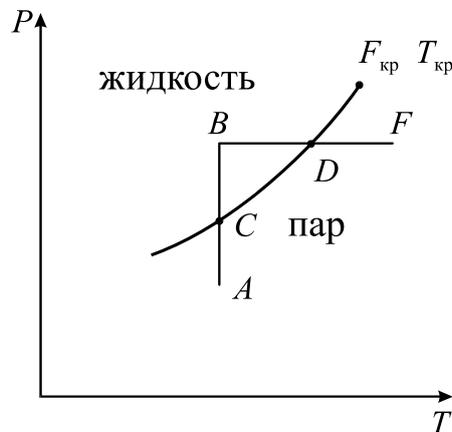


Рис. 25. Кривая равновесия двух фаз $P(T)$ жидкость – пар

Если не изменяя температуры повышать давление (прямая АВ), то при пересечении кривой равновесия (точка С) часть пара сконденсируется, превратившись в жидкость. Если при этом не изменять объём то соотношение жидкость пар будет неизменным. При дальнейшем повышении давления, после пересечения кривой равновесия весь пар превратится в жидкость. Если двигаясь из точки В по изотерме (прямая ВF) мы снова достигнем кривую равновесия в точке D, часть жидкости испарится и после пересечения кривой равновесия вся жидкость перейдёт в газообразное состояние. Такие же кривые равновесия существует между состояниями в виде жидкости и твёрдого тела, твёрдого тела и газа, их совокупность называют диаграммами состояния. На рис26 приведены кривые равновесия – диаграммы состояния.

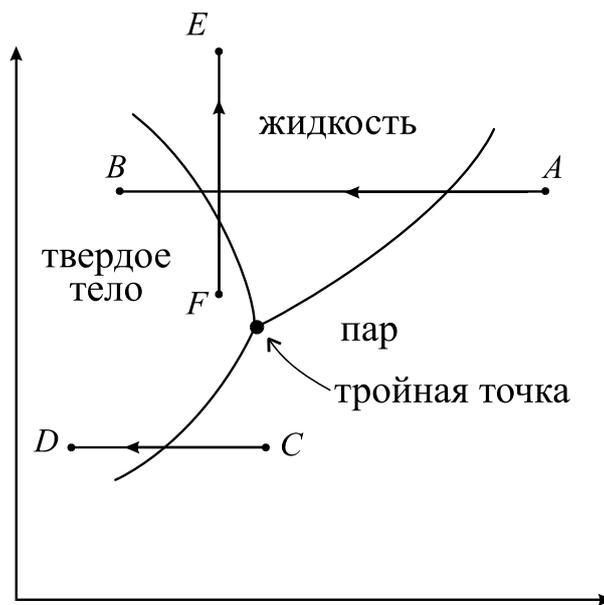


Рис. 26. Равновесие трех фаз

В точке ТЧ кривые равновесия жидкость-пар, жидкость-твёрдое тело, твердое тело-газ пересекаются образуя так называемую тройную точку. Только в ней при определённом давлении и температуре могут сосуществовать в равновесии все три агрегатные состояния вещества. Для воды температура тройной точки лежит на 0,008 °С выше температуры плавления льда при атмосферном давлении. Давление насыщенного пара в тройной точке воды составляет 4,58 мм.рт.ст.

То, что при понижении температуры при постоянном давлении, скажем атмосферном, газообразное состояние переходит в жидкое, затем в твёрдое мы знаем (прямая АВ). Так пары воды сначала конденсируются в воду, а затем замерзают, превращаясь в лёд. Но если мы будем понижать температуру находясь ниже тройной точки – прямая CD, то пар превратится в лёд минуя жидкую фазу. При движении в обратном направлении DC лёд испарится, не превращаясь в жидкость. Можем мы превратить лёд в жидкость при температурах ниже 0 °С, да например, двигаясь по изотерме FE, находящейся левее тройной точки. Это демонстрирует такой опыт. На ледяной брусок лежащий горизонтально на двух опорах, накидывают проволочную петлю с подвешенным к ней грузом. Если давление под петлёй достаточно большое, лёд под ней тает, вода выдавливается поверх петли и замерзает над ней. В итоге, петля пройдя через весь брусок оставляет его целым. С этим же эффектом отчасти связана наша возможность катания на коньках.

§13. Термодинамика излучения

Любые системы, состоящие из множества частиц, должны подчиняться законам термодинамики. В этом смысле излучение, которое можно представить как газ фотонов, не может быть исключением. При нагревании полости, она будет заполняться излучением и как в случае пара над жидкостью установится динамическое равновесие между числом излучаемых поверхностью фотонов и числом поглощаемых. Это равновесие наступит при определённой плотности излучения, которая зависит от температуры и свойств поверхности полости. При равновесии температура излучения (газа фотонов) будет равна температуре стенок и как в случае газа, излучение будет иметь температуру, объём и оказывать давление на стенки полости. Плотность энергии излучения в разных частотных диапазонах будет разная $U(\nu)$ и в диапазоне частот $\nu \div \nu + d\nu$ будет $U(\nu) d\nu$, тогда средняя плотность излучения во всём диапазоне частот будет $\bar{u} = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu$, а полная энергия излучения в полости объёмом V будет $U = \bar{u} * V$ распределение плотности излучения от частоты получено Планком:

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)},$$

отсюда средняя плотность энергии излучения от длины волны

$$\bar{u}(\lambda, T) = \frac{U}{V} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/kT\lambda} - 1)}$$

вид этого распределения приведен на рис 27

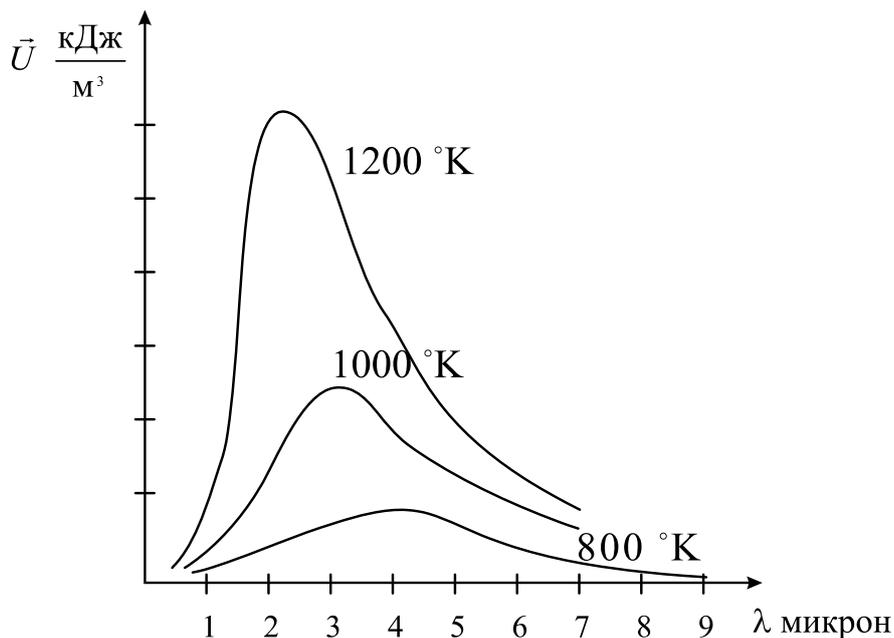


Рис. 27. Плотность энергии излучения в зависимости от длины волны для разных температур

Как можно было ожидать, оно похоже на распределение Максвелла. Положение максимума плотности излучения определяется температурой и согласно закону Вина, произведение длины волны излучения в максимуме на температуру есть константа. $\lambda_{\text{макс}} T = b = 0,288 \text{ м} * \text{град}$. Температура поверхности Солнца около 6000 °K, соответственно длина волны в максимуме излучения 4800 Å⁰ или 0,48 мкм т.е. лежит в видимом диапазоне, соответствующем зелёному свету. Вся совокупность длин волн излучаемых Солнцем воспринимается человеком как белый свет. Человеческое зрение

устроено так, что соответствующим образом подобранная смесь красного, зеленого и синего цветов будет нами восприниматься как белый цвет. Меняя интенсивность компонент этой смеси, мы будем видеть всю палитру возможных цветов. Это используется в мониторах и телевизорах, в которых реально присутствует только три цвета. Для ламп накаливания с температурой нити около $2000\text{ }^{\circ}\text{K}$ этот максимум $\lambda_{\text{макс}} \approx 1,5\text{ мкм}$ будет лежать в инфракрасном диапазоне и такие лампы больше греют, чем светят.

Взаимодействие вещества со светом зависит от длины волны. Пусть на пластинку из некоторого материала падает поток излучения, интенсивность (поток энергии)

которого в некотором диапазоне длин волн $J_0(\lambda)d\lambda$ Рис 28 Часть излучения $J_R(\lambda)d\lambda$ отразится от поверхности, часть $J_D(\lambda)d\lambda$ пройдет сквозь пластинку, часть $J_A(\lambda)d\lambda$ поглотится в пластинке. Сумма этих

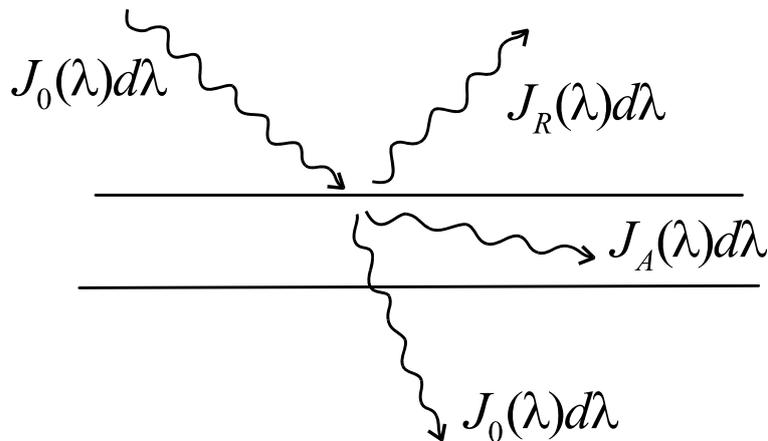


Рис. 28. Ошибка. Поток насквозь - J_D

компонент будет $J_R(\lambda)d\lambda + J_D(\lambda)d\lambda + J_A(\lambda)d\lambda = J_0(\lambda)d\lambda$ равна интенсивности падающего потока света, поделив все члены на неё, мы получим: $\frac{J_R}{J_0} + \frac{J_D}{J_0} + \frac{J_A}{J_0} = 1$.

$\frac{J_R}{J_0} = R(\lambda)$ называют отражательной способностью, $R(\lambda) = 1$, $D(\lambda) = A(\lambda) = 0$ зеркальное

тело. $\frac{J_D}{J_0} = D(\lambda)$ называют прозрачностью, $D(\lambda) = 1$, $R(\lambda) = A(\lambda) = 0$ - абсолютно

прозрачное тело. $\frac{J_A}{J_0} = A(\lambda)$ поглощательная способность, $A(\lambda) = 1$, $D(\lambda) = R(\lambda) = 0$

абсолютно черное тело. Назовём серым телом, тело которое поглощает только часть падающего излучения $A_\zeta < 1$.

Поместим в полость, стенки которой нагреты до некоторой температуры T , серое и черное тела. При равновесии $T_q = T_c = T_{\text{излучения}} = T_{\text{стенок}}$, а количество поглощаемой каждым телом энергии равно количеству излучаемой. Плотность энергии излучения везде, при равновесии будет одинакова, так что на единицу поверхности падает одинаковый поток излучения $J_0(\lambda)d\lambda$. Поскольку при равновесии поток поглощенной энергии должен быть равен потоку энергии излучения, для обоих тел получим $A_\zeta J_0(\lambda)d\lambda = \varepsilon_\zeta d\lambda$ и для серого

тела $A_c J_0(\lambda) d\lambda = \varepsilon_c d\lambda$. Поделив последнее выражение на предыдущее, получим $\frac{A_c}{A_q} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_q}$

поскольку $A_q = 1$ следует, что $\frac{\varepsilon_c}{A_c} = \varepsilon_q$ отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела, а зависит от излучательной способности абсолютно черного тела, т.е. Т. С другой стороны получается, что тела которые хорошо поглощают, так же хорошо должны излучать. Тепло закопченного чайника мы ощущаем издали, полированный до зеркального блеска чайник проявит свою температуру только при прикосновении.

Пользуясь законами термодинамики можно показать, что свет оказывает давление. Возьмем канал Рис 29 с зеркальными стенками, в торцах которого установлены стенки нагретые до разных температур $T_1 < T_2$. У торцевых стенок расположены две зеркальные перегородки, которые мы можем убирать или передвигать вдоль канала.



Рис. 29.

Уберём зеркальную перегородку у стенки с T_1 , излучение с этой температурой заполнит полость канала. Вернём эту перегородку на место и уберём перегородку у стенки с T_2 , затем переместим левую перегородку до стенки с T_2 . В результате мы часть энергии стенки с T_1 передали стенке с T_2 т.е. от менее нагретого тела более нагретому телу. Согласно второму закону термодинамики это возможно при совершении работы. Отсюда свет оказывает давление, при этом $P_2 > P_1$. В статфизике показывается, что давление света $P = \frac{1}{3} \bar{u}$, определяется плотностью внутренней энергии.

Важным является определение связи плотности энергии излучения \bar{u} и плотности потока излучения j с температурой и свойствами тела. Эту связь определили экспериментально $\bar{u} = \sigma_1 T^4$, а $j = \frac{1}{4} c \bar{u} = \sigma_2 T^4$ для абсолютно черного тела. Для серых тел

перед σ появится множитель $0 < \varepsilon_c < 1$. Этот закон называется законом излучения Стефана-Больцмана, получившие его в результате многочисленных экспериментов.

Численные значения $\sigma_1 = 7.64 \cdot 10^{-16} \frac{\text{дж}}{\text{м}^3 \text{град}^4}$, $\sigma_2 = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \text{град}^4}$.

Пользуясь законами термодинамики, мы можем получить этот закон теоретически. Записав первый закон термодинамики в виде $TdS = dU + PdV$ продифференцируем его по V при $T = const$ получим $T \left(\frac{dS}{dV} \right)_T = \left(\frac{dU}{dV} \right)_T + P$. Учтя что $\left(\frac{dU}{dV} \right)_T = \bar{u}$, а $P = \frac{1}{3} \bar{u}$ мы,

пользуясь соотношениями Максвелла $T\left(\frac{dP}{dT}\right)_V = \left(\frac{dS}{dV}\right)_T$ получим $\left(T\left(\frac{dP}{dT}\right)_V = \bar{u} + \frac{1}{3}\bar{u}\right)$, поскольку $\left(\frac{dP}{dT}\right)_V = \frac{1}{3}\left(\frac{du}{dT}\right)_V$ получим уравнение $T\frac{1}{3}\frac{du}{dT} = \frac{4}{3}u$ решение его даст $\ln u = 4\ln T + c$ или $u = \sigma_1 T^4$. Плотность энергии излучения пропорциональна четвёртой степени температуры. Плотность потока излучения $j = \frac{1}{4}c\bar{u} = \sigma_2 T^4$. Такая сильная зависимость от температуры приводит к тому, что в обычных условиях при температурах выше 400 ÷ 500 °С теплообмен осуществляется за счет излучения. Солнце, имея температуру 6000 °К, излучает огромную энергию, так что на орбите Земли поток этого излучения составляет около $1600 \frac{вт}{м^2}$, если мы научимся этим пользоваться энергетическая проблема будет видимо решена. Интересно, что если считать Солнце и Землю абсолютно черными телами, для равновесной температуры Земли мы получим температуру около 0 °С

Этот краткий экскурс в молекулярную физику и термодинамику конечно не охватывает всего богатства явлений, но будем надеяться позволит разбираться во многих явлениях с которыми мы сталкиваемся в жизни.

§14. Примеры задач, заданий и контрольных по модулю «Молекулярная физика и термодинамика»

В заключение этих разделов приведем некоторые задачи, которые давались на контрольной и в заданиях, а также задачи, которые полезно разобрать самостоятельно.

Задачи задания по модулю «Молекулярная физика и термодинамика»

1. Оценить число молекул в воздушном шарике диаметром 20см. при нормальных условиях. Оценить число молекул в капле струйного принтера, приняв диаметр капли 10мкм., а её молекулы в основном молекулы этилового спирта C₂H₅OH.
2. Броуновская частица хаотически движется в воде. Чему равна средняя кинетическая энергия броуновской частицы, плотность которой примерно равна плотности воды, диаметром 5 мкм.? Чему равна среднеквадратичная скорость этой частицы?
3. Пользуясь распределением Максвелла по скоростям $dW(V)$ $dW(v) = 4\pi(m/2kT)^{3/2} \exp(-mv^2 / 2kT)v^2 dv$. Получить распределение молекул по энергиям $dW(E)$, приняв $E = mv^2/2$
4. Записав распределение Максвелла в цилиндрической системе координат найти зависимость тока электронов от запирающего напряжения в длинном цилиндрическом вакуумном диоде, на оси которого находится раскаленная нить эммитирующая электроны. Температура нити T.
5. Оценить давление и длину пробега молекул на высоте полета над Землей 10 Км. Температуру воздуха считать постоянной равной -20 С⁰, а ускорение 10м/сек²
6. На малое отверстие откачанного до глубокого вакуума сосуда, направлен поток молекул с одинаковой скоростью V₀, с концентрацией их в пучке n₀. Найти равновесную концентрацию и температуру молекул в сосуде.
7. Найти КПД цикла состоящего из двух изобар P₁ и P₂, и двух изохор V₁ и V₂
8. Нагревается или охлаждается газ при расширении от V₀ до 2V₀? Если в этом процессе PV²= const, что будет при P²V= const? Найти тепло, которое нужно подводить или отводить в этом процессе.

9. По известным постоянным a и b реального газа рассчитать его критические температуру, давление и объем.
10. Приняв Солнце за черное тело с температурой 6000 K^0 , найти равновесную температуру Земли, считая Солнце единственным источником её нагрева.

Задачи контрольной

1. Два одинаковых сосуда соединены малым отверстием. Сосуды имеют температуру T_0 , концентрация молекул в сосудах n_0 . Температуру одного из сосудов увеличили в 4 раза, найти изменение концентрации и длины пробега молекул в сосудах.
2. Какое количество тепла отдает моль идеального газа при изобарическом обратимом охлаждении, если затраченная на сжатие газа в этом процессе работа равна 10 Дж.
3. Найти мощность двигателя компрессора, если он изотермически, за одну секунду повышает давление моля идеального газа в три раза. Чему будет равна необходимая мощность, если процесс адиабатический? Исходные состояния газа одинаковы и соответствуют нормальным условиям.
4. При нагреве моля идеального газа на 1 K^0 при постоянном объеме, его давление увеличивается на 10 паскаль. При нагреве его на 1 K^0 при постоянном давлении, объем увеличивается на 1 Дм^3 . Найти исходные давление, объем и температуру газа.
5. Найти температуру кипения воды на вершине горы высотой 5 км. Теплота парообразования воды 540 кал/г , изменением температуры окружающего воздуха пренебречь.

Задачи для семинарских занятий и для самостоятельного решения

1. Какое количество тепла отдает моль идеального, одноатомного газа при его изобарическом сжатии, если при этом совершена работа в 10 Дж?

Согласно условиям $\delta Q = -c_v dT - PdV = -c_v dT - A$, т.к. $P(V_2 - V_1) = A$, а

$V = \frac{RT}{P}$ получаем что $A = R(T_2 - T_1)$. Отсюда $T_2 - T_1 = \frac{A}{R}$, тогда

$\delta Q = -c_v \frac{A}{R} - A = -(c_v / c_p - c_v + 1) A = c_p A / R$, $c_p = 5/2R$, следовательно

$\delta Q = 50/2 = 25 \text{ Дж}$.

2. Газ изобарически охлаждают от T_1 до T_2 , при этом совершают работу в 12 Дж. Найти количество тепла, отданное газом.

$Q = c_v (T_2 - T_1) + P(V_2 - V_1) = c_v (T_2 - T_1) + R (T_2 - T_1) = -c_p A / R = -30 \text{ Дж}$.

3. Идеальный газ первоначальным объемом в 2,2 литра сжали адиабатически, так, что его температура изменилась от 0 до $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ $c_p / c_v = 1,4$. Какая при этом совершена работа?

Так как процесс адиабатический вся работа пошла на увеличение внутренней энергии газа т.е $A = \nu c_v (T_2 - T_1) = 0,1 * 3/2 * 8,3 * 100 = 120 \text{ Дж}$.

4. Оцените степень сжатия в дизельном двигателе, если для самовоспламенения рабочей смеси требуется температура в $500 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

$T_k = 500 + 273 \approx 800 \text{ }^{\circ}\text{K}$. $T_H V_H^{\gamma-1} = T_K V_K^{\gamma-1}$, $T_K / T_H = 800/273 \approx 3$

$z = (V_H / V_K)^{\gamma - 1}$ следовательно $(V_H / V_K) = 32,5 = 15,5$. В реальных дизельных двигателях, для увеличения КПД степень сжатия доводят до 20 -25, а для увеличения удельной мощности используют турбонаддув, повышая начальную плотность воздуха.

5. Два адиабатических сосуда одинакового объема V_0 наполнены одинаковыми массами идеального газа и находятся под давлением P_1 и P_2 соединяются трубкой. Найти изменение энтропии системы при переходе в равновесие

Отличие начальных давлений означает разную начальную температуру газа

$T_1 = P_1 V_0 / \nu R$ и $T_2 = P_2 V_0 / \nu R$ т.к. $U_1 + U_2 = U_K$ $T_K = (T_2 + T_1)/2$. Изменив, равновесным образом температуру в сосудах от начальной до конечной и расширив объем каждого газа в два раза, найдем суммарное изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \sum \left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{c dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{P dV}{V} \right) = \nu C_v \ln((T_2 + T_1)/2 T_1 T_2) + 2 \nu R \ln 2$$

6. Идеальный одноатомный газ, в количестве 10 молей, расширяется без подвода тепла необратимым образом совершая работу так, что температура изменяется от 300 0К до 200 0К. После этого газ квазистатически сжимается сначала изотермически, затем адиабатически и возвращают в исходное состояние. При изотермическом сжатии совершается работа 15 Дж. Найти изменение энтропии.

$$A = RT \ln V_2/V_1, \Delta S = A/T_2 - \nu C_v(T_1 - T_2)/T_2 = 13 \text{ Дж.}$$

7. Из сосуда объемом V газ истекает в вакуум через малое отверстие площадью S . Как во времени нужно подводить тепло к газу, чтобы его температура оставалась неизменной? Как будет изменяться температура газа если сосуд адиабатически изолирован? Начальная плотность газа n_0 .

8. В центрифуге радиуса R , вращающейся с угловой скоростью ω , находится смесь двух газов с молекулярными весами μ_1 и μ_2 и количеством молекул N_1 и N_2 . Найти отношение плотностей газов у внешней стенки и на оси центрифуги. Сделать оценки для смесей U^{235} — U^{238} ; $R = 10 \text{ см}$, $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$.

9. Одним из способов определения отношения теплоемкости при постоянном давлении c_p к теплоемкости при постоянном объеме c_v является следующий опыт. Из сосуда, в котором находится газ при комнатной температуре и под давлением P_1 , большим атмосферного P_0 , приоткрыв кран, выпускают газ, пока избыток давления не исчезнет. Затем кран закрывают и, после того как температура в сосуде вновь станет комнатной, измеряют давление в сосуде P_2 . Найдите по этим данным найти показатель адиабаты газа γ ?

10. Во сколько раз изменится средняя скорость молекул газа при его адиабатическом сжатии от V_1 до объема V_2 ?

10. Найти приращение энтропии воды массой $m = 0,1 \text{ кг}$ при нагревании ее от температуры $t_1 = 00 \text{ С}$ до температуры $t_2 = 1000 \text{ С}$ и последующем превращении воды в пар.

Решение

Найдем отдельно изменение энтропии воды при нагревании ΔS_1 и при превращении ее в пар ΔS_2 . При нагревании

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_{уд} m \cdot dT}{T}$$

где теплоемкость c заменена произведением удельной теплоемкости $c_{уд}$ массы воды. Интегрируем

$$\Delta S_1 = c_{y0} m \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

и после вычислений получаем $\Delta S_1 = 131$ Дж/К.

При испарении воды температура остается постоянной. Поэтому, интегрируя формулу (5.3) при постоянной температуре, получим

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{исп}}{T_2} = \frac{r m}{T_2},$$

где r — удельная теплота испарения воды. После вычислений получаем $\Delta S_2 = 606$ Дж/К, $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737$ Дж/К.

11. Определить изменение энтропии, если температура одного моля идеального газа увеличивается в $e \approx 2,7$ раз при:

- изобарическом,
- изохорическом,
- адиабатическом процессах.

Решение

Если первое начало термодинамики записать в виде $\delta Q = dU + P \cdot dV$ и заменить δQ , используя равенство $dS = \frac{\delta Q}{dT}$, получим $T \cdot dS = dU + P \cdot dV$. Учтем, что изменение

внутренней энергии одного моля идеального газа dU_M можно записать в виде $dU_M = C_V \cdot dT$, где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда

$$T \cdot dS = \nu \cdot C_V \cdot dT + P \cdot dV$$

а) При изобарическом процессе, используя уравнение Клапейрона – Менделеева $PV = \nu RT$, можно получить формулу $P \cdot dV = \nu R \cdot dT$. С учетом этого перепишем первое начало термодинамики

$$T \cdot dS = \nu \cdot C_V \cdot dT + \nu \cdot R \cdot dT \quad \text{или} \quad dS = \nu \cdot (C_V + R) \cdot \frac{dT}{T} = \nu \cdot C_P \cdot \frac{dT}{T}$$

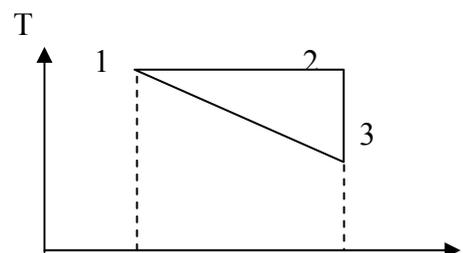
После интегрирования последней формулы получаем

$$\Delta S = \nu \cdot C_P \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_P \ln e = \nu \cdot C_P$$

б) При изохорическом процессе $dV=0$. Тогда $T \cdot dS = \nu \cdot C_V \cdot dT$ или $dS = \nu \cdot C_V \frac{dT}{T}$. После интегрирования этой формулы получаем

$$\Delta S = \nu \cdot C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu \cdot C_V \ln e = \nu \cdot C_V$$

в) При адиабатическом процессе $\delta Q = 0$ и, соответственно, $\Delta S = 0$.



12. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл, в пределах которого абсолютная температура изменяется в два раза, а сам цикл в координатах T–S имеет вид, показанный на рисунке 5.1. Найти коэффициент полезного действия η цикла.

Решение

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

По определению Q_1 — количество теплоты, получаемое тепловой машиной за цикл, и Q_2 количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику.

Используя $Q = \int T \cdot dS$. Учтем, что на диаграмме величина интеграла соответствует площади криволинейной трапеции под линией процесса. Интегрирование можно разбить на три участка 1-2, 2-3 и 3-1. На участке 1-2 $dS > 0$. Тогда $Q_{1-2} = T_1 \int dS = T_1 \Delta S_{1-2} > 0$ (машина получает количество теплоты). На участке 2-3 $dS = 0$ (теплообмена нет). На участке 3-1 $dS <$

0. Тогда $Q_{3-1} = \int T dS = \frac{T_1 + T_3}{2} \Delta S_{3-1} < 0$ (машина отдает количество теплоты холодильнику). Учтем, что $T_1 = 2T_3$ и $\Delta S_{1-2} = -\Delta S_{3-1} = -\Delta S$. Тогда

$$\eta = \frac{T_1 \Delta S - \frac{3}{4} T_1 \Delta S}{T_1 \Delta S} = 0,25$$

13. Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, если при адиабатическом расширении рабочей смеси давление уменьшается в 2 раза. Постоянная адиабаты $\gamma = 1,5$.

Решение

Цикл Карно состоит из двух адиабат и двух изотерм (рис. 5.3). Его КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Для определения отношения минимальной T_2 и максимальной T_1 температур в цикле можно использовать

$$PV^\gamma = \text{Const}$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона-Менделеева, его можно преобразовать к виду

$$P^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{Const}$$

Тогда для участка 2-3 $P_2^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1 = P_3^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2$ или $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_3} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

По условию задачи $\frac{P_2}{P_3} = 2$. С учетом этого рассчитаем значение КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 2^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0,21.$$

Список основной и дополнительной литературы

1. Конспект лекций (в разработке)

2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*, т.1-5. М.: Мир, 1977.
3. Астахов А.В. *Курс физики*, т.2. М.: Наука, 1977.
4. Сивухин Д.В. *Общий курс физики*, т.2. М.: Наука, 1974.
5. Ландау Л.Д., Ахиейзер А.И., Е.М. Лифшиц. Курс общей физики.
6. И.А. Квасников Молекулярная физика МГУ, Эдиториал УРСС, 1998г.
7. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2003.
8. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2008.

Глава 3 Электричество и магнетизм

§1. Введение. Системы единиц

Терминам электричество и магнетизм мы обязаны древним грекам. Электричество происходит от слова электра – янтарь, который при натирании наэлектризовывался и притягивал легкие пылинки. Вблизи города Магназея находили камни, которые притягивались или отталкивались друг от друга, в зависимости от взаимной ориентации. Отсюда магнитные камни, магниты. Наша Земля является гигантским магнитом, с полюсами почти совпадающими с Северным и Южным географическими полюсами. Первое практическое применение магнетизма принадлежит китайцам, изобретшим в 11 веке компас. Впоследствии выяснилось, что магнитный и географический полюс не совпадают, в настоящее время разница составляет около 150 км., поэтому вблизи полюсов компас почти бесполезен. Интересно, что Земля обладает зарядом и электрическим полем, средняя величина которого составляет около 130 в/м.

Достаточно долго электрические и магнитные явления изучались независимо, и это привело к некоторой путанице в системе единиц электромагнетизма. В одной основными единицами были см, грамм, секунда – СГС. Соответственно сила $F=ma$ имела размерность $\frac{г * см}{сек^2}$, а единица силы была названа диной. В этой системе единица заряда определялась

так, чтобы в законе Кулона $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ коэффициент был равен единице, $k = 1$. Отсюда

размерность заряда $дин^{1/2} см$. Эта система единиц называлась СГСЭ (электростатическая)

В другой системе СГСМ (магнитная) единица заряда и соответственно тока $J = \frac{dq}{dt}$ определялись так, что бы в законе Ампера по взаимодействию проводников с током

$F = k \frac{J_1 J_2 d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}$ коэффициент $k = 1$ был равен единице. Отсюда единица тока

$1 СГСМ = \sqrt{динь}$. Соотношение токов в этих единицах $J_{СГСЭ} = \frac{1}{c} J_{СГСМ}$, где c - есть скорость

света, как показал Столетов. Соответственно соотношение единиц тока в СГСМ и в СГСЭ $1_{ед. СГСМ} = 3 * 10^{10} \frac{см}{сек} 1_{ед. СГСЭ} = 10$ ампер. Единица напряжения в СГСЭ $1_{ед. СГСЭ} = 300$ вольт, а

$1_{ед. СГСМ} = 10^{-8}$ вольт. Гауссу принадлежит идея объединить эти системы, положив в законе ампера $k = \frac{1}{c}$. В этой системе напряженность электрического и магнитного полей имеют

одинаковую размерность и в этом заключается глубокий физический смысл т.к. это разные проявления единого электромагнитного поля. По этим причинам в физических учебниках по электромагнетизму используется Гауссова система единиц. Мы также будем придерживаться этой системы при изложении, давая при необходимости вид законов в СИ.

§2. Электрическое поле в вакууме

Силу взаимодействия между двумя заряженными телами в вакууме определяет экспериментально установленный Кулоном закон $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Сила взаимодействия пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, коэффициент пропорциональности зависит от выбора системы единиц, в

Гауссовой системе $k = 1$, в системе СИ $k \approx 9 \cdot 10^9$. Заряженные одинаковым знаком тела отталкиваются, разноименные заряды притягиваются. Принято, что у электрона отрицательный заряд, у протона положительный. Зная выражение для силы взаимодействия можно найти потенциальную энергию взаимодействия зарядов. Если расстояние между зарядами увеличится на dr , то будет произведена работа $dA = \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$, которая будет равна

убыли потенциальной энергии $-dU = \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -q_1 q_2 d\left(\frac{1}{r}\right)$, отсюда $U = \frac{q_1 q_2}{r}$. Константу, с

точностью до которой определяется потенциальная энергия, мы положили равной нулю, с тем, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль при бесконечном удалении зарядов друг от друга. Эта потенциальная энергия равна работе по сближению зарядов q_1 и q_2 с бесконечно большого взаимного расстояния до расстояния r . Это выражение можно

записать в виде $U = A = q_1 \varphi$, где $\varphi = \frac{q_2}{r}$ называют потенциалом создаваемым зарядом q_2 на

расстоянии r от него. Фактически потенциал есть работа по перемещению единичного заряда $q = 1$ из бесконечности в данную точку. Поскольку потенциальная энергия задаётся с

точностью до константы, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1}$ задаётся однозначно и

широко используется в практических приложениях и называется напряжением.

Закон Кулона можно записать в виде $\vec{F} = q_1 \vec{E}_2$, где $\vec{E}_2 = \frac{q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$, называют напряженностью

электрического поля создаваемую зарядом q_2 в на расстоянии r_{12} от него. Таким образом, вектор напряженности электрического поля направлен от положительно заряженного тела, величина его пропорциональна заряду порождающего это поле и обратно пропорциональна квадрату расстояния от него. В случае системы зарядов, величина результирующей напряженности электрического поля будет определяться векторной суммой полей созданных отдельными зарядами. Этот факт называют принципом суперпозиции. Сила действующая на заряд q , внесенный в это поле будет $\vec{F} = q \vec{E}$, здесь \vec{E} напряженность результирующего поля в точке расположения заряда q , создаваемая остальными зарядами.

Заряд сложного тела равен алгебраической сумме зарядов его составляющих, даже при ядерных реакциях суммарный заряд до реакции всегда равен суммарному заряду после реакции. Этот факт называют законом сохранения заряда и он является фундаментальным законом природы.

Из $\vec{F} = q \vec{E}$ и $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}$, получается, что $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}$, а разность потенциалов

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} * d\vec{l}$$

Приведенные соотношения соответствуют Гауссовой системе единиц. (сантиметр, грамм, секунда) заряд электрона в ней $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ единиц CGSE. В системе СИ эти выражения

будут: $\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^3}$, $\varphi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$ В этой системе единичный заряд называют кулоном, который

определяется через величину тока. Ток в один ампер соответствует перетеканию заряда в один кулон за одну секунду. Заряд электрона в этой системе $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ К}$. Разность потенциалов измеряется в вольтах [в]. Единица разности потенциалов в CGSE соответствует 300в в СИ. Напряженность электрического поля измеряется в вольтах на метр

$\left[\frac{в}{м} \right]$. Константа ϵ_0 , появляющаяся в СИ, называется диэлектрической проницаемостью

вакуума и равна $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{кулон}}{\text{вольтметр}}$. При решении задач имеющих прикладное

значение удобнее пользоваться СИ, но при обсуждении физических закономерностей более естественной будет Гауссова система.

Для графического изображения электрического поля пользуются электрическими силовыми линиями, которые проводятся так, что в каждой точке их направление совпадает с направлением действующего в этой точке электрического поля. Из этого следует, что силовые линии электростатического поля не пересекаются. Силовые линии электростатического поля не могут также быть замкнутыми, поскольку при движении вдоль замкнутой силовой линии совершалась бы работа, а это противоречит закону сохранения энергии. Поэтому силовые линии могут начинаться и оканчиваться на зарядах или начинаясь на заряде другой конец силовой линии может уходить в бесконечность (вообще говоря, и в этом случае там будут заряды на которых они оканчиваются) Сразу заметим, что в случае переменных электрических и магнитных полей это не выполняется. В переменном магнитном поле, появляется вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.

Одной из задач электростатики является расчет электрических полей и потенциалов по заданному распределению зарядов. Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяет найти решение любой задачи электростатики, если известно положение всех зарядов в пространстве. При небольшом количестве зарядов с известным их расположением, мы можем найти напряженность поля создаваемую каждым из зарядов \vec{E}_i , а затем пользуясь принципом суперпозиции найти результирующую напряженность как $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ векторную сумму полей от каждого заряда в интересующей нас точке. Однако часто распределение зарядов заранее неизвестно, или вычисление векторной суммы весьма громоздки. В этом случае применяются другие методы. Поскольку результирующий потенциал в данной точке, создаваемый системой зарядов есть алгебраическая сумма $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$, то бывает проще найти $\varphi(\vec{r})$, а затем $\vec{E} = -grad\varphi$.

§3. Теорема Гаусса

Во многих случаях, при наличии симметрии распределения зарядов, весьма эффективно применение теоремы Гаусса, к нахождению напряженности электрического поля, создаваемого системой зарядов. Введем понятие потока вектора напряженности электрического поля. Возьмем элементарную площадку площадью dS , эту площадку характеризуют величина этой площади и её ориентация в пространстве. Обе эти величины будет характеризовать вектор $d\vec{S}$, длина которого численно равна площади, а направление задаёт нормаль к этой поверхности. Считая, что в пределах небольшой площадки $\vec{E} = -grad\varphi$ можно пренебречь изменением величины и направления \vec{E} , назовём элементом потока вектора напряженности скалярное произведение $d\Phi = \vec{E} * d\vec{S}$. Полный поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность будет определяться интегралом $\oint_S \vec{E} * d\vec{S}$. Теорема Гаусса утверждает, поток электрического поля через замкнутую поверхность площадью S пропорционален суммарному заряду,

находящемся внутри этой поверхности т.е. $\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi \sum q$. В случае непрерывного распределения заряда с некоторой объёмной плотностью $\rho(x, y, z)$ применив теорему Гаусса к элементарному объёму $dx dy dz$ мы получим теорему Гаусса в дифференциальной форме $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, учтя что это $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ мы получим дифференциальное уравнение $\text{divgrad} \varphi = -4\pi\rho$, которое является основным уравнением не только электростатики, но и всей электродинамики. Дифференциальный оператор $\Delta = \text{divgrad}$, называют оператором Лапласа

Уравнение $\Delta \varphi = -4\pi\rho$ называют уравнением Пуассона, а частный случай $\Delta \varphi = 0$ называют уравнением Лапласа. В декартовой системе координат оно будет

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

§4. Типичные задачи электростатики

Проверим работу теоремы Гаусса для одиночного заряда. На расстоянии r от заряда возьмем сферическую поверхность, её площадь $S = 4\pi r^2$, напряженность поля на этой поверхности везде $E = \frac{q}{r^2}$ поэтому получим $\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi q$ в согласии с теоремой Гаусса.

Понятно, что поток не изменится, если мы изменим радиус сферы или заряд будет смещён от центра сферы. Если вместо вектора \vec{E} в расчете потока использовать вектор плотности потока жидкости $\vec{j} \frac{e}{\text{м}^2 \text{сек}}$ вытекающей из тонкой трубки в безграничное пространство, то в

стационарном случае полный поток $J \frac{e}{\text{сек}}$ через любую поверхность охватывающую источник будет одним и тем же и равен J . Это будет выполняться для любого вектора величина которого зависит от расстояния до источника как $\frac{1}{r^2}$. Первое следствие этой

теоремы в нашем случае следующее, напряженность электрического поля точечного заряда и такого же заряда равномерно распределённого на поверхности сферы или сферически симметрично заряженного шара, на расстояниях r превышающих их размеры будет одинакова и равна $E = \frac{q}{r^2}$. Если поверхность не охватывает ни одного заряда, хотя и

проходит рядом с ними то $\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 0$. Взяв сферическую поверхность проходящую внутри

заряженной сферы из последнего равенства мы приходим к заключению, что внутри заряженной сферы $E = 0$. Соответственно напряженность поля равномерно заряженного шара радиуса R , при $r < R$, будет определяться только зарядом внутри сферы r , т.е.

$$E = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{qr}{R^3}. \text{ Для демонстрации эффективности расчета полей с использованием}$$

теоремы Гаусса, рассчитаем поле равномерно заряженной бесконечной нити используя принцип суперпозиции и применив теорему Гаусса. Бесконечно длинная означает что мы находим поле в районе центра заряженной нити на расстоянии $r \ll L$ много меньшем её длины. На расстоянии r от точки А на нити, кусочек заряженной нити длиной dx ,

расположенный на расстоянии x от точки A будет создавать напряженность $E_+ = \frac{\rho dx}{x^2 + r^2}$ рис30.

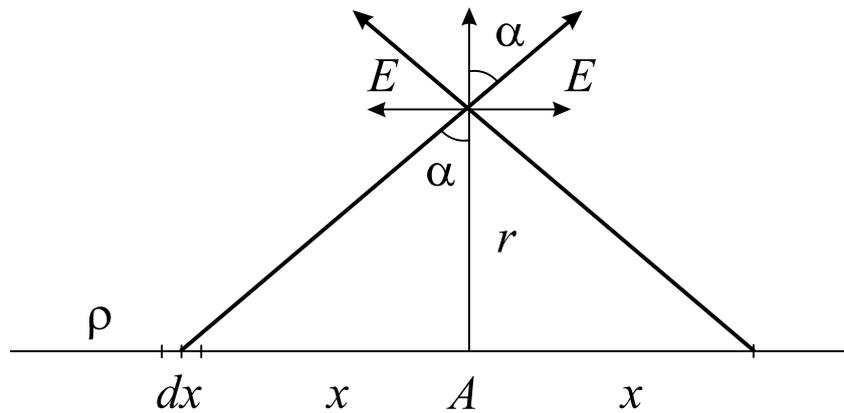


Рис. 30. Поле длинной заряженной нити

Здесь ρ заряд на единицу длины нити. Расположенный симметрично от точки A заряд ρdx будет создавать такую же напряженность поля но направленную под симметричным углом к r . В результате составляющие полей вдоль нити в сумме дадут 0, а составляющие вдоль направления r сложатся. Величина этих составляющих будет

$E_+ \cos \alpha = \frac{\rho dx}{x^2 + r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$. Результирующую напряженность поля в точке r даст интеграл

$$E = 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho x dx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\infty} \frac{\rho d(x^2 + r^2)}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\rho}{r}. \text{ Этот результат мы получили относительно легко,}$$

считая нить тонкой $d \ll r$, в случае толстой нити расчет сильно усложнится, хотя в итоге получится тот же результат. Применим теорему Гаусса для нахождения электрического поля однородно заряженной «толстой» нити. На расстоянии $r > d$ окружим нить цилиндрической поверхностью длины L . Рис31

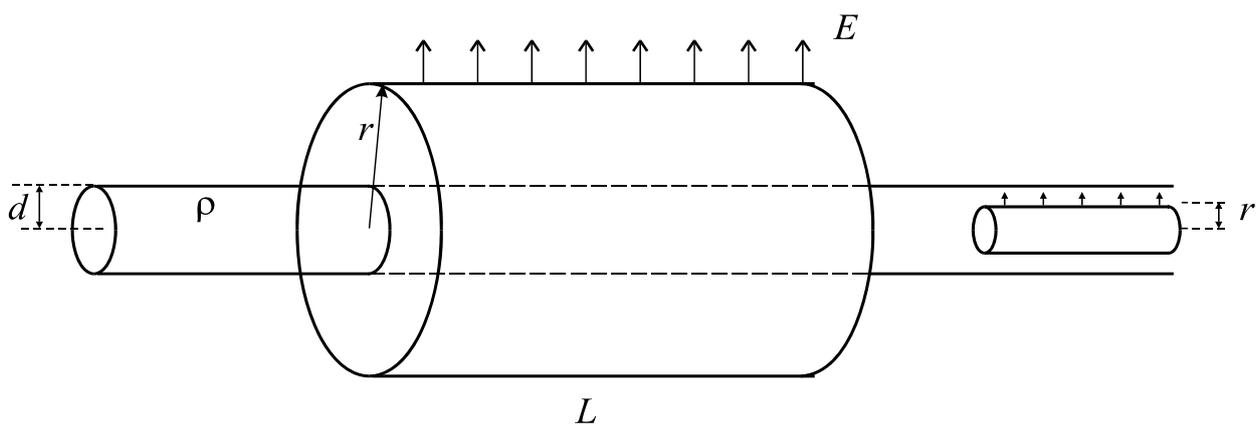


Рис. 31. Поле толстой заряженной нити

Из соображений симметрии вектор напряженности электрического поля \vec{E} будет ортогонален оси нити, а его величина будет постоянна на всей цилиндрической поверхности. Тогда поток вектора напряженности электрического поля через торцы цилиндра будет равен нулю, а через боковую поверхность $E 2\pi r L = 4\pi \rho L$, согласно теореме

Гаусса. В итоге $E = \frac{2\rho}{r}$, но в данном случае нам не понадобилось предположение $d \ll r$, более того мы также легко найдем напряженность поля и внутри однородно заряженной по объёму нити. Фактически нужно, что бы плотность объёмного заряда зависела только от r , т.е. $\rho = \rho(r)$. В заключение этого раздела найдём поле у поверхности «бесконечной» заряженной плоскости, т.е. найдем поле на расстоянии $h \ll L$ много меньшем размеров плоскости, вдали от её краёв, считая поверхностную плотность заряда $\sigma = \text{const}$. Возьмём цилиндрическую поверхность высоты h , радиуса r проходящую сквозь плоскость. Рис32.

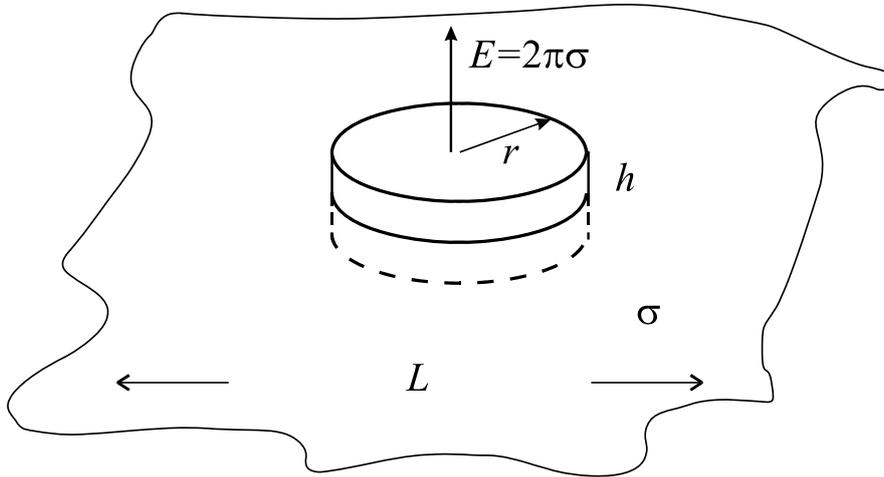


Рис. 32. Поле «бесконечной плоскости ($L \gg h$)

Из соображений симметрии вектор напряженности электрического поля должен быть ортогонален плоскости, поэтому поток вектора напряженности поля будет определяться только торцевыми поверхностями. Согласно теореме Гаусса $E2\pi r^2 = 4\pi q = 4\pi\sigma\pi r^2$. Отсюда $E = 2\pi\sigma$ и не зависит от расстояния до плоскости, естественно пока $h \ll L$ много меньше размеров плоскости, вдали от её краёв.

§5. Проводники в электрическом поле

К проводникам относятся металлы, электролиты, ионизованный газ, плазма. Их отличительной особенностью является наличие в их объёме свободных зарядов, которые при появлении электрического поля будут перемещаться под действием поля. Положительно заряженные частицы будут перемещаться вдоль направления поля, отрицательно заряженные в противоположном направлении. Это будет приводить к разделению зарядов и появлению электрического поля направленного противоположно внешнему. Это будет продолжаться, пока результирующее поле внутри объёма не станет равно нулю, а разделенные заряды будут сосредоточены на поверхности. При этом возникает несколько характерных особенностей:

1. Потенциал вдоль поверхности проводника постоянен, говорят, поверхность проводника эквипотенциальна. Действительно в противоположном случае появляется поле вдоль поверхности $\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} * d\vec{l}$, но тогда разделение зарядов продолжится, пока разность потенциалов не станет равна нулю $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

2. Вектор напряженности электрического поля у поверхности проводника ортогонален поверхности. Это определяется отсутствием поля вдоль поверхности проводника.

3. Поместим внутрь не заряженной толстостенной проводящей сферы заряд $+q$. За счет поля этого заряда появятся заряды на внутренней и внешней поверхности сферы. Знак заряда на внешней поверхности будет совпадать со знаком $+q$, а на внутренней поверхности будет противоположным, при этом величины этих зарядов будут одинаковы т.к. сфера не была заряжена. Проведя внутри проводящей сферы замкнутую поверхность мы придем к выводу, что заряд на внутренней поверхности равен по величине но противоположен по знаку заряду внесённого внутрь полости т.к. поле внутри проводника 0, а значит и суммарный заряд внутри нашей поверхности 0. Перемещение заряда внутри полости не будет изменять поле вне сферы которое будет в данном случае сферически симметрично и совпадать с полем точечного заряда $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, помещенного в центр сферы.

Перемещение заряда внутри полости будет приводить к изменению поверхностной плотности зарядов на внутренней поверхности, но на внешней поверхности это не будет приводить к перераспределению зарядов.

4. Внутри проводящей полости поля внешних зарядов равны 0, говорят, что замкнутые проводящие полости экранируют внешнее электрическое поле, это часто используют, экранируя чувствительные части приборов, компьютерной техники.

§6. Электрическое поле в диэлектриках

Эффект ослабления внешнего поля проявляется и в диэлектриках – веществах не проводящих электрический ток. По свойству молекул составляющих эти вещества их можно разделить на два класса. К одному классу можно отнести диэлектрики, состоящие из полярных молекул – молекул в которых их положительный заряд смещён относительно отрицательного заряда. Такую молекулу можно смоделировать диполем – системой из двух одинаковых по величине зарядов разного знака смещённых друг относительно друга на расстояние l . Количественной характеристикой диполя является дипольный момент $\vec{p} = ql\vec{l}$ произведение заряда на расстояние между ними, \vec{l} направлено от положительного заряда к отрицательному. Ко второму классу относятся молекулы, не имеющие дипольного момента, но он появляется во внешнем поле за счет деформации электронной оболочки. При внесении этих диэлектриков во внешнее электрическое поле за счет кулоновских сил дипольные моменты будут стараться ориентироваться против поля, хаотическое тепловое движение молекул будет мешать этому процессу, в итоге поле внутри диэлектрика будет состоять из внешнего поля и направленного против него некоторого результирующего поля диполей. Это последнее поле сильно неоднородно и мы будем в дальнейшем иметь ввиду его средние по объёму величины. Величина этого поля $\vec{E}_{\text{поляриз}}$ в итоге будет определяться средним результирующим полем в диэлектрике и в слабых полях пропорционально ему $\vec{E}_{\text{поляриз}} = \alpha\vec{E}$. Введем вектор электрической индукции \vec{D} , который в случае однородного поля равен вектору напряженности электрического поля свободных зарядов, т.е. зарядов не связанных с молекулами диэлектрика. В СГС в вакууме $\vec{D} = \vec{E}$. Учитывая, что среднее поле создаваемое поляризацией диэлектрика определяется не внешним полем, а результирующим полем внутри диэлектрика мы можем записать для поля внутри диэлектрика $\vec{E} = \vec{D} - \alpha\vec{E}$ или $\vec{E}(1+\alpha) = \vec{D}$. Величину $\epsilon = 1 + \alpha$ называют диэлектрической проницаемостью диэлектрика. Из простых молекул она самая большая у воды 80, у воздуха 1,0006, у фарфора 7, но у специальных керамик может достигать десятков тысяч. Можно говорить, что поляризация диэлектрика ослабляет внешнее поле в ϵ раз $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$.

Рассмотрим поведение этих векторов на границе раздела двух сред с ϵ_1 и ϵ_2 . Расположим границу раздела двух диэлектриков под углом не равным 90° относительно вектора внешнего поля. Соответственно векторы напряженности электрического поля и векторы электрической индукции в диэлектриках также не будут ортогональны линии раздела, но в однородных диэлектриках будут совпадать по направлению в каждой из сред. Разложим эти векторы на ортогональные и параллельные составляющие относительно границы раздела. Рис 33.

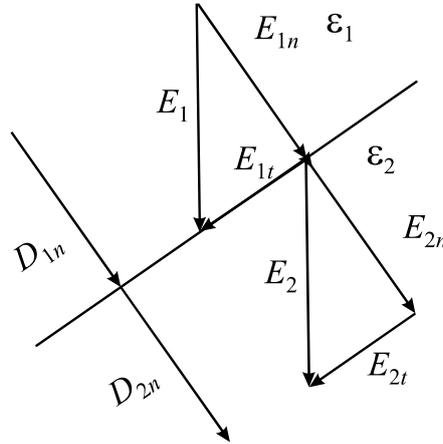


Рис. 33. Граничные условия для \vec{E} и \vec{D}

Появляющиеся на границе раздела поляризационные заряды σ_{12} создают поле перпендикулярное поверхности, поэтому ортогональные поверхности составляющие вектора напряженности электрического поля изменятся при переходе через границу на величину $E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma_{12}$. Параллельные поверхности (тангенциальные) составляющие напряженности изменяться не должны, поэтому $E_{1t} - E_{2t} = 0$, отсюда $E_{1t} = E_{2t} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$. Поле внешних зарядов не изменяется при переходе через границу, поэтому нормальные составляющие вектора индукции электрического поля непрерывны на границе $D_{1n} = D_{2n}$.

§7. Электрическая ёмкость. Конденсаторы

Один и тот же заряд q на проводниках различных размеров и формы создает относительно бесконечности разную разность потенциалов $\Delta\varphi$, но она всегда пропорциональна заряду $C\Delta\varphi = q$. Коэффициент пропорциональности C называют емкостью проводника. Потенциал проводника сферической формы относительно бесконечности $\Delta\varphi = \frac{q}{R}$, отсюда его емкость $C = R$. Электрическая ёмкость пропорциональна размерам и в СГС измеряется в сантиметрах. В СИ электрическая емкость измеряется в фарадах $1\text{ф} = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{СГС}}{300} = 9 \cdot 10^{11} \text{см}$. Важное практическое

применение имеют конденсаторы. Конденсатор состоит из двух проводников, называемых обкладками, заряженных одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами. И в этом случае разность потенциалов между обкладками пропорциональна заряду $C\Delta\varphi = q$, а

коэффициент пропорциональности будет определяться геометрией электродов и диэлектриком, разделяющим обкладки.

Плоский конденсатор. Найдем емкость конденсатора, представляющего две проводящие пластины площадью S каждая, расположенные параллельно друг другу, на небольшом расстоянии d и заряженные одна зарядом $+q$, другая $-q$. см Рис34

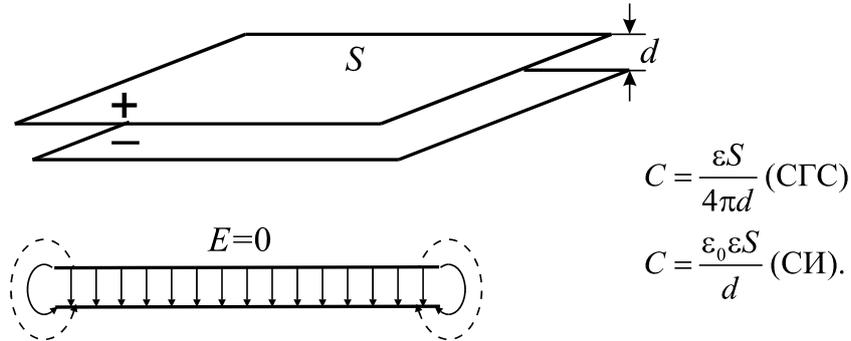


Рис. 33. Емкость плоского конденсатора

Напряженность электрического поля у поверхности плоскости определяется плотность заряда $E = 2\pi\sigma$, которая в нашем случае $\sigma = \frac{q}{S}$. Между обкладками, поля пластин складываются и результирующее поле $E = 4\pi\sigma$, на внешних сторонах поля вычитаются и поле вне конденсатора равно нулю. Разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi = \int_0^d E dl = 4\pi\sigma d = 4\pi \frac{qd}{S}, \quad \text{отсюда емкость } C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{S}{4\pi d}, \quad \text{в случае заполнения}$$

пространства между пластинами диэлектриком поле уменьшится в ϵ раз, соответственно во столько же раз уменьшится разность потенциалов и ёмкость конденсатора в этом случае будет $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ в ϵ раз больше. В системе СИ емкость будет $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$. На практике для

уменьшения габаритов две полоски фольги, разделённые диэлектриком сворачивают в спиральную конструкцию. В электролитических конденсаторах в качестве разделяющего диэлектрика используется непроводящий оксидный слой на поверхности алюминиевой фольги, поскольку толщина оксидной плёнки мала, удастся при разумных размерах получать емкости до 100 000 мкф.

Цилиндрический конденсатор. Цилиндрический конденсатор представляет собой два коаксиальных электрода радиуса R_1 и R_2 длиной l , разделённые слоем диэлектрика. Рис35

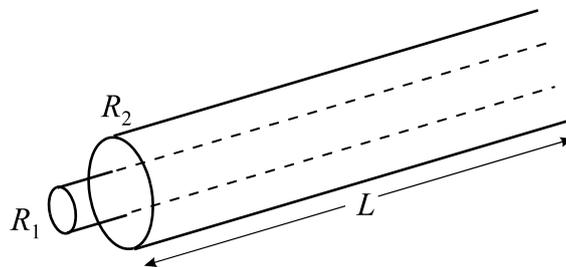


Рис. 35. Цилиндрический конденсатор

Таким конденсатором является кусок коаксиального кабеля, который широко используется в радиотехнике, электронике, компьютерной технике. Напряженность электрического поля между электродами $E = \frac{2\rho}{r}$, при наличии диэлектрика $E = \frac{2\rho}{\epsilon r}$. В

этом случае разность потенциалов будет $\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\rho}{\varepsilon r} dr = \frac{2\rho}{\varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{2q}{\varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$ соответственно

ёмкость $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$, в системе СИ $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$. Так ёмкость метрового отрезка кабеля

обычно составляет около $100 \text{ пФ} = 10^{-10} \text{ Ф}$.

Энергия заряженного конденсатора

Предположим, что плоский конденсатор емкостью C имеет заряд q , переместим с одной пластины на другую заряд dq , увеличивая разделение зарядов. Наша работа против сил электрического поля будет $dA = dqU = dq \frac{q}{C}$. Полная работа по переносу зарядов будет

даваться интегралом $A = \int_0^q \frac{1}{C} q dq = \frac{q^2}{2C}$, учитывая, что $q = CU$, получим $A = \frac{CU^2}{2} = W$.

Работа пошла на увеличение энергии заряженного конденсатора W . Таким образом энергия

заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$. В плоском конденсаторе $U = Ed$, а $C = \frac{S}{4\pi d}$,

подставив это в выражение для энергии конденсатора получим $W = \frac{E^2}{8\pi} Sd = \frac{E^2}{8\pi} V$, где

V объём конденсатора. Получается, что энергия заряженного конденсатора сосредоточена в

его поле, а плотность этой энергии $\frac{E^2}{8\pi}$. Плоский конденсатор мы использовали для

упрощения расчетов, более общее утверждение заключается в следующем – **электрическое**

поле обладает энергией, плотность которой в пространстве $\frac{E^2}{8\pi}$.

§8. Электрический ток.

Если в среде, в которой есть свободные заряды, появляется электрическое поле, на их хаотическое тепловое движение накладывается дрейфовое движение обусловленное взаимодействием с полем $\vec{F} = q\vec{E}$. В проводниках это электроны, в электролитах и ионизованных газах положительно и отрицательно заряженные ионы. В первом приближении это можно представить так: ускоряясь между столкновениями, при столкновении они полностью теряют скорость направленного движения в процессе столкновения и после этого процесс повторяется. В итоге в слабых полях средняя скорость дрейфа вдоль поля оказывается пропорциональна полю $\vec{V}_{dr} = \mu\vec{E}$. Положительно заряженные частицы дрейфуют по направлению поля, отрицательно заряженные в обратном

направлении. Дрейфовые скорости, как правило, много меньше тепловых $V_{dr} \ll \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

Плотность потока этих частиц будет определяться концентрацией и дрейфовой скоростью $n\vec{V}_{dr}$ в итоге возникнет поток переноса заряда $\vec{j} = (n_+\mu_+ + n_-\mu_-)\vec{E}$, который мы назовём плотностью электрического тока. Полный ток будет определяться сечением проводящей

среды и в общем случае будет $J = \oint \vec{j} d\vec{S}$. Если через поверхность некоторого объёма вытекает результирующий ток $J = \oint \vec{j} d\vec{S}$, то будет изменяться во времени заряд этого объёма. Понятно, что $\frac{dQ}{dt} - J = 0$, в дифференциальной форме это запишется $\frac{d\rho}{dt} + \text{div} j = 0$.

Последнее уравнение называют уравнением непрерывности, при стационарном распределении зарядов мы получим $\text{div} j = 0$.

Чаще всего мы сталкиваемся с током в металлических проводниках, в которых заряд переносится электронами. В этом случае плотность тока можно записать как $\vec{j} = +n_e \mu_e \vec{E} = \sigma \vec{E}$. Здесь коэффициент пропорциональности σ называется электропроводностью, не нужно путать с плотностью заряда используемого выше. Что делать в физике букв на обозначение различных величин не хватает. Соотношение $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ называют законом Ома в дифференциальной форме. Попробуем получить из него более привычную интегральную форму **закона Ома** $J = \frac{U}{R}$, **ток пропорционален**

напряжению на участке цепи и обратно пропорционален сопротивлению этого участка. Возьмём проводник постоянного сечения S , длины l и приложим к его концам разность потенциалов U . В проводнике появится напряженность электрического поля $E = \frac{U}{l}$ под действием которой начнётся дрейфовое движение электронов и появится

электрический ток, плотность которого $\vec{j} = +n_e \mu_e \vec{E} = \sigma \vec{E}$. Приняв за положительное направление тока движение положительно заряженных частиц, движение отрицательно заряженных частиц в обратном направлении также будет положительным током. Тогда полный ток $J = jS = \sigma S \frac{U}{l} = \frac{U}{R}$, где $R = \frac{l}{\sigma S}$ назовём электрическим сопротивлением нашего

проводника. Часто вместо σ используют обратную величину $\rho = \frac{1}{\sigma}$, которую называют удельным сопротивлением проводника. В этом случае выражение для сопротивления проводника будет $R = \frac{\rho l}{S}$. В СИ сопротивления измеряют в Омах, $1 \text{ Ом} = \frac{1 \text{ В}}{1 \text{ А}}$. Если при напряжении в один вольт через сопротивление протекает ток в один ампер, то сопротивление равно одному Ому. Поскольку работа по перемещению заряда равна $A = q\Delta\phi$, получаем, что мощность выделяемая на сопротивлении $W = J \cdot U$ или с учетом закона

$$\text{Ома } W = J^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

§9. Магнитное поле

После изобретения в Китае компаса конец намагниченной стрелки, показывающий направление на Север стали называть северным полюсом, противоположный южным. Одним из удивительных свойств магнитов является то, что при разламывании у каждого кусочка снова появляется северный и южный полюс. Возникал вопрос нельзя ли разламывая на все мелкие и мелкие кусочки получить только северный или только южный полюс. Другими словами, не существуют ли северные и южные магнитные заряды по аналогии с электрическими. Магнетизм связывался со свойствами вещества. Это продолжалось до исследований датского учителя Эрстеда, который обнаружил, что ток создаёт магнитное поле (1820г.). Через год Ампер установил, что токи взаимодействуют

друг с другом, в дальнейшем Био и Савар показали, что это взаимодействие осуществляется через магнитное поле. После этих исследований магнитное поле связывали с движением электрических зарядов, а намагничённость вещества определяется молекулярными токами в них.

Ампер в результате длительных и кропотливых исследований сформулировал закон взаимодействия токов:

$$dF_{12} = \frac{J_1 J_2 d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{c^2 r_{12}^3} \text{ это в Гауссовой системе,}$$

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 J_1 J_2 d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}]}{2\pi r_{12}^3} \text{ системе СИ}$$

Био и Савар объяснили это сложное взаимодействие следующим образом. Элемент тока длиной $d\vec{l}_2$ с током J_2 создаёт в районе элемента тока $d\vec{l}_1$ с током J_1 магнитное поле $\vec{B}_2 = \frac{J_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{cr_{12}^3}$, а первый ток взаимодействует с этим магнитным полем как $\vec{F}_{12} = \frac{J_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2}{cr_{12}^3}$.

Получается довольно сложная для восприятия картина взаимодействия. Чтобы иметь о ней представление рассмотрим два параллельных проводника, расположенных на расстоянии r друг от друга. В случае если по проводникам текут токи в одну сторону, появляется сила сближающая проводники, если токи текут в разные стороны, проводники отталкиваются. Именно таким образом в СИ определяется ампер. Ток в один ампер это такой ток, который протекая по параллельным проводникам расположенным на расстоянии в один метр обеспечивает силу взаимодействия в $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины провода.

Отсюда из закона ампера в СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{н}}{\text{А}^2} \left(\frac{\text{генри}}{\text{м}} \right)$.

Гораздо проще разобраться с направлением сил используя выражение для силы Лоренца, которое определяет силы действующие на положительный заряд в электрических и магнитных полях:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}], \text{ заметим, что магнитное поле действует только на}$$

движущуюся частицу. Исторически сложилось так, что магнитное поле \vec{B} , которое оказывает силовое действие, вызывает ЭДС в проводниках назвали вектором магнитной индукции, а вспомогательное поле \vec{H} , которое мы будем использовать для расчета \vec{B} , назвали напряжённостью магнитного поля. Будем в дальнейшем называть магнитным полем именно \vec{B} . В СГС в вакууме $\vec{B} = \vec{H}$ и они имеют одинаковую размерность. В средах $\vec{B} = \mu \vec{H}$, здесь μ безразмерный коэффициент, который показывает, во сколько раз изменится магнитное поля тока в вакууме при помещении его в магнитоактивную среду. Различают три вида веществ:

1. Парамагнетики. В этих средах орбитальное движение электронов ориентируется по полю, так, что поле становится немного больше. Так у марганца $\mu = 1,0038$, у азота $\mu = 1,000000013$, у алюминия $\mu = 1,000023$ т.е. $\mu \approx 1$
2. Диамагнетики. У них молекулы не имеют собственного магнитного момента и они намагничиваются навстречу. Висмут $\mu = 0,999824$, кремний $\mu = 0,999837$, вода $\mu = 0,999991$. т.е. $\mu \approx 1$
3. Ферромагнетики. Из-за доменной структуры о которой мы поговорим ниже, они усиливают поле в $100 \div 10^5$ раз. Это железо, сталь, никель, кобальт, гадолиний и их сплавы с другими металлами.

Поэтому если бы не ферромагнетики в практических приложениях можно было бы считать $\vec{B} = \vec{H}$ как в вакууме.

§10. Методы расчета магнитных полей.

В простейших случаях можно рассчитать величину магнитного поля в вакууме пользуясь законом Био Савара $d\vec{B} = \frac{\mu_0 J d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$ (СИ) Найдем направление и величину \vec{B} создаваемого током J , протекающим по длинному прямому проводу в точке отстоящей на R от него. Сначала найдём направление \vec{B} , находя векторное произведение $d\vec{l} \times \vec{r}$ см. рис36 мы приходим к выводу, что направления \vec{B} создаваемые различными участками тока совпадают и при вращении R вокруг провода вектор \vec{B} оказывается касателен этой окружности.

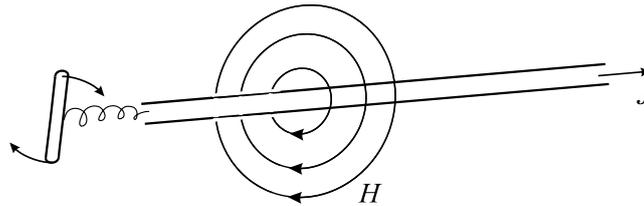


Рис. 36. Поле прямого провода

При этом выполняется правило «правого буравчика» - если вращать правый буравчик так, что бы он двигался в направлении тока, направление движения рукояток буравчика будет совпадать с направлением \vec{B} . Теперь необходимо найти величину \vec{B} . Выделим на расстоянии r от точки где мы определяем магнитное поле элемент провода dl , тогда этот элемент тока даст вклад в поле $dB = \frac{\mu_0 dl \sin \alpha}{r^2}$, здесь α угол между dl и r . Из рисунка

видно, что $dl \sin \alpha = r d\alpha$, отсюда $dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$, кроме этого $r \sin \alpha = R$, соответственно

$r = \frac{R}{\sin \alpha}$. Подставив это мы получим, $dB = \frac{\mu_0 J \sin \alpha d\alpha}{4\pi R}$. Соответственно

$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi R} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 J}{2\pi R}$ (СИ), и $B = \frac{2J}{cR}$ (СГС). Поскольку в практических приложениях

часто используются цилиндрические катушки с намотанным на них проводом, найдем поле одиночного витка радиуса R по которому течет ток J на оси этого витка, на расстоянии x от него. Рис37.

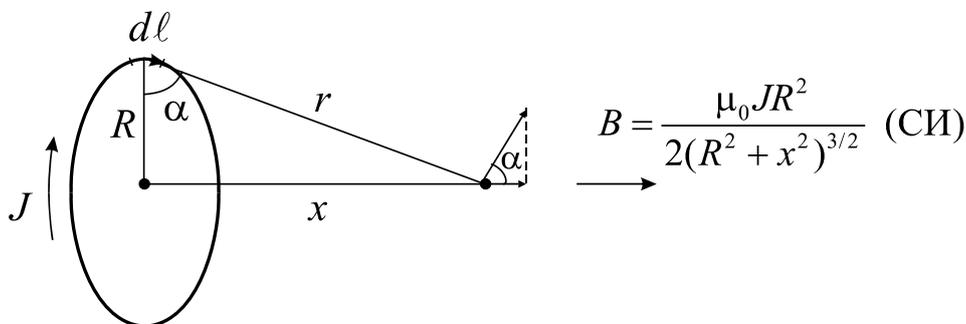


Рис. 37. Поле кругового витка

Из рисунка видно, что в результирующее поле будет давать вклад только компонента поля $dB_x = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 J dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$. Учтя, что $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, а $\sin \alpha = \frac{R}{r}$ мы получим

$$B_x = \int \frac{\mu_0 J R dl}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 J 2\pi R^2}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 J R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Используя этот результат найдем поле соленоида – длинной цилиндрической катушки провода, с плотностью витков на единицу длины $n = \frac{N}{L}$ рис38.

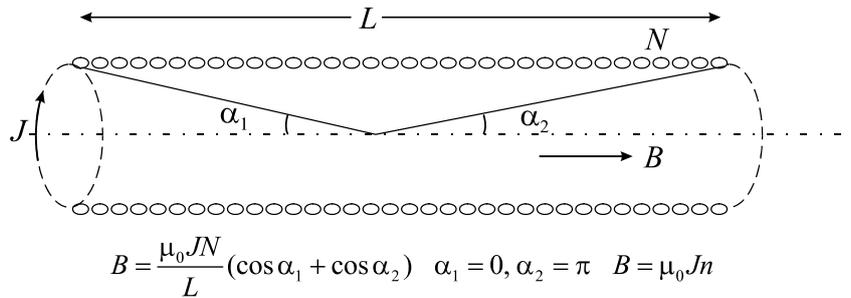


Рис. 38. Поле соленоида

Запишем результат предыдущей задачи в виде $dB_x = \frac{\mu_0 J n R^2 dl}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ и учтя, что $(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = r$,

$$r \sin \alpha = R, \quad \text{а} \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{после} \quad \text{подстановки} \quad dB_x = \frac{\mu_0 J n \sin \alpha d\alpha}{L}.$$

$$B_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 J n \sin \alpha d\alpha}{L} = \frac{\mu_0 J n}{L} \frac{(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{2}.$$

В случае длинного соленоида $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$

получим $B = \mu_0 J n$ (СИ) $B = \frac{4\pi J n}{c}$ (СГС), а у торца $B = \frac{\mu_0 J n}{2}$ (СИ) т.к. в этом случае $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Теорема о циркуляции.

Значительно облегчает расчет магнитных полей теорема о циркуляции. В задаче о нахождении магнитного поля длинного прямого провода с током мы получили $B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}$ где

$$r \text{ расстояние от оси провода. Этот результат можно представить в виде } \oint_l \vec{H} d\vec{l} = J,$$

поскольку $B = \mu_0 H$. Аналогичный результат мы получим находя поле H на расстоянии r от оси провода, внутри него. Только в этом случае $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = J$ наш интеграл равнялся бы

току охватываемым контуром $2\pi r$ находящимся внутри провода.

Оказывается эта закономерность $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = J$, имеет более общий характер – интеграл

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} \text{ по любому замкнутому контуру охватывающему систему токов с}$$

результатирующим током J равен этому току. Это не зависит ни от размеров контура, ни от его ориентации. Можно сказать так – циркуляция вектора \vec{H} по замкнутому контуру

равна результирующему току охватываемому этим контуром. Выражение $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = J$ называется теоремой о циркуляции, в СГС $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J$.

Так же как в электростатике теорема Гаусса $\oint_s \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi q$ значительно облегчает нахождение электрического поля, теорема о циркуляции даёт аналогичный эффект при нахождении магнитного поля.

Найдём магнитное поле внутри замкнутого прямоугольного кругового сердечника с магнитной проницаемостью μ , на котором равномерно намотано N витков провода с током J рис39.

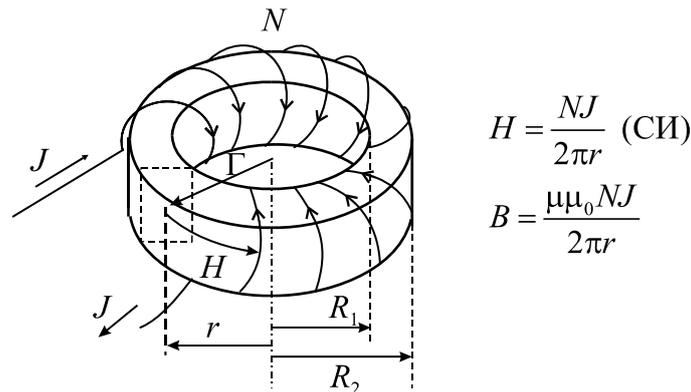


Рис. 39. Поле в сердечнике

Внутренний радиус сердечника R_1 , внешний R_2 . Выберем внутри сердечника замкнутый контур радиуса r , $R_1 < r < R_2$. Из соображений симметрии поле H не изменяется вдоль контура. Тогда, согласно теореме о циркуляции $H2\pi r = NJ$, отсюда $H = \frac{NJ}{2\pi r}$, а $B = \frac{\mu\mu_0 NJ}{2\pi r}$.

Магнитное поле максимально у внутреннего радиуса и минимально у внешнего.

Расчет магнитных полей в более сложных ситуациях требует более детального анализа связи величин \vec{B} и \vec{H} , особенно в случае ферромагнетиков.

§11. Магнитное поле в веществе

В диамагнетиках и парамагнетиках, как говорилось выше $\mu \approx 1$, поэтому они интересуют в основном физиков исследующих строение вещества.

В основном в практических приложениях используются ферромагнетики – это сердечники трансформаторов, роторы и статоры электродвигателей, электромагниты и постоянные магниты и многое другое. Основное достоинство ферромагнетиков огромная по сравнению с диамагнетиками парамагнетиками магнитная проницаемость. Рассмотрим поэтому их основные свойства.

Основной особенностью ферромагнетиков является наличие спонтанной намагниченности мелкодисперсных областей называемых доменами, которые в отсутствие внешнего магнитного поля ориентированы хаотически. При появлении магнитного поля они ориентируются по полю, значительно усиливая его. Рост результирующего поля прекращается, когда все области спонтанной намагниченности выстраиваются по полю, т.е. наблюдается эффект насыщения. В связи с этим максимальные поля которые можно получить с помощью ферромагнетиков ограничены примерно 10^4 гаусс (СГС) = 1тесла (СИ).

Ещё одной особенностью ферромагнетиков является существование критической температуры, выше которой они теряют свои магнитные свойства – так называемая температура Кюри. Для железа это 770°C , для широко используемого в радиотехнике сплава 30% пермаллой (30% никель, 70% железо) 70°C . В той или иной мере ферромагнетикам присуща нелинейная зависимость \vec{B} от \vec{H} . Намотав на соленоид обмотку из проводника и меняя в ней ток мы можем изменять \vec{H} и смотреть за изменением результирующего поля \vec{B} .

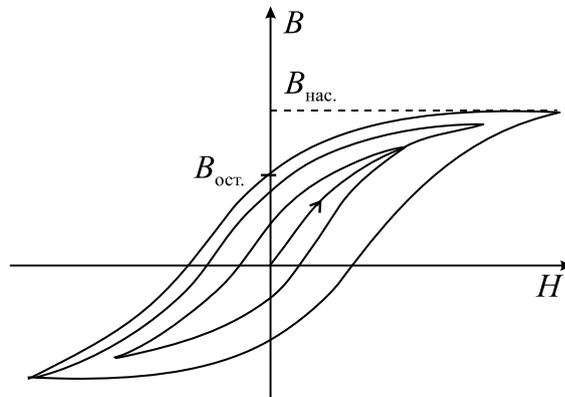


Рис. 40. Петля гистерезиса при перемагничивании ферромагнетика

На рис.40 приведены характерные зависимости \vec{B} при постепенном изменении величины и направления тока. Первой характерной особенностью является наличие гистерезиса, ход \vec{B} при прямом и обратном направлении тока не совпадает. Чем шире петля гистерезиса тем больше потери в сердечнике при перемагничивании и он нагревается. При нулевом токе сохраняется остаточная намагниченность и чем она выше тем сильнее постоянный магнит. Связь между \vec{B} и \vec{H} нелинейная $\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$. При небольшом гистерезисе, в слабых полях можно принять $\mu \approx const$. Как это часто бывает, свойства мешающие в одних применениях оказываются полезными в других. Широкая петля гистерезиса приводит к потерям в сердечниках трансформаторов и двигателей. Но большая остаточная намагниченность необходима для изготовления сильных магнитов. В своё время ферромагнетики с почти прямоугольной петлёй гистерезиса использовались для изготовления оперативной памяти ЭВМ. Миниатюрные колечки, около 1мм. собирались в матрицу, в которой по строкам и столбцам проходили проводники записи-считывания. Намагниченное в одном направлении колечко могло оставаться в этом состоянии бесконечно долго и перемагничивалось в обратном направлении, создавая импульс в проводе считывания при обратном токе. Размер такой памяти на 1 кБит сравним с современным планшетником, но полёты первых спутников рассчитывались именно на таких машинах.

§12. Граничные условия для \mathbf{B} и \mathbf{H}

При расчете магнитных необходимо знать поведение \vec{B} и \vec{H} на границе двух сред. При расчете электрических полей мы использовали теорему Гаусса $\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi q$. В случае отсутствия зарядов $\oint_S \vec{E} * d\vec{S} = 0$ Аналогом \vec{E} в случае магнитных полей является \vec{B} и так, как магнитных зарядов нет то $\oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0$ или $\text{div } \vec{B} = 0$ всегда. Применим это на границе

раздела двух магнитных сред с μ_1 и μ_2 . Рассмотрим поведение нормальных к границе составляющих B_{1n}

и B_{2n} . Возьмём цилиндр, ось которого нормальна к границе площадь торцов которого S , устремляя высоту цилиндра к нулю, мы получим для потоков через торцы $B_{2n} * S - B_{1n} * S = 0$. Рис41 Отсюда $B_{1n} = B_{2n}$, поскольку $B_{1n} = \mu_1 H_{1n}$, а $B_{2n} = \mu_2 H_{2n}$ получим $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

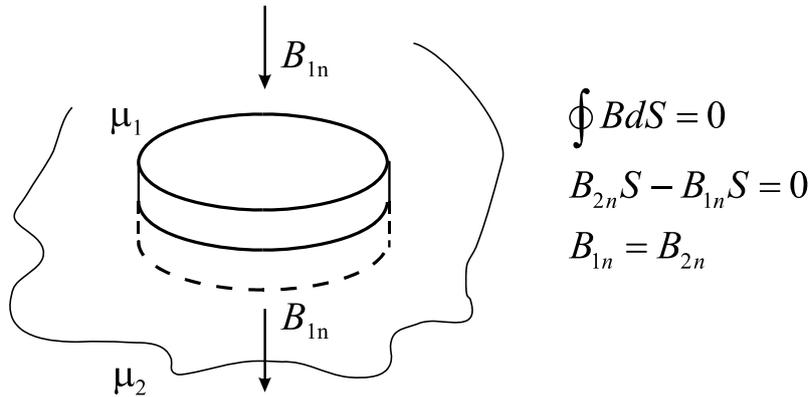


Рис. 41. Граничные условия для B_n

Для рассмотрения поведения тангенциальных составляющих возьмем плоский прямоугольный контур перпендикулярный границе раздела Рис42.

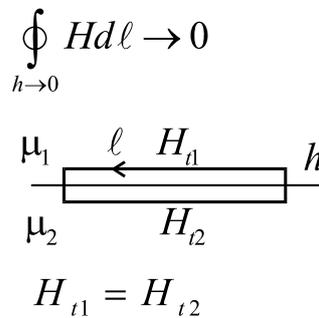


Рис. 42. Граничные условия для H_t

Применив $\oint \vec{H} d\vec{l} = J$ мы получим, что подынтегральное выражение есть $H_{2t}l - H_{1t}l$ если при этом устремить высоту контура $h \rightarrow 0$, то ток охватываемый этим контуром будет нулевым, отсюда $H_{2t}l - H_{1t}l = 0$. Значит на границе раздела $H_{2t} = H_{1t}$, а $\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ испытывают скачок. Для демонстрации технологии применения этих закономерностей рассмотрим две задачи.

1. На сердечник из двух кольцевых половинок ферромагнетиков с μ_1 и μ_2 намотана обмотка из N витков и пропущен ток J . Средний радиус сердечника R . Найти \vec{B} и \vec{H} . Силовые линии внутри сердечника будут кольцевыми, а на границе $B_{1n} = B_{2n} = B$, отсюда

$H_{1n} = \frac{B}{\mu_1}$, а $H_{2n} = \frac{B}{\mu_2}$. Применяв теорему о циркуляции $\oint \vec{H} d\vec{l} = J$ получим $\frac{B}{\mu_1} \pi R + \frac{B}{\mu_2} \pi R = JN$. В итоге $B = \frac{JN\mu_1\mu_2}{\pi R(\mu_1 + \mu_2)}$.

2. Толстый прямой провод, с током J проходит перпендикулярно поверхности раздела двух сред с μ_1 и μ_2 . Найти \vec{B} и \vec{H} в каждой части пространства. Так как на границе $H_{2t} = H_{1t}$, то поле H в каждой части будет одинаковым и будет $H = \frac{J}{2\pi r}$ при $r > R$ и $H = \frac{Jr}{2\pi R^2}$ при $r < R$. Поле B внутри провода $B = \mu_0 H$ везде, вне провода, в одной части $B_1 = \mu_1 \mu_0 H$, в другой $B_2 = \mu_2 \mu_0 H$

§13. Электромагнитная индукция

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 году. Фарадей в результате многочисленных опытов, обнаружил, что при изменении магнитного поля появляется электрический ток. Он связал это явление с пересечением проводником силовых магнитных линий. Максвелл анализируя многочисленные опыты Фарадея пришел к выводу, что э.д.с. электромагнитной индукции пропорционально скорости изменения магнитного потока Φ через площадь ограниченную током. В общем случае поток через контур $\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S}$ дается интегралом по площади этого контура. Но первопричиной появления э.д.с. отраженной в уравнениях Максвелла является появление вихревого электрического поля, которое в замкнутом проводящем контуре приводит к появлению тока, определяемому э.д.с. электромагнитной индукции и сопротивлением проводника. Как установил Ленц направление э.д.с. такое, чтобы магнитное поле возникающего тока препятствовало изменению магнитного потока. Если контур представляет N плотно намотанных витков, мы имеем N последовательно соединенных контуров, естественно, что э.д.с. в этом случае будет в N раз больше. В этом случае вместо потока используют потокосцепление $\Psi = N\Phi$. Всё это объединяет общий закон электромагнитной индукции в следующей формуле $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}$ которая и представляет основной закон электромагнитной индукции в форме предложенной Максвеллом. При этом не важно за счет чего происходит изменение потока – из за изменения величины поля, или из за изменения формы контура, или из за совместного их изменения.

Поэтому когда мы изменяем ток, например в соленоиде, это приводит к изменению магнитного поля и соответственно потока и далее к появлению э.д.с. электромагнитной индукции препятствующей изменению потока и соответственно тока. Это явление называют Э.Д.С. самоиндукции.

Магнитный поток в последнем случае пропорционален току и эта пропорциональность току свойство любого контура с током $\Psi = LJ$, используя это в законе электромагнитной индукции получим $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dJ}{dt}$. Коэффициент пропорциональности L называют индуктивностью. Получается, что эта эдс препятствует увеличению тока при его включении и уменьшению тока при его выключении.

Максвелл также понял, что изменяющееся электрическое поле будет создавать магнитное поле и $\oint \vec{H} d\vec{l}$ должен определяться полным током $J = J_{провод} + J_{смещ}$. При

перезарядке плоского конденсатора $J_{\text{смещ.}} = \frac{dq}{dt} = S \frac{dD}{dt}$, плотность этого тока $j = \frac{dD}{dt}$, в противном случае магнитное поле внутри конденсатора при перезарядке отсутствовало. Вокруг подводящих проводов оно есть, внутри нет. Поэтому такое дополнение Максвелла снимало это противоречие. Соответственно в общем случае $\oint \vec{H} d\vec{l} = J + \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}$

§14. Энергия магнитного поля

На что идет дополнительная работа источника тока при увеличении тока. В любой момент дополнительная мощность P будет $P = J\varepsilon = JL \frac{dJ}{dt}$, соответственно работа этого тока за время dt будет $dA = J\varepsilon dt = JL \frac{dJ}{dt} dt = JLdJ$, полная работа при нарастании тока до J будет $A = \int_0^J LJdJ = \frac{LJ^2}{2}$. Похожее выражение мы получили в случае электрического поля $A = \frac{CU^2}{2}$ и пришли к выводу, что эта работа идет на увеличение энергии электрического поля.

Поскольку электрическое и магнитное поле есть различные проявления электромагнитного поля, то и магнитное поле должно обладать энергией, плотность которой должна быть, как и для электрического поля $\frac{B^2}{8\pi}$. Энергия электрического поля образованного системой зарядов на проводниках, пропорциональна квадрату напряжения на них $W = \frac{CU^2}{2}$ здесь коэффициент пропорциональности C называется электрической ёмкостью. Поскольку магнитное поле B всегда порождается движением заряда – током, то можно ожидать, что в случае магнитного поля будет аналогичная связь $W = \frac{LJ^2}{2}$, что мы и получили. Такая связь действительно наблюдается, а коэффициент пропорциональности L называют индуктивностью системы проводников создавших магнитное поле. Взаимосвязь электрического и магнитного полей можно почувствовать в следующем мысленном эксперименте. Рядом с пролетающим мимо нас пучком электронов мы обнаружим и электрическое и магнитное поле. Начнём двигаться вдоль пучка со скоростью электронов – ток исчез, соответственно исчезло магнитное поле. Предположим, навстречу друг другу двигаются пучки электронов и протонов с одинаковыми скоростями с одинаковой концентрацией. В этой ситуации электрического поля нет, т.к. суммарный заряд равен нулю, магнитное поле есть. Начнем двигаться с электронами, в этой системе за счет Лоренцевого сокращения концентрации электронов и протонов не будут равны, соответственно появится электрическое поле.

Индуктивность

Соотношения $W = \frac{LJ^2}{2}$ и $\Psi = LJ$ связывающие энергию магнитного поля с индуктивностью и током и второе соотношение связывающее потокосцепление с

индуктивностью и током позволяют нам находить индуктивность токовых систем. Какое из них удобнее использовать зависит от конкретной задачи.

Если нам известна величина магнитного поля и его геометрия $B(x,y,z)$, можно найти его энергию $W = \int \frac{B^2}{4\pi} dV$, интегрируя плотность энергии по объёму. Отсюда $L = \frac{2W}{J^2}$.

Если проще найти потокосцепление $\Psi = \int NBdS$, то $L = \frac{\Psi}{J}$. Из последнего соотношения размерность индуктивности $\frac{\text{тесла} \cdot \text{м}^2}{\text{а}}$ её называют генри.

Мы нашли напряженность магнитного поля в соленоиде с числом витков N , длиной l , радиуса R , как $B = \mu_0 J n = \mu_0 J \frac{N}{l}$ (СИ) при наличии сердечника $B = \mu \mu_0 J \frac{N}{l}$. Пользуясь обоими выражениями для определения индуктивности, для соленоида радиуса R мы получим $L = \frac{\mu \mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$.

§15. Уравнения Максвелла

Основные закономерности, рассмотренные выше и описывающие поведение электромагнитного поля, Максвелл свел к системе уравнений, получивших название уравнения Максвелла.

СИ

Интегральная форма

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = J + \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

Дифференциальная форма

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{div} \vec{D} = q$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

СГС

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi q$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, в вакууме $\vec{B} = \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, в вакууме $\vec{D} = \vec{E}$, входящая в уравнения электродинамическая постоянная $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ равна скорости света в вакууме.

При решении конкретных задач могут понадобиться ещё и граничные условия, которые собственно являются следствиями уравнений Максвелла.

Задачи по модулю электростатика.

Семинары

1. Два одинаковых небольших проводящих шарика находятся на расстоянии значительно превышающем их размеры и имеют заряды q_1 и q_2 . Сила взаимодействия между зарядами F . Во сколько раз изменится сила взаимодействия, если шарики сблизить до касания, а затем развести на прежнее расстояние. Решить задачу если $q_2 = 2q_1$, как изменится результат если $q_2 = -2q_1$?
2. Две одинаковые заряженные однородно палочки образуют две стороны равностороннего треугольника. Напряженность поля в центре треугольника E_0 потенциал φ_0 . Чему будут равны эти величины, если убрать одну из палочек?
3. Найти напряженность поля и потенциал внутри и вне заряженной металлической сферы. Заряд сферы q радиус R .
4. Сфера радиуса R_1 расположена концентрично внутри сферы радиуса R_2 . Сферы имеют заряды q_1 и q_2 соответственно. Найти напряженность и потенциал результирующего электрического поля во всем пространстве. Как изменится результат, если сферы соединить проводящей перемычкой?
5. Напряженность электрического поля у одной поверхности пластинки E_1 с противоположной стороны E_2 . E_2 не равно E_1 . Площадь пластинки S . Найти силу действующую на пластинку.
6. Какую массу должен иметь протон для того, чтобы сила электрического отталкивания уравновешивалась силой гравитационного взаимодействия.
7. Найти потенциал и электрическое поле внутри и снаружи равномерно заряженного объемной плотностью ρ шара радиуса a .
8. Найти электрическое поле и потенциал, создаваемые плоскостью, равномерно заряженной, с поверхностной плотностью σ . То же для нити, равномерно заряженной с линейной плотностью ρ .
9. Полубесконечная нить заряжена с линейной плотностью ρ найти поле E на расстоянии a от торца нити.
10. Рассчитать емкость плоского конденсатора заданной геометрии, а также энергию электрического поля в таком конденсаторе, заряженного до напряжения U .
11. Найти энергию, которую тратит источник с напряжением $U = 100$ в для зарядки конденсатора емкостью 100 мкФ.
12. Почему емкость конденсатора возрастает при заполнении его диэлектриком.
13. Оценить электрическую емкость человека. Тоже для Земли.
14. Рассчитать погонную емкость двухпроводной линии, если расстояние между проводами равно d , а радиус проводов r .
15. Найти емкость конденсатора образованного конденсаторами C_1 и C_2 соединенными:
а) последовательно, в) параллельно.
10. Найти емкость плоского конденсатора после заполнения его на половину расстояния между пластинами диэлектриком с проницаемостью ϵ . Емкость конденсатора до заполнения диэлектриком C_0 . Тоже если мы заполним полностью пространство между пластинами диэлектриком половину площади конденсатора.

Задания

1. Сфера радиуса $R_1 = 5\text{см}$ расположена концентрично внутри сферы радиуса $R_2 = 10\text{см}$. Сферы имеют потенциалы $\varphi_1 = 100\text{в}$ и $\varphi_2 = 50\text{в}$. Как изменятся потенциалы сфер и напряженности электрического поля после соединения их перемычкой?
2. Внутри шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с плотностью ρ , имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1 , а центр отстоит от центра шара на расстояние a ($a + R_1 < R$). Найти электрическое поле \mathbf{E} в полости.
3. Отрезок коаксиального кабеля длиной l с радиусами внутренней и внешней обмотки a и b , соответственно, заполнен изолятором с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти а) электрическую ёмкость этого отрезка, измеренную на нулевой частоте, б) энергию электрического поля, сосредоточенного в этом отрезке кабеля, соединенного с источником постоянного напряжения U .
4. Конденсатор, состоящий из двух прямоугольных пластин, площадью S заряжен зарядом q . Найти силу притяжения между пластинами.
5. Оценить соотношение сил гравитационного и электромагнитного взаимодействия электрона и протона в атоме водорода.
6. С какой силой притягивается заряд величиной q к проводящей плоскости находящейся на расстоянии h от плоскости.
7. Оценить величину заряда Земли если напряженность электрического поля на поверхности в среднем равна 130 в/м

Задачи по модулю магнитостатика.

Семинары

1. Найти магнитное поле на расстоянии r от бесконечного прямого тока I .
2. Найти силу взаимодействия на единицу длины двух параллельных бесконечных прямых проводов, по которым текут токи I_1 и I_2 .
3. Найти магнитное поле прямого провода упирающегося перпендикулярно в проводящую плоскость.
4. Найти магнитное поле витка с током I на оси этого витка на различных расстояниях от его центра.
5. Найти поле соленоида представляющего цилиндрическую катушку с числом витков N и длиной L . Найти поле на оси у торца соленоида.
6. На границе раздела двух сред с магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2 по проводу течет ток величиной I . Найти величину напряженности магнитного поля \mathbf{H} и индукцию магнитного поля \mathbf{B} на расстоянии r от провода.
7. Найти поле в небольшом зазоре d электромагнита, если длина сердечника L , сечение S . По обмотке с числом витков N течет ток I
8. Описать движение точечного заряда q в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} .
9. Найти магнитное поле внутри бесконечного соленоида радиуса a с плотностью намотки n , по которой течет ток I . Найти энергию магнитного поля, заключенную в единице длины соленоида.

Задания

1. По проводу заземления, вертикально воткнутому в землю, течет ток I . Найти магнитное поле во всем пространстве.
2. Найти величину магнитного поля в зазоре электромагнита, обмотка состоит из N витков провода, по которому течет ток I . Сердечник электромагнита имеет длину l , проницаемость μ , радиус сердечника R . Величина зазора $d \ll R$.
3. По проводу протекает ток I , во сколько раз изменятся B и H , если провод положить на бесконечное полупространство с магнитной проницаемостью $\mu = 100$.
4. На тороидальный сердечник имеющий в сечении прямоугольную форму высотой h . внутренний радиус R_1 внешний R_2 намотана обмотка с количеством витков N . Магнитная проницаемость сердечника μ . Найти магнитный поток Φ при протекании через обмотку тока I .
5. Прямой провод проходит перпендикулярно через границу раздела двух полубесконечных сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Найти B и H в обеих средах.
6. Найти напряжение на датчике Холла через который течет ток I , помещенного в магнитное поле B , если концентрация носителей n , а поперечные размеры $h \cdot d$. то состоит из N витков провода, по которому течет ток I

Список основной и дополнительной литературы

1. Сивухин Д.В. *Общий курс физики*, Электричество. М.: Наука, 1974.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*, т.6. Электродинамика. М.: Мир, 1977.
3. Астахов А.В., Широков Ю.М. *Курс физики*, II. Электромагнитное поле. М.: Наука, 1980.
4. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2003, Ч. 1.
5. Меледин Г.В., Черкасский В.С., Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч