

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

Топологические пространства

Конспект лекций

Новосибирск
2016

Оглавление

1	Основные понятия теории топологических пространств	2
§1.1	Подготовка инструментария: решетки, сети, обобщенные последовательности	2
§1.2	Фильтры	4
§1.3	Топологии и предтопологии	6
§1.4	Внутренность и замыкание	9
§1.5	Сходимость и непрерывность.	10
§1.6	Аксиомы отделимости. Типы топологических пространств . . .	14
§1.7	Компактность	18
2	Двойственность и ее приложения	22
§2.1	Векторные топологии	22
§2.2	Локально выпуклые топологии	23
§2.3	Двойственность векторных пространств	25
§2.4	Топологии, согласованные с двойственностью	27
§2.5	Поляры	29
§2.6	Слабо компактные выпуклые множества	30
§2.7	Рефлексивные пространства	31
3	Мера и интеграл	33
§3.1	Меры и измеримые множества	33
§3.2	Измеримые функции	35
§3.3	Интеграл	35
§3.4	Теорема Рисса о представлении	37
§3.5	Меры Радона и топологии.	37
4	Обобщенные функции	41
5	Преобразование Фурье и распределения умеренного роста	46
§5.1	Определение и основные свойства	46

§5.2 Примеры и приложения	54
§5.3 Обобщенные функции умеренного роста	62
§5.3.1 Ряды Фурье и обобщенные функции умеренного роста	64
§5.3.2 Преобразование Фурье и обобщенные функции умеренного роста	65
§5.4 Преобразование Фурье и фундаментальные решения дифференциальных операторов	66
ЛИТЕРАТУРА	70

Данный курс является продолжением курса функционального анализа. Его цель — заложить фундаментальную базу из общей топологии, необходимую для достижения "высоких" аспектов современного анализа: теории локально-выпуклых пространств, слабой сходимости, теории обобщенных функций и распределений и т.п. К числу таких первичных базовых фактов относится понятие произведения произвольного семейства топологических пространств и фундаментальная теорема Тихонова о компактности. Из нее вытекает, в частности, что любое каждое достаточно регулярное топологическое пространство задается топологией поточечной сходимости функциональных пространств.

Глава 1

Основные понятия теории топологических пространств

§1.1 Подготовка инструментария: решетки, сети, обобщенные последовательности

Данный материал кажется достаточно абстрактным, однако дает в наше распоряжение мощные инструменты, которые значительно упрощают дальнейший ход дела. Например, с помощью понятия ультрафильтра фундаментальная теорема Тихонова о компактности доказывается буквально в одну строчку.

Пусть A и B — множество, и F — подмножество декартова произведения $A \times B$. Тогда F называют *соответствием с областью определения A и областью прибытия B* , или, короче, *соответствием из A в B* . В этом случае множество

$$\text{dom } F := D(F) := \{a \in A : \exists b \in B (a, b) \in F\}$$

называют *областью определения F* , а множество

$$\text{im } F := R(F) := \{b \in B : \exists a \in A (a, b) \in F\}$$

называют *областью значений*, или *образом F* .

Соответствие $F \subset X \times X$ называется *отношением* на множестве X . Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве X называется *порядком*. Если X — это множество, а σ — порядок в X , то пару (X, σ) называют *упорядоченным множеством*, и пишут $x \leq_\sigma y$.

Пусть (X, σ) — упорядоченное множество, и U — подмножество в X . Элемент $x \in X$ называют *верхней границей* множества U , если $y \leq_\sigma x$ для всех $y \in U$. Кратко это записывают как $U \leq_\sigma x$. Аналогично определяют точки нижней границы.

Наконец, элемент $x \in X$ называется *точной верхней границей* множества U в X , если x — наименьший элемент множества всех верхних границ U . При этом пишут $x = \sup_X U$ или, короче, $x = \sup U$.

Определение 1.1.1. Упорядоченное множество X называют *решеткой*, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ существует их точная верхняя граница $x_1 \vee x_2 = \sup\{x_1, x_2\}$ и точная нижняя граница $x_1 \wedge x_2 = \inf\{x_1, x_2\}$.

Определение 1.1.2. Упорядоченное множество X называют *полной решеткой*, если любое его подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.

ЛЕММА 1.1.3. Упорядоченное множество (X, σ) является полной решеткой, если любое его подмножество имеет точную верхнюю границу.

◁ Пусть выполнены предположения леммы (про верхнюю границу). Докажем, сначала, что у X есть максимальный и минимальный элементы. Это легко выводится из формул $\max X = \sup X$, $\min X = \sup \emptyset$. Поскольку у X есть минимальный элемент, множество нижних границ любого подмножества $U \subset X$ всегда непусто, обозначим это множество $\Gamma_-(U)$. На последнем шаге нужно проверить справедливость формулы $\inf U = \sup \Gamma_-(U)$.

▷

Определение 1.1.4. Упорядоченное множество (X, σ) называется *фильтрованным по возрастанию*, если для любой пары точек $x, y \in X$ найдется элемент $z \in X$ такой, что $x \leq_\sigma z$ и $y \leq_\sigma z$ (т.е. z — верхняя граница пары элементов x, y). Непустое фильтрованное по возрастанию множество называется *направленным*, или, короче, *направлением*.

Определение 1.1.5. Отображение направленного множества в данное множество X называют (*обобщенной*) *последовательностью* или *сетью* в X . Например, отображения естественным образом упорядоченного множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ в X называются (*счетными*) *последовательностями*.

ЛЕММА 1.1.6. Решетка является полной в том и только том случае, если любое фильтрованное по возрастанию множество в ней имеет точную верхнюю границу.

◁ Пусть для решетки (X, σ) выполнены предположения доказываемой леммы. Возьмем произвольное непустое множество $U \subset X$. Положим

$$U' = \{x \in X : \exists \text{ конечное множество } u_1, \dots, u_k \in U \text{ такое, что } x = \sup\{u_1, \dots, u_k\}\}.$$

Легко видеть, что множество U' будет фильтрованным по возрастанию, следовательно, определен элемент $x_* = \sup U'$. Легко видеть также, что $x_* = \sup U$. ▷

Замечание 1.1.7. Смысл доказанной леммы в том, что для нахождения точной верхней границы у произвольного множества достаточно научиться находить точные верхние границы у любой пары элементов и для направленных по возрастанию множеств.

Определение 1.1.8. Упорядоченное множество (X, σ) называется *линейно упорядоченным*, если для любой пары точек $x, y \in X$ выполнено неравенство $x \leq_\sigma y$ или $y \leq_\sigma x$. Далее, если X_0 — линейно упорядоченное подмножество в X , то оно называется *цепью* в X .

ТЕОРЕМА 1.1.9 (Лемма Куратовского–Цорна). Пусть (X, σ) , — упорядоченное множество, причем каждая цепь в X ограничена (т.е. имеет верхнюю границу). Тогда в X есть максимальный элемент.

Множества, удовлетворяющие условием леммы Куратовского–Цорна, т.е. у которых каждая цепь ограничена сверху, называются в дальнейшем *индуктивными*. Т.е. эту лемму можно теперь переформулировать так: *всякое индуктивное множество имеет максимальный элемент*.

Замечание 1.1.10. Лемма Куратовского–Цорна эквивалентна аксиоме выбора Цермело, которая принимается в теории множеств. Она часто используется в современном анализе.

Замечание 1.1.11. Важно понимать отличие максимального элемента множества U от наибольшего элемента U . Именно,

$$x \text{ — наибольший элемент } U \Leftrightarrow x \in U \text{ и } \forall y \in U \ y \leq_\sigma x.$$

$$x \text{ — максимальный элемент в } U \Leftrightarrow \forall y \in U \ (x \leq_\sigma y \Rightarrow y = x).$$

Т.е., наличие максимального элемента — это более слабое свойство, соответственно, оно чаще распространено, чем наличие наибольшего элемента.

§1.2 Фильтры

Напомним, что символом 2^X обозначается множество всех подмножеств множества X .

Определение 1.2.1. Подмножество $\mathcal{B}$ в 2^X называется *базисом фильтра*, если

- (1) $\mathcal{B} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathcal{B}$;
- (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B \in \mathcal{B} : B \subset B_1 \cap B_2$.

Определение 1.2.2. Подмножество $\mathcal{F}$ в 2^X является *фильтром* в X , если $\mathcal{F}$ представляет собой совокупность надмножеств некоторого базиса фильтра $\mathcal{B}$ в X , т.е.

$$F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F.$$

В этом случае пишут, что $\mathcal{F} = \text{fil}(\mathcal{B})$.

ЛЕММА 1.2.3. Множество $\mathcal{F}$ является фильтром в X в том и только том случае, когда выполнены следующие три свойства:

- (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (ii) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \ F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
- (iii) $F \in \mathcal{F} \ \& \ F \subset A \subset X \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

◁ Предоставляется читателю в качестве упражнения. ▷

Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ совокупность всех фильтров на множестве X . Оказывается, элементы $\mathcal{F}(X)$ можно сравнивать между собой, т.е. ввести в этом пространстве отношение частичного порядка. Именно, для элементов $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ полагают $F_1 \leq F_2$ если и только если $F_1 \subset F_2$. В этом случае говорят, что F_2 *тоньше* F_1 , или что F_1 *грубее* F_2 .

Ясно, что пара элементов пространства $\mathcal{F}(X)$ не всегда сравнима между собой, т.е. в целом пространство $\mathcal{F}(X)$ не является линейно упорядоченным. В то же время, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2.4. Множество $\mathcal{F}(X)$ индуктивно. При этом для любой цепи $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(X)$ ее верхняя граница $\mathcal{F}_*$ может быть вычислена по формуле

$$\mathcal{F}_* = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{L}} \mathcal{F}. \quad (1.1)$$

◁ Предоставляется в качестве упражнения. ▷

По лемме Куратовского–Цорна в пространстве $\mathcal{F}(X)$ имеются максимальные элементы. Эти максимальные элементы называются *ультрафильтрами*.

Ясно, что множество всех элементов $\mathcal{F}(X)$, содержащих данный фиксированный фильтр $\mathcal{F}$, также индуктивно. Отсюда вытекает, что

СЛЕДСТВИЕ 1.2.5. Для каждого $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ найдется ультрафильтр $\mathcal{F}_* \geq \mathcal{F}$.

Как же можно распознать, является ли тот или иной фильтр максимальным? Ответ содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.2.6. Фильтр $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ является ультрафильтром в том и только том случае, если для каждого множества $A \subset X$ справедливо одно из включений $A \in \mathcal{F}$ или $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

◁ ⇐ Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый фильтр в X , такой, что для каждого множества $A \subset X$ справедливо одно из включений $A \in \mathcal{F}$ или $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. что $\mathcal{F}$ не является ультрафильтром. Тогда найдется фильтр

$$\mathcal{F}_1 \supsetneq \mathcal{F}. \quad (1.2)$$

В силу того, что включение здесь строгое, найдется множество $A \in \mathcal{F}_1$, такое, что $A \notin \mathcal{F}$. Но тогда в силу (1.2) имеем $X \setminus A \in \mathcal{F}_1$. Получили, что каждое из множеств A и $X \setminus A$ входят в фильтр $\mathcal{F}_1$, противоречие.

⇒ Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый ультрафильтр в X . Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. найдется множество $A \subset X$ такое, что

$$A \notin \mathcal{F} \quad \text{и} \quad X \setminus A \notin \mathcal{F}. \quad (1.3)$$

Наша задача, чтобы получить противоречие — построить фильтр, который был бы тоньше, чем $\mathcal{F}$. Положим $\mathcal{F}_1 = \{W \subset X : A \cup W \in \mathcal{F}\}$. Из условия (1.3) легко вытекает, что $\emptyset \notin \mathcal{F}_1$. Также легко проверяется выполнение остальных двух условий теоремы 1.2.3, т.е. что $\mathcal{F}_1$ — это в самом деле фильтр. По построению, имеем $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}$ и $X \setminus A \in \mathcal{F}_1$, поэтому, ввиду условия (1.3), $\mathcal{F}_1 \supsetneq \mathcal{F}$. Получили искомое противоречие с условием максимальности фильтра $\mathcal{F}$. ▷

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — некоторый фильтр в X , и пусть имеется некоторое отображение $f : X \rightarrow Y$. Обозначим

$$\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})} := \{f(U) : U \in \mathcal{F}\}.$$

Легко проверяется (докажите!), что $\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}$ представляет собой базу некоторого фильтра. Теперь положим

$$f(\mathcal{F}) = \text{fil}(\mathcal{B}_{f(\mathcal{F})}).$$

Упражнение 1.2.7. Покажите, что $f(\mathcal{F}) = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{F}\}$. Здесь $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ — прообраз множества V при отображении f .

Чтобы успешно справиться с этими и последующими упражнениями, нужно сначала проверить следующие тождества

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B),$$

причем включение в последней формуле может быть и строгим (т.е. без равенства).

ТЕОРЕМА 1.2.8. Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр в X , и $f : X \rightarrow Y$ — некоторое отображение, то $f(\mathcal{F})$ — ультрафильтр в Y .

◁ Здесь нужно воспользоваться тем свойством (проверьте!), что для каждого множества $V \subset Y$ справедливо равенство

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V).$$

▷

§1.3 Топологии и предтопологии

Здесь и в дальнейшем символом $\mathcal{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств множества X (иногда тот же самый объект обозначается другим символом 2^X — это вопрос вкуса и удобства).

Определение 1.3.1. Пусть X — некоторое множество. Отображение $\tau : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ называют *предтопологией* на X , если

- (1) $x \in X \Rightarrow \tau(x)$ представляет собой фильтр в X ;
- (2) $x \in X \Rightarrow \tau(x) \subset \text{fil}\{x\}$.

Для данной точки $x \in X$, совокупность множеств, входящих в $\tau(x)$ называется *системой окрестностей точки x* (относительно τ). Переводя на "человеческий" язык, для каждого $x \in X$ система окрестностей $\tau(x)$ состоит из подмножеств X таких, что

- (i) $F_1, F_2 \in \tau(x) \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \tau(x)$;
- (ii) $F \in \tau(x) \Rightarrow x \in F$;
- (iii) $(F \in \tau(x) \ \& \ F \subset A \subset X) \Rightarrow A \in \tau(x)$,

т.е. точка x лежит в каждой своей окрестности, и пересечение окрестностей — снова окрестность, и расширение окрестности — опять окрестность.

Совокупность всех предтопологий на X обозначается символом $\mathcal{T}(X)$. Если $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}(X)$ то говорят, что τ_2 *сильнее* τ_1 при выполнении условия $\tau_1(x) \subset \tau_2(x) \ \forall x \in X$.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Множество $\mathcal{T}(X)$ с отношением сильнее представляет собой полную решетку.

◁ Пусть имеется некоторое семейство предтопологий $\mathcal{E} = \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в X . Достаточно показать, что существует $\sup \mathcal{E} \in \mathcal{T}(X)$. Положим

$$\tau_*(x) = \left\{ W \subset X : \exists \text{ конечный набор окрестностей } W_1 \in \tau_{\alpha_1}(x), W_2 \in \tau_{\alpha_2}(x), \dots, W_k \in \tau_{\alpha_k}(x) \right. \\ \left. \text{таких, что } W = W_{\alpha_1} \cap \dots \cap W_{\alpha_k} \right\}. \quad (1.4)$$

Нетрудно видеть, что τ_* в самом деле является предтопологией, что $\tau_* \geq \tau_\alpha$ для всех α . Далее, если какая-нибудь другая предтопология τ обладает всеми теми же свойствами, т.е. если $\tau_* \geq \tau_\alpha$ для всех α , то $\tau(x)$ будет содержать в себе все множества вида $W_i \in \tau_{\alpha_i}(x)$, и, в силу определения фильтра, все конечные пересечения таких множеств. Поэтому $\tau \geq \tau_*$. Таким образом, τ_* является наименьшей верхней границей семейства $\mathcal{E}$: $\tau_* = \sup \mathcal{E}$. Теорема доказана. $\triangleright$

Определение 1.3.3. Множество $G \subset X$ называют *открытым* (относительно предтопологии τ), если оно является окрестностью каждой своей точки, символически

$$G \in \text{Op}(\tau) \Leftrightarrow G \in \tau(x) \quad \forall x \in G.$$

Далее, множество $F \subset X$ называют *замкнутым*, если его дополнение открыто, т.е. если

$$F \in \text{Cl}(\tau) \Leftrightarrow X \setminus F \in \text{Op}(\tau).$$

ТЕОРЕМА 1.3.4. Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств открыто. Пересечение любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых множеств — замкнуто.

Рассмотренные выше окрестности точек, которые вводились на базе предтопологии τ , обычно называют *предокрестностями*. На самом деле "хорошими, правильными" окрестностями (безо всяких приставок :)) являются окрестности открытые. И мы приходим к следующему определению.

Определение 1.3.5. Пусть (X, τ) предтопологическое пространство. Определим предтопологию $t(\tau)$ по правилу:

$$U \in t(\tau) \Leftrightarrow \exists V \in \text{Op}(\tau) : x \in V \text{ \& } V \subset U.$$

Упражнение 1.3.6. Проверьте, что $t(\tau)$ в самом деле является предтопологией.

Определение 1.3.7. Предтопологию τ на X называют *топологией*, если $\tau = t(\tau)$. В этом случае пару (X, τ) называют *топологическим пространством*. Множество всех топологий на X обозначают символом $T(X)$.

Упражнение 1.3.8. Постройте пример предтопологии, которая не является топологией (т.е. у которой некоторые окрестности НЕ содержат открытых подокрестностей).

Пример 1.3.9. (i) Метрическая топология, окрестности точки задаются шарами с центром в данной точке;

(ii) Топология (полу)-нормированного пространства. Именно, пусть X — линейное пространство, и на нем задана полунорма $\|\cdot\|$. Тогда топология на X определяется по прежнему с помощью шаров:

$$U \in \tau(x) \Leftrightarrow \exists r > 0 : \{y \in X : \|y - x\| < r\} \subset U.$$

Будем обозначать эту топологию $\tau_{\|\cdot\|}$.

- (iii) Топология мультинормированного пространства. Пусть X — линейное пространство, и на нем задано семейство полунорм $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда топология на этом пространстве определяется по правилу:

$$\tau = \sup \tau_{\|\cdot\|_\alpha}.$$

Другими словами

$$U \in \tau(x) \Leftrightarrow \exists r > 0 \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : \{y \in X : \|y - x\|_{\alpha_j} < r \forall j = 1, \dots, k\} \subset U.$$

Т.е. здесь окрестности — это пересечение конечного семейства шаров (отвечающих разным полунормам).

- (iv) Положим $\tau_o = \inf \mathcal{T}(X)$. Тогда $\tau_o(x) = \{X\}$. Здесь только два открытых множества: пустое и само X . Эта топология называется *тривиальной*.
- (v) Положим $\tau^\circ = \sup \mathcal{T}(X)$. Тогда $\tau^\circ(x) = \text{fil}\{x\}$. Здесь любое подмножество X является открытым. Такая топология называется *дискретной*.

ЛЕММА 1.3.10. Пусть Op — совокупность подмножеств в X , выдерживающая образование объединения любого и пересечения конечного семейств. Тогда существует, и притом единственная, топология τ на X такая, что $\text{Op}(\tau) = \text{Op}$.

◁ Положим $\tau(x) := \text{fil}\{V \in \text{Op} : x \in V\}$. Поскольку $X \in \text{Op}$ (как пересечение пустого семейства, ср. $\inf \emptyset = +\infty$), то $\tau(x)$ определено корректно и образует некоторый фильтр, состоящий из подмножеств, содержащих точку x . По построению, $\text{Op} \subset \text{Op}(\tau)$, стало быть, τ имеет базу из открытых окрестностей, и $t(\tau) = \tau$. Наконец, если $G \in \text{Op}(\tau)$, то

$$G = \bigcup_{x \in G} V(x),$$

где через $V(x)$ обозначена соответствующая окрестность точки x : $V(x) \in \text{Op}$, $x \in V(x)$. Значит, $G \in \text{Op}$ как объединение множеств из Op (см. условие). Утверждение об единственности сомнений не вызывает: по одной базе можно построить только один фильтр.

▷

ТЕОРЕМА 1.3.11. Пусть отображение $t : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X)$ определено по правилу $t : \tau \mapsto t(\tau)$. Тогда

- (i) $\text{im } t = \mathcal{T}(X)$, т.е. $t(\tau)$ является топологией для всех $\tau \in \mathcal{T}(X)$;
- (ii) Монотонность: $\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow t(\tau_1) \leq t(\tau_2)$ для всех $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}(X)$;
- (iii) Огрубление: $\tau \in \mathcal{T}(X) \Rightarrow t(\tau) \leq \tau$, т.е. предтопология может быть тоньше, чем порожденная ей топология, — последняя может оказаться и грубее, чем исходная τ ;
- (iv) Совпадение семейств открытых множеств: $\text{Op}(\tau) = \text{Op}(t(\tau))$ для каждой предтопологии $\tau \in \mathcal{T}(X)$.

◁

▷

СЛЕДСТВИЕ 1.3.12. Для композиции отображения t справедливо тождество $t \circ t = t$.

◁ Это всего лишь переформулировка Теоремы 1.3.11 (i). ▷

ТЕОРЕМА 1.3.13. Множество $T(X)$ топологий на X с отношением "сильнее" представляет собой полную решетку. При этом для любого множества $\mathcal{E}$ в $T(X)$ выполнено

$$\sup_{T(X)} \mathcal{E} = \sup_{\mathcal{T}(X)} \mathcal{E}.$$

◁ Доказательство этой теоремы очень простое и поучительное. Положим $\tau := \sup_{\mathcal{T}(X)} \mathcal{E}$.

Тогда τ является некоторой предтопологией (см. Теорему 1.3.2). Рассмотрим теперь $t(\tau)$. Вследствие монотонности t -операции, т.к. $\tau \geq \mathcal{E}$, имеем

$$t(\tau) \geq t(\mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

Таким образом, $t(\tau)$ является верхней границей множества $\mathcal{E}$, значит,

$$t(\tau) \geq \tau \tag{1.5}$$

(т.к. τ является наименьшей верхней границей. С другой стороны, по свойству (iii) Теоремы 1.3.11 имеем обратное неравенство $t(\tau) \leq \tau$. Значит, $t(\tau) = \tau$, т.е. τ является топологией на X . По построению, $\tau \geq \mathcal{E}$, т.е. τ является верхней границей $\mathcal{E}$ в $T(X)$. Если теперь какая-нибудь топология t_1 будет другой верхней границей $\mathcal{E}$ в $T(X)$, то она будет верхней границей $\mathcal{E}$ и в $\mathcal{T}(X)$, но тогда $t_1 \geq \tau$ по определению супремума. Значит, τ является наименьшей верхней границей $\mathcal{E}$ в $T(X)$, т.е. верно искомое равенство $\tau = \sup_{T(X)} \mathcal{E}$. ▷

§1.4 Внутренность и замыкание

Пусть τ — топология на X . Тогда для каждого множества $E \subset X$ *внутренностью* E называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в E , т.е.

$$\text{Int } E = \bigcup_{U \in \text{Op}(\tau_X), U \subset E} U.$$

Элементы внутренней множества E называются *внутренними точками* E .

Аналогично, *замыканием* E называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащихся в E , т.е.

$$\text{Cl } E = \bigcap_{K \in \text{Cl}(\tau_X), K \supset E} K.$$

Элементы замыкания множества E называются *точками прикосновения* множества E .

Точки прикосновения множества E , не являющиеся его внутренними точками, называются *граничными точками* множества E , их совокупность обозначается символом ∂E или $\text{fr } E$. Таким образом, $\partial E = \text{Cl } E \setminus (\text{Int } E)$.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка z принадлежит замыканию множества $E \subset X$ в том и только том случае, если для всякой окрестности $U \in \tau(z)$ выполнено $U \cap E \neq \emptyset$. Аналогично, точка z принадлежит внутренней множеству E в том и только том случае, если $E \in \tau(z)$.

§1.5 Сходимость и непрерывность.

Как обычно, последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов из X называется *сходящейся* к точке $x \in X$, если для каждой окрестности $U \in \tau(x)$ найдется номер N такой, что $x_n \in U$ для всех $n \geq N$. Т.е., каждая окрестность точки x содержит в себе целиком "хвост" последовательности x_n . Однако, техника работы со сходящимися последовательностями является слишком слабым "аппаратом" для топологических пространств.

Упражнение 1.5.1. Приведите пример топологического пространства, в котором нет ни одной (sic!) сходящейся последовательности (кроме имеющих постоянный хвост).

Указанный контрпример наводит нас на понятие пространства, удовлетворяющего *первой аксиоме счетности*. Так называется пространство, у каждой точки которого имеется счетная база окрестностей (т.е. любая другая окрестность точки содержит какую-нибудь подокрестность из указанного счетного набора). Тогда понятно, что пространство из приведенного упражнения не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

В дополнение, отметим, о пространстве говорят, что оно удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если у совокупности его открытых множеств есть счетная база, т.е. если найдется не более чем счетный набор открытых множеств, так что все остальные открытые множества пространства представляется в виде некоторого объединения (конечного или бесконечного) множеств указанного набора.

Приведем пример пространства, у которого первая аксиома счетности выполняется, а вторая — нет.

Пример 1.5.2. Пространство Зоргенфрея, $X = \mathbb{R}$, а окрестности представляют собой множества вида $[a, b)$ (открытые справа полуинтервалы). Ясно, что это пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, и что любой полуинтервал будет открытым множеством. Докажем, что для него не выполняется вторая аксиома счетности. Предположим, что U_n — счетная база открытых множеств в пространстве Зоргенфрея. Тогда для каждого $a \in \mathbb{R}$ полуинтервал $[a, a+1)$ является объединением некоторой совокупности множеств U_n . Ясно, что точка a должна попасть в одно из них, т.е. найдется номер $n(a)$ такой, что $a \in U_{n(a)}$ и $U_{n(a)} \subset [a, a+1)$. Очевидно, что $n(a) \neq n(b)$ для любой пары различных чисел $a, b \in \mathbb{R}$. Получается, мы построили инъективное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{N}$ — противоречие, т.к. множество $\mathbb{R}$ несчетно.

Итак, аппарат сходящихся последовательностей недостаточен для наших целей. Придется изобретать более мощные средства.

Определение 1.5.3. Говорят, что *фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке x* (обозначается $\mathcal{F} \rightarrow x$), если $\mathcal{F} \supset \tau(x)$, т.е. если этот фильтр содержит все окрестности точки x .

Другими словами, $\mathcal{F} \rightarrow x$, если фильтр $\text{fil } \mathcal{F}$ тоньше, чем фильтр окрестностей точки x .

Иногда бывает удобно работать не только с самим фильтром, но и с его базой. Ясно, что база фильтра $\mathcal{B}$ сходится к точке x , обозначается $\mathcal{B} \rightarrow x$, если к точке x сходится порожденный этой базой фильтр, т.е. $\text{fil } \mathcal{B} \rightarrow x$. Можно переформулировать данное определение и еще одним, особенно простым способом, который особенно удобен в работе:

$$\mathcal{B} \rightarrow x \Leftrightarrow \forall U \in \tau(x) \exists B \in \mathcal{B} : B \subset U.$$

Напомним, что упорядоченное множество (X, σ) называется *фильтрованным по возрастанию*, если для любой пары точек $x, y \in X$ найдется элемент $z \in X$ такой, что $x \leq_\sigma z$

и $y \leq_\sigma z$. Отображение направленного множества в данное множество X называют (обобщенной) *последовательностью* или *сетью* в X . Например, отображения естественным образом упорядоченного множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ в X называются (счетными) последовательностями.

Хвостом последовательности называют множества вида $\{x_\xi : \xi \geq \zeta\}$. Ясно, что множество всех хвостов данной последовательности образует базу некоторого фильтра.

Говорят, что (обобщенная) последовательность $\{x_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *сходится* к элементу $x \in X$, если к x сходится фильтр, порожденный хвостами этой последовательности. Другими словами,

$$x_\xi \rightarrow x \Leftrightarrow \forall U \in \tau(x) \exists \zeta \in \Xi : x_\xi \in U \forall \xi \geq \zeta.$$

ТЕОРЕМА 1.5.4 (Теорема Биркгофа). Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и $E \subset X$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) точка x принадлежит замыканию множества E ;
- 2) существует фильтр $\mathcal{F} \rightarrow x$ такой, что $E \in \mathcal{F}$;
- 3) существует обобщенная последовательность $x_\xi \in E$ такая, что $x_\xi \rightarrow x$.

Очень легко выписывается критерий сходимости для топологии, являющейся супремумом некоторого семейства.

ТЕОРЕМА 1.5.5 (О сходимости фильтра). Пусть X — некоторое множество, на котором задано семейство топологий $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$. Обозначим $\tau = \sup_{\alpha \in A} \tau_\alpha$. Тогда фильтр (или обобщенная последовательность) сходится к точке $x \in X$ в топологии $\tau \Leftrightarrow$ этот фильтр (обобщенная последовательность) сходится к той же точке x в каждой из топологий τ_α , $\alpha \in A$.

Следующее определение играет фундаментальную роль в теории топологических пространств.

Определение 1.5.6. Пусть X, Y — топологические пространства, и пусть имеется отображение $f : X \rightarrow Y$. Говорят, что отображение f *непрерывно*, если для всякой точки $x \in X$ и для любой окрестности V точки $f(x)$ найдется окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$.

Следующая теорема обыгрывает данное определение "на все лады": приводится множество ему эквивалентных, которые бывают более удобны для работы в различных ситуациях.

ТЕОРЕМА 1.5.7 (Критерии непрерывности). Пусть X, Y — топологические пространства, и пусть имеется отображение $f : X \rightarrow Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) Отображение f непрерывно;
- 2) Прообраз открытого множества открыт;
- 3) Прообраз замкнутого множества замкнут;
- 4) Образ фильтра окрестностей произвольной точки $x \in X$ тоньше, чем фильтр окрестностей точки $f(x)$, т.е. $f(\tau_X(x)) \geq \tau_Y(f(x))$;
- 5) Для произвольной точки $x \in X$ каждый фильтр, сходящийся к x , отображение f переводит в фильтр, сходящийся к $f(x)$;
- 6) Обобщенные последовательности, сходящиеся к (произвольной) точке x , отображение f переводит в последовательности, сходящиеся к точке $f(x)$.

◁ Предоставляется читателю в качестве нехитрого упражнения.

▷

Упражнение 1.5.8. Покажите, что суперпозиция непрерывных функций — непрерывна.

Следствие 1.5.9. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in T(X)$ — две топологии, заданные на одном и том же множестве X . Тогда $\tau_1 \geq \tau_2$ в том и только том случае, если отображение $I_X : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ непрерывно.

Здесь и в дальнейшем символом I_X обозначается тождественное отображение: $I_X(x) = x$.

Упражнение 1.5.10. Пусть $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \omega)$ — непрерывное отображение. Какие условия нужно наложить на топологии $\tau_1 \in T(X)$, $\omega_1 \in T(Y)$, чтобы отображение $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \omega_1)$ — т.е. то же самое отображение, но в других топологиях — осталось непрерывным?

Указание. Воспользуйтесь коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \omega) \\ I_X \uparrow & & \downarrow I_Y \\ (X, \tau_1) & \xrightarrow{f} & (Y, \omega_1) \end{array} \quad (1.6)$$

Следствием 1.5.9 и тем фактом, что суперпозиция непрерывных отображений — непрерывна.

Ответ:

$$\text{Отображение } f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \omega_1) \text{ непрерывно} \Leftrightarrow \tau_1 \geq \tau \ \& \ \omega_1 \leq \omega. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.5.11 (Теорема о прообразе топологии). Пусть задано отображение $f : X \rightarrow (Y, \omega)$. Положим

$$T_0 := \{ \tau \in T(X) : f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \omega) \text{ непрерывно} \}.$$

Обозначим через $f^{-1}(\omega)$ соответствующую прообраз-топологию в X (у которой окрестностями точки x служат прообразы ω -окрестностей точки $f(x)$). Тогда справедливы формулы

$$f^{-1}(\omega) = \inf T_0 \in T_0, \quad (1.8)$$

т.е. $f^{-1}(\omega)$ является минимальным элементом T_0 .

◁ Из Теоремы 1.5.7 вытекает, что

$$\tau \in T_0 \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow f^{-1}(\omega(f(x))) \subset \tau(x)). \quad (1.9)$$

Обозначим через $\bar{\tau} = f^{-1}(\omega)$ искомою прообраз-топологию, т.е. $\bar{\tau}(x) = \{f^{-1}(U) : U \in \omega(f(x))\}$. Легко видеть, что это в самом деле будет топология. По формуле (1.9) получаем, что $\bar{\tau} \in T_0$, и, кроме того, $\bar{\tau}(x) \subset \tau(x)$ для любой топологии $\tau \in T_0$, т.е. в самом деле $\bar{\tau} = \inf T_0 = \min T_0$. ▷

Замечание 1.5.12. Доказанную теорему часто выражают словами: "прообраз топологии при данном отображении — это слабая топология в области определения, в которой отображение непрерывно". При этом, как легко видеть, открытые множества в прообразе топологии — это в точности прообразы открытых множеств. Аналогично, для сходящихся последовательностей и фильтров имеем

$$\begin{array}{ll} x_\xi \rightarrow x & \text{в } f^{-1}(\omega) \Leftrightarrow f(x_\xi) \rightarrow f(x) \text{ в } \omega; \\ \mathcal{F} \rightarrow x & \text{в } f^{-1}(\omega) \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x) \text{ в } \omega. \end{array}$$

ТЕОРЕМА 1.5.13 (Непрерывность семейства функций). Пусть задано семейство отображений $(f_\alpha : X \rightarrow (Y_\alpha, \omega_\alpha))_{\alpha \in A}$, где $(Y_\alpha, \omega_\alpha)$ — топологические пространства. Положим $\bar{\tau} := \sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$. Тогда $\bar{\tau}$ — слабая (= наименьшая) топология в X , в которой непрерывны все отображения f_α ($\alpha \in A$).

◁ Доказательство этой теоремы очень просто. В силу теоремы 1.5.11 и утверждения упражнения 1.5.10, отображение $f_\alpha : (X, \tau) \rightarrow (Y, \omega_\alpha)$ непрерывно в том и только том случае, когда $\tau \geq f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$. Отсюда получаем, что если все f_α непрерывны, то τ является верхней границей топологий $f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$. Очевидно, что по своему определению, искомая топология $\bar{\tau} := \sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$ является наименьшей из всех указанных верхних границ. ▷

Из доказанной теоремы и из Замечания 1.5.12 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.5.14 (О сходимости фильтра). В условиях Теоремы 1.5.13, фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке $x \in X$ в топологии $\bar{\tau} := \sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\omega_\alpha)$ в том и только том случае, когда

$$f_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow f_\alpha(x) \quad \forall \alpha \in A.$$

Аналогичное утверждение верно для обобщенных последовательностей.

Пример 1.5.15 (Индукцированная топология). Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и X_0 — подмножество в X . Обозначим через $\iota : X_0 \rightarrow X$ вложение X_0 в X , т.е. $\iota(x) = x$ для всех $x \in X_0$. Обозначим через τ_0 соответствующую прообраз-топологию $\tau_0 = \iota^{-1}(\tau)$ на X_0 . Эту топологию называют *индуцированной* (τ в X_0). По определению, для каждой точки $x \in X_0$ имеем $\tau_0(x) = \iota^{-1}\tau(x)$, т.е. τ_0 -окрестности — это прообразы τ -окрестностей при отображении ι . Легко видеть, что для каждого множества $E \subset X$ имеем $\iota^{-1}(E) = E \cap X_0$. Поэтому окрестности точки x в τ_0 — это в точности пересечение окрестностей точки x в τ со множеством X_0 , т.е. $\tau_0(x) = X_0 \cap \tau(x)$. Соответственно, открытые множества в индуцированной топологии τ_0 — это пересечение τ -открытых множеств со множеством X_0 , замкнутые множества в τ_0 — это пересечение τ -замкнутых множеств со множеством X_0 .

Пример 1.5.16 (Тихоновское произведение пространств). Пусть задано семейство топологических пространств $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$. Обозначим $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — декартово произведение данного семейства множеств X_α . Положим $\tau := \sup_{\alpha \in A} \text{Pr}_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)$, где $\text{Pr}_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ — соответствующий координатный проектор: $\text{Pr}_\alpha(x) = x_\alpha$. Топологию τ называют *топологией произведения*, или *произведением топологий* $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$, или еще *тихоновской топологией*. Пространство (X, τ) называют *тихоновским произведением* рассматриваемых топологических пространств.

Разберемся, как устроены окрестности в этой тихоновской топологии. Ответ на этот вопрос очень простой. Согласно формуле (1.4), τ -окрестности точки x представляют собой *конечное пересечение* окрестностей $\text{Pr}_\alpha^{-1}(\tau_\alpha(x))$. Ясно, что множества семейства $\text{Pr}_\beta^{-1}(\tau_\beta(x))$ устроены как $U_\beta \times \prod_{\alpha \in A, \alpha \neq \beta} X_\alpha$, где $U_\beta \in \tau_\beta(x_\beta)$.

Таким образом, множество U является окрестностью точки x в тихоновской топологии τ в том и только том случае, когда найдется *конечный набор* множеств $U_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k} \subset X_{\alpha_k}$ таких, что U_{α_i} является τ_{α_i} окрестностью координаты x_{α_i} и U содержит

в себе соответствующее цилиндрическое множество:

$$U \supset \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha,$$

где

$$Z_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_i}, & \text{если } \alpha = \alpha_i, i = 1, \dots, k, \\ X_\alpha & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом примере поражает контраст: множество A может иметь любую, сколь угодно большую мощность (например, иметь мощность континуума или даже больше), но окрестности тихоновского произведения всегда устроены как *конечные пересечения* некоторых координатных окрестностей; по остальным координатам в данной (фиксированной) окрестности берется в качестве сомножителей все пространство X_α .

Из следствия 1.5.14 получаем следующее важное свойство: для каждого фильтра $\mathcal{F}$ и точки $x \in X$ имеем

$$\mathcal{F} \rightarrow x \Leftrightarrow \text{Pr}_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha \quad \forall \alpha \in A, \quad (1.10)$$

где $x_\alpha = \text{Pr}_\alpha x$. Таким образом, обобщенная последовательность x_ξ сходится в X к точке x , если и только если каждая ее координатная функция сходится: $\text{Pr}_\alpha(x_\xi) \rightarrow \text{Pr}_\alpha(x)$ для всех $\alpha \in A$. Отождествляя естественным образом элементы пространства X с отображениями $g : A \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in X_\alpha$, видим, что топология тихоновского произведения — это топология "поточечной сходимости":

$$\begin{aligned} &\text{обобщенная последовательность } g_\xi \in [0, 1]^A \text{ стремится к } g \in [0, 1]^A \text{ в том} \\ &\text{и только том случае, когда } g_\xi(\alpha) \rightarrow g(\alpha) \text{ для всех } \alpha \in A. \end{aligned} \quad (1.11)$$

§1.6 Аксиомы отделимости. Типы топологических пространств

Определение 1.6.1. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 (или, сокращенно, X есть T_1 -пространство), если для любой пары различных точек $x, y \in X$ найдется окрестность U точки x такая, что $y \notin U$.

ТЕОРЕМА 1.6.2. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) пространство X обладает свойством отделимости T_1 ;
- (ii) Все одноточечные множества в X замкнуты;
- (iii) Пересечение всех окрестностей каждой точки пространства X состоит только из этой точки.

◁ ▷

T_1 -пространства называют еще *отделимыми пространствами*.

Определение 1.6.3. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 , если у любой пары различных точек $x, y \in X$ найдется пара непесекающихся окрестностей.

ТЕОРЕМА 1.6.4. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) X есть T_2 -пространство;
- (ii) Каждый фильтр имеет не более одного предела;
- (iii) Пересечение всех замкнутых окрестностей каждой точки пространства X состоит только из этой точки.

◁ ▷

T_2 -пространства называют еще *хаусдорфовыми* пространствами.

Определение 1.6.5. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 , если у любого замкнутого множества $E \subset X$ и произвольной точки $x \in X \setminus E$ найдутся их непересекающиеся окрестности.

ТЕОРЕМА 1.6.6. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) X есть T_3 пространство;
- (ii) Фильтр окрестностей каждой точки имеет базис, состоящий из замкнутых множеств;
- (iii) Пересечение всех замкнутых окрестностей каждого замкнутого множества в пространстве X совпадает с этим множеством.

◁ ▷

Отделимое T_3 -пространство называют еще *регулярным* пространством.

Определение 1.6.7. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_4 , если у любой пары непересекающихся замкнутых множеств $E, G \subset X$ найдутся их непересекающиеся окрестности.

ТЕОРЕМА 1.6.8. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) X есть T_4 пространство;
- (ii) Фильтр окрестностей каждого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.

◁ ▷

Отделимые T_4 -пространства называют еще *нормальными* пространствами.

Пространства, в которых топология порождается некоторой метрикой, называются *метризуемыми* пространствами.

ТЕОРЕМА 1.6.9. Для введенных выше категорий топологических пространств имеют место строгие включения:

$$\text{Метризуемые} \subsetneq \text{Нормальные} \subsetneq \text{Регулярные} \subsetneq \text{Хаусдорфовы} \subsetneq \text{Отделимые}. \quad (1.12)$$

◁ 1) Приведем пример отделимого пространства, которое не является хаусдорфовым. Пусть X — некоторое бесконечное множество. Множество U в X будем называть открытым, если дополнение к нему конечно. Ясно, что это определение задает топологию в X . Далее, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то множество $U = X \setminus \{y\}$ будет представлять собой открытую окрестность точки x , не содержащую y . Таким образом, пространство X является T_1 -отделимым. В то же время, любые два открытых множества в этой топологии пересекаются¹. Поэтому данное пространство X не является хаусдорфовым — у пары различных точек нет непересекающихся окрестностей.

2) Приведем пример хаусдорфова, но не регулярного пространства. Пусть $X = [0, +\infty)$. Базой фильтра окрестностей точки $x \neq 0$ будут, как обычно, интервалы вида $(x - \delta, x + \delta)$, а вот окрестности точки ноль определяются по-другому. Обозначим через A последовательность точек $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда базой окрестностей точки 0 будут множества вида $[0, \delta) \setminus A$. Легко видеть, построенное пространство X хаусдорфово, любые две точки обладают непересекающимися окрестностями. В то же время, A представляет собой замкнутое множество, но у A и $x = 0$ нет пары непересекающихся окрестностей, т.е. пространство X — нерегулярно.

3) Теперь пришла очередь построить пример регулярного, но не нормального пространства. Пусть X — обычная верхняя полуплоскость $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Тогда, если точка $z \in X$ не лежит на граничной прямой L этой полуплоскости, то базой ее окрестностей служат, как обычно, открытые круги с центром в z . Если же точка z лежит на граничной прямой полуплоскости X , то базой ее окрестностей будут служить множества вида $B \cup \{z\}$, где B — открытый круг, лежащий в X и касающийся граничной прямой L в точке z .

Построенное топологическое пространство называется *полуплоскость Немыцкого*. Легко устанавливается следующее

Утверждение. Каждое подмножество граничной прямой L является замкнутым множеством (в топологии полуплоскости Немыцкого).

В самом деле, возьмем произвольное непустое множество $A \subset L$ и не принадлежащую ему точку $x \in X \setminus A$. Наша задача — построить окрестность точки x , не пересекающуюся с A (тем самым будет показано, что x не является точкой прикосновения A , т.е. у A нет других точек прикосновения, кроме самого A). Возможны два случая:

i) $x \notin L$. Тогда возьмем круг B с центром в x , не пересекающийся с L . По построению, B есть окрестность точки x , не пересекающаяся с A .

ii) $x \in L$. Тогда возьмем произвольный круг $B \subset X$, касающийся прямой L в точке x . По определению, множество $U = B \cup \{x\}$ является окрестностью точки x . С другой стороны, U не пересекается с $A \subset L$. Поэтому x не является точкой прикосновения множества A , т.е. $x \notin \text{Cl } A$.

Докажем теперь, что полуплоскость Немыцкого не является нормальным пространством. Возьмем в качестве A множество всех иррациональных точек граничной прямой L , а в качестве B — множество всех рациональных ее точек. Множества A, B непустые, замкнутые и непересекающиеся. Предположим, что у них найдутся открытые непересекающиеся окрестности: $U \supset A, V \supset B, U \cap V = \emptyset$. Так как U открыто, то для каждой точки $x \in A$ найдется шар радиуса r_x , лежащий в U и касающийся прямой L в точке x .

¹В самом деле, пусть U_1, U_2 — открытые множества. Тогда по определению имеет место представление: $U_1 = X \setminus A, U_2 = X \setminus B$, где множества A, B — конечны. Так как множество $A \cup B$ — конечно, то и пересечение $U_1 \cap U_2 = X \setminus (A \cup B)$ также открыто и непусто.

Положим $A_n := \{x \in A : r_x \geq \frac{1}{n}\}$. Имеем: $L = B \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$. По теореме Бэра, полное пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Поэтому найдется индекс $n \in \mathbb{N}$ и невырожденный интервал $I \subset L$ такой, что $I \subset \text{Cl } A_n$. Отсюда легко выводится, что для каждой точки интервала $y \in I$ открытый шар B радиуса $\frac{1}{n}$, лежащий в рассматриваемой полуплоскости и касающийся прямой L в точке y , целиком содержится в U . Но интервал I содержит и рациональные точки z , для каждой из которых должен найтись шар B_z , касающийся прямой L в точке z и содержащийся целиком внутри $V \subset \mathbb{R}^2 \setminus U$. Полученное противоречие завершает доказательство "ненормальности" полуплоскости Немыцкого.

4) Наконец, чтобы завершить доказательство теоремы, нужно указать некоторое нормальное пространство, которое не является метризуемым. В качестве такового сгодится уже встречавшееся нам пространство Зоргенфрея Z . Докажем его нормальность. Пусть A, B — два замкнутых непересекающихся множества в этом пространстве. Для каждой точки $a \in A$ положим $c_a = \inf\{c > a : c \in B\}$. Из замкнутости множества B и предположения $a \notin B$ вытекает, что $c_a > a$ для всех $a \in A$. Обозначим

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, c_a).$$

По построению, U является открытым множеством, причем $A \subset U$.

Аналогично, для $b \in B$ положим $d_b = \inf\{d > b : d \in A\}$ и

$$V = \bigcup_{b \in B} [b, d_b).$$

По построению, V также является открытым множеством, и $B \subset V$. Геометрически очевидно (по построению), что множества U и V не пересекаются. Это доказывает нормальность пространства Зоргенфрея.

Тот факт, что топология данного пространства не порождается никакой метрикой, вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 1.6.10. *Всякое метризуемое топологическое пространство X , удовлетворяющее первой аксиоме счетности и содержащее всюду плотное не более чем счетное множество², удовлетворяет также и второй аксиоме счетности, т.е. совокупность его открытых множеств имеет не более чем счетную базу.*

Доказательство этой леммы оставляется читателю в качестве упражнения.

Ранее уже отмечалось, что пространство Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счетности. Легко видеть также, что множество рациональных точек в этом пространстве является счетным и всюду плотным. Тогда, если бы пространство Зоргенфрея было бы метризуемым, то оно удовлетворяло бы по сформулированной только что лемме и второй аксиоме счетности. А поскольку этого нет, то пространство Зоргенфрея не метризуемо. >

В связи с последним примером (пространство Зоргенфрея нормально, но не метризуемо), отметим без доказательства следующий классический факт, установленный российским математиком А.Н. Тихоновым.

²Множество A в топологическом пространстве X называется *всюду плотным*, если $X = \text{Cl } A$.

ТЕОРЕМА 1.6.11 (Теорема Тихонова о метризуемости). Пусть X — регулярное ($= T_1 + T_3$) топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности (т.е. совокупность его открытых множеств имеет не более чем счетную базу). Тогда X метризуемо.

Важность (удобство в работе) нормальных пространств обуславливается также следующими фактами, установленными отечественным математиком П.С. Урысоном.

ТЕОРЕМА 1.6.12 (Большая лемма Урысона). Пусть X — нормальное топологическое пространство, множество $C \subset X$ замкнуто, и множество $U \supset C$ — его открытая окрестность. Тогда найдется непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = 1$ для всех $x \in C$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in X \setminus U$.

ТЕОРЕМА 1.6.13 (Теорема Урысона). Топологическое пространство X нормально в том и только том случае, если для любой пары непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subset X$ найдется непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

ТЕОРЕМА 1.6.14 (Теорема Титце–Урысона о продолжении). Пусть X — нормальное топологическое пространство, $C \subset X$ — замкнутое множество и функция $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна и ограничена, т.е. $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in C$. Тогда функцию f можно продолжить (распространить) с сохранением непрерывности и ограниченности на все X , т.е. найдется непрерывная функция $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in C$ и $|\tilde{f}(x)| \leq M$ для всех $x \in X$.

Данные теоремы приводятся здесь без доказательства; интересующиеся читатели могут ознакомиться с доказательствами, например, в [1].

§1.7 Компактность

ЛЕММА 1.7.1. Пусть $\mathcal{B}$ — базис фильтра в топологическом пространстве, и $\text{cl } \mathcal{B} := \bigcap \{\text{cl } B : B \in \mathcal{B}\}$ — множество его точек прикосновения. Тогда

- (1) $\text{cl } \mathcal{B} = \text{cl fil } \mathcal{B}$;
- (2) $\mathcal{B} \rightarrow x \Rightarrow x \in \text{cl } \mathcal{B}$;
- (3) $(\mathcal{B} \text{ — ультрафильтр, } x \in \text{cl } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \rightarrow x$.

Доказательство. Следует проверить только (3), т.к. справедливость (1) и (2) ясна. Итак, пусть $\mathcal{B}$ — ультрафильтр и $x \in \text{cl } \mathcal{B}$. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. фильтр $\mathcal{B}$ не сходится к x . Тогда найдется открытая окрестность U точки x такая, что $U \notin \mathcal{B}$. В этом случае по определению ультрафильтра $X \setminus U \in \mathcal{B}$. Но $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$, в частности, $x \notin \text{cl}(X \setminus U)$ — это очевидно противоречит предположению $x \in \text{cl } \mathcal{B}$. $\square$

Множество C в топологическом пространстве X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

ТЕОРЕМА 1.7.2. Пусть X — топологическое пространство, и C — множество в X . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) Множество C компактно;
- (ii) Если базис фильтра $\mathcal{B}$ не имеет в C точек прикосновения, то найдется множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $B \cap C = \emptyset$;
- (iii) Каждый базис фильтра, содержащий C , имеет в C точки прикосновения;
- (iv) Каждый ультрафильтр, содержащий C , имеет в C предел.

Доказательство. □

ТЕОРЕМА 1.7.3. *Образ компактного множества при непрерывном отображении — также компактное множество.*

Доказательство. □

ТЕОРЕМА 1.7.4. *Пусть X_0 — подпространство топологического пространства X , и пусть множество $C \subset X_0$ представляет собой компакт в X . Тогда C представляет собой компакт также и в X_0 .*

Доказательство. □

Таким образом, компактность представляет из себя внутреннее ("абсолютное") свойство множества. Оно зависит только от индуцированной на этом множестве топологии, а не от объемлющего пространства. В этой связи говорят о *компактных пространствах*, т.е. пространствах, компактных "в себе".

ТЕОРЕМА 1.7.5. *Тихоновское произведение компактных топологических пространств — компактно.*

Доказательство. Пусть $T = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — тихоновское произведение, причем все сомножители X_α — компактные пространства (в соответствующей топологии τ_α). Возьмем произвольный ультрафильтр $\mathcal{F}$ в T . Пусть $\text{Pr}_\alpha : T \rightarrow X_\alpha$ — стандартная проекция, и рассмотрим порожденный этой проекцией фильтр $\mathcal{F}_\alpha = \text{Pr}_\alpha(\mathcal{F})$. По построению,

$$E \in \mathcal{F}_\alpha \Leftrightarrow (\text{Pr}_\alpha)^{-1}(E) \in \mathcal{F}.$$

Отсюда легко вывести, что $\mathcal{F}_\alpha$ также представляет собой ультрафильтр в X_α . По Теореме 1.7.2 (iv), существует предел $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow x_\alpha$ в топологии τ_α . Обозначим через x_* точку из T с координатами x_α . Тогда по формуле (1.10) имеет место сходимость $\mathcal{F} \rightarrow x_*$ в топологии тихоновского пространства T . Отсюда, вновь по Теореме 1.7.2 (iv) заключаем, что пространство T — компактно. □

ТЕОРЕМА 1.7.6. *Замкнутое подмножество компактного пространства — компактно.*

Доказательство. Пусть X — компактное топологическое пространство, и пусть $C \subset X$ — замкнутое множество. Возьмем произвольный ультрафильтр $\mathcal{F}$ такой, что $C \in \mathcal{F}$. В силу компактности пространства X , найдется предел $\mathcal{F} \rightarrow x$. Вследствие леммы 1.7.1 имеем $x \in \text{cl } C$. Отсюда ввиду замкнутости множества C заключаем, что $x \in C$. Тогда по Теореме 1.7.2 (iv) множество C компактно. □

ТЕОРЕМА 1.7.7. *Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства — замкнуто.*

Доказательство. Пусть множество C компактно в хаусдорфовом пространстве X . Возьмем произвольную точку $x \in \text{cl } C$. Тогда по теореме Биргхофа 1.5.4 найдется фильтр $\mathcal{F}$ в X такой, что $\mathcal{F} \rightarrow x$ и $C \in \mathcal{F}$. Возьмем ультрафильтр $\mathcal{F}_* \supset \mathcal{F}$ в X (его существование вытекает из Следствия 1.2.5). Тогда по Теореме 1.7.2 (iv) имеет место сходимость $\mathcal{F}_* \rightarrow z$ к некоторой точке $z \in C$. В силу предположения о хаусдорфовости пространства X , предел там единственный (см. Теорему 1.6.4), поэтому $z = x$, тем самым включение $x \in C$ доказано. □

ТЕОРЕМА 1.7.8. Пусть $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \omega)$ — непрерывное инъективное отображение, причем пространство X — компактно, а Y — хаусдорфово. Тогда, если $f(X) = Y$, то f — гомеоморфизм.

Доказательство. Пусть выполнены предположения теоремы. Нужно доказать, что отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ также непрерывно. Согласно Теореме 1.5.7, для этого нужно проверить, что прообразы замкнутых множеств при отображении f^{-1} замкнуты. Другими словами, для каждого замкнутого множества $C \subset X$ нужно показать, что множество $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ также замкнуто. Имеем, что всякое замкнутое множество $C \subset X$ компактно по теореме 1.7.6. Тогда множество $f(C)$ компактно в Y по теореме 1.7.3. Но тогда множество $f(C)$ замкнуто в Y по теореме 1.7.7, что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 1.7.9 (Свойство минимальности компактных топологий). Пусть τ_1, τ_2 две топологии на одном пространстве X . Если τ_1 компактна, а τ_2 — хаусдорфова, причем $\tau_1 \geq \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доказательство. Пусть выполнены предположения теоремы. Рассмотрим тождественное отображение (вложение) $I_X : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$, задаваемое обычной формулой $I_X(x) = x$. По Следствию 1.5.9 отображение I_X непрерывно. Его инъективность очевидна, так что по Теореме 1.7.8 I_X — гомеоморфизм. Но тогда и обратное отображение $I_X : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$ также непрерывно. Все по тому же Следствию 1.5.9 это означает, что $\tau_2 \geq \tau_1$, откуда вытекает искомое равенство $\tau_1 = \tau_2$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.7.10. Всякое хаусдорфово компактное пространство нормально.

Доказательство. Оставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

ТЕОРЕМА 1.7.11. Всякое хаусдорфово компактное пространство с точностью до гомеоморфизма представляет собой замкнутое подмножество тихоновского куба $[0, 1]^A$.

Доказательство. То, что замкнутое пространство тихоновского куба — компактно, вытекает из теорем 1.7.5—1.7.6. Хаусдорфовость тихоновских кубов очевидна, так что в одну сторону ($\Leftarrow$) теорема доказывается легко.

Пусть теперь X — произвольное (непустое) компактное хаусдорфово топологическое пространство. В качестве A возьмем множество всех непрерывных функций $f : X \rightarrow [0, 1]$. Определим отображение $h : X \rightarrow [0, 1]^A$ по правилу: $h(x)(f) = f(x)$ для всех $f \in A$. Рассмотрим свойства отображения h .

1) Утверждается, что h непрерывно. В самом деле, если имеется сходящаяся обобщенная последовательность $x_\xi \rightarrow x$, то для каждого $f \in A$ имеем $h(x_\xi)(f) = f(x_\xi) \rightarrow f(x)$ (ввиду непрерывности f). Таким образом, каждая f -координатная функция последовательности $h(x_\xi)$ сходится к f -координате $h(x)$ для всех $f \in A$. Тогда по свойству (1.11) имеем $h(x_\xi) \rightarrow h(x)$ (здесь в роли элементов тихоновского куба g_ξ, g из формулы (1.11) у нас выступают соответственно $h(x_\xi)$ и $h(x)$). Итак, отображение h переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся, значит, оно непрерывно (см. Теорему 1.5.7 (6)).

2) Утверждается, что отображение h инъективно. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда найдутся две различные точки $x, y \in X$ такие, что $h(x) = h(y)$. Это означает, что для каждого $f \in A$ справедливо тождество $f(x) = f(y)$, т.е. (вспоминая определение A) для всякой непрерывной функции $f : X \rightarrow [0, 1]$ выполнено равенство $f(x) = f(y)$. Однако это, ввиду нормальности X (см. теорему 1.7.10) противоречит теореме Урысона 1.6.13. Полученное противоречие завершает доказательство инъективности.

Итак, отображение $h : X \rightarrow [0, 1]^A$ непрерывно и инъективно, значит, оно является гомеоморфизмом на свой образ $h(X)$. Множество $h(X)$ компактно и замкнуто в силу предыдущих теорем. Итак, X гомеоморфно замкнутому подмножеству тихоновского куба, что и требовалось доказать. $\square$

В связи с последним утверждением отметим, что верен и более сильный факт: согласно теореме Тихонова, всякое нормальное топологическое пространство X гомеоморфно подмножеству некоторого тихоновского куба $[0, 1]^A$, причем мощность множества A совпадает с минимальной мощностью базы семейства открытых множеств в X .

Пример 1.7.12. Рассмотрим тихоновский куб $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Интересно, что на нем можно ввести метрику. А именно, для точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ положим

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2}.$$

Нетрудно проверить, что топология, задаваемая этой метрикой, эквивалентна тихоновской топологии (т.е. покоординатной сходимости). Таким образом, Q является компактным метрическим пространством (его еще называют "*гильбертов куб*"). Интересно свойство универсальности данного куба: всякое регулярное топологическое пространство со счетной базой (которое метризуемо по теореме Тихонова 1.6.11) вкладывается в Q , т.е. гомеоморфно некоторому подмножеству из Q .

Глава 2

Двойственность и ее приложения

§2.1 Векторные топологии

Определение 2.1.1. Пусть $(X, \mathbb{F}, +, \cdot)$ — векторное пространство над основным полем $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Топологию τ в X называют *согласованной со структурой векторного пространства*, или, короче, *векторной топологией*, если в ней операции сложения и умножения на число непрерывны, т.е. если непрерывны отображения

$$\begin{aligned} + : (X \times X, \tau \times \tau) &\rightarrow (X, \tau), \\ \cdot : (\mathbb{F} \times X, \tau_{\mathbb{F}} \times \tau) &\rightarrow (X, \tau). \end{aligned}$$

О пространстве (X, τ) в этом случае говорят, как о *топологическом векторном пространстве*.

ЛЕММА 2.1.2. Если X — топологическое векторное пространство, то для любого элемента $x_0 \in X$ и числа $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ отображения

$$X \ni x \mapsto x + x_0, \quad X \ni x \mapsto \alpha x$$

являются гомеоморфизмами.

Напомним, что множество $E \subset X$ называют *уравновешенным*, если справедлива импликация $x \in E \Rightarrow \lambda x \in E$ для всех $x \in E$ и для всех чисел λ таких, что $|\lambda| \leq 1$. Множество E называют *поглощающим*, если $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE$.

ТЕОРЕМА 2.1.3. Пусть X — векторное пространство и $\mathcal{N}$ — фильтр в X . Существует векторная топология τ на X такая, что $\mathcal{N} = \tau(0)$ в том и только в том случае, если

- (1) $\mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$;
- (2) $\mathcal{N}$ состоит из поглощающих множеств;
- (3) $\mathcal{N}$ имеет базис из уравновешенных множеств.

При этом $\tau(x) = x + \mathcal{N}$ для всех $x \in X$.

ТЕОРЕМА 2.1.4. Множество $VT(X)$ всех векторных топологий на линейном пространстве X является полной решеткой, при этом

$$\sup_{VT(X)} \mathcal{E} = \sup_{T(X)} \mathcal{E} \tag{2.1}$$

для всякого подмножества $\mathcal{E} \subset VT(X)$.

ТЕОРЕМА 2.1.5. Пробраз векторной топологии при линейном отображении — векторная топология.

§2.2 Локально выпуклые топологии

Определение 2.2.1. Векторная топология на X называется *локально выпуклой*, если она имеет базис, состоящий из выпуклых множеств.

Напомним, что множество $E \subset X$ называют *абсолютно выпуклым*, если справедлива импликация

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} : |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1 \Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \in E.$$

Теорема 2.2.2. Пусть X — векторное пространство и $\mathcal{N}$ — фильтр в X . Существует локально выпуклая топология τ на X такая, что $\mathcal{N} = \tau(0)$ в том и только в том случае, если

- (1) $\frac{1}{2}\mathcal{N} = \mathcal{N}$;
- (2) $\mathcal{N}$ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых поглощающих множеств.

Следствие 2.2.3. Множество $LCT(X)$ всех локально выпуклых топологий на линейном пространстве X является полной решеткой, при этом

$$\sup_{LCT(X)} \mathcal{E} = \sup_{T(X)} \mathcal{E} \quad (2.2)$$

для всякого подмножества $\mathcal{E} \subset LCT(X)$.

Следствие 2.2.4. Прообраз локально выпуклой топологии при линейном отображении — локально выпуклая топология. Произведение локально выпуклых топологий — локально выпуклая топология.

Напомним, что функция $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется *полуноормой*, если

- (i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для всех $x \in X$;
- (ii) $p(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leq |\lambda_1| p(x) + |\lambda_2| p(y)$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, $x, y \in X$.

Полуноорма p очевидным образом порождает локально выпуклую топологию τ_p , у которой базис окрестностей нуля состоит из множеств вида $B_r = \{x \in X : p(x) < r\}$, где $r > 0$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая совокупность полуноорм на X . Топологию

$$\tau_{\mathfrak{M}} = \sup_{p \in \mathfrak{M}} \tau_p$$

называют *топологией мультинормированного пространства*, а саму пару $(X, \mathfrak{M})$ — *мультинормированным пространством*.

Следствие 2.2.5. Топология мультинормированного пространства является локально выпуклой.

Определение 2.2.6. Пусть τ — локально выпуклая топология на линейном пространстве X . Обозначим через $\mathfrak{M}_{\tau}$ множество всех непрерывных относительно τ полуноорм $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Это множество называют *зеркалом топологии τ* , а мультинормированное пространство $(X, \mathfrak{M}_{\tau})$ называют *ассоциированным с (X, τ)* .

Теорема 2.2.7. Локально выпуклая топология совпадает с топологией ассоциированного мультинормированного пространства.

Доказательство. Пусть τ — рассматриваемая локально выпуклая топология в X и ω — топология ассоциированного пространства $(X, \mathfrak{M}_\tau)$. По построению, $\tau \geq \omega$. Надо доказать обратное неравенство: $\omega \geq \tau$.

Пусть $V \in \tau(0)$. По определению локально-выпуклой топологии найдется поглощающее абсолютно выпуклое множество B такое, что $B \subset V$, и B также представляет собой окрестность нуля. Рассмотрим функционал Минковского:

$$p_B(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tB\}.$$

В силу указанных свойств множества B , этот функционал будет всюду определенным и выпуклым, и положительно однородным. Таким образом, p_B — полунорма. Легко проверяется, что $\{p_B < 1\} \subset B \subset \{p_B \leq 1\}$. Отсюда выводим, что полунорма p непрерывна в топологии τ , т.е. $p_B \in \mathfrak{M}_\tau$. Стало быть, $\{p_B < 1\}$ представляет собой открытое множество относительно ω , в частности, $\{p_B < 1\} \in \omega(0)$. Но тогда $B \in \omega(0)$, следовательно, $V \in \omega(0)$. Ввиду произвольности окрестности $V \in \tau(0)$, искомое неравенство $\omega \geq \tau$ доказано. $\square$

Векторное пространство, наделенное отделимой локально-выпуклой топологией, называют *локально выпуклым пространством*. Таким образом, доказанная теорема означает, что понятия локально выпуклых пространств и отделимых мультиноммированных пространств — равнообъемны.

Напомним, что для векторного пространства X символом $X^\#$ обозначается множество всех линейных функционалов $f : X \rightarrow \mathbb{F}$.

Определение 2.2.8. Пусть τ — локально выпуклая топология на линейном пространстве X . Символом $(X, \tau)'$ (или, короче, X') обозначается множество всех линейных непрерывных функционалов на X .

Ясно, что X' является линейным подпространством в $X^\#$.

Каждый непрерывный линейный функционал из $f \in X'$ тривиальным образом ограничен сверху полунормой $p(x) := |f(x)|$. Поэтому справедлива формула:

$$(X, \tau)' = \{|\partial|(p) : p \in \mathfrak{M}_\tau\} \quad (2.3)$$

Напомним, что по определению символом $|\partial|(p)$ обозначается субдифференциал полунормы p , т.е.

$$|\partial|(p) = \{f \in X^\# : |f(x)| \leq p(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

Обозначим через $\text{Lat } X^\#$ совокупность всех линейных подпространств в $X^\#$. Множество $\text{Lat } X^\#$ можно естественным образом упорядочить по отношению включения: $H_1 \leq H_2 \Leftrightarrow H_1 \subset H_2$.

Мы знаем, что топологии тоже можно сравнивать (сильнее — слабее). Оказывается, что между этими двумя типами сравнения имеется глубокая и красивая взаимосвязь.

ТЕОРЕМА 2.2.9. *Отображение штрихования $\tau \mapsto (X, \tau)'$, действующее из $\text{LCT}(X)$ в $\text{Lat } X^\#$, сохраняет точные верхние границы, т.е. для любого множества $\mathcal{E} \subset \text{LCT}(X)$, справедлива формула*

$$(X, \sup_{\tau \in \mathcal{E}} \tau)' = \sup_{\tau \in \mathcal{E}} (X, \tau)'. \quad (2.4)$$

Доказательство. Обозначим $\bar{\tau} = \sup \mathcal{E}$. Тогда $\bar{\tau}$ будет локально выпуклой топологией, причем $\bar{\tau} \geq \tau$ для всех $\tau \in \mathcal{E}$. Поэтому, если $f \in (X, \tau)'$, то $f \in (X, \bar{\tau})'$, т.е. $(X, \sup \mathcal{E})' \supset \sup_{\tau \in \mathcal{E}} (X, \tau)'$.

Докажем обратное включение. Пусть $f \in (X, \bar{\tau})'$. Тогда множество $U = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ является открытой окрестностью нуля в X . Поэтому найдутся топологии $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathcal{E}$ и множества $U_1, \dots, U_k$ такие, что все U_j представляют собой абсолютно выпуклые поглощающие множества, каждое U_j — открытая окрестность нуля в τ_j , и, наконец, $U_1 \cap \dots \cap U_k \subset U$.

Рассмотрим полунорму p_j , которая задается функционалом Минковского множества U_j :

$$p_j(x) = p_{U_j}(x) = \inf\{t \geq 0 : tU_j \ni x\}.$$

Тогда полунорма p_j по построению будет непрерывной функцией в τ_j , причем

$$\{p_j < 1\} \subset U_j \subset \{p_j \leq 1\}.$$

Зададим полунорму $p(x) = p_1(x) + \dots + p_k(x)$. Тогда эта полунорма будет непрерывна в $\bar{\tau}$ (т.к. p_j непрерывна в τ_j и $\bar{\tau} \geq \tau$, см. Упражнение 1.5.10). Более того, если $p(x) < 1$, то $p_j(x) < 1$ для всех $j \in 1, \dots, k$, тогда $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k \subset U$. Тем самым доказана импликация

$$p(x) < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1.$$

Отсюда легко выводится, что $|f(x)| \leq p(x)$ для всех $x \in X$, т.е. $f \in |\partial|(p)$. Согласно фундаментальной теореме Хана–Банаха, $|\partial|(p) = |\partial|(p_1) + \dots + |\partial|(p_k)$, т.е. найдутся линейные функционалы $f_j \in X^\#$ такие, что $f = f_1 + \dots + f_k$ и $f_j \in |\partial|(p_j)$.

Обозначим $\mathcal{L} = \sup_{\tau \in \mathcal{E}} (X, \tau)'$. По построению, $f_j \in (X, \tau_j)' \subset \mathcal{L}$. Поэтому $f = f_1 + \dots + f_k \in \mathcal{L}$. Тем самым установлена импликация $f \in (X, \bar{\tau})' \Rightarrow f \in \mathcal{L}$, которая равнозначна искомому включению $(X, \sup \mathcal{E})' \subset \sup_{\tau \in \mathcal{E}} (X, \tau)'$. $\square$

§2.3 Двойственность векторных пространств

Определение 2.3.1. Пусть X, Y — векторные пространства над одним и тем же основным полем $\mathbb{F}$. Пусть, далее, задана *билинейная форма* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ее еще называют *бракетирование*) из $X \times Y$ в $\mathbb{F}$, т.е. отображение, линейное по каждому переменному. Для $x \in X$ зададим линейный функционал $\langle x | \in Y^\#$ по правилу

$$\langle x | : y \mapsto \langle x | y \rangle.$$

Аналогично, для $y \in Y$ зададим линейный функционал $|y \rangle \in X^\#$ по правилу

$$|y \rangle : x \mapsto \langle x | y \rangle.$$

Тем самым построены отображения $\langle \cdot | : X \rightarrow \mathbb{F}^Y$, $|\cdot \rangle : Y \rightarrow \mathbb{F}^X$, которые называют соответственно *бра-отображением* и *кет-отображением*. Аналогично, функционалы из $\langle X |$ называют *бра-функционалами*, а из $|Y \rangle$ — *кет-функционалами*. Ясно, что бра- и кет-отображения суть линейные операторы.

Определение 2.3.2. Бракетирование называют *двойственностью*, если бра-отображение и кет-отображение суть мономорфизмы (т.е. ненулевые элементы переходят в ненулевые элементы). Факт наличия двойственности обозначают символом $X \leftrightarrow Y$. Бра-отображение и кет-отображение называют в этой ситуации *дуализациями*.

Пример 2.3.3. (i) Пусть H — гильбертово пространство. Скалярное произведение приводит в двойственность H и H_* . Отображение штрихования при этом совпадает с кет-отображением;

(ii) Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство, и X' — сопряженное пространство. Бракетирование $\langle x|x' \rangle \mapsto x'(x)$ приводит X и X' в двойственность.

Двойственность порождает *слабые топологии* в пространствах X, Y . Именно,

Определение 2.3.4. Слабейшая в X топология, в которой непрерывны все кет-функционалы, называется *бра-топологией*, или *слабой топологией в X* , наведенной двойственностью с Y . Эта топология обозначается символом $\sigma(X, Y)$.

Аналогично, слабейшая в Y топология, в которой непрерывны все бра-функционалы, называется *кет-топологией*, или *слабой топологией в Y* , наведенной двойственностью с X . Эта топология обозначается символом $\sigma(Y, X)$.

Из этого определения и из Следствия 1.5.14 вытекает, что

$$x_\xi \rightarrow x \quad \text{в } \sigma(X, Y) \Leftrightarrow \langle x_\xi|y \rangle \rightarrow \langle x|y \rangle \quad \text{для всех } y \in Y. \quad (2.5)$$

Отсюда нетрудно увидеть, что $\sigma(X, Y)$ является прообразом тихоновской топологии при бра-отображении.

Ясно также, что пространства $(X, \sigma(X, Y))$ и $(Y, \sigma(Y, X))$ являются локально-выпуклыми. Поэтому у них можно рассматривать сопряженные пространства. Однако в этих сопряженных пространствах не появится новых, незнакомых нам ранее элементов — об этом замечательным обстоятельстве говорит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3.5. Дуализации суть изоморфизмы сопряженных пространств на соответствующие слабо-сопряженные пространства.

Доказательство. Пусть $X \leftrightarrow Y$. Нам нужно доказать равенство $\langle X| = (Y, \sigma(Y, X))'$.

По определению, $\sigma(Y, X)$ есть слабейшая топология, в которой непрерывны все бра-функционалы вида $\langle x|$ для $x \in X$, значит, по теореме 1.5.13 имеем $\sigma(Y, X) = \sup_{x \in X} \langle x|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}})$.

Тогда по теореме 2.2.9 получаем

$$(Y, \sigma(Y, X))' = \sup_{x \in X} (Y, \langle x|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))'.$$

При данном фиксированном ненулевом элементе $x \in X$ вычислим сопряженное пространство $(Y, \langle x|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))'$. Нетрудно видеть, что это пространство состоит из функционалов, пропорциональных $\langle x|$, т.е. $(Y, \langle x|^{-1}(\tau_{\mathbb{F}}))' = \{\lambda \langle x| : \lambda \in \mathbb{F}\}$. Окончательно получаем

$$(Y, \sigma(Y, X))' = \sup_{x \in X} \{\lambda \langle x| : \lambda \in \mathbb{F}\} = \langle X|.$$

Теорема доказана. □

Из этой теоремы вытекает, что фактически Пример 2.3.3 (ii) исчерпывает все пространства, согласованные с двойственностью.

§2.4 Топологии, согласованные с двойственностью

Пусть $X \leftrightarrow Y$ и τ — локально выпуклая топология в X . Говорят, что τ *согласована с двойственностью*, если $(X, \tau)' = |Y\rangle$. Аналогично, говорят, что локально выпуклая топология ω в Y *согласована с двойственностью* $X \leftrightarrow Y$, если $(Y, \omega)' = \langle X|$.

Теперь Теорему 2.3.5 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. Слабые топологии согласованы с наводящей их двойственностью.

Предложение 2.4.2. Пусть $\tau(X, Y)$ — точная верхняя граница множества всех локально выпуклых топологий в X , согласованных с двойственностью. Тогда топология $\tau(X, Y)$ также согласована с двойственностью.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех таких топологий. Тогда

$$(X, \tau(X, Y))' = (X, \sup \mathcal{E})' \stackrel{\text{Т-ма 2.2.9}}{=} \sup_{\tau \in \mathcal{E}} (X, \tau)' = \sup_{\tau \in \mathcal{E}} |Y\rangle = |Y\rangle.$$

□

Замечание 2.4.3. Топология $\tau(X, Y)$ носит название *топология Макки*. Можно показать, что эта топология на $X \simeq \langle X| \subset Y^\#$ совпадает с топологией равномерной сходимости функционалов из $Y^\#$ на ограниченных слабо компактных (относительно $\sigma(Y, X)$) абсолютно выпуклых множествах из Y .

ТЕОРЕМА 2.4.4 (Теорема Макки). Локально выпуклая топология τ на X согласована с двойственностью в том и только том случае, если

$$\sigma(X, Y) \leq \tau \leq \tau(X, Y). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть локально выпуклая топология τ на X удовлетворяет неравенству (2.6). Воспользуемся тем фактом, отображение штрихования монотонно. Поэтому

$$(X, \sigma(X, Y))' \leq (X, \tau)' \leq \tau(X, (X, Y))'.$$

Но по краям этого неравенства, в силу предыдущих теорем, стоит множество $|Y\rangle$. Следовательно, $(X, \tau)' = |Y\rangle \simeq Y$. □

Ниже нам понадобится следующий замечательный факт.

Предложение 2.4.5. Пусть (X, p) — нормированное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) множество $E \subset X$ — ограничено;
- (ii) для каждого функционала $f \in X'$ множество $f(E)$ ограничено.

Наша следующая задача — перенести этот факт на случай локально-выпуклых пространств. Напомним, что множество E в мультинормированном пространстве $(X, \mathfrak{M})$ называется *ограниченным*, если $p(E)$ представляет собой ограниченное множество в $\mathbb{F}$ для всех полунорм $p \in \mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 2.4.6 (Теорема Макки-Аренса). Ограниченные множества во всех топологиях, согласованных со двойственностью, одни и те же.

Доказательство. При усилении топологии количество ограниченных множеств уменьшается. Поэтому нужно доказать только лишь импликацию

$$\text{ограниченность в } \sigma(X, Y) \Rightarrow \text{ограниченность в топологии Макки.}$$

Итак, пусть E — множество, ограниченное в слабой топологии $\sigma(X, Y)$. Это означает, что $f(E)$ — ограниченное множество для любого непрерывного функционала $f \in X' \simeq |Y\rangle$. Возьмем теперь произвольную полунорму p из зеркала топологии Макки (т.е. p непрерывна в $\tau(X, Y)$). Докажем, что множество $p(E)$ ограничено. Положим $X_0 = X/\ker p$ и $p_0 = p_{X/\ker p}$. Тогда p_0 — норма на X_0 . Из теоремы Хана–Банаха легко выводится, что все непрерывные линейные функционалы в нормированном пространстве (X_0, p_0) являются сужением на X_0 некоторых непрерывных относительно p функционалов, заданных на X . Поэтому $f(E_0)$ — ограниченное множество для каждого непрерывного линейного функционала $f \in (X_0, p_0)'$, где обозначено $E_0 = \varphi(E)$, здесь $\varphi : X \rightarrow X_0$ — каноническое отображение X в X_0 . В силу Предложения 2.4.5 множество $p_0(E_0)$ ограничено. Легко видеть, что $p = p_0 \circ \varphi$, поэтому справедливо равенство $p(E) = p_0(E_0)$, следовательно, $p(E)$ также представляет собой ограниченное множество, что и требовалось доказать. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.4.7. Пусть (X, p) — нормированное пространство. Тогда топология Макки $\tau(X, X')$ совпадает с исходной топологией, порожденной нормой p .

Доказательство. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим через τ_p исходную топологию, порожденную нормой p , а через τ_M — соответствующую топологию Макки $\tau_M = \tau(X, X')$. По построению, $\tau_M \geq \tau_p$. Согласно критерию Колмогорова, топология мультинормированного пространства задается нормой в том и только том случае, если в этом пространстве есть ограниченная окрестность нуля. Поэтому, раз в топологии τ_p есть ограниченная окрестность нуля, и ограниченные множества в τ_p и τ_M одни и те же, то в τ_M также имеется ограниченная окрестность нуля (та же самая), так что по критерию Колмогорова, топология τ_M задается некоторой нормой, обозначим ее q . Опять таки, по предыдущей теореме, ограниченные множества в топологиях τ_p и τ_q одни и те же, но ограниченность равносильна нахождению в некотором шаре, поэтому шары в нормах p и q сравнимы, откуда следует, что найдутся положительные константы c_1 и c_2 такие, что $c_1 q \leq p \leq c_2 q$ всюду на X , поэтому данные нормы порождают одинаковые топологии. $\square$

Нам понадобится

ТЕОРЕМА 2.4.8 (Теорема о строгой отделимости). Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство, K и V — непустые выпуклые множества, причем K компактно, V замкнуто и $K \cap V = \emptyset$. Тогда существует функционал $f \in (X, \tau)'$ такой, что

$$\sup \operatorname{Re} f(K) < \inf \operatorname{Re} f(V).$$

Здесь, напомним, $\operatorname{Re} f$ означает вещественную часть функционала f .

Указанная теорема выводится (не очень сложно) из теоремы Хана–Банаха, или, точнее, из теоремы о строгой отделимости Эйдельгайта; доказательство мы опускаем.

ТЕОРЕМА 2.4.9 (Теорема Мазура). Выпуклые замкнутые множества во всех согласованных с двойственностью топологиях одни и те же.

Доказательство. При усилении топологии количество замкнутых множеств увеличивается. Значит, необходимо показать, что если множество E выпукло и замкнуто в топологии Макки, то оно замкнуто также и в слабой топологии.

Из предыдущей теоремы вытекает, что E можно строго отделить множеством уровня непрерывного линейного функционала от любой наперед заданной точки $x \notin E$. Поэтому E можно представить в виде пересечения семейства замкнутых (в слабой топологии) полупространств. Следовательно, множество E само замкнуто в слабой топологии. $\square$

§2.5 Поляры

Пусть X, Y — некоторые множества, и $F \subset X \times Y$ — соответствие. Для множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ полагают

$$\begin{aligned}\pi(U) &:= \pi_F(U) := \{y \in Y : F^{-1}(y) \supset U\}, \\ \pi^{-1}(V) &:= \pi_F^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \supset V\}.\end{aligned}$$

При этом $\pi(U)$ называют (*прямой*) *полярой* U , а множество $\pi^{-1}(V)$ — (*обратной*) *порядкой* V .

Предложение 2.5.1. Имеют место следующие формулы:

- (i) $\pi(u) = \pi(\{u\}) = F(u)$; $\pi(U) = \bigcap_{u \in U} \pi(u)$. Это означает, в частности, что чем шире множество U , тем уже его поляра; для точки u поляра $F(u)$ представляет собой попросту образ этой точки при соответствии F .
- (ii) $\pi(\bigcup_{\xi \in \Xi} U_\xi) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi(U_\xi)$;
- (iii) $\pi_F^{-1}(V) = \pi_{F^{-1}}(V)$;
- (iv) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \pi(U_1) \supset \pi(U_2)$;
- (v) $U \times V \subset F \Rightarrow V \subset \pi(U), \quad U \subset \pi^{-1}(V)$;
- (vi) $U \subset \pi^{-1}(\pi(U))$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 2.5.2 (Критерий Акилова). Множество $U \subset X$ является полярой некоторого множества в Y в том и только том случае, если для всякого $x \in X \setminus U$ найдется $y \in Y$, которое производит отделение x от U в следующем смысле: $U \subset \pi^{-1}(y)$ и $x \notin \pi^{-1}(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$ Пусть $U = \pi^{-1}(V)$. Тогда $U = \bigcap_{v \in V} \pi^{-1}(v)$ (см. предыдущее Предложение 2.5.1 (i)).

$\Leftarrow$ Включение $U \subset \pi^{-1}(y)$ означает, в частности, что $y \in \pi(U)$. Поэтому из предположения теоремы об отделимости вытекает, что $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.5.3. Для $U \subset X$ множество $\pi^{-1}(\pi(U))$ — это наименьшая по включению поляра, содержащая U .

Множество $\pi^{-1}(\pi(U))$ из последнего утверждения называют *биполярной* U .

Пример 2.5.4. (i) Пусть $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ — гильбертово пространство, и $F = \{(x, y) \in H^2 : (x, y)_H = 0\}$. Тогда для всех $U \subset H$ выполняется $\pi(U) = \pi^{-1}(U) = U^\perp$. Биполяра U в этом случае совпадает с замыканием линейной оболочки U .

(ii) Пусть X — нормированное пространство и $Y = X'$ — множество непрерывных на X функционалов. Положим $F = \{(x, x') \in X \times X' : x'(x) = 0\}$. Тогда для всякого линейного подпространства $X_0 \subset X$ справедливо равенство $\pi^{-1}(\pi(X_0)) = \text{cl } X_0$.

Определение 2.5.5. Пусть пространства X и Y находятся в двойственности: $X \leftrightarrow Y$. Зададим соответствия

$$\text{pol} = \{(x, y) \in X \times Y : \text{Re} \langle x|y \rangle \leq 1\}, \quad (2.7)$$

$$\text{abs pol} = \{(x, y) \in X \times Y : |\langle x|y \rangle| \leq 1\}. \quad (2.8)$$

Для прямой и обратной поляр при соответствии pol используется единое название *поляры*, а обозначаются они символами $\pi(U)$ и $\pi(V)$. Для поляр при соответствии abs pol используется название *абсолютные поляры*, при этом пишут U° и V° (для множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$).

ТЕОРЕМА 2.5.6 (Теорема о биполяре). Биполяра $\pi(\pi(U))$ — это наименьший слабо замкнутый конический отрезок, содержащий U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что коническим отрезком называется выпуклое множество, содержащее нулевую точку. Биполяра $\pi(\pi(U))$ всегда содержит множество U (см. Предложение 2.5.1 (vi)). С другой стороны, из определения (2.7) всякая поляра является слабо замкнутым выпуклым множеством, содержащим 0. Поэтому $\text{cl}_\sigma \text{conv } U \subset \pi(\pi(U))$. С другой стороны, если $x \notin \text{cl}_\sigma \text{conv } U$, то по теореме о строгой отделимости 2.4.8, найдется точка $y \in Y$ такая, что

$$\text{Re} \langle x|y \rangle > 1; \quad \text{Re} \langle z|y \rangle \leq 1 \quad \forall z \in \text{cl}_\sigma \text{conv } U.$$

В частности, имеем, что $U \subset \pi^{-1}(y)$ и $x \notin \pi^{-1}(y)$. Это означает (см. критерий Акилова), что $x \notin \pi(\pi(U))$. Тем самым доказано обратное включение $\text{cl}_\sigma \text{conv } U \supset \pi(\pi(U))$, которое влечет искомое равенство $\text{cl}_\sigma \text{conv } U = \pi(\pi(U))$. $\square$

ТЕОРЕМА 2.5.7 (Теорема об абсолютной биполяре). Абсолютная биполяра $(U^\circ)^\circ$ — это наименьшее слабо замкнутое абсолютно выпуклое множество, содержащее множество U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы. $\square$

§2.6 Слабо компактные выпуклые множества

Фундаментальное значение имеет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.6.1 (О компактности субдифференциала). Пусть X — локально выпуклое пространство, и $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывный сублинейный функционал. Тогда его субдифференциал $\partial p := \{f \in X' : f(x) \leq p(x) \forall x \in X\}$ компактен в слабой топологии $\sigma(X', X)$.

В этой связи напомним, что функция $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сублинейным функционалом*, если $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Ясно, что если $f \in \partial p$, то $-f(x) = f(-x) \leq p(-x)$ для всех $x \in X$. Поэтому $f(x) \geq -p(-x)$. Таким образом, имеем

$$f \in \partial p \Rightarrow f(x) \in [-p(-x), p(x)] \quad \forall x \in X. \quad (2.9)$$

Используя непрерывность функционала $p(x)$, нетрудно вывести, что ∂p является слабо замкнутым множеством в X' .

Рассмотрим теперь тихоновское произведение отрезков $T = \prod_{x \in X} [-p(x), p(x)]$. Это пространство естественным образом можно рассматривать, как подмножество пространства функций из X в $\mathbb{R}$. Тогда формулу (2.9) можно переписать в виде $\partial p \subset T$. Как уже было сказано выше (см. формулу (2.5) и комментарий к ней), слабая топология в $\partial p \subset X'$ совпадает с тихоновской топологией (для подмножеств T). Поэтому ∂p является замкнутым (относительно тихоновской топологии) подмножеством T . По теореме Тихонова, множество T компактно, стало быть, и множество ∂p также компактно относительно слабой (=тиховской) топологии. $\square$

ТЕОРЕМА 2.6.2 (Теорема Крейна - Мильмана). *Каждое компактное выпуклое множество в локально выпуклом пространстве является замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.*

ТЕОРЕМА 2.6.3 (Теорема Алаоглу - Бурбаки). *Поляра окрестности нуля любой согласованной с двойственностью топологии является слабо компактным выпуклым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \leftrightarrow Y$ и пусть U — окрестность нуля в X . Поскольку топология в X согласована с двойственностью, можно отождествить $Y \simeq X'$. Для простоты, предположим, что пространство X вещественное и рассмотрим поляру $\pi(U) = \{f \in X' : f(u) \leq 1 \text{ для всех } u \in U\}$. Положим $V = \text{cl conv } U$. Легко видеть, что $\pi(U) = \pi(V)$, причем V является замкнутой выпуклой поглощающей окрестностью нуля в X . Поэтому функционал Минковского $p_V(x)$ всюду определен и непрерывен, причем $V = \{x \in X : p_V(x) \leq 1\}$. Легко видеть, что поляра $\pi(V)$ совпадает с субдифференциалом: $\pi(V) = \partial p_V$. Тогда утверждение следует из уже доказанной Теоремы 2.6.1 о компактности субдифференциала. $\square$

Упражнение 2.6.4 (Пространства L_p). *Используя теорему Крейна-Мильмана, покажите, что единичный шар в лебеговом пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ не является слабо-компактным множеством. Аналогичный факт верен и для секвенциальных пространств c_0 (=пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_i |x_i|$ и таких, что $x_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$).*

§2.7 Рефлексивные пространства

ТЕОРЕМА 2.7.1 (Критерий Какутани). *Нормированное пространство рефлексивно в том и только в том случае, если единичный шар в нем слабо компактен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$ Пусть нормированное пространство X рефлексивно, т.е. $X'' = X$. Тогда совпадают соответствующие единичные шары $B_{X''} = B_X$. Рассмотрим двойственность $X' \leftrightarrow X''$. Очевидно, то $B_{X''}$ представляет собой субдифференциал полунормы $\|\cdot\|_{X'}$. Поэтому $B_{X''}$ является компактным множеством в слабой топологии $\sigma(X'', X') \simeq \sigma(X, X')$. Поэтому и единичный шар B_X слабо компактен в топологии $\sigma(X, X')$.

$\Leftarrow$ Пусть единичный шар B_X компактен в слабой топологии $\sigma(X, X')$. Рассмотрим каноническое вложение $X \hookrightarrow X''$. Тогда можно считать, что $X \subset X''$ и $B_X \subset B_{X''}$. Ясно, что слабые топологии $\sigma(X, X')$ и $\sigma(X'', X')$ совпадают для подмножеств из X , поэтому B_X является компактным подмножеством шара $B_{X''}$. Следовательно, B_X есть слабо замкнутое абсолютно выпуклое подмножество в $B_{X''}$. Но тогда B_X является биполярной самой себя (по теореме 2.5.7). С другой стороны, поскольку полярной к B_X в двойственности $\sigma(X, X')$ является шар $B_{X'}$, то биполярной к B_X будет шар $B_{X''}$. Получили искомое равенство $B_X = B_{X''}$, что и требовалось доказать. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.7.2. *Нормированное пространство будет рефлексивным в том и только в том случае, если любое ограниченное замкнутое выпуклое множество в нем слабо компактно.*

СЛЕДСТВИЕ 2.7.3. *Каждое замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — рефлексивное пространство, и X_0 — его замкнутое линейное подпространство. По теореме Мазура, X_0 является слабо замкнутым множеством. Поэтому единичный шар в X_0 — это слабо замкнутое подмножество единичного шара в X . Но единичный шар в X слабо компактен, значит, единичный шар в X_0 тоже слабо компактен. Значит, пространство X_0 также рефлексивно. $\square$

ТЕОРЕМА 2.7.4 (Теорема Петтиса). *Банахово пространство и сопряженное к нему рефлексивны или не рефлексивны одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — рефлексивное пространство. Единичный шар $B_{X'}$ — это полярный шар единичного шара B_X для двойственности $X \leftrightarrow X'$, поэтому он слабо компактен в слабой топологии $\sigma(X', X)$ (по теореме Алаоглу–Бурбаки). Но слабая топология $\sigma(X', X)$ совпадает с $\sigma(X', X'')$ в силу предполагаемой рефлексивности X . Поэтому шар $B_{X'}$ будет слабо компактен и относительно топологии $\sigma(X', X'')$. Следовательно, пространство X' также рефлексивно.

Докажем теперь в другую сторону. Пусть пространство X' рефлексивно. Тогда, по установленному выше, X'' — тоже рефлексивное пространство. Поскольку пространство X банахово, то оно является замкнутым подмножеством рефлексивного пространства X'' . Следовательно, по Следствию 2.7.3, оно тоже рефлексивно. Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2.7.5 (Теорема Джеймса). *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда у него всякий вещественно линейный непрерывный функционал достигает на единичном шаре максимального значения.*

Упражнение 2.7.6 (Пространства L_p). *Предполагая известным, что при $1 \leq p < \infty$ для лебеговых пространств $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула $(L_p)' \simeq L_q$ с $q = \frac{p}{p-1}$, покажите, что эти пространства являются рефлексивными тогда и только тогда, когда $1 < p < \infty$ (см. также задачу 2.6.4).*

Глава 3

Мера и интеграл

§3.1 Меры и измеримые множества

Пусть X — некоторое множество. Символом 2^X обозначается множество всех подмножеств множества X .

Функция $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ называется *мерой*, если выполнены два условия:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) для любого семейства множеств $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (3.1)$$

Из этого определения очевидно, что $\mu(A) \leq \mu(B)$ при $A \subset B$.

Следующее определение является ключевым для теории меры.

Определение 3.1.1. Множество $A \subset X$ называется *измеримым*¹, если для всякого множества $B \subset X$ справедливо равенство

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad (3.2)$$

В данном разделе символом $\bar{A}$ будем обозначать дополнение $\bar{A} = X \setminus A$. Тогда формулу (3.2) можно переписать в виде

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap \bar{A}). \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что

$$\text{множество } A \text{ измеримо} \Leftrightarrow \text{его дополнение } \bar{A} \text{ измеримо.} \quad (3.4)$$

Упражнение 3.1.2. Докажите следующие утверждения:

$$\left[\text{множество } A \text{ измеримо, } \mu(A) < \infty \text{ и } B \supset A \right] \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A). \quad (3.5)$$

$$\left[\text{множество } A \text{ измеримо, } \mu(A \setminus C) = \mu(C \setminus A) = 0 \right] \Rightarrow \text{множество } C \text{ измеримо.} \quad (3.6)$$

¹Иногда, если параллельно ведется работа с несколькими мерами, уточняют, что множество A является μ -измеримым.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Если множества A_k , $k \in \mathbb{N}$, измеримы и попарно не пересекаются, т.е.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad (3.7)$$

то их объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ также измеримо и имеет место формула

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (3.8)$$

(ср. с (3.1)).

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. Если множества A_k , $k \in \mathbb{N}$, измеримы, то их объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ также измеримы.

Замечание 3.1.5. В сформулированном утверждении, в отличие от Теоремы 3.1.3, не предполагается, что множества A_k попарно не пересекаются.

ТЕОРЕМА 3.1.6. Пусть имеется семейство измеримых множеств A_k , $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $A_k \subset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k); \quad (3.9)$$

(ii) если $\mu(A_1) < \infty$ и выполнено условие $A_k \supset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \quad (3.10)$$

Определение 3.1.7. Система $\mathcal{A}$ подмножеств множества X (т.е. $\mathcal{A} \subset 2^X$) называется σ -алгеброй, когда выполнены следующие условия:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;
- 2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
- 3) если $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Борелевской σ -алгеброй в $\mathbb{R}^m$ называется наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$.

Из формулы (3.4) и Следствия 3.1.4 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 3.1.8. Если (X, μ) — пространство с мерой, то совокупность измеримых множеств образует σ -алгебру.

Мера $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ называется

(i) *регулярной*, если для каждого множества $A \subset X$ найдется измеримое множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$;

(ii) *мерой Бореля*, если все борелевские множества измеримы;

(iii) *регулярной мерой Бореля*, если для каждого множества $A \subset X$ найдется борелевское множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$;

(iv) *мерой Радона*, если μ представляет собой регулярную меру Бореля и $\mu(K) < \infty$ для всех компактных множеств $K \subset X$.

Замечание 3.1.9. Здесь и в дальнейшем, когда говорится о борелевских множествах и мерах, неявно предполагается, что в роли объемлющего пространства X выступает некоторое открытое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Теперь выясним вопрос об аппроксимации открытыми и замкнутыми множествами.

ТЕОРЕМА 3.1.10. Пусть μ — мера Радона. Тогда

(i) для любого множества $A \subset X$ справедлива формула

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : \text{множество } U \text{ открыто и } U \supset A\}. \quad (3.11)$$

(ii) если множество $A \subset X$ является μ -измеримым, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество C и открытое множество U такие, что

$$C \subset A \subset U \quad \text{и} \quad \mu(U \setminus C) < \varepsilon. \quad (3.12)$$

Кроме того,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \text{множество } K \text{ компактно и } K \subset A\}. \quad (3.13)$$

ТЕОРЕМА 3.1.11 (Критерий Каратеодори). Пусть μ — мера на пространстве $X = \mathbb{R}^m$. Предположим, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любой пары множеств $A, B \subset X$ таких, что $\text{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} |a - b| > 0$. Тогда μ — мера Бореля.

§3.2 Измеримые функции

Пусть Y — топологическое пространство, X — некоторое множество, и μ — мера на X .

Определение 3.2.1. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется μ -измеримой, если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $f^{-1}(U)$ является μ -измеримым.

Пусть $A \subset X$. Символом χ_A будем обозначать характеристическую функцию множества A , вычисляемую по правилу

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \overline{A}. \end{cases}$$

§3.3 Интеграл

Определение интеграла вводится поэтапно.

Простой функцией называется измеримая функция с не более чем счетным множеством значений из $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Такая функция представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x), \quad (3.14)$$

где A_k суть измеримые множества, причем $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (такие семейства попарно непересекающихся множеств называются *дизъюнктивными*).

Для неотрицательной простой функции, задаваемой формулой (3.14), положим

$$\int f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \mu(A_k). \quad (3.15)$$

Поскольку все слагаемые этого ряда неотрицательные, его сумма определена² (хотя может принимать и бесконечные значения).

Далее, если простая функция f знакопеременна, то ее можно представить в виде разности $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, где

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0), \quad (3.16)$$

тогда обе функции f_+ , f_- измеримы, неотрицательны, причем имеют место тождества

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \quad (3.17)$$

Определение 3.3.1. Простая функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *интегрируемой*, если оба интеграла $\int f_+(x) d\mu$ или $\int f_-(x) d\mu$ конечны, тогда полагают

$$\int f(x) d\mu = \int f_+(x) d\mu - \int f_-(x) d\mu. \quad (3.18)$$

Множество *интегрируемых простых функций* обозначим символом $\text{Step}(X, \mathbb{R})$. Для сокращения будем писать $f \leq g$, если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in X$ и т.д.

Теперь перейдем к определению интеграла для произвольной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. *Верхним интегралом* от функции f называется величина

$$\int^* f(x) d\mu = \inf \left\{ \int g(x) d\mu : g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}), f \leq g \right\}. \quad (3.19)$$

Аналогично, *нижним интегралом* от функции f называется величина

$$\int_* f(x) d\mu = \sup \left\{ \int g(x) d\mu : g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}), g \leq f \right\}. \quad (3.20)$$

Определение 3.3.2. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой*, если ее верхний и нижний интегралы совпадают и конечны, в этом случае полагают

$$\int f(x) d\mu = \int^* f(x) d\mu = \int_* f(x) d\mu. \quad (3.21)$$

Упражнение 3.3.3. Пусть μ является мерой Радона на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и пусть имеются компактное множество $Q \Subset X$ и непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x) = 0$ при $x \notin Q$. Покажите, что тогда функция f будет μ -измеримой и интегрируемой.

²При вычислении ряда в (3.15) мы считаем, что $\infty \cdot 0 = 0$, т.е. если $t_k = \infty$ и $\mu(A_k) = 0$, то $t_k \mu(A_k) = 0$.

§3.4 Теорема Рисса о представлении

Напомним, что для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}$ ее *носителем* (обозначается $\text{supp } f$) называется замыкание множества точек с ненулевыми значениями, т.е.

$$\text{supp } f := \text{Cl}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}.$$

Пусть Q — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $K(Q)$ множество всех функций непрерывных функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}$, носитель которых лежит в Q . Зададим на $K(Q)$ равномерную норму:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Легко видеть, что для $f \in K(Q)$ справедливо равенство

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{Q,\infty} = \sup_{x \in Q} |f(x)|.$$

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$K(\Omega) = \bigcup_{Q \Subset \Omega} K(Q).$$

Имеет место следующая фундаментальная

ТЕОРЕМА 3.4.1 (Рисса о представлении). Пусть Ω — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть имеется линейный функционал $L : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}$, $L \in (K(\Omega))^\sharp$. Предположим, что $L|_{K(Q)} \in (K(Q), \|\cdot\|_\infty)'$ для каждого компакта $Q \Subset \Omega$. Тогда найдется мера Радона μ на Ω и μ -измеримая функция $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ такие, что

$$(i) \quad |\sigma(x)| = 1 \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(ii) \quad L(f) = \int_{\Omega} f \cdot \sigma d\mu \quad \text{для всех } f \in K(\Omega).$$

Ввиду теоремы 3.4.1 каждый линейный функционал $L : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}$, такой, что $L|_{K(Q)} \in (K(Q))'$ для каждого компакта $Q \Subset \Omega$, называется *знакопеременной мерой Радона*, или же, для краткости, просто *мерой Радона*. Совокупность всех таких функционалов (= мер Радона) обозначается символом $\mathcal{M}(\Omega)$.

§3.5 Меры Радона и топологии.

Рассмотрим имеющуюся двойственность $K(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{M}(\Omega)$. Тогда на пространстве $\mathcal{M}(\Omega)$ по традиции заводят слабую топологию $\sigma = \sigma(\mathcal{M}(\Omega), K(\Omega))$. Пространство $K(\Omega)$ по традиции снабжают топологией Макки $\tau_{K(\Omega)} = \tau(K(\Omega), \mathcal{M}(\Omega))$ (поэтому, в частности, $(K(\Omega), \tau_{K(\Omega)})' = \mathcal{M}(\Omega)$). Имеет место следующая важная

ТЕОРЕМА 3.5.1. Введенная выше топология $\tau_{K(\Omega)}$ является сильнейшей среди всех локально выпуклых топологий таких, что вложения пространства $K(Q)$ в $K(\Omega)$ непрерывны для каждого компакта $Q \Subset \Omega$ (т.е., $\tau_{K(\Omega)}$ совпадает с топологией индуктивного предела).

Доказательство. Обозначим через τ соответствующую локально выпуклую топологию индуктивного предела, описанную в условии доказываемой теоремы (т.е. τ — сильнейшая среди всех локально выпуклых топологий таких, что все вложения $\iota_Q : K(Q) \hookrightarrow (K(\Omega), \tau)$ непрерывны). Тогда, по основному свойству этой топологии (задаваемой условием непрерывности семейства отображений), имеет место эквивалентность:

$$\begin{aligned} \text{функция } f : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{F} \text{ непрерывна} &\Leftrightarrow \text{композиция } f \circ \iota_Q = f|_{K(Q)} \text{ непрерывна} \\ &\text{для каждого компакта } Q \subset \Omega. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Используя указанное свойство, докажем сначала неравенство

$$\tau_{K(\Omega)} \geq \tau. \quad (3.23)$$

В самом деле, пусть $\mu \in (K(\Omega))^\#$ представляет собой линейный функционал. Тогда непрерывность μ , т.е. включение $\mu \in (K(\Omega), \tau)'$, равносильно непрерывности композиции $\mu \circ \iota_Q = \mu|_{K(Q)}$ для каждого компакта $Q \Subset \Omega$. А это, в свою очередь, равносильно включению $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, т.е. имеет место равенство

$$(K(\Omega), \tau)' = \mathcal{M}(\Omega).$$

Значит, топология τ согласована с двойственностью, а потому по определению топологии Макки (=сильнейшей из всех, согласованных с двойственностью), имеет место искомое неравенство (3.23).

Докажем теперь противоположное неравенство

$$\tau_{K(\Omega)} \leq \tau. \quad (3.24)$$

Так как всякое локально-выпуклое пространство является мультинормируемым, т.е. порождается набором полунорм, то для доказательства (3.24) достаточно проверить, что всякая полунорма $p : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}$, непрерывная в топологии Макки, будет непрерывна и в топологии τ . Итак, возьмем произвольную полунорму $p : K(\Omega) \rightarrow \mathbb{F}$, непрерывную в $\tau_{K(\Omega)}$. Возьмем и зафиксируем также компакт $Q \Subset \Omega$. Достаточно проверить, что композиция $p \circ \iota_Q = p|_{K(Q)}$ непрерывна (это будет означать, ввиду произвольности Q , непрерывность p в τ , см. (3.22)). Множество $V = \{p \leq 1\}$ будет выпуклым и замкнутым в топологии Макки, значит, оно будет выпуклым и замкнутым и в топологии τ (по теореме Мазура 2.4.9). Далее, пересечение $V \cap K(Q)$ также будет выпуклым и замкнутым в $K(Q)$ (т.к. $V \cap K(Q)$ является прообразом множества V при τ -непрерывном линейном отображении $\iota_Q : K(Q) \hookrightarrow K(\Omega)$). По понятным причинам, множество $V \cap K(Q)$ будет и поглощающим в $K(Q)$. Но в банаховом пространстве каждое выпуклое, замкнутое и поглощающее множество является окрестностью нуля. Следовательно, множество $V \cap K(Q) = \{f \in K(Q) : p(f) \leq 1\}$ представляет собой окрестность нуля в $K(Q)$. Это означает, что композиция $p \circ \iota_Q$ непрерывна в $K(Q)$. Значит, по сформулированному вначале критерию, полунорма p непрерывна в $K(\Omega)$ относительно топологии τ . Тем самым установлено искомое неравенство (3.24) (см. комментарий к этой формуле), которое, ввиду доказанного ранее (3.23), переходит в требуемое равенство

$$\tau_{K(\Omega)} = \tau. \quad (3.25)$$

□

Напомним, что множество E в мультинормированном пространстве называется *ограниченным*, если $p(E)$ представляет собой ограниченное множество для любой полунормы p в этом пространстве.

СЛЕДСТВИЕ 3.5.2. Пусть E является ограниченным подмножеством $K(\Omega)$ относительно топологии $\tau_{K(\Omega)}$. Тогда найдется компактное множество $Q \Subset \Omega$ такое, что $\text{supp } f \subset Q$ для всех $f \in E$.

Доказательство. Пусть выполнены предположения следствия о множестве E . Предположим, что утверждение неверно, тогда найдется последовательность функций $f_m \in E$ и точек $x_m \in \Omega$ таких, что $f_m(x_m) \neq 0$, но при этом любой компакт $Q \subset \Omega$ содержит лишь конечное число точек x_m (т.е. либо точки x_m идут на бесконечность, либо их расстояние до границы множества Ω стремится к нулю). Так как носитель каждой из функций f_m лежит в некотором компактном множестве в Ω , и потому он содержит лишь конечное число точек из x_m , можно считать³ не умаляя общности, что

$$f_k(x_m) = 0 \quad \text{при } m > k. \quad (3.26)$$

Выберем по индукции числа $\alpha_m > 0$ так, чтобы

$$\sum_{m=0}^k \alpha_m |f_k(x_m)| > k \quad (3.27)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Этого всегда можно добиться с помощью индукции, т.к. $f_m(x_m) \neq 0$.

Зададим полунорму p на $K(\Omega)$ формулой

$$p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m |f(x_m)|.$$

Эта полунорма будет непрерывна в $K(\Omega)$, т.к. ее композиция $p \circ \iota_Q$ непрерывна для всякого компакта $Q \subset \Omega$ (это следует из того, что Q содержит лишь конечное число точек последовательности x_m). Но по построению (см. (3.27)–(3.26)) имеем

$$p(f_k) > k.$$

Тем самым множество $p(E)$ неограниченно. Значит, и само множество E неограниченно в $K(\Omega)$, получили противоречие с исходным предположением, что завершает доказательство Следствия 3.5.2. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.5.3. Последовательность функций $f_k \in K(\Omega)$ сходится к функции $f \in K(\Omega)$ в том и только том случае, если найдется компакт $Q \subset \Omega$ такой, что $\text{supp } f \subset Q$ и $\text{supp } f_k \subset Q$ для всех $k \in \mathbb{N}$, причем $\|f_k - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Напомним сначала, что сходимость $f_k \rightarrow f$ в мультинормированном пространстве означает, что $p(f_k - f) \rightarrow 0$ для любой полунормы, непрерывной в этом пространстве.

($\Rightarrow$) Пусть $f_k \rightarrow f$ в $K(\Omega)$. Тогда последовательность f_k будет ограниченной, значит, по Следствию 3.5.2 найдется компакт $Q' \subset \Omega$ такой, что $\text{supp } f_k \subset Q'$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

³Выбирая при необходимости соответствующую подпоследовательность и отождествляя ее с исходной x_m .

Положим $Q = Q' \cup \operatorname{supp} f$, тогда Q содержит носители всех функций f_k и f . Рассмотрим полунорму $p(f) = \|f\|_{Q,\infty} = \sup_{x \in Q} |f(x)|$. Тогда из определения сходимости в мультинормированном пространстве вытекает, в частности, что $p(f - f_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Значит, $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Пусть имеется последовательность $f_k \in K(\Omega)$, компакт Q и функция $f \in K(\Omega)$ такие, что $\operatorname{supp} f \subset Q$ и $\operatorname{supp} f_k \subset Q$ для всех $k \in \mathbb{N}$, причем $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$f_k \rightarrow f \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ в пространстве } K(Q). \quad (3.28)$$

Возьмем произвольную полунорму p , непрерывную в топологии $\tau_{K(\Omega)}$. Так как сужение $p \circ \iota_Q : K(Q) \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывно в пространстве $K(Q)$, то из (3.28) вытекает, что $p(f_k - f) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Ввиду произвольности полунормы p получаем, что $f_k \rightarrow f$ в пространстве $K(\Omega)$. $\square$

Глава 4

Обобщенные функции

Пусть Q — компактное множество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{D}(Q)$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}$, таких, что $\text{supp } f \subset Q$. На $\mathcal{D}(Q)$ зададим полунормы

$$\|f\|_{m,Q} = \sup\{\partial^\alpha f(x) : |\alpha| \leq m, \ x \in Q\}. \quad (4.1)$$

Ясно, что таким образом $\mathcal{D}(Q)$ превращается в счетно-нормированное пространство, — такие пространства, напомним, называют *пространствами Фреше*. К числу важных свойств пространства Фреше относится его метризуемость. Пространство Фреше наследует много свойств банаховых пространств, в частности, всякое замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее множество в пространстве Фреше является окрестностью нуля.

Пусть теперь Ω — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{Q \in \Omega} \mathcal{D}(Q),$$

т.е. $\mathcal{D}(\Omega)$ представляет собой множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}$, носители которых лежат внутри Ω .

Определение 4.0.4. Линейный функционал $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^\#$ со значениями в $\mathbb{F}$ называют *обобщенной функцией*, если $u|_{\mathcal{D}(Q)} \in (\mathcal{D}(Q))'$ для каждого компакта $Q \Subset \Omega$. Множество всех обобщенных функций обозначается через $\mathcal{D}'(\Omega)$. Обобщенные функции называют также *распределениями* (англ. distributions).

Приведенное определение можно переформулировать следующим образом: линейный функционал $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^\#$ представляет собой обобщенную функцию в том и только том случае, если для каждого вложения $\iota_Q : \mathcal{D}(Q) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ композиция $u \circ \iota_Q : \mathcal{D}(Q) \rightarrow \mathbb{F}$ непрерывна (в пространстве Фреше $\mathcal{D}(Q)$), т.е. $u \circ \iota_Q \in (\mathcal{D}(Q))'$.

Пример 4.0.5. (i) Если $u \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — локально интегрируемая функция, т.е. $u \in L(Q)$ для каждого компакта $Q \Subset \mathbb{R}^n$, то она задает распределение по следующей формуле

$$u(f) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)f(x) dx \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

В этой связи и в общем случае, когда $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, величину $u(f)$ обозначают символом интеграла

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)f(x) dx \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(ii) Всякая мера Радона является распределением, т.е. $\mathcal{M}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

В общем случае, в соответствии с данным определением, линейный функционал $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^\#$ является обобщенной функцией, если для каждого компакта $Q \Subset \Omega$ найдется число $m = m(Q) \in \mathbb{N}$ и константа $C = C(Q)$ такие, что

$$|u(f)| \leq C \|f\|_{m,Q} \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q). \quad (4.2)$$

Если же параметр m не зависит от компакта Q , то распределение называют *распределением конечного порядка*. Очевидно, что мера Радона представляет собой распределение нулевого порядка.

Мы видим, что, с одной стороны, класс обобщенных функций достаточно широк: в него входят не только непрерывные, но и все локально интегрируемые функции, и все меры. С другой стороны, оказывается, что все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы в некотором очень естественном смысле.

Если $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ то для каждого n -мультииндекса α можно определить производную $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу:

$$\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.3)$$

С помощью формулы интегрирования по частям легко проверяется, что если функция $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, то введенная производная совпадает с классической производной $\partial^\alpha u$, т.е. эта классическая производная задает точно такой же функционал:

$$\partial^\alpha u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha u(x)) \varphi(x) dx \stackrel{\text{Интегр. по частям}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) (\partial^\alpha \varphi(x)) dx = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi).$$

Таким образом, для гладких функций производная считается "по обычному".

Аналогично, если $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $f \in C^\infty(\Omega)$, то можно определить произведение $fu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу:

$$fu(\varphi) = u(f\varphi).$$

Рассмотрим имеющуюся двойственность $\mathcal{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. На пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ по традиции заводят слабую топологию $\sigma = \sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ по традиции снабжают топологией Макки $\tau_{\mathcal{D}(\Omega)} = \tau(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega))$ (поэтому, в частности, $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{\mathcal{D}(\Omega)})' = \mathcal{D}'(\Omega)$). Имеет место следующая важная

ТЕОРЕМА 4.0.6. Введенная выше топология $\tau_{\mathcal{D}(\Omega)}$ является сильнейшей среди всех локально выпуклых топологий таких, что вложения пространства $\mathcal{D}(Q)$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ непрерывны для каждого компакта $Q \Subset \Omega$ (т.е., $\tau_{\mathcal{D}(\Omega)}$ совпадает с топологией индуктивного предела).

Доказательство. Вполне аналогично доказательству предыдущей Теоремы 3.5.1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.0.7. Пусть E является ограниченным подмножеством $\mathcal{D}(\Omega)$ относительно топологии $\tau_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Тогда найдется компактное множество $Q \Subset \Omega$ такое, что $\text{supp } f \subset Q$ для всех $f \in E$.

Доказательство. Вполне аналогично доказательству предыдущей Следствия 3.5.2. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.0.8. Последовательность функций $f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ сходится к функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ в том и только том случае, если найдется компакт $Q \subset \Omega$ такой, что $\text{supp } f \subset Q$ и $\text{supp } f_k \subset Q$ для всех $k \in \mathbb{N}$, причем $\|f_k - f\|_{m,Q} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $m \in \mathbb{N}$ (т.е., носители всех функций f_k лежат в одном общем компакте, и на этом компакте функции f_k сходятся равномерно к функции f вместе со всеми своими производными).

Доказательство. Вполне аналогично доказательству предыдущей Следствия 3.5.3. $\square$

Рассмотрим некоторые свойства этого пространства.

ТЕОРЕМА 4.0.9. Пусть Ω — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

- (i) пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ бочечно, т.е. каждое абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество (=бочка) в нем — окрестность нуля;
- (ii) любое ограниченное замкнутое подмножество в $\mathcal{D}(\Omega)$ — компактно, т.е. $\mathcal{D}(\Omega)$ — монотелево пространство;
- (iii) множество гладких функций $\mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Доказательство. (i) Пусть $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ — абсолютно выпуклое замкнутое поглощающее множество. Обозначим через V_i алгебраическую внутренность множества V в $\mathcal{D}(\Omega)$ (т.е. такие точки, относительно которых множество V , при соответствующем параллельном переносе, является поглощающим в $\mathcal{D}(\Omega)$). Тогда $0 \in V_i$. Аналогично, для компакта $Q \Subset \Omega$ обозначим через $V_{i,Q}$ алгебраическую внутренность множества V в $\mathcal{D}(Q)$.

Легко проверяется (с помощью сделанных предположений на V), что $V_{i,Q} = (V \cap \mathcal{D}(Q))_{i,Q} = V_i \cap \mathcal{D}(Q)$. Но в пространствах Фреше у замкнутых выпуклых множеств алгебраическая внутренность совпадает с топологической внутренностью (*основной принцип Банаха*), поэтому множество $V_i \cap \mathcal{D}(Q)$ будет открытым в $\mathcal{D}(Q)$ для каждого компакта $Q \subset \Omega$. В силу определения топологии индуктивного предела, множество V_i будет открыто в $\mathcal{D}(\Omega)$. И, поскольку $0 \in V_i$, получаем, что нулевая точка лежит во внутренней части множества V в топологии $\mathcal{D}(\Omega)$.

- (ii) — вытекает из предыдущего Следствия 4.0.7 и теоремы Арцела–Асколи о компактности семейства непрерывных функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на некотором компакте.
- (iii) Обозначим $E = \mathcal{D}(\Omega)$ и рассмотрим E как подмножество пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$. Относительно двойственности $\mathcal{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ возьмем поляр $E^\circ \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ множества $E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Легко видеть, что $E^\circ = \{0\}$, поэтому $(E^\circ)^\circ = \mathcal{D}'(\Omega)$. Но $(E^\circ)^\circ$ представляет собой наименьшее выпуклое слабо замкнутое множество, содержащее E . Следовательно, замыкание E в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ совпадает со всем $\mathcal{D}'(\Omega)$, что равносильно искомой плотности множества E в $\mathcal{D}'(\Omega)$. $\square$

Указанные двойственных топологических пространств $\mathcal{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ позволяют с легкостью доказывать некоторые тонкие и далеко не тривиальные результаты.

ТЕОРЕМА 4.0.10 (Теорема Шварца). Пусть имеется последовательность обобщенных функций $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ такая, что для каждой функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(f)$ является сходящимся. Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ к некоторой обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, причем имеет место также и сходимости производных $\partial^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \partial^\alpha u_j$ для каждого мультииндекса α .

Доказательство. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Рассмотрим полунорму $p(f) = \sup_{m,k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=m}^{m+k} u_j(f) \right|$ в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. Очевидно, что эта полунорма конечна для каждой функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Рассмотрим множество $V = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : p(f) \leq 1\}$... (дальнейший ход доказательства предоставляется читателю в качестве упражнения: нужно воспользоваться доказанной ранее Теоремой 4.0.9-(i)). $\square$

ТЕОРЕМА 4.0.11 (О представлении произвольной обобщенной функции в виде суммы производных мер Радона). Для всякой обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и для каждого компакта $Q \subset \Omega$ найдется конечный набор (знакопеременных) мер Радона $\mu_1, \dots, \mu_m \in K(Q)'$ и мультииндексов α_j таких, что

$$u|_{\mathcal{D}(Q)} = \sum_{j=1}^m \partial^{\alpha_j} \mu_j. \quad (4.4)$$

Доказательство. $\square$

ТЕОРЕМА 4.0.12. Для всякой обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и для каждого компакта $Q \subset \Omega$ найдется конечный набор интегрируемых по Лебегу функций $f_1, \dots, f_m \in L_1(Q)$ и мультииндексов α_j таких, что

$$u|_{\mathcal{D}(Q)} = \sum_{j=1}^m \partial^{\alpha_j} f_j. \quad (4.5)$$

Доказательство. $\square$

Наряду с двойственностью $\mathcal{D}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ нередко рассматриваются и другие пространства основных и обобщенных функций. Для простоты рассмотрим случай $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Обозначим $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех гладких функций, заданных на всем $\mathbb{R}^n$. На этом пространстве зададим топологию с помощью счетного набора полунорм вида $\|\cdot\|_{m,Q_j}$ (см. (4.1)), где компакты Q_j исчерпывают все пространство $\mathbb{R}^n$: $\bigcup_j Q_j = \mathbb{R}^n$.

Топологию этого счетно-нормированного пространства обозначим через $\tau_{\mathcal{E}}$. Тогда через $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим соответствующее сопряженное пространство:

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{E}})' = (C^\infty(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{E}})'.$$

Это пространство называют *пространством распределений с компактным носителем*.

Таким образом, сходимость гладких функций $f_k \rightarrow f$ относительно топологии $\tau_{\mathcal{E}}$ равносильна тому, что $\|f_k - f\|_{m, Q_j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ для всех m, Q_j . Получается, что сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ представляет собой более сильное свойство, чем сходимость относительно $\tau_{\mathcal{E}}$. Следовательно, множество распределений, непрерывных относительно более сильной сходимости в $\tau_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$, богаче, чем $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (4.6)$$

Последнее включение можно увидеть и из других соображений. В самом деле, по определению топологии в счетно-нормированном пространстве, и учитывая, что совокупность норм $\|\cdot\|_{m, Q}$ образует решетку (т.е. для любой пары этих норм найдется третья, которая мажорирует обе исходные), для каждой обобщенной функции $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ существует компакт $Q \subset \mathbb{R}^n$ и числа $m \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$|u(f)| \leq C \|f\|_{m, Q} \quad (4.7)$$

для всех $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Это означает, в частности, что $u(f) = 0$, если $Q \cap \text{supp } f = \emptyset$, или, другими словами, $u(f) = u(g)$, если $f \equiv g$ на Q . Таким образом, для произвольной функции $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ величина $u(f)$ зависит только от поведения функции f на компакте Q (который фиксирован и не зависит от f), поэтому распределения из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ называют *распределениями с компактным носителем*.

Еще один, очень важный класс, представляют собой обобщенные функции умеренного роста, с которыми мы познакомимся в следующей главе, посвященной преобразованиям Фурье — замечательный по изяществу и силе инструмент, позволяющий сводить дифференциальные уравнения к алгебре.

Глава 5

Преобразование Фурье и распределения умеренного роста

§5.1 Определение и основные свойства

Определение 5.1.1. Для всякой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ее *преобразованием Фурье* называется ограниченная непрерывная функция

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i(x,\xi)} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Здесь и в дальнейшем, для функций f , заданных на $\mathbb{R}^n$, будем писать $\int f dx$ вместо $\int_{\mathbb{R}^n} f dx$, и, напомним, $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ представляет собой скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Оказывается, что в случае, когда функция $\hat{f}$ тоже интегрируема, исходная функция f восстанавливается по $\hat{f}$ с помощью *формулы обращения Фурье*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Чтобы изучить свойства преобразования Фурье, и, в частности, доказать последнюю формулу, рассмотрим сначала поведение преобразования Фурье на гладких быстроубывающих функциях. До сих пор мы работали с классом функций

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty : \exists R > 0 \quad f(x) = 0 \text{ при } |x| \geq R\},$$

который еще называют *классом гладких функций с компактным носителем*. Однако, к сожалению, этим классом ограничиться нельзя: включение $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ отнюдь не означает, что $\hat{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; последнее включение нарушается в типичных случаях (это вытекает из красивой *теоремы Котельникова*, играющей важную роль в теории передачи информации). Поэтому, приходится расширить $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ до следующего класса так называемых *быстроубывающих функций*.

Определение 5.1.2. Через $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad (5.3)$$

для любых n -мерных мультииндексов α, β . Топология в $\mathscr{P}$, задаваемая полунормами, равными всевозможным левым частям в (5.3), превращает $\mathscr{P}$ в пространство Фреше, т.е.

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \text{ в } \mathscr{P} \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_m(x) - \varphi(x))| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{для любой пары } n\text{-мультииндексов } \alpha, \beta. \quad (5.4)$$

Важность класса $\mathscr{P}$ объясняется следующим результатом, в котором вместо операторов $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ мы используем операторы $D_j = -i\partial_j$, что гораздо удобнее, когда речь идет о преобразовании Фурье. Заметим, что $D_j \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$, $x_j \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{P} \subset L^1$.

ТЕОРЕМА 5.1.3. Преобразование Фурье $F : \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ непрерывно отображает $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}$. Преобразованием Фурье функции $D_j \varphi$ служит $\xi_j \hat{\varphi}(\xi)$, а преобразованием Фурье функции $x_j \varphi$ служит $-D_j \hat{\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование формулы (5.1) дает

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} (-x)^\alpha \varphi(x) dx$$

(дифференцирование здесь законно, поскольку получающийся интеграл равномерно сходится). Следовательно, $\hat{\varphi} \in C^\infty$ и $D^\alpha \hat{\varphi}$ есть преобразование Фурье от $(-x)^\alpha \varphi$. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} D^\beta ((-x)^\alpha \varphi(x)) dx \quad (5.5)$$

(интегрирование по частям законно, т.к. $\varphi \in \mathscr{P}$). В последнем интеграле умножим и поделим подынтегральную функцию на $(1 + |x|)^{n+1}$, тогда получим оценку

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{n+1} D^\beta ((-x)^\alpha \varphi(x)),$$

где $C = \int (1 + |x|)^{-n-1} dx$ (проверить, что этот интеграл конечен!). Из установленной оценки вытекает, что $\hat{\varphi} \in \mathscr{P}$, т.е. преобразование Фурье непрерывно отображает $\mathscr{P}$ в $\mathscr{P}$. Перепишем равенство (5.5) при $\alpha = 0$:

$$\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} D^\beta \varphi(x) dx. \quad (5.6)$$

Это показывает, что $\xi^\beta \hat{\varphi}$ есть преобразование Фурье от $D^\beta \varphi$, чем и завершается доказательство Теоремы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.1.4. Для функции $\varphi \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы

$$\widehat{\partial^\alpha \varphi} = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}; \quad (5.7)$$

$$\widehat{x^\beta \varphi} = i^{|\beta|} \partial^\beta \hat{\varphi}. \quad (5.8)$$

Итак, преобразование Фурье превращает операцию взятия производной в умножение на полином, и наоборот. В изучении таких преобразований нам поможет следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 5.1.5. Если линейное отображение $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям

$$T(D_j \varphi) = D_j T \varphi, \quad T(x_j \varphi) = x_j T \varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P},$$

то $T \varphi = c \varphi$, где c — некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ I. Если $\varphi \in \mathcal{P}$ и точка $y \in \mathbb{R}^n$ такова, что $\varphi(y) \in \mathcal{P}$, то функция φ представима в виде

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \varphi_j(x), \quad (5.9)$$

где $\varphi_j \in \mathcal{P}$. В самом деле, лемма Адамара гарантирует существование такого типа представления

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \tilde{\varphi}_j(x)$$

с $\tilde{\varphi}_j \in C^\infty$. Однако этого мало: лемма Адамара ничего не говорит про поведение на бесконечности, и потому у нас нет включения $\tilde{\varphi}_j \in \mathcal{P}$. Но при больших $x \neq y$ можно взять $\bar{\varphi}_j(x) = \varphi(x)(x_j - y_j)|x - y|^{-2}$, тогда имеет место формула

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \bar{\varphi}_j(x).$$

Конечно, функции $\bar{\varphi}_j$ уже не будут гладкими в точке y , зато они будут иметь быстрое убывание при $x \rightarrow \infty$ (как функции класса $\mathcal{P}$). Лемма о разбиении единицы позволяет "склеить" из этих разложений требуемое представление (5.9), в котором функции φ_j являются гладкими и принадлежат $\mathcal{P}$ (т.е. они быстро убывают на бесконечности).

ШАГ II. Применим оператор T к обеим частям разложения (5.9), и учитывая коммутационные свойства T , тогда получим

$$T \varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) T \varphi_j(x) = 0 \quad \text{при } x = y. \quad (5.10)$$

Итак, для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}$ доказана импликация

$$\varphi(y) = 0 \Rightarrow T \varphi(y) = 0. \quad (5.11)$$

ШАГ III. Из установленного только что свойства (5.11) легко вывести, что

$$T \varphi(x) = c(x) \varphi(x), \quad (5.12)$$

где величина $c(x)$ НЕ зависит от φ . В самом деле, достаточно проверить последнюю формулу только для случая $\varphi(x) \neq 0$; далее, используя линейность оператора T , достаточно проверить эту формулу только для функций с условием $\varphi(x) = 1$. Предположим, что (5.12) неверно. Тогда найдутся две функции $\varphi_1 \in \mathcal{P}$ и $\varphi_2 \in \mathcal{P}$ такие, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 1$, но $T \varphi_1(x) \neq T \varphi_2(x)$. Положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. По построению, $\varphi \in \mathcal{P}$, $\varphi(x) = 0$, но $T \varphi(x) \neq 0$. Полученное противоречие (со свойством (5.11)) завершает доказательство формулы (5.12).

ШАГ IV. Докажем, что функция $c(x)$ в формуле (5.12) на самом деле равна константе. Выберем функцию $\varphi \in \mathcal{P}$, которая всюду отлична от нуля (например, сходится

$\varphi(x) = e^{-|x|^2}$). Тогда $c(x) = \frac{T\varphi(x)}{\varphi(x)} \in C^\infty$. Наконец, в силу предположений о коммутационных свойствах T имеем

$$0 = D_j T\varphi - T D_j \varphi = D_j(c\varphi) - c D_j \varphi \stackrel{\text{произв-я произвед.}}{=} (\varphi D_j c + c D_j \varphi) - c D_j \varphi = \varphi D_j c \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Следовательно, $D_j c \equiv 0$, и потому функция $c(x)$ постоянна. $\square$

Приведенные элементарные факты позволяют доказать один из фундаментальных результатов теории — формулу (5.2) обращения преобразования Фурье.

ТЕОРЕМА 5.1.6. Преобразование Фурье $F : \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ есть изоморфизм пространства $\mathcal{P}$ на себя, обратный к которому задается формулой обращения Фурье (5.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двукратное преобразование Фурье $L = F^2$. В силу доказанной теоремы 5.1.3 оно антикоммутирует с операциями дифференцирования и умножения на полином, т.е.

$$L(D_j \varphi) = -D_j L\varphi, \quad L(x_j \varphi) = -x_j L\varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.13)$$

Введем обозначение $R\varphi(x) = \varphi(-x)$. Поскольку $\frac{\partial R\varphi(x)}{\partial x_j} = -R\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\right)$, то из формул (5.13) легко следует, что оператор $T = RL = RF^2$ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$T(D_j \varphi) = D_j T\varphi, \quad T(x_j \varphi) = x_j T\varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.14)$$

Тогда по Лемме 5.1.5 получаем, что $T\varphi = c\varphi$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{P}$. Осталось только посчитать константу c для данного случая. С этой целью возьмем функцию $\varphi(x) = \exp(-|x|^2/2)$. Элементарными вычислениями проверяется, что $\varphi \in \mathcal{P}$ и справедливо тождество $(x_j + iD_j)\varphi = 0$. Применяя к этому тождеству оператор Фурье F имеем $(-D_j + i\xi_j)\hat{\varphi}(\xi) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$. Решая эти элементарные линейные дифференциальные уравнения (относительно каждой из переменных x_j), получаем, что $\hat{\varphi} = c_1 \varphi$. Константа c_1 легко вычисляется, т.к. $\varphi(0) = 1$,

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|x|^2/2) dx = (2\pi)^{n/2}$$

(интеграл Пуассона). Поэтому $c_1 = (2\pi)^{n/2}$. По построению, для данного случая $T\varphi = c_1^2 \varphi$, поэтому $c = c_1^2 = (2\pi)^n$. $\square$

Замечание 5.1.7. В процессе доказательства последней теоремы было попутно установлено следующее весьма полезное тождество:

$$\text{для } \varphi(x) = \exp(-|x|^2/2) \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2). \quad (5.15)$$

ТЕОРЕМА 5.1.8. Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ справедливы соотношения

$$\int \hat{\varphi} \psi dx = \int \varphi \hat{\psi} dx; \quad (5.16)$$

$$\int \varphi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}} dx \quad (\text{формула Парсеваля}); \quad (5.17)$$

$$\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \hat{\psi}; \quad (5.18)$$

$$\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-n} \hat{\varphi} * \hat{\psi}. \quad (5.19)$$

Здесь и далее символом $f * g$ обозначается *свертка функций* f и g , определяемая формулой

$$f * g|_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части в формуле (5.16) равны двойному интегралу

$$\int \int \varphi(x)\psi(\xi)e^{-i(x,\xi)} dx d\xi. \quad (5.20)$$

Чтобы доказать следующую формулу (5.17), положим $\chi = (2\pi)^{-n}\widehat{\psi}$. В силу формулы обращения Фурье, имеем

$$\overline{\widehat{\chi}(\xi)} = \overline{\int \chi(x)e^{-i(x,\xi)} dx} = \int \overline{\chi(x)}e^{i(x,\xi)} dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(x)e^{i(x,\xi)} dx \stackrel{(5.2)}{=} \psi(\xi).$$

Поэтому $\widehat{\chi}(\xi) \equiv \overline{\psi(\xi)}$, и равенство (5.17) вытекает из (5.16) с ψ , замененным на χ . Доказательство равенства (5.18), столь же элементарное, как и доказательство равенства (5.16), предоставляется читателю. Наконец, чтобы установить (5.19), заметим, что преобразование Фурье от $\widehat{\varphi\psi}$ равно $(2\pi)^n\varphi(-x)\psi(-x)$, а преобразование Фурье от $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$, согласно все той же формуле обращения Фурье и предыдущего равенства (5.18), равно $(2\pi)^n\varphi(-x)(2\pi)^n\psi(-x)$. $\square$

Замечание 5.1.9. Легко видеть, что $R(\varphi*\psi) = (R\varphi) * (R\psi)$, где, напомним, $R\varphi(x) = \varphi(-x)$. Поэтому из формул (5.18)–(5.19) и установленного ранее факта $\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^n Rf$, вытекает, в частности, что

$$F^{-1}(\varphi*\psi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi) \cdot F^{-1}(\psi); \quad (5.21)$$

$$F^{-1}(\varphi\psi) = F^{-1}(\varphi) * F^{-1}(\psi), \quad (5.22)$$

где F^{-1} обозначает обратное к преобразованию Фурье.

Определение 5.1.10. Обозначим через $\tau_{\mathcal{P}}$ топологию пространства Фреше $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, порожденную полунормами из (5.4). Непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{P}$ относительно этой топологии называются *умеренными распределениями* (или *распределениями умеренного роста*). Множество всех умеренных распределений обозначается через $\mathcal{P}'$, т.е. $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}, \tau_{\mathcal{P}})'$.

Таким образом, линейный функционал $u \in \mathcal{P}'$ принадлежит пространству умеренных распределений $\mathcal{P}'$ в том и только том случае, если для всякой последовательности $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$ (сходимость здесь понимается во введенном ранее смысле (5.4)) имеет место сходимость $u(\varphi_m) \rightarrow u(\varphi)$.

Возьмем последовательность $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. В соответствие с нашими определениями,

$$\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{E}}} \varphi \Leftrightarrow \|\varphi_m - \varphi\|_{k, Q_j} = \sup_{x \in Q_j, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha(\varphi_m(x) - \varphi(x))| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad Q \in \mathbb{R}^n; \quad (5.23)$$

$$\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{D}}} \varphi \Leftrightarrow \|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha(\varphi_m(x) - \varphi(x))| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \text{ мультииндексов } \alpha, \beta; \quad (5.24)$$

$$\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{D}}} \varphi \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}^n : \text{supp } \varphi \subset Q, \text{supp } \varphi_m \subset Q \quad \forall m, \quad \text{и} \quad \|\varphi_m - \varphi\|_{k, Q} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

(Отметим попутно, что пространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ являются пространствами Фреше — т.е. счетно-нормированными полными пространствами, — а пространство $\mathcal{D}$ — нет.)

Отсюда легко видеть, что

$$\left(\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{D}}} \varphi \right) \Rightarrow \left(\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{P}}} \varphi \right) \Rightarrow \left(\varphi_m \xrightarrow{\tau_{\mathcal{E}}} \varphi \right). \quad (5.26)$$

Таким образом, топология и сходимость в $\tau_{\mathcal{D}}$ — самые сильные, сходимость в $\tau_{\mathcal{E}}$ — самая слабая, а $\tau_{\mathcal{P}}$ занимает промежуточное место. Соответственно, для пространств обобщенных функций имеем

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (5.27)$$

В самом деле, распределения с компактным носителем — самый узкий класс, далее идут умеренные распределения, ну а класс всех обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ самый широкий — здесь самое большое разнообразие, функций таких привеликое множество.

Примером элементов из $\mathcal{P}'$ служат меры $d\mu$, удовлетворяющие при некотором m условию

$$\int (1 + |x|)^{-m} d\mu(x) < \infty.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}'$$

для любого p . Именно, функция $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ задает линейный функционал на $\mathcal{P}$ по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{P} \quad u(\varphi) := \int \varphi(x) u(x) dx. \quad (5.28)$$

Иногда для удобства этот функционал будет обозначаться символом ℓ_u , а иногда — просто символом u (как и саму порождающую функцию), когда это не приводит к недоразумениям. Непрерывность в $\mathcal{P}'$ этого функционала может быть установлена и с помощью неравенства Гельдера.

Если $\ell \in \mathcal{P}'$ то, напомним, для каждого n -мультииндекса α можно определить производную $\partial^\alpha \ell \in \mathcal{P}'$ по правилу:

$$\partial^\alpha \ell(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \ell(\partial^\alpha \varphi). \quad (5.29)$$

С помощью формулы интегрирования по частям легко проверяется, что если функция $u \in C^k$ такова, что все ее производные до порядка k имеют не более чем полиномиальный рост, то для функционала

$$\partial^\alpha \ell_u = \ell_{\partial^\alpha u}.$$

Таким образом, для гладких функций производная считается "по обычному".

Аналогично, если $\ell \in \mathcal{P}'$ и $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то можно определить произведение $f\ell \in \mathcal{P}'$ по правилу:

$$f\ell(\varphi) = \ell(f\varphi).$$

Таким же образом задается произведение и в случае, когда f — многочлен, или, более общо, когда функция f бесконечно гладкая и имеет не более чем полиномиальный рост (в этом случае $f\varphi \in \mathcal{P}$ для всех $\varphi \in \mathcal{P}$).

Определение 5.1.11. Для всякого распределения $u \in \mathcal{P}'$ его преобразование Фурье $\hat{u}$ определяется формулой

$$\hat{u}(\varphi) = u(\check{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.30)$$

Из Теоремы 5.1.3 вытекает, что $\hat{u} \in \mathcal{P}'$, и, поскольку доказательство равенства (5.16) сохраняет свою силу для всех $\varphi, \psi \in L_1$, это определение согласуется с определением (5.1) в случае, когда $u \in L_1$.

Формула обращения Фурье, доказанная в Теореме 5.1.6, утверждает, что

$$\widehat{\check{\varphi}} = (2\pi)^n \check{\varphi} \quad \text{для } \varphi \in \mathcal{P}, \quad \text{где } \check{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

Отсюда вытекает, что для $u \in \mathcal{P}'$

$$\widehat{\hat{u}}(\varphi) = u(\widehat{\check{\varphi}}) = (2\pi)^n u(\check{\varphi}) = (2\pi)^n \check{u}(\varphi).$$

Здесь $\check{u}$ — это, конечно же, композиция функционала u с отображением $x \rightarrow -x$, т.е. $\check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi})$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5.1.12. Преобразование Фурье осуществляет изоморфизм пространства $\mathcal{P}'$ (со слабой топологией¹) на себя, и для всякого элемента $u \in \mathcal{P}'$ справедлива формула обращения Фурье $\widehat{\hat{u}}(\varphi) = (2\pi)^n \check{u}(\varphi)$.

В частности, если $f \in L_1$ и $\hat{f} \in L_1$, то формула обращения (5.2) справедлива для почти всех x . На самом деле, в этом случае $f \in L_\infty \cap L_1$, поэтому интеграл в определении $\hat{f}(\xi)$ будет непрерывно зависеть от ξ , т.е. обе функции $f, \hat{f}$ непрерывны и ограничены (после их изменения, если нужно, на множестве меры ноль).

Напомним, что символом $L_2(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех комплекснозначных измеримых функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, с конечной L_2 -нормой:

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(здесь и в дальнейшем для удобства пишем $\|\cdot\|_{L_2}$ вместо $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$). На самом деле $L_2(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым пространством, и скалярное произведение двух функций $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ вычисляется по формуле

$$(\varphi, \psi)_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следующая теорема имеет ключевое значение в теории преобразований Фурье.

¹Сходимость последовательности $u_m \in \mathcal{P}'$ к элементу $u \in \mathcal{P}'$ в слабой топологии пространства $\mathcal{P}'$ определяется следующим образом: $u_m \rightarrow u$ в $\mathcal{P}' \Leftrightarrow u_m(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}$.

ТЕОРЕМА 5.1.13 (Теорема Планшереля). Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье $\widehat{u}$ тоже принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$, и формула Парсеваля (5.17) справедлива для всех $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. В частности,

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.31)$$

т.е. преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Выберем последовательность функций $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\|u_j - u\|_{L_2} \rightarrow 0$. В частности, последовательность u_j будет фундаментальной в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Из Теоремы 5.1.6 и равенства (5.17), доказанного для гладких функций, вытекает, что последовательность функций $\widehat{u}_j$ лежит в пространстве быстроубывающих функций $\mathcal{P}$ и также будет фундаментальной в $L_2(\mathbb{R}^n)$, поэтому в силу теоремы Рисса–Фишера о полноте пространства L_2 найдется функция $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\widehat{u}_j \rightarrow v$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что $v \in \mathcal{P}'$, и, более того, $\widehat{u}_j \rightarrow v$ в слабой топологии пространства $\mathcal{P}'$. С другой стороны, в силу непрерывности преобразования Фурье относительно указанной топологии (см. теорему 5.1.12) имеем $\widehat{u}_j \rightarrow \widehat{u}$. Значит, $\widehat{u} = v \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Если теперь φ, ψ — произвольная пара функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$, то по аналогии с предыдущим возьмем последовательности функций $\varphi_j, \psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $\|\varphi_j - \varphi\|_{L_2} \rightarrow 0$, $\|\psi_j - \psi\|_{L_2} \rightarrow 0$. По теореме 5.1.8 равенство Парсеваля будет верно для функций φ_j, ψ_j :

$$\int \varphi_j \bar{\psi}_j dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}_j \overline{\widehat{\psi}_j} dx, \quad (5.32)$$

и, поскольку по доказанному на первом шаге $\widehat{\varphi}_j \rightarrow \widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}_j \rightarrow \widehat{\psi}$ в пространстве L_2 , то в последнем равенстве можно перейти к пределу и в левой, и в правой части, и получим искомую формулу Парсеваля для пары исходных (негладких) функций φ, ψ . $\square$

Замечание 5.1.14. Стоит обратить особое внимание, что преобразование Фурье от функции $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ в общем случае нельзя задать с помощью классической формулы (5.1), т.к. соответствующий интеграл там может и не существовать (расходиться) в смысле Лебега. Можно показать, что если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то для последовательности функций $\widehat{u}_N(\xi) = \int_{|x| \leq N} u(x) e^{-i(x, \xi)} dx$ справедлива сходимости $\widehat{u}_N \rightarrow \widehat{u}$, где $\widehat{u}$ — преобразование Фурье функции u , вычисленное с точки зрения теории обобщенных функций (т.е. для u как для элемента $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$).

Доказанную теорему можно значительно усилить с помощью следующего результата из функционального анализа.

ТЕОРЕМА 5.1.15 (Интерполяционная теорема Рисса–Торина). Пусть T — линейное отображение из $L_{p_1} \cap L_{p_2}$ в $L_{q_1} \cap L_{q_2}$ такое, что

$$\|Tf\|_{q_j} \leq M_j \|f\|_{p_j}, \quad j = 1, 2. \quad (5.33)$$

Тогда, если $\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{(1-t)}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{(1-t)}{q_2}$ для некоторого $t \in (0, 1)$, то

$$\|Tf\|_q \leq M_1^t M_2^{1-t} \|f\|_p, \quad \forall f \in L_{p_1} \cap L_{p_2}. \quad (5.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очень короткое, красивое, основано на применении методов ТФКП. См., например, в книге [9, Теорема 7.1.12]. $\square$

ТЕОРЕМА 5.1.16 (Хаусдорфа–Юнга). Если $f \in L_p$ с $1 \leq p \leq 2$, то $\hat{f} \in L_{p'}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и справедлива оценка

$$\|\hat{f}\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L_p}. \quad (5.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (5.35) справедливо при $p = 2$ в силу формулы Парсеваля и очевидно при $p = 1$, поэтому в общем случае оно следует из теоремы Рисса–Торина 5.1.15. $\square$

§5.2 Примеры и приложения

Следующие примеры и задачи взяты из учебника В.А. Зорича по математическому анализу (см. [8]).

Пример 5.2.1. Найдем преобразование Фурье от простейшей финитной (= с компактным носителем) функции

$$f(x) = \begin{cases} h, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (5.36)$$

Для простоты рассмотрим одномерный $n = 1$ случай. Тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a h e^{-i\xi x} dx = h \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2h \frac{\sin a\xi}{\xi}.$$

Если взять повторное преобразование Фурье, то, по формуле обращения, должны получить ту же функцию $f(-x) = f(x)$, помноженную на коэффициент 2π . Тем самым показано, что

$$\text{для } \varphi(x) = 2 \frac{\sin ax}{x} \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 2\pi, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (5.37)$$

Пример 5.2.2. Пусть $\hat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье от функции $f(x)$. Найдем преобразование Фурье от функции $f_a(x) := f(ax)$, где $a > 0$. Тогда

$$\hat{f}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-i(x,\xi)} dx \stackrel{\text{Замена } y = ax}{=} a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y, \frac{\xi}{a})} dy = a^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Ранее (см. формулу (5.15)) было установлено тождество

$$\text{для } \varphi(x) = \exp(-|x|^2/2) \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2) \quad (5.38)$$

поэтому для всякого $\alpha > 0$

$$\text{для } \varphi_\alpha(x) = \exp(-\alpha|x|^2/2) \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}_\alpha(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2\alpha}\right). \quad (5.39)$$

Аналогично, поскольку для обратного преобразования Фурье верна формула $F^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} RF$, получаем соотношение,

$$F^{-1}\left(\exp(-\alpha|x|^2/2)\right) = (2\pi\alpha)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2\alpha}\right). \quad (5.40)$$

которое пригодится нам в дальнейшем (при выводе формулы для решения уравнения теплопроводности).

Волновое уравнение

Успешное применение теории преобразований Фурье к уравнениям математической физики объясняется тем обстоятельством, что преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования алгебраической операцией умножения на полином.

Пусть, например, ищется функция $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \dots + a_n u(x) = f(x),$$

где a_j — некоторые постоянные коэффициенты, и $f(x)$ — известная функция. Применим к обеим частям этого равенства преобразование Фурье (в предположении достаточной регулярности функций u и f , тогда по Теореме 5.1.3 указанное дифференциальное уравнение преобразуется в следующее алгебраическое соотношение:

$$(a_0(i\xi)^n + a_1(i\xi)^{n-1} + \dots + a_{n-1}i\xi + a_n)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

относительно $\hat{u}$. Найдя из него $\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{P(i\xi)}$, обратным преобразованием Фурье получаем $u(x)$.

Применим эту идею к отысканию функции $u = u(x, t)$, удовлетворяющей в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (5.41)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (5.42)$$

Здесь, как и в следующем примере, мы не будем останавливаться на обосновании промежуточных выкладок, потому что, как правило, легче бывает найти нужную функцию и непосредственно проверить, что она решает поставленную задачу, чем обосновать и преодолеть все возникающие по дороге технические трудности. Существенную роль в принципиальной борьбе с этими трудностями (наведение "строго фундамента" под формальные выкладки) играют обобщенные функции, упомянутые выше.

Итак, рассматривая t , как параметр, сделаем преобразование Фурье по x от обеих частей уравнения (5.41). Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и пользуясь Теоремой 5.1.3, получаем

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$

Отсюда, решая простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t , находим, что

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(a\xi t) + B(\xi) \sin(a\xi t).$$

В силу начальных данных

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) = A(\xi),$$

$$\widehat{u}'_t(\xi, 0) = \widehat{u}'_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) = a\xi B(\xi).$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(a\xi t) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{a\xi} \sin(a\xi t) = \frac{1}{2} \widehat{f}(\xi) (e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}) + \frac{1}{2} \frac{\widehat{g}(\xi)}{ia\xi} (e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}). \quad (5.43)$$

Домножая это равенство на $\frac{1}{2\pi} e^{ix\xi}$ и интегрируя по ξ , короче, взяв обратное преобразование Фурье и используя формулу

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(\xi)}{ia\xi} e^{i\xi(x \pm at)} d\xi \right)'_t = \pm \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi(x \pm at)} d\xi = 2\pi g(x \pm at),$$

получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2} \int_0^t (g(x - a\tau) + g(x + a\tau)) d\tau. \quad (5.44)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция $u(x, t)$, вычисленная по полученной формуле (5.44), действительно дает решение уравнения (5.41) с начальными условиями (5.42). Но формула (5.44) имеет то достоинство, что она справедлива не только для быстро убывающих бесконечно гладких функций класса $\mathcal{P}$, но и для менее регулярных случаев, например, когда функции f, g лишь C^2 -гладкие. Более того, формула (5.44) справедлива даже и для менее регулярных случаев (например, когда функции f, g лишь непрерывны), но тогда ее надо понимать уже в смысле теории обобщенных функций (см., например, [9]).

Уравнение теплопроводности

Это уравнение в простейшей своей форме для функции $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (5.45)$$

где Δ — оператор Лапласа $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. При этом налагаются начальные условия

$$u(x, 0) = f(x). \quad (5.46)$$

Итак, рассматривая t , как параметр, сделаем преобразование Фурье по x от обеих частей уравнения (5.45). Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и пользуясь Теоремой 5.1.3, получаем

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Отсюда, решая простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t , находим, что

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

В силу начальных данных

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) = A(\xi),$$

Таким образом,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}. \quad (5.47)$$

Применим к обоим частям обратное преобразование Фурье, тогда по формулам (5.40), (5.22) получаем

$$u = (4\pi a^2 t)^{-n/2} f * \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2 t}\right),$$

т.е.

$$u(x, t) = u = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\right) dy. \quad (5.48)$$

Это знаменитая *формула Вейерштрасса* для решения уравнения теплопроводности. Она связана с тем фактом, что при $t > 0$ функция $(4\pi a^2 t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$ является решением уравнения теплопроводности, и при $t \rightarrow 0$ она стремится к δ -функции (=образует δ -образную в широком смысле последовательность).

Формула Пуассона

ТЕОРЕМА 5.2.3 (Формула Пуассона). Если $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx}. \quad (5.49)$$

В частности, полагая $x = 0$, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n). \quad (5.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Обозначим $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$. Очевидно, что $f(x)$ представляет собой гладкую 2π -периодическую функцию (гладкость вытекает из быстрого убывания функций φ и $\hat{\varphi}$ на бесконечности). Тогда функция $f(x)$ является суммой своего ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (5.51)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t + 2\pi n) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(k). \quad (5.52)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}.$$

□

Формула Котельникова

Этот пример также основан на красивой комбинации рядов и преобразований Фурье. Он играет важную роль в теории передачи информации по каналу связи. Напомним, что человеческое ухо может воспринимать лишь ограниченный диапазон частот (примерно от двадцати герц до двадцати килogerц). Таким образом, какие бы ни были сигналы, мы, подобно фильтру, вырезаем только ограниченную часть их спектра и воспринимаем их как сигналы с финитным спектром.

Будем поэтому считать, что передаваемый нами или получаемый нами сигнал $f(t)$ имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот ω , величина которых не превышает некоторого критического значения $a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| \geq a$, поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.53)$$

На отрезке $[-a, a]$ функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) e^{ik\frac{\pi}{a}\omega}, \quad (5.54)$$

где

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{a}\omega} d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} f\left(-k\frac{\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{a} f\left(-k\frac{\pi}{a}\right). \quad (5.55)$$

Тогда из формул (5.53)–(5.55) вытекает

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{a}\right) \int_{-a}^a e^{i\omega(t-k\frac{\pi}{a})} d\omega. \quad (5.56)$$

Беря эти несложные интегралы от экспоненты и учитывая четность/нечетность, получаем итоговое соотношение

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{a}\right) \frac{\sin a(t - k\frac{\pi}{a})}{a(t - k\frac{\pi}{a})}. \quad (5.57)$$

Это и есть известная *формула Котельникова*. Она показывает, что для восстановления сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, сосредоточенном в полосе частот $|\omega| \leq a$, достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые *отсчетными значениями*) через равные промежутки времени $\Delta = \frac{\pi}{a}$.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Напомним, что n -м *моментом* функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$.

В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т.е. $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f , а *дисперсия* $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$. Из самого определения видно, что величина дисперсии оценивает разброс случайной величины — ее отклонение от среднего значения.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ — две функции класса $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, причем $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\varphi}$. Нормируем функцию φ так, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$, тогда в силу равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2 dp = 1. \quad (5.58)$$

Это означает, что функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ можно рассматривать, как плотности некоторых случайных величин x и p соответственно. Оценим теперь их дисперсию. Эта оценка разбивается на ряд этапов.

ШАГ 1. Покажите, что сдвигом по аргументу $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(x - a)$ можно, не меняя величины $|\widehat{\varphi}(p)|$, получить функцию φ такую, что

$$M_1(|\varphi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 dx = 0. \quad (5.59)$$

Аналогично, не меняя $|\varphi|$ и соотношения $M_1(\varphi) = 0$, можно, сдвигом по аргументу $\psi(p) \leftrightarrow \psi(p - b)$ добиться того, что

$$M_1(|\psi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(p)|^2 dp = 0. \quad (5.60)$$

Подсказка. В качестве a и b нужно взять математические ожидания исходных функций $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ соответственно.

ШАГ 2. Для вещественного параметра α рассмотрим функцию

$$\alpha \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x \varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx.$$

Покажите, что эта функция является квадратичным полиномом по α , и вычислите все его коэффициенты (при α^2 , α и т.д.²).

²**Подсказка.** Используя интегрирование по частям, опираясь на равенство Парсеваля и формулу $\widehat{\varphi'}(p) = ip \widehat{\varphi}(p)$, покажите, что $\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2) \geq 0$.

ШАГ 3. Пользуясь неотрицательностью введенного на втором шаге полинома и вычислив его дискриминант, докажите, что

$$M_2(|\varphi|^2) \cdot M_2(|\psi|^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Это соотношение показывает, что чем более "сосредоточена" сама функция φ , тем "размытее" ее преобразование Фурье, и обратно.

Этот факт имеет фундаментальные приложения физике. Он является математическим выражением *принципа неопределенности Гейзенберга*³: нельзя одновременно измерить точно и координату x квантовой частицы, и ее импульс p . Чем точнее измеряется одна из указанных величин, тем больше погрешности для другой.

Задачи на преобразование Фурье

1. Рассматривая преобразование Фурье как отображение $f \mapsto \hat{f}$, покажите, что оно обладает следующими часто используемыми свойствами

$$f(at) \mapsto \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

(правило изменения масштаба);

$$f(t - t_0) \mapsto \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t_0};$$

(сдвиг входного сигнала — фурье-преобраза — по времени, или *теорема о переносе*)
в частности, из последней формулы вытекает

$$[f(t + t_0) \pm f(t - t_0)] \mapsto \begin{cases} \hat{f}(\xi) 2 \cos \xi t_0, \\ hf(\xi) 2 \sin \xi t_0 \end{cases}$$

$$f(t) e^{\pm i\omega_0 t} \mapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)$$

(сдвиг преобразования Фурье по частоте);

$$f(t) \cos \omega_0 t \mapsto \frac{1}{2} [\hat{f}(\xi - \omega_0) + \hat{f}(\xi + \omega_0)],$$

$$f(t) \sin \omega_0 t \mapsto \frac{1}{2} [\hat{f}(\xi - \omega_0) - \hat{f}(\xi + \omega_0)]$$

(амплитудная модуляция гармонического сигнала);

$$f(t) \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} \mapsto \frac{1}{4} [2\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi - \omega_0) - \hat{f}(\xi + \omega_0)].$$

2. Найдите преобразования Фурье (или, как говорят, *фурье-образы*) следующих функций

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A}; & |t| \leq A, \\ 0; & |t| > A \end{cases}$$

³В.Гейзенберг — немецкий физик, один из создателей квантовой механики.

(прямоугольный импульс);

$$\Pi_A(t) \cos \omega_0 t$$

(гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом);

$$\Pi_A(t + 2A) + \Pi_A(t - 2A)$$

(два прямоугольных импульса одинаковой полярности);

$$\Lambda_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|t|}{A}\right), & |t| \leq A; \\ 0, & |t| > A \end{cases}$$

(треугольный импульс);

$$\cos at^2 \quad \text{и} \quad \sin at^2 \quad (a > 0);$$

$$|t|^{-1/2} \quad \text{и} \quad |t|^{-1/2} e^{-a|t|} \quad (a > 0).$$

3. Используя предыдущие результаты, найдите значения уже встречавшихся нам интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx.$$

4. Проверьте, что интеграл Фурье функции $f(t)$ (т.е. ее восстановление по фурье-образу $\hat{f}$) можно записать в любом из следующих видов:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi(x-t)} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\omega(x-t) dx.$$

5. Пусть $f = f(x, y)$ — решение двумерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ в полуплоскости $y \geq 0$, удовлетворяющее условиям $f(x, 0) = g(x)$ и $f(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

а) Проверьте, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi, y)$ функции f по переменной y имеет вид $\hat{g}(\xi) e^{-y|\xi|}$.

б) Найдите фурье-образ функции $e^{-y|\xi|}$ по переменной ξ .

с) Получите представление функции f в виде интеграла Пуассона

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi.$$

6. Напомним, что n -м моментом функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$. В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т.е. $f(x) \geq 0$

0 и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f , а дисперсия $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$. Из самого определения видно, что величина дисперсии оценивает разброс случайной величины — ее отклонение от среднего значения.

Рассмотрим преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

функции f . Раскладывая $e^{-ix\xi}$ в ряд, покажите, что:

а) $\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k M_k(f)}{k!} \xi^k$ если, например, $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

б) $M_k(f) = (i)^k \hat{f}^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, \dots$

в) Пусть теперь f — вещественнозначна, тогда $\hat{f}(\xi) = A(\xi) e^{\varphi(\xi)}$, где $A(\xi)$ — модуль, а $\varphi(\xi)$ — аргумент $\hat{f}(\xi)$, причем $A(\xi) = A(-\xi)$ (четность), а $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$ (нечетность). Положим, для нормировки, что $\int f(x) dx = 1$. Проверьте, что тогда

$$\hat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\xi + \frac{A''(0) - (\varphi'(0))^2}{2} \xi^2 + o(\xi^2), \quad (\xi \rightarrow 0)$$

и

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \quad \sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f) = -A''(0).$$

7. Уже из Леммы Римана следует, что преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции стремится к нулю на бесконечности. Имеется общая закономерность: подобное коэффициентам Фурье, преобразование Фурье тем быстрее стремится к нулю, чем глаже функция, от которой оно берется. И наоборот, чем быстрее функция f убывает к нулю на бесконечности, тем больше гладкость ее преобразования Фурье.

Этот интересный феномен можно проиллюстрировать следующим примером.

а) Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$ ($a > 0$), как и все ее производные, определенные при $x > 0$, убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени переменной $|x|$, и тем не менее эта функция не принадлежит классу $\mathcal{P}$.

б) Убедитесь в том, что преобразование Фурье этой функции бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, но оно также не принадлежит классу $\mathcal{P}$, т.е. недостаточно быстро убывает на бесконечности (и все потому, что $e^{-a|x|}$ не дифференцируемо при $x = 0$).

§5.3 Обобщенные функции умеренного роста

Легко проверяется, что предыдущие формулы (см. Следствие 5.1.4) оказываются справедливыми и для обобщенных функций умеренного роста, т.е. справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5.3.1. Для каждой обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы

$$\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}; \quad (5.61)$$

$$\widehat{x^\beta u} = i^{|\beta|} \partial^\beta \widehat{u}. \quad (5.62)$$

Пример 5.3.2. Найдем преобразование Фурье δ -функции, которая, напомним, задается по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \delta(\varphi) := \varphi(0). \quad (5.63)$$

Тогда

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot 1 dx. \quad (5.64)$$

Таким образом, $\widehat{\delta} = \ell_1$, т.е. функционал $\widehat{\delta}$ порождается (в смысле определения 5.28) обычной функцией, к тому же очень простой — тождественной единицей. Можно писать для краткости, что $\widehat{\delta} \equiv 1$.

Пример 5.3.3. Рассмотрим функцию

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

которая называется *функцией Хэвисайда*. В качестве упражнения рекомендуется проверить, что

$$H' = \delta. \quad (5.65)$$

Тогда, применяя формулы (5.61)–(5.62), получаем, что

$$1 = \widehat{\delta} = \widehat{\partial H} = i\xi \widehat{H}.$$

Это означает, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} ix \cdot \widehat{H}(x) \varphi(x) dx.$$

Можно переписать это тождество и в таком виде

$$-i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{H}(x) \varphi(x) dx = \widehat{H}(\varphi), \quad (5.66)$$

или, короче, $\widehat{H} = \frac{-i}{\xi}$, только при этом необходимо уточнение, что левый интеграл в (5.66) понимается в смысле главного значения по Коши (как в ТФКП), т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

§5.3.1 Ряды Фурье и обобщенные функции умеренного роста

Любую 2π -периодическую функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию $f(s)$ точки на единичной окружности Γ (точка фиксируется значением s натурального параметра $0 \leq s \leq 2\pi$).

Рассмотрим на Γ пространство $\mathcal{D}(\Gamma)$ функций класса $C^\infty(\Gamma)$ и пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обобщенных функций, т.е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\Gamma)$. Действие (значение) функционала $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ будем обозначать символом $F(\varphi)$.

Каждая интегрируемая на Γ функция f может рассматриваться как элемент $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (регулярная обобщенная функция), действующий на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ по формуле

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s) ds.$$

Сходимость последовательности F_n обобщенных функций пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$ к функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, как обычно, означает, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi).$$

Дальнейший материал дан в виде последовательности упражнений.

1. Используя то обстоятельство, что у любой функции $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$ ее ряд Фурье сходится равномерно к самой этой функции, т.е.

$$\varphi(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\varphi) e^{iks}, \quad \text{где } c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-iks} ds,$$

покажите, что в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$ имеет место элегантная сходимость

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iks} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta. \quad (5.67)$$

Здесь, как обычно, δ представляет собой обобщенную функцию Дирака, т.е. $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

2. По аналогии с регулярным случаем, определим коэффициенты Фурье произвольного распределения $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ по формуле

$$c_k(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-ikx})$$

(данная формула имеет смысл, т.к. $e^{-iks} \in \mathcal{D}(\Gamma)$). Тогда любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ можно сопоставить ее ряд Фурье:

$$F \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{iks}.$$

Докажите, что $\delta \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks}$.

3. Докажите следующий замечательный по своей простоте и открывающейся свободе факт: ряд Фурье любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ сходится к F (в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\Gamma)$).
4. Покажите, что ряд Фурье функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (как и саму функцию F , и как любой сходящийся ряд из обобщенных функций) можно почленно дифференцировать любое количество раз.
5. Исходя из равенства $\delta = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iks}$, найдите ряд Фурье функции δ' .
6. Вернемся теперь с окружности Γ на прямую $\mathbb{R}$ и рассмотрим функции e^{ikx} как регулярные обобщенные функции пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, т.е. как линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ бесконечно гладких на $\mathbb{R}$ функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем.

Любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f может рассматриваться как элемент пространства из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (*регулярная обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*), действующий на функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ по закону $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx$. Сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяется стандартным образом

$$F_n \rightarrow F \Leftrightarrow \left(F_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right).$$

Покажите, что в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо следующее равенство

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi), \quad (5.68)$$

в обеих частях которого подразумевается предельный переход при $n \rightarrow \infty$ по симметричным частным суммам $\sum_{-n}^n$, а $\delta(x - x_0)$, как всегда, обозначает сдвинутую в точку x_0 функцию Дирака, т.е. $\delta(x - x_0)(\varphi) := \varphi(x_0)$.

§5.3.2 Преобразование Фурье и обобщенные функции умеренного роста

1. Докажите, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Используя тот факт, что $\widehat{\delta} = 1$, найдите преобразование Фурье от сдвинутой δ -функции $\delta(x - k)$.
3. Используя равенство (5.68), и тот факт, что преобразование Фурье от сходящегося ряда представляет собой сумму преобразований Фурье его слагаемых⁴, покажите, что для $F = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$ справедлива формула

$$\widehat{F} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

⁴То есть у сходящегося в $\mathcal{D}'$ ряда можно брать преобразование Фурье почленно.

4. Используя определение $\widehat{F}(\varphi) = F(\widehat{\varphi})$, выведите из предыдущего пункта формулу Пуассона:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k). \quad (5.69)$$

5. Докажите следующее соотношение (θ – формула)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t} k^2} \quad (t > 0),$$

играющее важную роль в теории эллиптических функций и в теории управления.

§5.4 Преобразование Фурье и фундаментальные решения дифференциальных операторов

Пусть $P = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ — полином n -переменных (степени $\leq k$). Тогда $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *фундаментальным решением уравнения*

$$Lv = 0, \quad (5.70)$$

если $Lu = \delta$.

Напомним, что если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $u * f|_x := u(f(x - \cdot))$. Для случая, когда u является регулярной функцией, т.е. если $u \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\int (1 + |x|^m) u(x) dx < \infty \quad \text{для некоторого } m \in \mathbb{N}, \quad (5.71)$$

это определение совпадает с предыдущим:

$$u * f|_x = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) f(x - y) dy.$$

ТЕОРЕМА 5.4.1. Пусть распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является фундаментальным решением уравнения (5.70). Тогда для всякой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ свертка $v = u * f$ является бесконечно гладкой функцией и решением уравнения

$$Lv = f \quad (5.72)$$

с краевыми условиями

$$v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (5.73)$$

В качестве примера найдем фундаментальное решение уравнения Лапласа. Нам понадобится

ЛЕММА 5.4.2. Если распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является однородной функцией степени α , то распределение $\widehat{u}$ является однородной функцией степени $-n - \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение для простейшего случая, когда распределение $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ представляет собой регулярную функцию u (см. (5.71)). Тогда по предположению $u(tx) = t^\alpha u(x)$ для всех $t > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению

$$\widehat{u}(t\xi) = \int u(x) e^{-i(x,t\xi)} dx = t^{-\alpha-n} \int u(tx) e^{-i(tx,\xi)} d(tx) \stackrel{\text{Замена } y=tx}{=} t^{-\alpha-n} \int u(y) e^{-i(y,\xi)} dy = t^{-\alpha-n} \widehat{u}(\xi).$$

Лемма для случая регулярных распределений доказана. Отметим попутно тот факт, что,

$$u_t(\varphi) := \int u(tx) \varphi(x) dx = t^{-n} \int u(y) \varphi\left(\frac{y}{t}\right) dy = t^{-n} u\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right), \quad (5.74)$$

где обозначено $u_t(x) = u(tx)$. Равенство (5.74) выведено для регулярных распределений; оно кладется в основу для определения растяжения u_t в случае произвольных распределений $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$u_t(\varphi) = t^{-n} u\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n). \quad (5.75)$$

Отсюда видно, в частности, что

$$\delta_t(\varphi) = t^{-n} \delta\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right) = t^{-n} \varphi(0) = t^{-n} \delta(\varphi).$$

Таким образом, $\delta_t = t^{-n} \delta$, т.е. распределение δ однородно степени $-n$. Этот факт полностью согласуется с формулировкой доказываемой леммы 5.4.2. Полное доказательство Леммы 5.4.2 (для произвольных нерегулярных распределений $u \in \mathcal{P}'$ на основе формулы (5.75)) предоставляется читателю в качестве несложного упражнения. $\square$

Перейдем теперь к поиску фундаментального решения уравнения Лапласа. Имеем $\Delta u = \delta$, тогда

$$\widehat{\Delta u}|_\xi = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{\delta} = 1.$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Нетрудно проверить, что функция $-\frac{1}{|\xi|^2}$ принадлежит $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ при $n \geq 3$, т.е.

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^2} \varphi(\xi) d\xi$$

представляет собой непрерывный линейный функционал в пространстве $\mathcal{P}$. Поэтому можно взять прямое и обратное преобразование Фурье от этой функции. В соответствии с Леммой 5.4.2 имеем

$$u(x) = -c_n |x|^{2-n}, \quad (5.76)$$

где $c_n > 0$ — некоторая константа, зависящая только от размерности пространства. С помощью Следствия 5.3.1, формулы $\widehat{\delta} = 1$ и леммы об однородности 5.4.2 в самом деле нетрудно проверить, что $\Delta u = \delta$. Таким образом, фундаментальным решением уравнения Лапласа является функция $u(x) = -c_n |x|^{2-n}$, тем самым доказана

ТЕОРЕМА 5.4.3. Пусть $n \geq 3$. Тогда найдется положительная константа c_n такая, что для всякой функции $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ отображение $v(x) := -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}} dy$ является бесконечно гладкой функцией и решением уравнения

$$\Delta v = f \quad (5.77)$$

с краевыми условиями

$$v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0; \quad (5.78)$$

более того, $v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Можно вывести данную формулу и другим путем, заодно посчитав точное значение константы c_n . Нам понадобится

ТЕОРЕМА 5.4.4. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, тогда для любой пары C^2 -гладких функций u, v справедливо тождество

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\mu_{n-1}, \quad (5.79)$$

где символом $\frac{\partial v}{\partial n}$ обозначена производная функции v по направлению внешней нормали ко границе $\partial\Omega$.

Доказательство. Для всякой гладкой вектор-функции $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедлива классическая формула Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\mu_{n-1}, \quad (5.80)$$

где символом $\mathbf{n}$ обозначена внешняя нормаль ко границе $\partial\Omega$. Возьмем здесь $\mathbf{f} = u \nabla v$. Прямым вычислением легко проверяется, что $\operatorname{div} \mathbf{f} = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$. Подставляя этот результат в формулу (5.80), получаем искомую формулу (5.79). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.4.5. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, тогда для любой пары C^2 -гладких функций u, v справедливо тождество

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\mu_{n-1}. \quad (5.81)$$

Доказательство. Необходимо в формуле (5.79) поменять ролями функции v и u , и вычесть друг из друга полученные тождества. $\square$

ТЕОРЕМА 5.4.6. Пусть v — произвольная функция класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедлива формула

$$v(x) = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Delta v(y) \, dy, \quad (5.82)$$

где $c_n = (n-2)\sigma_{n-1}$, и σ_{n-1} — это объем единичной $(n-1)$ -мерной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{P}$. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Возьмем числа $r > 0$ и $R > r$, и область

$$\Omega_{Rr} = B_R \setminus \bar{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R, \quad |y - x| \geq r\},$$

которая получается в результате вычитания двух шаров с центрами в точках 0 и в x соответственно. В области Ω_{Rr} применим вторую формулу Грина для функций v и $u(y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$. Прямым вычислением проверяется, что $\Delta u(y) \equiv 0$ при $y \neq x$, в частности, функция u гладкая в Ω и $\Delta u \equiv 0$ в Ω . Поэтому формула Грина принимает вид

$$\int_{\Omega_{Rr}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Delta v(y) dy = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1} - \int_{S_{r,x}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1}, \quad (5.83)$$

где $S_R = \partial B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = R\}$, $S_{r,x} = \partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = r\}$ — это граничные сферы взятых нами шаров, а $\frac{\partial}{\partial n}$ производные по внешней нормали к этим сферам. Легко видеть, что на $S_{r,x}$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial r}$, поэтому $u = \frac{1}{r^{n-2}}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}}$ на $S_{r,x}$, и формула Грина принимает вид:

$$\int_{\Omega_{Rr}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Delta v(y) dy = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1} - \frac{1}{r^{n-2}} \int_{S_{r,x}} \frac{\partial v}{\partial n} d\mu_{n-1} - (n-2) \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_{r,x}} v d\mu_{n-1} = I + II + III. \quad (5.84)$$

Теперь в последнем равенстве устремим $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. В силу того факта, что функция v сильно убывает, то интеграл в левой части равенства сходится во всем $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, $I \rightarrow 0$. Далее, поскольку $\mu_{n-1}(S_{r,x}) = \sigma_{n-1}r^{n-1}$, то для оставшихся граничных интегралов (по теореме о среднем) справедливы формулы: $II \rightarrow 0$, $III \rightarrow -(n-2)\sigma_{n-1}v(x)$. В итоге получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Delta v(y) dy = -(n-2)\sigma_{n-1}v(x). \quad (5.85)$$

□

Только что доказанную Теорему 5.4.6 можно считать своеобразной переформулировкой предыдущей Теоремы 5.4.3, которая была установлена с помощью методов теории обобщенных функций.

Литература

- [1] КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., Основы функционального анализа. Изд. 5-е. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006.
- [2] КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. М.: Физматлит, 2009.
- [3] РУДИН У. Функциональный анализ. М.: Лань, 2005.
- [4] ХЕЛЕМСКИЙ А.Я. Лекции по функциональному анализу. М: МЦНМО, 2004.
- [5] КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. Изд. 4-е. С.-Петербург: БХВ, 2004.
- [6] АНТОНЕВИЧ А.Б., КНЯЗЕВ П.Н., РАДЫНО Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: УРСС, 2004.
- [7] ДАНФОРД Н., ШВАРЦ ДЖ. Линейные операторы. Том 1: Общая теория. М.: УРСС, 2004.
- [8] ЗОРИЧ В.А., Математический анализ. В 2-х тт. Москва: МЦНМО, 1998, Т.II.
- [9] ХЁРМАНДЕР Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными (в 4-х тт.). Том 1: Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986 г.
- [10] ФИЛАТОВ П.С., Топологические пространства: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: 2003.
- [11] ФИЛАТОВ П.С., Топологические пространства: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: 2003.
- [12] ФИЛАТОВ П.С., Векторные топологии: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: 2005.