Дж.Келли

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Монография посвящена общей, или теоретико-множественной, топологии. В ней собраны наиболее важные результаты из этой области математики. Большое внимание в книге уделено таким фундаментальным вопросам, как сходимость по направленному множеству, топологические произведения и фактор-пространства, метризационные теоремы, теория бикомпактных пространств, равномерная топология, теория функциональных пространств и др. В прекрасно подобранных упражнениях излагается большой дополнительный материал, касающийся связей между общей топологией, функциональным анализом и алгеброй.

Книга предназначена для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов, а также для научных работников в различных областях математики, интересующихся методами общей топологии и их приложениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Келли «Общая топология» является очень популярным руководством по общей топологии; книга может служить, во-первых, учебником для лиц, желающих систематически овладеть основами этой области математики, и, во-вторых, справочным пособием для многочисленных категорий математиков, сталкивающихся в своей работе с теми или иными понятиями или теоремами, относящимися к топологическим пространствам, их непрерывным отображениям, равномерной топологии и т. д.

Общетопологические концепции и факты заняли в последнее время большое место в самых разнообразных областях математики, и поэтому книга такого типа, как книга Келли, стала нужна очень многим математикам весьма различных специальностей. В этом — первая причина успеха названной книги. Вторая причина связана с тем, что в огромном множестве определений и фактов, составляющем современную общую топологию, автору учебника необходимо сделать тот или иной, но достаточно строгий выбор: нельзя объять необъятное. Выбор, сделанный Келли примерно тринадцать лет назад, был сделан удачно, вернее, вниманию читателя предложен один из удачных вариантов такого выбора (я думаю, впрочем, что если бы автор писал свою книгу не в 1950—1953 гг., а в 1965—1968 гг., то отбор основных фактов для учебника был бы иногда несколько иным, что и естественно в применении к быстро развивающейся области математики). Но несомненно, что и сейчас, как и десять лет тому назад, книга Келли может хорошо выполнять те основные свои назначения, о которых сказано выше. Поэтому перевод ее на русский язык вполне целесообразен, и многочисленные настойчивые пожелания осуществить, наконец, этот перевод раздаются среди советских математиков уже не первый год.

Автор перевода — А. В. Архангельский — является не только одним из лучших знатоков современной общей топологии, но и, несомненно, одним из тех математиков молодого поколения, которым эта область науки обязана многими из самых лучших и самых ярких своих достижений за последние годы. Если к этому прибавить, что А. В. Архангельский обладает даром излагать свои мысли легким и весьма современным (на мой взгляд, иногда даже слишком современным!) языком, то надо думать, что выбор переводчика сделан удачно. Это суждение вполне подтверждается и при подробном знакомстве с переводом: он не только точно передает содержание подлинника, но и сохраняет общий литературный стиль его. Поэтому весь перевод представляется мне удачным.

Теперь — краткий обзор содержания книги. Она открывается вводной главой (имеющей порядковый номер нуль), в которой собраны определения и элементарные предложения, касающиеся таких понятий, как множество, подмножество, отношение, функция (отображение одного множества в другое), порядок, а также простейшие понятия алгебраического характера: группа, гомоморфизм, кольцо, идеал и т. п. В этой же главе идет речь о действительных числах, а также о счетных множествах, кардинальных числах (мощностях) и порядковых числах. Следует заметить, что аксиоматически построенному элементарному введению в абстрактную теорию множеств посвящено еще специальное Добавление в конце книги. Наконец, в той же «нулевой» главе содержится и хаусдорфов принцип максимума (эквивалентный принципу трансфинитной индукции и принципу Куратовского о возможности исключения трансфинитных чисел из математических рассуждений); принцип этот в свое время (1922 г.) произвел большое впечатление.

В первой главе излагаются элементарные свойства топологических пространств: открытые множества (лежащие, как обычно, в основе определения), окрестности (определенные по Бурбаки, а не согласно классическому определению Хаусдорфа), точки накопления (почему-то предпочтенные принятым у нас точкам прикосновения), замкнутые множества, базы и т. д. — обычный материал! Здесь же, естественно, излагается и понятие связности.

Вторая глава посвящена сходимости по направленному множеству (в Америке принято название «сходимость Мора — Смита»; в книге Келли дана ссылка на работу этих авторов 1922 г.). Следовало бы помнить, что это самое понятие на два десятилетия ранее было открыто талантливым одесским математиком С. О. Шатуновским. На мой взгляд, следует очень приветствовать, что сходимость по направленному множеству (в частности, такое трудное понятие, как «подпоследовательность по направленному множеству») подверглась в книге тщательному исследованию. Английский термин *net* кажется мне очень неудачным; русский термин «последовательность по направленному множеству» слишком длинен. Переводчик предлагает — быть может, несколько компромиссный — термин «направленность»; вероятно, это — лучший выход из положения.

Третья глава посвящена топологическим произведениям (А. Н. Тихонов) и фактор-пространствам, а следовательно, и фактор-отображениям. Фактор-отображения, введенные автором этого предисловия в совместной книге с Хопфом ([1], стр. 65), приобретают в новейшее время все возрастающее значение в топологии. В частности, весьма замечательные исследования, касающиеся этих отображений, принадлежат самому А. В. Архангельскому. Специальными случаями фактор-отображений являются как замкнутые, так и открытые отображения, и исследования А. В. Архангельского, в частности, освещают взаимные связи, существующие между этими и другими классами фактор-отображений. Эти исследования А. В. Архангельского составляют часть новой главы общей топологии, которую естественно назвать «общей теорией непрерывных отображений топологических пространств». После уже упомянутого введения понятия фактор-отображения, а также замкнутого отображения в книге П. С. Александрова и Хопфа, первые результаты по общей теории непрерывных отображений получены в Москве И. А. Вайнштейном. В последние годы эта теория развивалась стремительно и очень интересно главным образом в работах талантливых молодых советских топологов: А. В. Архангельского, Б. А. Пасынкова, В. И. Пономарева (в работах последнего существенное развитие получила, в частности, теория неприводимых совершенных отображений, см. [3], [6]). К этой же области относятся очень интересные работы американских математиков: Глисона (предваряющие часть основных результатов Пономарева), Стоуна, Майкла, Исбелла и др., английского тополога Даукера, а также работы японских ученых: Морита и его учеников. Замечательная факторизационная теорема принадлежит югославскому математику С. Мардешичу.

Выделение фактор-отображений как одного из важнейших классов непрерывных отображений является удачной особенностью книги Келли, хотя в этой книге о фактор-отображениях сообщаются лишь самые элементарные сведения. Это естественно — все развитие теории произошло в конце пятидесятых и в начале шестидесятых годов, т. е. уже после выхода книги Келли.

В четвертой главе доказываются классические теоремы Урысона и Тихонова о погружении вполне регулярных пространств в соответствующие «кирпичи» — гильбертов и тихоновский, т. е. в топологическое (тихоновское) произведение счетного, соответственно, любого множества отрезков. В этой же главе доказываются и метризационные теоремы Бинга и Нагата — Смирнова и метризационная теорема Урысона как их частный случай. Здесь же вводится понятие псевдометрического пространства. Не могли получить отражения в книге метризационные теоремы совершенно нового типа, доказанные в начале шестидесятых годов П. С. Александровым и А. В. Архангельским.

Пятая глава посвящена теории бикомпактных пространств. Несколько удивляет отсутствие теоремы, характеризующей бикомпакты (бикомпактные хаусдорфовы пространства) как регулярные пространства, замкнутые во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. Не упоминается и знаменитая теорема Стоуна, характеризующая бикомпакты как те хаусдорфовы пространства, все замкнутые подмножества которых абсолютно замкнуты, т. е. замкнуты во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. Сама эта «абсолютная» замкнутость (теперь предпочитают говорить «H-замкнутость») упоминается лишь мимоходом; в частности, остаются в стороне работы М. Катетова и др.

Центральной теоремой главы заслуженно является классическая теорема А. Н. Тихонова о бикомпактности топологического произведения любого числа бикомпактных пространств. На мой взгляд, слишком бегло освещены бикомпактные расширения. Впрочем, это объясняется тем, что основная теорема Ю. М. Смирнова, связывающая бикомпактные расширения с пространствами близости, и основывающаяся на этой теореме последующая работа П. С. Александрова и В. И. Пономарева, перефразирующая теорему Ю. М. Смирнова так, что она превращается в способ построения всех бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства методом центрированных систем открытых множеств, уже не могли оказаться в сфере внимания автора, когда он писал свою книгу. То же относится и к очень интересным работам Е. Г. Скляренко. Однако метод центрированных систем открытых множеств, найденный и примененный еще в 1939 г. П. С. Александровым к построению максимального бикомпактного расширения (расширения Стоуна — Чеха) и явившийся основой многих дальнейших исследований (С. В. Фомина, частично Ю. М. Смирнова, В. И. Пономарева, С. Илиадиса и др.), мог бы найти свое место в книге Келли.

Паракомпактные пространства попадают в ту же пятую главу. В настоящее время мы видим в паракомпактных пространствах один из важнейших классов топологических пространств. Однако новейшее развитие теории этих пространств также относится уже к годам после написания книги Келли, поэтому не удивительно, что в эту книгу они вошли только в самом коротком изложении, занимающем всего лишь один небольшой параграф. На пятой главе заканчивается изложение собственно теории топологических пространств.

Шестая глава книги посвящена равномерной топологии, которую Келли понимает как теорию равномерных структур в смысле А. Вейля. Очень важно, конечно, что эта теория, вызывающая интерес математиков самых различных специальностей, изложена в элементарном учебнике. Однако нельзя не пожалеть, что в книге Келли даже не упомянуты пространства близости. Эти пространства, определение которых восходит еще к Рису, были введены В. А. Ефремовичем; однако В. А. Ефремович интересовался определенными им пространствами лишь с точки зрения возможных приложений к конкретным геометрическим объектам. Общая теория пространств близости была, как известно, построена Ю. М. Смирновым в [1], [5], [6], и эта теория, несомненно, принадлежит к значительнейшим достижениям современной общей топологии. Но и исследования Ю. М. Смирнова не могли стать известными Келли до окончания им работы над его учебником.

Последняя, седьмая, глава книги Келли посвящена функциональным пространствам, которые в значительной степени исследуются именно с точки зрения равномерной топологии (равномерная сходимость, равностепенная непрерывность семейств функций и т. д.).

Интересной особенностью книги, рекомендуемой сегодня вниманию советского читателя, является наличие в каждой ее главе особого добавления, состоящего из упражнений, связанных именно с данной главой. Помимо «упражнений» в собственном смысле слова, в этот раздел попали и многие теоремы, казавшиеся автору слишком специальными, чтобы быть помещенными в основной текст книги. В большинстве случаев с соображениями автора можно согласиться. Но все же, как мне кажется, не всегда. Приведу только один пример: в раздел «упражнений» попала знаменитая теорема, называемая теперь «теоремой Вейерштрасса — Стоуна»; очевидно, это не только одна из важнейших теорем общей топологии, но и одна из самых «нужных» для всей вообще математики.

Переводчик кое-где дополнил перевод своими немногочисленными примечаниями. Все эти примечания кажутся мне существенными; их могло бы быть и больше — книга бы от этого только выиграла. Но и такая, какая она есть, книга, несомненно, будет иметь успех у широкого круга советских математиков различных возрастов и специальностей.

Болшево — Комаровка
5 ноября 1966

П. Александров

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга является систематическим обозрением общей топологии в той ее части, которая уже нашла применение в различных областях математики. Специальное ее назначение — быть основой современного анализа; мне очень хотелось назвать свою книгу «Что каждый молодой аналитик должен был бы знать», — друзьям с трудом удалось отговорить меня от этого.

Основой для книги послужили различные курсы лекций, прочитанные автором в Чикагском университете в 1946—1947 гг., в Калифорнийском университете в 1948—1949 гг. и в Туланском университете в 1950—1951 гг. Ее следует рассматривать одновременно и как справочник, и как учебник. Эти два качества не очень хорошо уживаются. Как справочный обзор книга содержит полное — в разумных пределах — изложение материала, более широкое и полное, чем принято давать в обычных курсах. Справочный характер книги проявился во многих деталях; например, я старался включить все наиболее распространенные термины — они перечислены в предметном указателе. С другой стороны, учебный характер книги проявился в спокойной манере изложения, характерной для первых глав. В этой же связи в книге появляется предварительная глава, выпадающая из плана систематического обзора. Она содержит те из необходимых для чтения данной книги сведений, которые, судя по моему опыту, оказываются неизвестными для многих студентов.

Наиболее серьезные из результатов, включенных в главу 0, относятся к теории множеств, систематический обзор которой дан в Добавлении. Это добавление совершенно не зависит от предшествующей части книги. В остальном изложение последующего материала каждый раз предполагает знание предыдущего.

В техническом оформлении книги есть несколько новшеств. Иногда перед названием параграфа стоит звездочка; это указывает на то, что здесь мы уклоняемся от главной линии. Ряд тем, не менее, а иногда и более интересных, чем включенные в собственно текст, вынесен в раздел упражнений, к которому следует отнестись как к неотъемлемой части книги. Частью — это простые упражнения, назначение которых—помочь лучше усвоить затронутые понятия. Другие — противоречащие примеры; ими отмечаются границы возможных теорем. В некоторых упражнениях развиваются маленькие теории, интересные сами по себе. Ряд упражнений подводит нас к применениям общей топологии в различных областях математики. К последним всегда даются ссылки. В библиографию включено большинство недавних работ с новыми результатами, естественно укладывающимися в рамки этой книги, и несколько ранних выдающихся работ. Ряд работ относится к другим областям математики.

Теоремы седьмой главы, связанные с понятием «однообразной непрерывности», являются результатом нашей совместной работы с А. П. Морсом; они публикуются здесь с его разрешения. Многое из того хорошего, что есть в изложении теории множеств, данном в Добавлении, взято из неопубликованной системы Морса; я благодарен ему за разрешение сделать это. Впрочем, он не несет ответственности за допущенные мной небрежности. Я признателен также Альфреду Тарскому за ряд бесед, темой которых была теория множеств и логика.

Я благодарен многим моим коллегам, читавшим всю рукопись или ее части и сделавшим ценные замечания. Особенно я обязан Исааку Намиоке, поправившему печальное множество ошибок и прояснившему много туманных мест книги; он предложил также много усовершенствований. Хуго Рибейро и Поль Халмош также чрезвычайно помогли мне ценными советами.

Наконец, я шлю самые теплые слова благодарности Туланскому университету за поддержку во время изготовления рукописи. Эта книга была написана в 1950—1952 гг. в Туланском университете и пересмотрена в 1953 г.

Беркли, Калифорния
1 февраля 1955

Дж. Л. К.

Глава 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для понимания этой книги надо знать только некоторые свойства вещественных чисел и, кроме того, надо обладать в разумных пределах тем неоценимым качеством, которое обычно называют математической зрелостью.

Все определения и основные теоремы, существенные для дальнейшего, собраны в этой главе. Изложение в достаточной мере замкнуто, но многие детали опускаются — особенно это относится к обсуждению числовой системы. Наиболее глубокие результаты этой главы — теоремы из теории множеств; систематическое их изложение дано в Добавлении. Поскольку основное назначение нулевой главы — служить в дальнейшем для ссылок, мы предлагаем читателю, просмотрев первые два параграфа, обратиться к главе 1, возвращаясь к остальной части данной главы по мере надобности. Многие из следующих ниже определений повторяются затем в основном тексте при первом появлении соответствующего понятия.

МНОЖЕСТВА

Мы будем иметь дело с множествами и с элементами множеств. «Множество», «класс», «семейство» и «совокупность» — для нас синонимы *); символ $\in$ будет обозначать отношение принадлежности элемента множеству. Таким образом, $x \in A$ тогда и только тогда, когда x является членом (или «элементом», или «точкой») множества A. Два множества совпадают тогда и только

*) По техническим причинам (они излагаются в Добавлении) стоит различать два типа совокупностей. Термин «множество» будет сохранен за теми из классов, которые сами могут быть элементами классов. Это различие не играет особой роли в данной книге: за единственным нетривиальным исключением каждый класс, который в ней встретится (до Добавления), будет одновременно и множеством.

тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов; знак равенства всегда будет использоваться для обозначения совпадения. Следовательно, $A=B$, если для каждого x $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Для выделения множеств будут употребляться скобки; именно, $\{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ — множество всех тех x, для которых верно сформулированное в скобках утверждение. Иными словами, $y \in \{x: \ldots$ (утверждение об x)$\ldots\}$ в том и только в том случае, когда соответствующее утверждение об y имеет место. Например, пусть A — какое-нибудь множество; в этом случае $y \in \{x: x \in A\}$ тогда и только тогда, когда $y \in A$. Поскольку множества, состоящие из одних и тех же элементов, совпадают, $A=\{x: x \in A\}$ — факт, приятный, если не удивительный. Следует понимать, что в описанной схеме конструирования множеств символ x играет роль связанной переменной — мы можем заменить его любой другой переменной, не входящей в остальную часть формулировки определяющего утверждения. Таким образом, $\{x: x \in A\}=\{y: y \in A\}$, но $\{x: x \in A\}=\{A: A \in A\}$.

Есть одно очень полезное правило, касающееся построения множеств по описанному образцу. Если два множества построены по указанному выше правилу с помощью двух различных, но логически эквивалентных утверждений, то они совпадают. В этом можно убедиться, проверив, что тогда рассматриваемые множества состоят из одних и тех же элементов. Например, если A и B — множества, то $\{x: x \in A$ *или* $x \in B\}=\{x: x \in B$ *или* $x \in A\}$, ибо y принадлежит первому множеству тогда и только тогда, когда $y \in A$ или $y \in B$, а так бывает тогда и только тогда, когда $y \in B$ или $y \in A$, что выполняется тогда и только тогда, когда y является элементом второго множества. Все теоремы следующего раздела доказываются подобным же образом.

ПОДМНОЖЕСТВА И ДОПОЛНЕНИЯ; ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Пусть A и B — множества (или семейства); говорят, что A является *подмножеством* (*подсемейством*) множества B в том и только в том случае, когда каждый элемент из A входит в B. Мы говорим при этом также, что A *содержится* в B, или что B *содержит* A, и пишем $A \subset B$, $B \supset A$ соответственно. Таким образом, $A \subset B$ тогда и только тогда, когда для каждого x верно, что $x \in B$, коль скоро $x \in A$. Множество A называется *собственным подмножеством* множества B (A строго содержится в B и B строго содержит A) тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $A \neq B$. Если A является подмножеством множества B, а B является подмножеством множества C, то ясно, что A является подмножеством множества C. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$, ибо в этом случае каждый элемент множества A является элементом множества B, и наоборот.

Объединение (*сумма, логическая сумма*) множеств A и B, обозначаемое через $A \cup B$, — это множество всех точек, принадлежащих либо A, либо B; таким образом, $A \cup B = \{x : x \in A$ *или* $x \in B\}$. Следует иметь в виду, что слово «или» используется здесь (и всюду в дальнейшем) в неисключающем смысле — точки, принадлежащие и A, и B, тоже входят в $A \cup B$. *Пересечение* множеств A и B, обозначаемое через $A \cap B$, состоит из всех точек, принадлежащих A и B одновременно. *Пустое множество* обозначается *) через Λ; оно определяется как $\{x : x \neq x\}$. Вместо $x \neq x$ в этом определении можно было бы использовать любое всегда ложное утверждение. Пустое множество является подмножеством каждого множества A, ибо каждый элемент множества Λ (таких нет) принадлежит A. Включения $\Lambda \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B$ выполняются для любой пары множеств A и B. Говорят, что множества A и B *не пересекаются*, или *дизъюнктны*, тогда и только тогда, когда $A \cap B = \Lambda$; иными словами, ни один из элементов множества A не принадлежит B. Множества A и B *пересекаются* тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка, принадлежащая им обоим; в этом случае $A \cap B \neq \Lambda$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство множеств (элементами $\mathfrak{A}$ являются множества); говорят, что $\mathfrak{A}$ — *дизъюнктное семейство*, тогда и только

*) Это — принятое у нас обозначение; в книге Келли для обозначения пустого множества употребляется обычный нуль, что может привести к путанице. *(Прим. перев.)*

тогда, когда никакие два множества, являющихся его элементами, не пересекаются.

Абсолютное дополнение множества A есть $\{x : x \notin A\}$; обозначается *) оно через $\setminus A$. *Относительное дополнение* множества A по отношению к множеству X есть множество $X \cap \setminus A$, обычно обозначаемое через $X \setminus A$. Последнее множество называется также *разностью* X и A. Для любого множества A имеет место $\setminus\setminus A = A$. Соответствующее соотношение для относительных дополнений чуть сложнее; оно выписано в формулировке теоремы 0.2.

Следует очень тщательно различать «элементы» и «подмножества». Множество, единственным элементом которого является x, называется *одноточечным* и обозначается через $\{x\}$. Обратите внимание, что множество $\{\Lambda\}$ не пусто, ибо $\Lambda \in \{\Lambda\}$. Следовательно, $\Lambda \neq \{\Lambda\}$. Вообще, $x \in A$ в том и только в том случае, когда $\{x\} \subset A$.

В формулировке следующих двух теорем (мы их доказали пока лишь частично) выписаны наиболее часто применяющиеся соотношения между определенными выше понятиями. Это — основные соотношения, часто мы будем пользоваться ими, не оговаривая этого специально.

1. Теорема. *Пусть A и B — подмножества множества X. Тогда $A \subset B$ в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь (и тогда любое) из следующих условий*:

$$A \cap B = A, \quad B = A \cup B, \quad X \setminus B \subset X \setminus A,$$

$$A \cap X \setminus B = \Lambda \quad \text{или} \quad (X \setminus A) \cup B = X.$$

2. Теорема. *Пусть A, B, C и X — любые множества. Тогда*:

(а) $X \setminus (X \setminus A) = A \cap X$.

(б) (*коммутативность*) $A \cup B = B \cup A$ *и* $A \cap B = B \cap A$.

---

*) У Келли обозначение $\sim A$ Однако уже запись $X \sim A$ была бы двусмысленной — обычно она понимается как утверждение эквивалентности. (*Прим. перев.*)

(в) (*ассоциативность*) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ и $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(г) (*дистрибутивность*) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ и $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(д) (*формулы де Моргана*) $X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap\cap(X\setminus B)$ и $X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$.

Доказательство. Доказательство (а): x является элементом $X\setminus(X\setminus A)$ тогда и только тогда, когда $x\in X$ и $x\notin X\setminus A$. Так как $x\notin X\setminus A$ тогда и только тогда, когда $x\notin X$ или $x\in A$, то соотношение $x\in X\setminus(X\setminus A)$ выполняется в том и только в том случае, когда $x\in X$ и либо $x\notin X$, либо $x\in A$. Первая из этих альтернатив невозможна, значит, $x\in X\setminus(X\setminus A)$ тогда и только тогда, когда $x\in X$ и $x\in A$, т. е. когда $x\in X\cap A$. Следовательно, $X\setminus(X\setminus A)=A\cap X$. Доказательство первой половины (г): точка x является элементом множества $A\cap(B\cup C)$ эквивалентно тому, что $x\in A$, и $x\in B$ или $x\in C$. Так будет в том и только в том случае, когда x принадлежит и A, и B или x принадлежит и A, и C. Значит, $x\in A\cap(B\cup C)$ тогда и только тогда, когда $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, что и требовалось

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множества; через $A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n$ обозначается их объединение, а через $A_1\cap\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$ — их пересечение. Как группируются члены при вычислении объединения или пересечения — безразлично в силу законов ассоциативности. Нам придется иметь дело также с объединениями элементов бесконечного семейства множеств; чрезвычайно удобно иметь специальное обозначение для таких объединений. Рассмотрим следующую ситуацию: предположим, что для каждого элемента a множества A, которое мы будем называть индексным множеством, или множеством индексов, задано некоторое множество X_a. Тогда объединение всех таких X_a, обозначаемое через $\cup\{X_a : a\in A\}$, определяется как множество всех точек x таких, что $x\in X_a$ хотя бы для одного a из A.

Аналогично пересечение множеств X_a по всем a из A определяется как $\{x : x\in X_a$ *для каждого* a *из* $A\}$; обозначается оно через $\cap\{X_a : a\in A\}$. Очень важен случай, когда индексное множество само является некоторым семейством $\mathfrak{A}$ множеств и X_A есть множество A для каждого A из $\mathfrak{A}$. Тогда предшествующие определения превращаются в $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \{x : x \in A$ *для некоторого* A *из* $\mathfrak{A}\}$ и $\bigcap\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \{x : x \in A$ *для каждого* A *из* $\mathfrak{A}\}$.

Есть много теорем, алгебраических по своему характеру, об объединениях и пересечениях элементов семейств множеств, но нам понадобится только следующий результат, доказательство которого опускается.

3. Теорема. *Пусть A — индексное множество и для каждого a из A X_a является подмножеством некоторого фиксированного множества Y. Тогда:*

(а) *Для любого подмножества B множества A* $\bigcup\{X_b : b \in B\} \subset \bigcup\{X_a : a \in A\}$ *и* $\bigcap\{X_b : b \in B\} \supset \bigcap\{X_a : a \in A\}$.

(б) (*Формулы де Моргана*) $Y \setminus \bigcup\{X_a : a \in A\} = \bigcap\{Y \setminus X_a : a \in A\}$ *и* $Y \setminus \bigcap\{X_a : a \in A\} = \bigcup\{Y \setminus X_a : a \in A\}$.

Словесное описание формулы де Моргана: дополнение к объединению является пересечением дополнений, и дополнение к пересечению является объединением дополнений. Подчеркнем, что необходимо добиться разумной легкости при проведении такого рода теоретико-множественных вычислений. В Добавлении дан длинный перечень теорем; рекомендую начинающему читателю поупражняться в их доказательстве. (См. параграф, касающийся элементарной алгебры классов.)

4. Замечания. В большинстве ранних работ по теории множеств объединение множеств A и B обозначалось через $A+B$, а пересечение — через AB по аналогии с обычными операциями над вещественными числами. Некоторые из алгебраических законов, касающихся операций над числами, остаются при этом верными и для множеств. Однако есть серьезная причина отказаться от такой системы записи — часто теоретико-множественные вычисления выполняются в группе, поле или линейном пространстве. Если A и B — какие-нибудь подмножества множества элементов группы, в которой операция записывается аддитивно, то $\{c : c = a + b$ *для некоторого a из A и некоторого b из B*$\}$ — естественный претендент на обозначение $A+B$; столь же естественно обозначить множество $\{x : -x \in A\}$ через $-A$. Так как эти множества систематически появляются в тех же вы-

числениях, в которых участвуют объединения, пересечения и дополнения, наш выбор обозначений представляется более обоснованным.

Способ задания множеств, принятый нами здесь, наиболее широко распространен; однако обозначение «E_x» — «множество всех x таких, что» тоже употребительно. Слабое место принятого обозначения таково: не всегда ясно, что является переменной. Поясним на примере. Множество квадратов положительных чисел весьма естественно было бы обозначить через $\{x^2 : x>0\}$; действуя в том же духе, можно было бы написать $\{x^2+a^2 : x<1+2a\}$. К сожалению, последнее выражение имеет три различных толкования, а именно: $\{z:$ *для некоторого* x *и некоторого* a $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$, $\{z:$ *для некоторого* x $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$ и $\{z:$ *для некоторого* a $z=x^2+a^2$ *и* $x<1+2a\}$. Все эти множества совершенно различны, ибо первое не зависит ни от x, ни от a, второе зависит от a, а третье зависит от x. Технический выход из затруднения: сказать, что в первом случае и x, и a — связанные переменные, что во втором случае связанной переменной является только x, а связанной переменной в третьем — только a. Чтобы избежать языковых сложностей, условимся при каждом появлении скобочных обозначений ставить на первое место после скобки перед двоеточием связанную переменную, обозначающую точку определяемого множества.

Наконец, интересно отметить еще один момент, связанный с системой обозначений. Читая выражение типа $A \cap (B \cup C)$, нам неизбежно приходится вставлять дополнительные слова. Этого, однако, можно было бы избежать, чуть-чуть видоизменив обозначения. Если бы вместо $A \cup B$ мы условились писать $\cup AB$, соответственно $\cap AB$ вместо $A \cap B$, никаких словесных дополнений при чтении не потребовалось бы. (Это — общий метод исключения вспомогательных слов; он хорошо известен в математической логике.) В измененных таким образом обозначениях первый дистрибутивный закон и первый ассоциативный закон запишутся так: $\cap A \cup BC = \cup \cap AB \cap AC$ и $\cup A \cup BC = \cup \cup ABC$. Сокращенная запись удобна и для чтения: например, $\cup AB$ читается как объединение A и B.

ОТНОШЕНИЯ

Наше изложение основывается на понятии множества *). Это ставит перед нами задачу определения остальных понятий через понятие множества. В частности, это относится к понятиям упорядочения и функции. Оказывается, что последние можно трактовать как некоторые отношения, причем отношения можно естественным образом определять как множества со специальной структурой. В связи с этим в настоящем параграфе вкратце излагаются определения и элементарные теоремы из алгебры отношений.

Предположим, что задано некоторое отношение (в интуитивно ясном смысле) между определенными парами объектов. Основная идея состоит в том, что это отношение можно реализовать в виде множества всех пар связанных им объектов. Например, множество всевозможных пар, состоящих из числа и его куба, можно было бы назвать кубическим отношением **). Ясно, что для того, чтобы пользоваться описанным методом реализации, мы должны располагать понятием упорядоченной пары. Последнее тоже можно определить в терминах множеств ***). Основные нужные нам факты таковы: каждая упорядоченная пара состоит из первой и второй координат, и две упорядоченные пары равны (совпадают) тогда и только тогда, когда совпадают их первые координаты и совпадают их вторые координаты. Упорядоченная пара, первой координатой которой является x, а второй y, обозначается через (x, y). Таким образом, $(x, y)=(u, v)$ в том и только в том случае, когда $x=u$ и $y=v$.

---

*) Автор имеет в виду, что понятие множества не определялось, так как оно считалось элементарным. (*Прим перев.*)

**) В русском переводе книги Бурбаки «Теория множеств» множество пар, реализующих отношение, разумно названо графиком (см. стр. 80—88 и далее). (*Прим. перев.*)

***) Честное изложение вопроса дано в Добавлении, где фигурирует определение упорядоченной пары, принадлежащее Винеру. Остроумная идея представлять отношения описанным образом принадлежит Пирсу. Очень хорошее изложение элементарной алгебры отношений можно найти в книге Тарского [1].

Удобно распространить правило для задания множеств на случай пар; таким образом, $\{(x, y) : \ldots\}$ — множество всех пар (x, y), для которых ... Можно было обойтись без этого соглашения — то же множество описывается так: $\{z :$ *для некоторого* x *и некоторого* y $z = (x, y)$ *и* $\ldots\}$.

*Отношение**) — это множество упорядоченных пар. Таким образом, отношение — это некоторое множество, каждый элемент которого — некоторая упорядоченная пара. Если R — отношение, то записи xRy и $(x, y) \in R$ эквивалентны. Мы говорим, что x находится к y в отношении R, в том и только в том случае, когда xRy. *Областью определения* отношения R называется множество всех первых координат входящих в R элементов, а *областью значений* называется множество их вторых координат. Формально *область определения* $R = \{x :$ *для некоторого* y $(x, y) \in R\}$ и *область значений* $R = \{y :$ *для некоторого* x $(x, y) \in R\}$. Одним из простейших отношений является множество всех пар (x, y), где x — элемент некоторого фиксированного множества A и y — элемент некоторого фиксированного множества B. Это — так называемое *декартово произведение* множеств A и B; обозначается оно через $A \times B$. Таким образом, $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ *и* $y \in B\}$. Если B не пусто, то областью определения отношения $A \times B$ служит A. Очевидно, всякое отношение является подмножеством декартова произведения его области определения и области значения.

Обратное отношение к отношению R, обозначаемое через R^{-1}, получается, если изменить порядок координат внутри каждой из пар: $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$ и xRy тогда и только тогда, когда $yR^{-1}x$. Например, $(A \times B)^{-1} = B \times A$ для любых множеств A и B. Область определения обратного к R отношения всегда совпадает с областью значений отношения R, а область значений R^{-1} совпадает с областью определения R. Композицией отношений R и S называется отношение $R \circ S$ (иногда обозначаемое через RS), состоящее из всех пар (x, z) таких, что для некоторого y $(x, y) \in S$ и $(y, z) \in R$. Операция композиции, вообще говоря, не коммутативна.

*) См. сноску на стр. 20. *(Прим. перев.)*

Например, если $R=\{(1,2)\}$ и $S=\{(0,1)\}$, то $R\circ S=\{(0,2)\}$, а $S\circ R$ пусто. *Тождественное* отношение на множестве X (*тождество на* X) — это множество всех пар вида (x, x), где $x\in X$. Обозначается оно через Δ или $\Delta(X)$. Название объясняется тем фактом, что $\Delta\circ R=R\circ\Delta=R$ для любого отношения R, область определения и область значений которого являются подмножествами множества X. Тождественное отношение называется также *диагональю*; это наименование подсказано его расположением в $X\times X$.

Пусть R — отношение и A — некоторое множество; тогда $R[A]$, множество всех R-образов точек из A, определяется как $\{y: xRy$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Когда A — вся область определения R, $R[A]$ совпадает с областью значений R. Если $R\subset S$, где R и S — отношения, то $R[A]\subset S[A]$ для любого A.

Алгебра отношений широко разработана; ей принадлежит следующая теорема.

5. Теорема. *Пусть* R, S *и* T — *отношения, а* A *и* B — *множества. Тогда*:

(а) $(R^{-1})^{-1}=R$ *и* $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

(б) $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$ *и* $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

(в) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$ *и* $R[A\cap B]\subset R[A]\cap R[B]$.

Более общее утверждение: если для каждого элемента a *непустого множества индексов* A *задано некоторое множество* X_a, *то*:

(г) $R[\bigcup\{X_a: a\in A\}]=\bigcup\{R[X_a]: a\in A\}$ *и* $R[\bigcap\{X_a: a\in A\}]\subset\bigcap\{R[X_a]: a\in A\}$.

Доказательство. Докажем, например, равенство $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$. Пара (z, x) является элементом $(R\circ S)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(x, z)\in R\circ S$, а последнее имеет место в том и только в том случае, когда для некоторого y верно, что $(x, y)\in S$ и $(y, z)\in R$. Следовательно, $(z, x)\in(R\circ S)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(z, y)\in R^{-1}$ и $(y, x)\in S^{-1}$ для некоторого y. Но это — в точности условие принадлежности (z, x) композиции $S^{-1}\circ R^{-1}$.

Несколько специальных типов отношений встречается так часто, что им даны собственные имена. Кроме упорядочений и функций, которые будут рассмотрены детально в следующих параграфах, к числу наиболее полезных отношений относятся, вероятно, следующие. Удобно заранее договориться, что всюду ниже R является отношением, а X — множеством всех точек, входящих в область определения или область значений R, т. е. $X=$ (область определения R) $\cup$ (область значений R). Отношение R *рефлексивно* в том и только в том случае, когда каждая точка из X находится в отношении R к себе *). R *симметрично*, если из xRy следует yRx и наоборот. Алгебраически выразить это требование можно так: $R=R^{-1}$. С другой стороны, отношение R называется *антисимметричным* тогда и только тогда, когда xRy и yRx никогда не выполняются одновременно. Иными словами, R антисимметрично в том и только в том случае, когда $R\cap R^{-1}$ пусто. Отношение R *транзитивно* тогда и только тогда, когда из xRy и yRz следует xRz. В терминах композиции отношение R транзитивно в том и только в том случае, когда $R\circ R\subset R$. Следовательно, если R транзитивно, то $R^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ R)^{-1}\subset R^{-1}$ и, значит, обратное к транзитивному отношение тоже транзитивно. Если R и транзитивно, и рефлексивно, то $R\circ R\supset R\circ\Delta$ и, значит, $R\circ R=R$. Обычно в этом случае говорят, что отношение *идемпотентно* относительно композиции.

Отношение эквивалентности — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Устроены отношения эквивалентности очень просто — мы сейчас опишем как. Пусть R — отношение эквивалентности и X — его область **). Подмножество A множества X называется *классом эквивалентности* (классом R-эквивалентности) тогда и только тогда, когда существует элемент $x\in A$ такой, что A совпадает с множеством всех y, для которых xRy. Иными словами, A является классом эквивалентности в том и только в том случае, когда имеется x в A, для которого $A=R[\{x\}]$. Фундаментальный результат об отношениях эквивалентности состоит в том, что семейство $\mathfrak{A}$ всех классов эквивалентности дизъюнктно и что точка x находится к точке y в отношении R в том

---

*) Это, конечно, не означает, что она находится в отношении R *только* к себе. (*Прим. перев.*)

**) Когда R — отношение эквивалентности, область определения и область значений, очевидно, совпадают. (*Прим. перев.*)

и только в том случае, когда и x, и y принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. Множество всех пар (x, y), для которых x и y принадлежат некоторому классу A, есть просто $A \times A$; это позволяет дать следующую краткую формулировку основного результата.

6. Теорема. *Отношение R является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда существует дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$ такое, что $R = \bigcup \{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$.*

Доказательство. Раз R — отношение эквивалентности, оно транзитивно: если xRy и yRz, то xRz. Иными словами, если xRy, то $R[\{y\}] \subset R[\{x\}]$. Но R симметрично (xRy есть yRx), отсюда следует, что если xRy, то $R[\{x\}] = R[\{y\}]$. Далее, если z входит и в $R[\{x\}]$, и в $R[\{y\}]$, то $R[\{x\}] = R[\{z\}] = R[\{y\}]$ и, следовательно, любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Если y и z принадлежат классу эквивалентности $R[\{x\}]$, то, так как $R[\{y\}] = R[\{x\}]$, получаем, что yRz; иными словами, $R[\{x\}] \times R[\{x\}] \subset R$. Следовательно, объединение множеств $A \times A$ по всем классам эквивалентности A является подмножеством множества R, а из рефлексивности следует, что если xRy, то $(x, y) \in R[\{x\}] \times R[\{x\}]$. Значит, $R = \bigcup \{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$.

Прямое доказательство обратного утверждения опускается.

Часто нас будет интересовать, как ведет себя отношение на точках, принадлежащих некоторому подмножеству его области определения; для таких точек отношение может обладать некоторыми дополнительными свойствами, которые в прочих точках могут и не выполняться. Для заданных множества X и отношения R можно построить новое отношение $R \cap (X \times X)$, областью определения которого является подмножество множества X. Удобно условиться говорить, что *отношение R обладает некоторым свойством на X* или что *сужение R на X обладает этим свойством*, тогда и только тогда, когда им обладает отношение $R \cap (X \times X)$. Например, R транзитивно на X в том и только в том случае, когда $R \cap (X \times X)$ — транзитивное отношение. Уместно при этом говорить, что определяемое свойство выполняется для точек из X; в нашем примере это точно отражает ситуацию: если x, y и z — такие точки из X, что xRy и yRz, то xRz.

ФУНКЦИИ

Теперь нам надлежит определить понятие функции в терминах уже введенных понятий. Все возможные здесь затруднения снимаются, как только мы замечаем, что, чем бы ни была функция, график ее очевидным образом определяется как некоторое множество упорядоченных пар. Более того, нет такой информации о функции, которую нельзя было бы извлечь из ее графика. Короче говоря, нет причин проводить различие между функцией и ее графиком.

Функция — это такое отношение, первые координаты любых двух различных элементов которого различны *). Таким образом, f является функцией тогда и только тогда, когда элементами f служат упорядоченные пары, и коль скоро (x, y) и (x, z) являются элементами f, то $y=z$. Мы не отличаем функцию от ее графика. Термины *соответствие*, *преобразование*, *отображение*, *оператор* и *функция* имеют для нас одинаковый смысл. Пусть f — функция и x — точка из ее области определения (т. е. x принадлежит множеству всех первых координат элементов из f), тогда через $f(x)$, или f_x, обозначается вторая координата того единственного элемента множества f, первой координатой которого служит x. Точка $f(x)$ называется *значением* f в точке x, или *образом* x при f; мы говорим при этом также, что f *сопоставляет* x значение $f(x)$, или что f *переводит* x в $f(x)$. Говорят, что функция f (*определена*) на X тогда и только тогда, когда X является ее областью определения, и говорят, что f отображает X *на* Y тогда и только тогда, когда Y является областью значений f (множеством вторых координат элементов из f). Если область значений функции f составляет подмножество множества Y, то говорят, что f

*) В русской, да и в американской, литературе с давних пор весьма популярно понятие *многозначной функции* (set-valued function); оно эквивалентно общему понятию отношения. См. В. И. Пономарев [4], [5]; Майкл [4]. (*Прим. перев.*)

является отображением *в* Y. Вообще говоря, функция многие элементы может переводить в один и тот же элемент — может существовать много пар с одинаковой второй координатой или, что эквивалентно, много точек, на которых f принимает одинаковое значение. Функция f называется взаимно однозначной, если образы различных точек различны; иначе говоря, если обратное соответствие f^{-1} тоже является функцией.

Функция — это множество, следовательно, две функции f и g совпадают в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов. Ясно, что так будет тогда и только тогда, когда область определения f совпадает с областью определения g и $f(x)=g(x)$ для каждого x из этой области. Следовательно, функцию можно задать, указав ее область определения и значение в каждой точке области определения. Если f — функция на X в Y и A — подмножество множества X, то $f \cap (A \times Y)$ тоже является функцией. Последняя называется *сужением* функции f на (множество) A и обозначается через $f|A$; ее областью определения служит A, и $(f|A)(x)=f(x)$ для каждого x из A. Функция g является сужением функции f на некоторое множество в том и только в том случае, когда область определения g является подмножеством области определения f и $g(x)=f(x)$ для каждого x из области определения функции g; иными словами, когда $g \subset f$. Функция f называется *продолжением* функции g тогда и только тогда, когда $g \subset f$. Таким образом, f является *продолжением* g тогда и только тогда, когда g является сужением f на некоторое подмножество области определения f.

Пусть A — множество и f — функция; тогда в соответствии с определением, данным нами для произвольных соответствий, $f[A]=\{y : (x, y) \in f$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Эквивалентно этому такое описание: $f[A]$ есть $\{y : y=f(x)$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Множество $f[A]$ называется *образом* A *при* f. Для любых множеств A и B имеем $f[A \cup B]=f[A] \cup f[B]$ и $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$. Аналогичные формулы имеют место для любых объединений и пересечений. Не верно, вообще говоря, что $f[A \cap B]=f[A] \cap f[B]$, ибо образы непересекающихся множеств могут пересекаться. Пусть f — функция; множество

$f^{-1}[A]$ называется *прообразом* множества A при f. Операция перехода к прообразу удовлетворяет следующим алгебраическим правилам.

7. Теорема. *Пусть f — функция, A и B — множества, тогда*:

(а) $f^{-1}[A\setminus B]=f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]$,

(б) $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$,

(в) $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$.

Более общее утверждение: если для каждого элемента c из непустого множества индексов C задано некоторое множество X_c, то:

(г) $f^{-1}[\bigcup\{X_c : c\in C\}]=\bigcup\{f^{-1}[X_c] : c\in C\}$,

(д) $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c\in C\}]=\bigcap\{f^{-1}[X_c] : c\in C\}$.

Доказательство. Мы докажем только (д). Точка x является элементом множества $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c\in C\}]$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ принадлежит стоящему в скобках пересечению, а так будет тогда и только тогда, когда $f(x)\in X_c$ для каждого c из C. Но последнее условие эквивалентно тому, что $x\in f^{-1}[X_c]$ для каждого c из C, т. е. эквивалентно соотношению $x\in\bigcap\{f^{-1}[X_c] : c\in C\}$.

Предшествующая теорема обычно формулируется так: переход к прообразу перестановочен с переходом к относительному дополнению и операциями объединения и пересечения. Следует заметить, что выписанные в теореме 7 формулы справедливы для *любых* множеств A и B, а не только для подмножеств области значений функции f. Конечно, $f^{-1}[A]$ совпадает с прообразом пересечения A с областью значений f, однако удобно не ограничивать наше обозначение (и соответствующее обозначение для образов при f) случаем подмножеств области значений (соответственно области определения).

Композиция двух функций — снова функция, это доказывается прямым рассуждением. Для любой функции f соответствие $f^{-1}\circ f$ является отношением эквивалентности, ибо $(x, y)\in f^{-1}\circ f$ в том и только в том случае, когда $f(x)=f(y)$. Композиция $f\circ f^{-1}$ является функцией — тождеством на области значений функции f.

8. Замечания. Иногда значение функции f в точке x обозначают по-другому. Помимо $f(x)$ и f_x, пишут

(f, x), (x, f), fx, xf и $\cdot fx$. Первые два из последних четырех обозначений особенно удобны, когда сталкиваются с двойственностями, — если речь идет о семействе F функций, определенных на фиксированном множестве X, и мы хотим трактовать F и X симметрично. Обозначения fx и xf суть очевидные сокращения принятых нами обозначений; при этом писать f слева или справа от x — дело вкуса *). У обозначений xf, fx и $f(x)$ есть общий недостаток: в определенных, довольно сложных, ситуациях они могут вызвать недоразумения, если не пользоваться обильно скобками. При работе с последним обозначением, применяемым А. П. Морсом (A. P. Morse), никаких затруднений этого рода не возникает. Оно не ведет к двусмысленностям и не нуждается в скобках. (См. замечания по поводу объединений и пересечений, сделанные в 0.4.)

Необходимо уметь записывать некоторые функции в терминах связанных переменных. Например, функция, определенная на множестве всех вещественных чисел со значением x^2 в x, должна иметь какую-то краткую запись. Для рассматриваемого частного случая выход может заключаться в том, чтобы согласиться, что x обозначает тождественную функцию на множестве вещественных чисел, тогда x^2 разумно было бы понимать как квадрат этой функции. Классический прием состоит в том, чтобы использовать x^2 как для обозначения самой функции, так и для обозначения ее значения в точке x. Менее сомнительный подход — записывать функцию, соответствующую возведению в квадрат, как $x \to x^2$. Обозначения этого рода весьма соблазнительны; они сейчас быстро входят в общее употребление. Однако они не универсальны; например, утверждение $(x \to x^2)(t) = t^2$ потребовало бы разъяснений. Наконец, следует заметить, что хотя стрелочные обозначения, вне всякого сомнения, станут стандартными, λ-соглашение Чёрча (A. Church)

*) Известно, что обозначение xf обладает определенными преимуществами перед fx; например, пусть $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ — отображения, тогда их композиция $X \to Z$ только при выборе первого обозначения записывается *естественно* — через fg. (*Прим. перев.*)

имеет перед ними технические преимущества. (Возведение в квадрат как функция может быть записано в виде $\lambda x : x^2$.) При этом можно не употреблять никаких скобок, не опасаясь двусмысленностей *).

УПОРЯДОЧЕНИЯ

Упорядочение (*частичное упорядочение*, *квазиупорядочение*) — это транзитивное отношение. Говорят, что отношение $<$ *упорядочивает* (*частично упорядочивает*) множество X тогда и только тогда, когда оно является транзитивным отношением на X. Когда $<$ — упорядочение и $x<y$, обычно говорят, что x *предшествует* y, или что x *меньше* y (относительно $<$), и что y *следует за* x, или что y *больше* x. Пусть A — подмножество множества X, упорядоченного отношением $<$. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* множества A в том и только в том случае, когда для любого y из A либо $y<x$, либо $y=x$. Аналогично элемент $x \in X$ называется *нижней гранью* множества A, если x предшествует любому не равному ему элементу из A. Конечно, у множества может существовать много различных верхних граней. Элемент x называется *наименьшей верхней гранью* (*supremum*) множества A тогда и только тогда, когда он является верхней гранью A и предшествует любой не равной ему верхней грани множества A. (Иными словами, наименьшая верхняя грань — это верхняя грань, являющаяся нижней гранью множества верхних граней.) Подобным же образом *наибольшая нижняя грань*, или *infimum*, определяется как нижняя грань, которая мажорирует прочие нижние грани. X называется *полным упорядоченным* множеством **) (относительно $<$), тогда и только тогда, когда у каждого непустого подмно-

---

*) По поводу обозначений Чёрча и связанных с этим проблем см. Curry H. B. and Feys R., Combinatory Logic, Amsterdam, 1960, а также Curry H. B., Foundations of Mathematical Logic, 1963, гл. III. (*Прим. ред.*)

**) Сравните эту терминологию с терминологией, принятой в переводе книги Н. Бурбаки «Теория множеств», стр. 383 и дальше. (*Прим. перев.*)

жества X, обладающего в X верхней гранью *), есть наименьшая верхняя грань. Может показаться удивительным, что сформулированное условие для верхних граней полностью эквивалентно соответствующему условию для нижних граней, а именно:

9. Теорема. *X является полным упорядоченным множеством относительно заданного на нем упорядочения в том и только в том случае, когда у каждого его непустого ограниченного снизу* **) *подмножества есть наибольшая нижняя грань.*

Доказательство. Предположим, что X — полное упорядоченное множество относительно заданного упорядочения и A — его непустое подмножество, ограниченное снизу. Обозначим через B множество всех нижних граней множества A. Множество B не пусто, и, очевидно, каждый элемент непустого множества A является верхней гранью множества B. Следовательно, у B есть наименьшая верхняя грань; пусть, например, это будет элемент b. Тогда b меньше произвольной не равной ему верхней грани множества B, в частности, b предшествует произвольному не равному ему элементу из A. Значит, b — нижняя грань множества A. С другой стороны, b является верхней гранью B, т. е. b больше или равно произвольной не равной ему нижней грани множества A. Следовательно, b — наибольшая нижняя грань множества A.

Обратное утверждение доказывается аналогично; впрочем, можно просто применить полученный только что результат к отношению, обратному для $<$.

Следует отметить, что данное нами определение упорядочения не очень ограничительно. Например, упорядочением множества X, правда малоинтересным, является $X \times X$. При этом упорядочении каждый элемент множества X является верхней гранью (даже наибольшей верхней гранью) произвольного подмножества множе-

---

*) Такие подмножества мы будем называть *ограниченными сверху*. (*Прим. перев.*)

**) *Ограниченными снизу* называются такие подмножества упорядоченного множества, у которых есть хотя бы одна нижняя грань. (*Прим. перев.*)

ства X. Более интересные упорядочения получаются, если наложить следующее условие: если x меньше y, а y меньше x, то $y=x$. В этом случае у множества может быть не более одной наименьшей верхней и не более одной наибольшей нижней грани.

Линейным упорядочением (или *совершенным упорядочением*) называется упорядочение, для которого:

(а) *из* $x<y$ *и* $y<x$ *следует, что* $x=y$, и

(б) *каковы бы ни были различные элементы* x *и* y *из объединения области определения и области значений отношения* $<$, *выполняется* $x<y$ *или* $y<x$.

Стоит отметить, что линейное упорядочение может и не быть рефлексивным. Однако можно условиться писать $x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x<y$ или $x=y$. Тогда, если $<$ — линейное упорядочение, то $\leqslant$ — рефлексивное линейное упорядочение. В соответствии с принятым нами соглашением мы говорим, что отношение задает *линейный порядок* на X, тогда и только тогда, когда его сужение на X является линейным упорядочением. Множество вместе с линейно упорядочивающим его отношением называется *цепью*. Ясно, что в цепях наибольшие нижние и наименьшие верхние грани множеств, если они существуют, единственны. Остальные утверждения этого раздела касаются цепей; впрочем, будет ясно, что многие рассмотрения можно было бы провести и для случая более общих упорядочений.

Функция f, определенная на упорядоченном отношением $<$ множестве X со значениями в множестве Y, упорядоченном отношением $\prec$, называется *возрастающей* (*сохраняющей порядок*, *монотонной*, *изотонной*) тогда и только тогда, когда из $u \leqslant v$, где $u, v \in X$, следует, что $f(u) \prec f(v)$ или $f(u)=f(v)$. Если заданное на Y упорядочение $\prec$ есть просто $Y \times Y$ или если упорядочение $<$, заданное на X, является пустым отношением, то f непременно сохраняет порядок. Поэтому не следует ожидать, что обратная к взаимно однозначной возрастающей функции будет всегда возрастающей функцией. Однако если X и Y — цепи, а f — взаимно однозначная монотонная функция, то и f^{-1} обязательно монотонна, ибо если $f(u) \prec f(v)$ и $f(u) \neq f(v)$, то $v<u$ невозможно, так как порядок сохраняется.

Полные цепи *) обладают одним очень специальным свойством. Предположим, что X и Y — цепи, X_0 — подмножество множества X и f — сохраняющее порядок отображение X_0 в Y. Возникает вопрос: существует ли монотонная функция, являющаяся продолжением функции f на все X? Если на f не налагать никаких ограничений, то ответ, вообще говоря, отрицателен. В самом деле, пусть X — множество всех положительных вещественных чисел, X_0 — его подмножество, образованное числами, меньшими 1, $Y=X_0$ и f является тождественным отображением. Легко видеть тогда, что f нельзя продолжить до монотонного отображения множества X в Y. (Предположим, что $\tilde{f}$ — такое продолжение; что есть тогда $\tilde{f}(1)$?) Этот пример, однако, выявляет и природу затруднения: у X_0 в X есть верхняя грань, а у $f[X_0]$ в Y нет верхней грани. Если монотонное продолжение $\tilde{f}$ функции f существует, то оно, несомненно, переводит верхние грани множества A в верхние грани множества $f[A]$. Аналогичное утверждение имеет место для нижних граней, следовательно, если подмножество A множества X_0 *ограничено* в X (т. е. у него в X есть и нижняя и верхняя грани), то его образ $f[A]$ ограничен в Y. Следующая теорема утверждает, что это условие является и достаточным для существования монотонного продолжения.

10. Теорема. *Пусть f — монотонное отображение подмножества X_0 цепи X в полную цепь Y. Тогда у f есть монотонное продолжение на все X в том и только в том случае, когда f переводит ограниченные множества в ограниченные множества. (Точнее, условие таково: если A — подмножество X_0, ограниченное в X, то множество $f[A]$ ограничено в Y.)*

Доказательство. Уже отмечалось, что сформулированное условие необходимо для существования монотонного продолжения. Остается доказать его достаточность. Нужно построить монотонное продолжение заданного отображения f. Заметим, прежде всего, что если подмножество A множества X_0 имеет в X нижнюю

*) Имеются в виду цепи, порядок на которых полон. (*Прим. перев.*)

грань, то и у $f[A]$ есть нижняя грань Y. Ибо, выбрав в A произвольную точку x, мы получаем ограниченное в X множество $\{y : y \in A$ *и* $y \leqslant x\}$, образ которого при f тоже, следовательно, ограничен. Нижняя грань этого образа является и нижней гранью множества $f[A]$. Аналогичное утверждение имеет место и для верхних граней. Для каждого x из X обозначим через L_x множество всех элементов из X_0, меньших или равных x; таким образом, $L_x = \{y : y \leqslant x$ *и* $y \in X_0\}$. Если L_x пусто, то x является нижней гранью множества X_0 и, значит, у $f[X_0]$ есть наибольшая нижняя грань v; положим в этом случае $\bar{f}(x) = v$. Если множество L_x не пусто, то из того, что x служит верхней гранью L_x, вытекает, что и у множества $f[L_x]$ есть верхняя грань. Следовательно, у $f[L_x]$ есть и наименьшая верхняя грань. Положим $\bar{f}(x) = \sup f[L_x]$. Без каких-либо затруднений доказывается, что $\bar{f}$ является монотонным продолжением отображения f.

В определенных ситуациях монотонное продолжение функции единственно. С одним таким случаем мы встретимся при рассмотрении десятичного разложения вещественного числа. Не стремясь к формулировке наилучшего положительного результата в этом направлении, мы дадим сейчас простое достаточное условие единственности продолжения; впоследствии оно нам пригодится.

11. Теорема. *Пусть f и g — монотонные отображения цепи X в цепь Y, X_0 — некоторое подмножество, на котором f и g согласуются, и $Y_0 = f[X_0]$. Тогда для $f = g$ достаточно, чтобы Y_0 пересекало каждое множество вида $\{y : u < y < v,\ y \neq u$ и $y \neq v\}$, где u и v — произвольные элементы из Y такие, что $u < v$.*

Доказательство. Если $f \neq g$, то $f(x) \neq g(x)$ для некоторого x из X; можно при этом считать, что $f(x) < g(x)$. Каждый элемент множества X_0, меньший или равный x, отображается посредством f в элемент, меньший или равный $f(x)$, в силу монотонности f, и каждый элемент, больший или равный x, отображается посредством g в элемент, больший или равный $g(x)$, в силу монотонности g. Следовательно, ни одна точка множества X_0 не отображается в множество $\{y : f(x) < y < g(x),\ f(x) \neq y$ *и* $y \neq g(x)\}$; этим теорема доказана.

12. Замечания. Каждую цепь можно естественным образом вложить в некоторую полную цепь; это достигается обобщением дедекиндова построения вещественных чисел на основе множества рациональных чисел. Соответствующий процесс можно применить и к более общим упорядочениям, как это показано Мак Нейлом (H. M. Mac Neille), см. Биркгоф [1], стр. 58. Он напоминает процедуру бикомпактного расширения топологических пространств (глава 5).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этом разделе приводится несколько определений из элементарной алгебры. Определяемые понятия встречаются в основном в упражнениях. Терминология стандартная; естественно собрать немногие нужные понятия вместе.

Группа — это пара $(G, \cdot)$, где G — непустое множество, а $\cdot$ — групповая операция, т. е. такое отображение множества $G \times G$ в G, что (а) операция $\cdot$ ассоциативна, т. е. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для всех x, y и z из G; (б) существует нейтральный, или единичный, элемент e, для которого $e \cdot x = x \cdot e = x$, какова бы ни была точка x из G, и (в) для каждого x из G в G есть обратный элемент x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Когда групповая операция обозначается через $+$, элемент, обратный к x, обозначается обычно через $-x$. В соответствии с общепринятой системой значение функции $\cdot$ на элементе (x, y) обозначается через $x \cdot y$; следуя обычным правилам записи значения функции, мы должны были бы написать $\cdot\,(x, y)$. Когда никаких недоразумений не ожидается, символ $\cdot$ можно совсем опускать; групповой операции соответствует тогда просто запись элементов рядом. Иногда (допуская вольность речи) мы будем говорить, что G является группой. Пусть A и B — любые подмножества множества G; тогда $A \cdot B$, или просто AB, — множество всех элементов вида $x \cdot y$, где $x \in A$ и $y \in B$. Множество $\{x\} \cdot A$ обозначается также через $x \cdot A$, или просто через xA; аналогичное соглашение принимается для умножения справа. Группу называют *абелевой*, или *коммутативной*, тогда и только тогда, когда $x \cdot y = y \cdot x$ для всех x и

y из G. Группа H является *подгруппой группы* G в том и только в том случае, когда $H \subset G$ и групповая операция на H получается сужением на $H \times H$ групповой операции, заданной на G. Подгруппу H называют *нормальной* (*нормальным делителем*) тогда и только тогда, когда $x \cdot H = H \cdot x$ для любого x из G. *Левым классом смежности* группы G по подгруппе H, или *левым комножеством* по H, называется любое множество вида $x \cdot H$, где x — какой-нибудь элемент из G. Семейство всех левых классов смежности группы G по H обозначается через G/H. Если H — нормальный делитель, A и B — элементы множества G/H, то $A \cdot B$ тоже является элементом множества G/H. При таком определении групповой операции G/H становится группой; называется она *фактор-группой* группы G по H. Отображение f группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, или *представлением*, в том и только в том случае, когда $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x и y из G. *Ядро* гомоморфизма f есть множество $f^{-1}[e]$. Ядро всегда является нормальным делителем. Пусть H — нормальный делитель группы G. Отображение, переводящее $x \in G$ в $x \cdot H$, является гомоморфизмом. Этот гомоморфизм обычно называют *проектированием*, или *фактор-отображением*, группы G в группу G/H.

Кольцом называется тройка $(R, +, \cdot)$, где $(R, +)$ — абелева группа и $\cdot$ — отображение множества $R \times R$ в R, удовлетворяющее ассоциативному и дистрибутивному законам, — последнее означает, что $(u+v) \cdot (x+y) = u \cdot x + u \cdot y + v \cdot x + v \cdot y$ для всех x, y, u и v из R. Подкольцо — это подмножество кольца, само являющееся кольцом относительно ограничений на него операций кольца. *Кольцевым гомоморфизмом*, или *представлением*, называется такое отображение f одного кольца в другое, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех элементов x и y из области определения f. Аддитивная подгруппа I кольца R называется *левым идеалом* в том и только в том случае, когда $xI \subset I$ для любого x из R; говорят, что I — *двусторонний идеал*, тогда и только тогда, когда $xI \subset I$ и $Ix \subset I$ для каждого x из R. Если I — двусторонний идеал, то R/I по отношению к соответствующему сложению и умножению является кольцом; проектирование R на R/I тогда представляет собой кольцевой гомоморфизм. *Поле* — это такое кольцо $(F, +, \cdot)$, что (а) F содержит по крайней мере два различных элемента и (б) $(F\setminus\{0\})$, где 0 — нейтральный относительно операции $+$ элемент, является коммутативной группой. Операция $+$ называется при этом сложением, операция $\cdot$ — умножением, а нейтральный относительно умножения элемент называется *единицей* кольца и обозначается через 1. Принято, когда бояться нечего, заменять знак $\cdot$ обычной записью рядом и говорить, что F является полем (вместо «F вместе с операциями $+$ и $\cdot$»). *Линейным*, или векторным, пространством над полем F (полем *скаляров* пространства) называется четверка $(X, \oplus, \cdot, F)$, где $(X, \oplus)$ — абелева группа, а $\cdot$ — отображение $F\times X$ в X такое, что для всех x и y из X и всех a, b из F выполняются соотношения: $a\cdot(b\cdot x) = (a\cdot b)\cdot x$, $(a+b)\cdot x = a\cdot x\oplus b\cdot x$, $a\cdot(x\oplus y) = a\cdot x\oplus a\cdot y$ и $1\cdot x = x$. *Вещественным линейным пространством* называется линейное пространство над полем вещественных чисел. Можно дать чуть-чуть другое определение линейного пространства. Семейство всех гомоморфизмов произвольной абелевой группы в себя, вместе с операцией сложения, определенного по точкам, и умножения, определенного как переход к композиции гомоморфизмов, образует кольцо, называемое *кольцом эндоморфизмов* рассматриваемой группы. Линейное пространство над полем F — это четверка $(X, \oplus, \cdot, F)$, где $(X, \oplus)$ — абелева группа и $\cdot$ — некоторый кольцевой гомоморфизм поля в кольцо эндоморфизмов группы $(X, \oplus)$, переводящий единицу, 1, в тождественный гомоморфизм.

Линейное пространство $(Y, \oplus, \odot, F)$ называется *подпространством* линейного пространства $(X, + \cdot, F)$ тогда и только тогда, когда $Y\subset X$ и операции $+$ и $\cdot$ согласуются с $\oplus$ и $\odot$ там, где последние определены. Семейство X/Y классов смежности пространства X по его подпространству Y превращается в линейное пространство, если в X/Y очевидным образом определить сложение и умножение на число. При этом для проектирования f X на X/Y имеет место $f(a\cdot x+b\cdot y) = a\cdot f(x)+b\cdot f(y)$, каковы бы ни были x, y из X и a, b из F. Отображения линейных пространств, удовлетворяющие такому условию, называются *линейными преобразованиями* (или *линейными отображениями*). При этом множество $f^{-1}[0]$ называется нуль-пространством *) преобразования f; оно всегда является линейным подпространством области определения преобразования (относительно индуцированных в $f^{-1}[0]$ операций сложения и умножения на число).

Предположим, что f — линейное преобразование X в Y и g — линейное преобразование X на Z такие, что нуль-пространство f содержит нуль-пространство g. Тогда существует единственное линейное преобразование h Z в Y, для которого $f=h\circ g$ (а именно, $h(z)$ является единственным элементом множества $f\circ g^{-1}[z]$). (Говорят при этом, что преобразование h *индуцировано* преобразованиями f и g.) Из отмеченного обстоятельства, в частности, следует, что каждое линейное преобразование можно представить как композицию проектирования в фактор-пространство и последующего взаимно однозначного линейного преобразования.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Этот раздел посвящен доказательству нескольких важнейших результатов, касающихся вещественных чисел.

Упорядоченное поле — это поле F, в котором выделено некоторое подмножество P, называемое множеством *положительных элементов*, такое, что

(а) *если x и y — элементы P, то $x+y$ и xy тоже принадлежат P* и (б) *для любого элемента x из F выполняется в точности одно из следующих трех соотношений: $x\in P$, $-x\in P$ или $x=0$.*

Легко проверяется, что отношение $<$, определенное правилом: $x<y$ в том и только в том случае, когда $y-x\in P$, является линейным упорядочением множества F. Справедливы обычные предложения о сложении и умножении неравенств. Элементы x из F, для которых $-x\in P$, называются *отрицательными*.

Будем предполагать, что вещественные числа образуют упорядоченное поле, полное относительно заданного на нем порядка, в том смысле, что каждое его непустое

*) Чаще $f^{-1}(0)$ называют ядром преобразования f.

ограниченное сверху подмножество имеет наименьшую верхнюю грань, или supremum. В силу 0.9 последнее требование эквивалентно условию, что у каждого непустого ограниченного снизу подмножества есть наибольшая нижняя грань, или infimum.

Докажем, прежде всего, несколько предложений о натуральных числах. Множество A вещественных чисел называется *индуктивным*, если $0 \in A$ и, коль скоро $x \in A$, то и $x+1 \in A$. Вещественное число x называется *неотрицательным целым числом* тогда и только тогда, когда оно принадлежит каждому индуктивному множеству. Иными словами, множество ω неотрицательных целых чисел определяется как пересечение всех индуктивных множеств. Каждый элемент из ω действительно неотрицателен, ибо множество всех неотрицательных чисел индуктивно. Очевидно, ω само индуктивно и является подмножеством любого другого индуктивного множества. Отсюда следует (*принцип математической индукции*), что каждое индуктивное подмножество множества ω совпадает с ω. Доказательства, опирающиеся на этот принцип, называются *доказательствами по индукции*. Докажем в качестве примера следующую маленькую теорему: если p и q — неотрицательные целые числа и $p<q$, то $q-p \in \omega$. Заметим сначала, что множество, содержащее 0 и все числа вида $p+1$, где $p \in \omega$, индуктивно; следовательно, каждый ненулевой элемент из ω можно представить в виде $p+1$. Далее, пусть A — множество всех неотрицательных целых чисел p таких, что $q-p \in \omega$ для любого большего элемента q из ω. Ясно, что $0 \in A$. Пусть p — какой-нибудь элемент из A и q — произвольный элемент множества ω, больший $p+1$. Тогда $p<q-1$, и из $p \in A$ и $q-1 \in \omega$ следует, что $q-1-p \in \omega$. Следовательно, $p+1 \in A$, т. е. A — индуктивное множество. Значит, $A=\omega$. Так же легко показать, что сумма любых двух элементов множества ω принадлежит ω. А из этих двух утверждений следует, что множество $\{x : x \in \omega$ *или* $-x \in \omega\}$ является группой. Это — *группа целых чисел.*

Часто бывает удобна другая форма принципа математической индукции: *в каждом непустом подмножестве A множества ω есть наименьший элемент.* Для доказательства этого утверждения рассмотрим множество B всех элементов множества ω, являющихся нижними гранями множества A; таким образом, $B=\{p : p \in \omega$ *и* $p \leqslant q$ *для всех* q *из* $A\}$. Множество B не индуктивно, ибо если $q \in A$, то $q+1 \notin B$. Из $0 \in B$ следует, что в B существует элемент p, для которого $p+1 \notin B$. Если $p \in A$, то ясно, что p является наименьшим элементом множества A. Если же $p \notin A$, то в A найдется элемент q такой, что $p<q<p+1$. Но тогда $q-p$ — ненулевой элемент множества ω и, значит, $q-p-1$ — отрицательный элемент, принадлежащий ω, что невозможно.

Можно *определять функцию по индукции* в следующем смысле. Для каждого неотрицательного целого числа p положим $\omega_p=\{q : q \in \omega$ *и* $q \leqslant p\}$. Предположим, что мы хотим определить на всем множестве ω некоторую функцию, значение a которой в нуле уже задано, и пусть для каждой функции g, определенной на ω_p, задано $F(g)$, которое должно служить значением искомой функции для $p+1$, если ее сужение на ω_p совпадает с g. Таким образом, значение определяемой функции для $p+1$ может зависеть от ее значений на всех меньших целых числах. В описанной ситуации существует единственная функция f на ω такая, что $f(0)=a$ и $f(p+1)=F(f|\omega_p)$ для каждого p из ω. (Через $f|\omega_p$ здесь согласно принятому нами условию обозначено сужение функции f на множество ω_p.) Обычно это утверждение считается очевидным, но доказательство его не вполне тривиально.

13. Теорема. *Предположим, что заданы a и $F(g)$ для любой функции g, областью определения которой служит множество ω_p, где p — любой элемент множества ω. Тогда существует единственная функция f, для которой $f(0)=a$ и $f(p+1)=F(f|\omega_p)$ при любом $p \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство всех функций g, каждая из которых определена на некотором множестве вида ω_p, где $p \in \omega$, и удовлетворяет условиям: (а) $g(0)=a$ и (б) для каждого q из ω такого, что $q \leqslant p-1$, непременно $g(q+1)=F(g|\omega_q)$. (Интуитивно ясно, что элементы семейства $\mathfrak{F}$ — это начальные куски искомой функции.) Семейство $\mathfrak{F}$ обладает важным свойством: если $g, h \in \mathfrak{F}$, то либо $g \subset h$, либо $h \subset g$. Для доказательства достаточно обнаружить, что $g(q)=h(q)$ для всех q, принадлежащих области определения как той, так и другой функции. Предположим, что написанное равенство выполняется не всегда, и пусть q — наименьшее целое число, для которого $g(q)\neq h(q)$. Тогда $q\neq 0$, ибо $g(0)=h(0)=a$; следовательно, $g(q)=F(g|\omega_{q-1})$. Но $F(g|\omega_{q-1})=F(h|\omega_{q-1})$, так как g и h согласуются на элементах, меньших q. Значит, $g(q)=F(g|\omega_{q-1})=$ $=F(h|\omega_{q-1})=h(q)$, что ведет к противоречию. Пусть $f=$ $=\bigcup\{g: g\in\mathfrak{F}\}$. Элементами множества f являются, очевидно, упорядоченные пары. Далее, если $(x, y)\in g\in\mathfrak{F}$ и $(x, z)\in h\in\mathfrak{F}$, то пары (x, y) и (x, z) принадлежат обе либо g, либо h и, следовательно, $y=z$. Значит, f является функцией. Надо показать, что эта функция искомая. Прежде всего, так как $\{(0, a)\}\in\mathfrak{F}$, то $f(0)=a$. Далее, если $q+1$ принадлежит области определения функции f, то $q+1$ является элементом области определения некоторой функции $g\in\mathfrak{F}$. Поэтому $f(q+1)=g(q+1)=$ $=F(g|\omega_q)=F(f|\omega_q)$. Наконец, покажем, что областью определения функции f является все множество ω. Предположим, что q — первый элемент из ω, не принадлежащий ей. Тогда $q-1$ — последний элемент области определения функции f. В то же время функция $f\cup$ $\cup\{(q, F(f))\}$ является элементом семейства $\mathfrak{F}$. Значит, q принадлежит области определения функции f, что ведет к противоречию *).

Предшествующей теоремой можно систематически пользоваться при доказательстве элементарных свойств вещественных чисел. Например, если b — положительное число и p — целое число, то b^p определяется следующим образом. Положим в условии предшествующей теоремы $a=1$, и пусть для каждой функции g с областью определения ω_p будет $F(g)=bg(p)$. Тогда $f(0)=1$ и $f(p+1)=$ $=bf(p)$ для всех p из ω, если в качестве f взять функцию, существование которой гарантируется доказанной теоремой. Положим $b^p=f(p)$. Тогда $b^0=1$ и $b^{p+1}=bb^p$, откуда по индукции можно вывести, что $b^{p+q}=b^pb^q$ для всех p и q из ω. Если b^{-p} определить как $1/b^p$ для всех неотрицательных целых p, то обычным элементарным

---

*) Единственность искомой функции очевидна. (*Прим. перев.*)

рассуждением устанавливается, что $b^{p+q}=b^p \cdot b^q$ для всех целых p и q.

Пока в наших рассуждениях о вещественных числах мы не пользовались тем, что заданное упорядочение полно. Докажем теперь простое, но достойное внимания следствие полноты порядка. Прежде всего, множество неотрицательных целых чисел не ограничено сверху. Ибо если бы элемент x был наименьшей верхней гранью множества ω, то элемент $x-1$ не был бы верхней гранью этого множества. Тогда было бы $x-1<p$ для некоторого p из ω. Отсюда $x<p+1$, что противоречит тому, что x является верхней гранью ω. Значит, для любых положительных вещественных чисел x и y найдется целое положительное p такое, что $px>y$, так как существует $p \in \omega$, большее y/x. Упорядоченное поле, удовлетворяющее этому условию, называется *архимедовым упорядочением*.

Нам полезно будет знать, что каждое неотрицательное вещественное число обладает b-адическим разложением для любого целого b, большего единицы. Говоря нестрого, мы хотим записать число x в виде суммы степеней числа b, используя неотрицательные целые числа, меньшие b, в качестве коэффициентов (разрядов). Конечно, b-адическое разложение числа не всегда определено однозначно — при десятичном разложении 0,999... (всюду девятки) и 1,000... (всюду нули) являются разложениями одного и того же вещественного числа. Разложение фиксированного числа — это функция, которая ставит в соответствие каждому целому числу некоторое целое число, заключенное между 0 и $b-1$, такая, что (поскольку мы хотим, чтобы до запятой стояло лишь конечное число ненулевых членов) имеется первый ненулевой разряд. Формально a является *b-адическим разложением* *) тогда и только тогда, когда a — функция, определенная на множестве всех целых чисел, областью значений которой служит множество $\omega_{b-1}(=\{q: q \in \omega$ и $q \leqslant b-1\})$, такая, что имеется наименьшее целое p, для которого $a_p(=a(p))$ отлично от нуля. b-адическое

*) В русской литературе принято также название «разложение по основанию b». (*Прим. перев.*)

разложение a называется *рациональным* в том и только в том случае, когда существует наибольший ненулевой разряд (т. е. если для некоторого целого p $a_q=0$ при $q>p$). С каждым рациональным b-адическим разложением a можно весьма просто связать некоторое вещественное число $r(a)$. Для всех — за исключением конечного множества — целых чисел p число $a_p b^{-p}$ равно нулю; тогда сумма чисел $a_p b^{-p}$, где p пробегает упомянутое конечное множество, и есть вещественное число $r(a)$, соответствующее a. Мы пишем при этом: $r(a)=\Sigma\{a_p b^{-p} : p$ — *целое число*$\}$. Каждое вещественное число, представимое в таком виде, называется *b-адическим* рациональным (рациональным по основанию b). Таковы числа вида qb^{-p}, где p и q — целые числа. Обозначим через E множество всех b-адических разложений. Его можно лексикографически упорядочить, а именно, b-адическое разложение a предшествует b-адическому разложению c *при словарном порядке* (*лексикографическом порядке*) тогда и только тогда, когда для наименьшего целого p такого, что $a_p \neq c_p$, имеет место $a_p < c_p$. Легко видеть, что, как и в случае обыкновенного словаря, отношение $<$ упорядочивает множество E линейно. Описанное нами соответствие r сохраняет порядок; в этом — ключ к следующему предложению.

14. Теорема. *Пусть E — множество всех b-адических разложений и R — множество всех рациональных разложений; положим для каждого a из R $r(a)=\Sigma\{a_p b^{-p} : p$ — целое число$\}$. Тогда существует единственное монотонное продолжение $\bar{r}$ отображения r, определенное на всем E, при котором множество $E\setminus R$ взаимно однозначно отображается на множество всех вещественных положительных чисел.*

Доказательство. Согласно теореме 0.10 монотонное продолжение $\bar{r}$ отображения r будет существовать, если r переводит каждое подмножество множества R, ограниченное в E, в ограниченное подмножество множества вещественных чисел. Но, очевидно, для каждого $a \in E$ существует элемент $b \in R$ такой, что $b>a$. Если a — верхняя грань подмножества A множества R, то $r(b)$ является верхней гранью множества $f[A]$. Аналогичное рассуждение проходит для нижних граней;

следовательно, r переводит ограниченные множества в ограниченные множества. Поэтому у r есть монотонное продолжение $\bar{r}$, определенное на всем E.

Для доказательства единственности достаточно в силу теоремы 0.10 убедиться, что, каковы бы ни были неотрицательные вещественные числа x и y, из $x<y$ следует, что для некоторого $a \in R$ $x<r(a)<y$. Так как $b^p>p$, каково бы ни было неотрицательное целое число p (это легко доказать по индукции), и так как множество неотрицательных целых чисел не ограничено, то существует целое p, для которого $b^p>1/(y-x)$. Тогда $b^{-p}<<(y-x)$. Существует целое число q такое, что $qb^{-p} \geqslant y$, ибо упорядочение архимедово. Так как среди таких q есть наименьшее, то можно предположить, что $(q-1)b^{-p}<y$. Тогда $(q-1)b^{-p}>x$, ибо b^{-p} меньше $(y-x)$. Этим доказано, что существует b-адическое рациональное число, а именно $(q-1)b^{-p}$, являющееся образом некоторого элемента из R и лежащее между x и y. Следовательно, монотонное продолжение $\bar{r}$ единственно.

Покажем теперь, что отображение $\bar{r}$ взаимно однозначно на подмножестве $E \setminus R$. Непосредственно видно, что $\bar{r}$ взаимно однозначно на R; этот факт будет дальше использован. Пусть $a \in E$, $c \in E \setminus R$ и $a<c$. Тогда для первого из тех p, для которых a_p и c_p различны, непременно $a_p<c_p$. Разложение d, определенное следующим образом: $d_q=a_q$ при $q<p$, $d_q=0$ при $q>p$ и $d_p=a_p+1$, — является элементом множества R, бóльшим a. Так как у c нет последнего ненулевого разряда, то $a<d<c$. Повторяя рассуждение, найдем в R элемент e, для которого $a<d<e<c$. Тогда из взаимной однозначности отображения $\bar{r}$ на R вытекает, что $\bar{r}(a) \leqslant \bar{r}(d)<\bar{r}(e) \leqslant \bar{r}(c)$. Значит, $\bar{r}$ взаимно однозначно на $E \setminus R$.

Наконец, надо показать, что образ множества $E \setminus R$ при отображении $\bar{r}$ представляет собой все множество положительных чисел. Заметим сначала, что для каждой пары элементов c и d из R, для которой $c<d$, найдется такое $a \in E \setminus R$, что $c<a<d$. Следовательно, для любых положительных вещественных чисел x и y, где $x<y$, можно найти в $E \setminus R$ такой элемент a, что $x<\bar{r}(a)<y$. Пусть теперь x — некоторое вещественное

положительное число, не являющееся образом никакого элемента из $E \setminus R$ при отображении $\bar{r}$. Положим $F = \{a : a \in E \setminus R$ и $\bar{r}(a) < x\}$. Если у множества F есть верхняя грань — элемент c, то при $\bar{r}(c) < x$ ни одна точка из $E \setminus R$ не может отобразиться в интервал $(\bar{r}(c), x)$, а при $\bar{r}(c) > x$ (так как $\bar{r}$ сохраняет порядок) ни одна точка из $E \setminus R$ не может отобразиться в интервал $(x, \bar{r}(c))$. В любом случае имеем противоречие. Таким образом, теорема будет доказана, если мы обнаружим, что каждое ограниченное сверху непустое подмножество множества $E \setminus R$ имеет верхнюю грань, т. е. что $E \setminus R$ полно в рассматриваемом упорядочении.

Пусть F — произвольное непустое ограниченное сверху подмножество множества $E \setminus R$. Тогда среди чисел p таких, что $a_p \neq 0$ для некоторого a из F, существует наименьшее. Положим по определению, что c_q равно нулю при $q < p$; пусть F_p — множество всех элементов a из F, p-й разряд a_p у которых отличен от нуля, и $c_p = \max\{a_p : a \in F_p\}$. Определим F_{p+1} как множество всех элементов $a \in F_p$, для которых $a_q = c_q$ при $q = p$, и положим $c_{p+1} = \max\{a_{p+1} : a \in F_{p+1}\}$; продолжим построение по индукции. Ни одно из множеств F_p не может быть пустым. Легко видеть, что разложение c, к которому приводит описанная конструкция, является верхней гранью множества F — в действительности его наименьшей верхней гранью — и что $c \in E \setminus R$.

Предшествующая теорема будет применена в случаях $b = 2$, $b = 3$ и $b = 10$. Соответствующие b-адические разложения называются *двоичным*, *троичным* и *десятичным*.

СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Множество называется конечным тогда и только тогда, когда можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и элементами некоторого множества вида $\{p : p \in \omega$ и $p < q\}$, где $q \in \omega$. Множество A называется *счетно бесконечным* в том и только в том случае, когда можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и элементами множества ω всех неотрицательных целых чисел.

Говорят, что множество *счетно*, тогда и только тогда, когда оно либо конечно, либо счетно бесконечно.

15. Теорема. *Произвольное подмножество счетного множества само счетно.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество, f — взаимно однозначная функция, определенная на ω, областью значений которой является A, и $B \subset A$. Тогда сужение функции f на $f^{-1}[B]$ является взаимно однозначным отображением подмножества $f^{-1}[B]$ множества ω на B, и если мы сможем показать, что $f^{-1}[B]$ счетно, то взаимно однозначное отображение множества ω на B можно будет получить, взяв композицию. Итак, доказательство теоремы свелось к тому, чтобы установить, что произвольное подмножество C множества ω счетно. Обозначим через $g(0)$ первый элемент множества C и, действуя по индукции, обозначим через $g(p)$ первый элемент множества C, отличный от $g(0), g(1), \ldots, g(p-1)$. Если осуществить такой выбор для некоторого p невозможно, то построенная до этого функция g будет отображением множества $\{q : q \in \omega \text{ и } q < p\}$ на C, т. е. C тогда будет конечным множеством. В противном случае (применив теорему 0.13), мы получаем функцию g, определенную на ω, причем для любого $p \in \omega$ $g(p)$ является первым элементом множества C, отличным от $g(0)$, $g(1), \ldots, g(p-1)$. По индукции легко проверяется, что $g(p) \geqslant p$ для всех p. Из определения $g(p+1)$ тогда следует, что каждый элемент множества C имеет вид $g(q)$ для некоторого $q \leqslant p$. Значит, областью значений функции g является все множество C.

16. Теорема. *Если область определения функции счетна, то и область ее значений тоже счетна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если f — функция, отображающая некоторое подмножество A множества ω на множество B, то B счетно. Обозначим через C множество всех элементов $x \in A$, для которых из $y \in A$ и $y < x$ вытекает, что $f(x) \neq f(y)$. Таким образом, множество C образуют наименьшие элементы всевозможных множеств вида $f^{-1}[y]$, где $y \in B$. Тогда $f|C$ отображает C на A взаимно однозначно. Так как множество C в силу теоремы 0.15 счетно, то и B счетно.

17. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетное семейство счетных множеств. Тогда множество* $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ *тоже счетно.*

Доказательство. Из счетности семейства $\mathfrak{A}$ следует, что можно отобразить ω на $\mathfrak{A}$ посредством некоторой функции F. Так как множество $F(p)$ для любого $p \in \omega$ счетно, то существует функция G_p, отображающая некоторое подмножество множества $\{p\} \times \omega$ на множество $F(p)$. Следовательно, существует функция (объединение функций G_p), определенная на некотором подмножестве множества $\omega \times \omega$, областью значений которой является множество $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$. Задача сводится, таким образом, к доказательству того, что множество $\omega \times \omega$ счетно. Ключом к этому доказательству служит замечание, что если мы будем представлять себе множество $\omega \times \omega$ лежащим в правом верхнем квадранте плоскости, то диагонали, идущие вправо вниз, содержат лишь конечное число элементов из $\omega \times \omega$. Точнее, для произвольного n из ω положим $B_n = \{(p, q) : (p, q) \in \omega \times \omega$ *и* $p + q = n\}$. Множество B_n состоит ровно из $(n+1)$ элементов, и объединение $\bigcup\{B_n : n \in \omega\}$ есть все $\omega \times \omega$. Перебирая сначала элементы из B_0, затем из B_1 и т. д., можно получить функцию, отображающую множество ω на множество $\omega \times \omega$. Дать точное определение такой функции мы предоставляем читателю.

Функция f называется *характеристической функцией* подмножества A множества X, если $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus A$ и $f(x) = 1$ при $x \in A$. Любая функция, определенная на X и принимающая только значения 0 и 1, называется характеристической функцией, — она является, очевидно, характеристической функцией множества $f^{-1}[1]$. Функция, тождественно равная нулю, является характеристической функцией пустого множества, а функция, тождественно равная 1, является характеристической функцией всего X. Характеристические функции множеств совпадают тогда и только тогда, когда совпадают сами эти множества. Следовательно, между семейством всех характеристических функций, определенных на X, и семейством всех подмножеств множества X существует взаимно однозначное соответствие.

Семейство всех характеристических функций, определенных на множестве ω всех неотрицательных целых чисел, можно поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством F всех двоичных разложений a таких, что $a_p=0$ при $p<0$. Семейство всех конечных подмножеств множества ω взаимно однозначно соответствует подсемейству G семейства F, образованному рациональными двоичными разложениями. Мы докажем сейчас с помощью классического диагонального процесса Кантора, что множество F несчетно.

18. Теорема. *Семейство всех конечных подмножеств счетного множества счетно, но семейство всех его подмножеств несчетно.*

Доказательство. В силу замечаний, предшествовавших формулировке теоремы, достаточно показать, что множество F всех двоичных разложений a, для которых $a_p=0$ при отрицательных p, несчетно и что подмножество $G\subset F$, образованное рациональными разложениями, счетно. Предположим, что задана какая-нибудь взаимно однозначная функция f, отображающая множество ω на множество F. Рассмотрим элемент $a\in F$ такой, что $a_p=1-f(p)_p$ для каждого неотрицательного целого p. Таким образом, p-й разряд элемента a равен единице минус p-й разряд элемента $f(p)$. Ясно, что $a\in F$. Очевидно, для каждого $p\in\omega$ $a=f(p)$, ибо a и $f(p)$ отличаются в p-м разряде. Отсюда следует, что a не принадлежит области значений функции f, что приводит к противоречию. Значит, F несчетно.

Остается доказать, что множество G счетно. Положим $G_p=\{a : a\in G$ *и* $a_q=0$ *при* $q>p\}$. Множество G_0 состоит ровно из двух элементов, и поскольку G_{p+1} содержит в точности в два раза больше элементов, чем G_p, то каждое множество G_p конечно. Следовательно, множество $G=\bigcup\{G_p : p\in\omega\}$ счетно.

Естественное соответствие между множеством F и подмножеством множества вещественных чисел взаимно однозначно на $F\setminus G$ в силу теоремы 0.14. Так как G счетно, то $F\setminus G$ должно быть несчетно. Имеем, таким образом,

19. Следствие. *Множество всех вещественных чисел несчетно.*

КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Многие теоремы о счетных множествах являются частным случаем более общих теорем о кардинальных числах. Выше особую роль играло множество ω неотрицательных целых чисел. В более общем контексте роль множества натуральных чисел выполняют множества, называемые кардинальными числами (ω — одно из них). Согласимся считать множества A и B *равномощными*, если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на множество B *). Оказывается, что для каждого множества A существует единственное равномощное с ним кардинальное число C. Различные кардинальные числа C и D не равномощны, но в одном из них обязательно есть подмножество, равномощное другому. Пусть для определенности C равномощно части множества D. В этом случае говорят, что кардинальное число C меньше кардинального числа D, и пишут $C<D$. При таком определении порядка семейство всех кардинальных чисел становится линейно упорядоченным множеством, удовлетворяющим дополнительному условию: в каждом непустом его подмножестве есть наименьший элемент. (Эти утверждения доказываются в Добавлении.)

Приняв временно на веру перечисленные в предыдущем абзаце факты, мы можем заключить, что, каковы бы ни были множества A и B, либо существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на подмножество множества B, либо можно взаимно однозначно отобразить множество B на подмножество множества A, ибо есть кардинальные числа C и D такие, что C равномощно A и B равномощно D. Предположим теперь, что заданы взаимно однозначная функция, отображающая множество A на некоторое подмножество множества B, и взаимно однозначная функция, отображающая множество B на некоторое подмножество множества A. Тогда C равномощно подмножеству карди-

*) В дальнейшем мы будем в этом случае писать также, что между A и B имеется взаимно однозначное соответствие. (*Прим. перев.*)

нального числа D, D равномощно подмножеству кардинального числа C. Отсюда, поскольку рассматриваемое упорядочение класса кардинальных чисел линейно, следует, что $C=D$. Значит, множества A и B равномощны. Это — классическая теорема Шредера — Бернштейна. Мы дадим сейчас ее прямое доказательство, не зависящее от общей теории кардинальных чисел, ибо в этом доказательстве содержится нетривиальная дополнительная информация.

20. Теорема. *Если существует взаимно однозначная функция, отображающая множество A на подмножество множества B, и взаимно однозначная функция, отображающая множество B на подмножество множества A, то множества A и B равномощны.*

Доказательство. Предположим, что f взаимно однозначно отображает A в B и что g взаимно однозначно отображает B в A. Можно считать при этом, что A и B не пересекаются. При доказательстве множества A и B будут разложены на классы элементов следующим образом. Точка x (из A или B) называется предшественником точки y в том и только в том случае, когда y можно получить из x в результате последовательного применения f и g (или g и f). Разложим теперь A в три множества: через A_E обозначим множество всех точек из A, общее число предшественников каждой из которых четно, через A_0 — множество тех точек $y \in A$, у каждой из которых нечетное число предшественников, и пусть A_I — множество всех точек с бесконечным числом предшественников *). Разложим аналогичным образом множество B и заметим следующее: f отображает A_E на B_0 и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_0 на B_E. Следовательно, функция, согласующаяся на $A_E \cup A_I$ с f и на A_0 с g^{-1}, является взаимно однозначным отображением множества A на множество B.

21. Замечания. Приведенное выше доказательство теоремы 20 не опирается на аксиому выбора; это любопытно, хотя и не очень важно. Важно другое — что

*) Число *различных* предшественников может быть при этом конечным — предшественники могут как бы «зацикливаться» в бесконечную последовательность из конечного числа точек. (*Прим. перев.*)

нужное отображение было построено на основе заданных отображений в результате счетной процедуры. А именно, положим $E_0=A\setminus g[B]$, $E_{n+1}=g\circ f[E_n]$ для каждого n и $E=\bigcup\{E_n : n\in\omega\}$. Тогда соответствие h, совпадающее с f на E и с g^{-1} на $A\setminus B$, является взаимно однозначным отображением множества A на множество B. (Точнее, $h=(f|E)\cup(g^{-1}|A\setminus E)$.) Нас этот факт может интересовать, ибо с его помощью удается доказывать, что если f и g обладают определенными хорошими свойствами (например, являются борелевскими функциями), то и h ими обладает *).

Элегантное доказательство теоремы 20, приведенное нами, принадлежит Биркгофу и Маклейну.

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

Порядковые числа в этой книге понадобятся нам только при построении отдельных примеров. Так как ряд очень интересных примеров основывается на совсем элементарных свойствах порядковых чисел, стоит сообщить немногие необходимые сведения прямо сейчас. (Порядковые числа строятся в Добавлении, и их свойства там доказываются.)

22. Сводка сведений. *Существует несчетное множество Ω', линейно упорядоченное некоторым отношением $<$ так, что:*

(а) *В каждом непустом подмножестве множества Ω' есть наименьший элемент.*

(б) *В Ω' есть наибольший элемент Ω.*

(в) *Если $x\in\Omega'$ и $x\neq\Omega$, то множество тех элементов из Ω', которые предшествуют x, счетно.*

Ω' — это множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω, *первого несчетного порядкового числа.* Каждое линейно упорядоченное множество, в любом непустом подмножестве которого есть наименьший элемент, называется *вполне упорядоченным.* В частности, каждое непустое подмножество вполне упорядоченного

---

*) Не следует переоценивать общность этого утверждения. Если f и g — гомеоморфизмы, то гомеоморфизма h может не существовать. (*Прим. перев.*)

множества имеет наибольшую нижнюю грань. Так как любое множество из Ω' ограничено сверху, а именно, элементом Ω, то из теоремы 0.9 вытекает, что у каждого непустого подмножества множества Ω' есть наименьшая верхняя грань*). Один из любопытных фактов, относящихся к Ω', состоит в следующем.

23. Теорема. *Если A — счетное подмножество множества Ω' и $\Omega \notin A$, то наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.*

Доказательство. Из того, что A счетно и не содержит Ω, следует, что множество $\{x : x \leqslant a\}$ для любого $a \in A$ счетно. Значит, счетно и объединение множеств такого вида: множество $\{x : x \leqslant a$ *для некоторого* a *из* $A\}$. Наименьшая верхняя грань b последнего множества ограничивает сверху множество A. Множество элементов, предшествующих b, счетно, следовательно, $b \neq \Omega$. Отсюда следует, что наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.

Один из элементов множества Ω' заслуживает специального внимания. Это — первый элемент из Ω', для которого множество предшествующих элементов бесконечно; он называется *первым бесконечным порядковым числом* и обозначается через ω. Символ ω уже употреблялся для обозначения множества неотрицательных целых чисел. При построении порядковых чисел выясняется, что первое бесконечное порядковое число и является в действительности множеством неотрицательных целых чисел.

ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Декартово произведение множеств A и B определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$ и $y \in B$. Полезно распространить определение декартова произведения на любые семейства множеств; напомним, что ранее мы сделали это для операций

---

*) Конечно, наименьшая верхняя грань подмножества вполне упорядоченного множества может уже этому подмножеству не принадлежать (в отличие от наибольшей нижней грани). (*Прим. перев.*)

объединения и пересечения. Предположим, что для каждого $a \in A$, где A — множество индексов, задано некоторое множество X_a. Декартово произведение множеств X_a, обозначаемое $\Pi\{X_a : a \in A\}$, определяется как множество всех функций x, определенных на множестве A и таких, что $x(a) \in X_a$ для каждого a из A. Принято при этом аргумент записывать как индекс; таким образом, $\Pi\{X_a : a \in A\} = \{x : x$ — *функция, определенная на* A, *такая, что* $x_a \in X_a$ *для каждого* a *из* $A\}$. Сначала это определение кажется немного странным; в действительности оно точно выражает интуитивно ясную концепцию: точка произведения является набором точек сомножителей, в котором каждый сомножитель представлен ровно одной точкой. Множество X_a называется a-м *координатным множеством*, а точка x_a называется a-й координатой точки x произведения. Функция P_a, которая точке x произведения ставит в соответствие ее a-ю координату x_a, называется *проекцией* на a-е координатное множество. Таким образом, $P_a(x) = x_a$.

Один специальный случай декартова произведения особенно важен. Пусть каждое координатное множество X_a совпадает с некоторым фиксированным множеством Y. Тогда $\Pi\{X_a : a \in A\} = \Pi\{Y : a \in A\} = \{x : x$ *является функцией, отображающей множество* A *в* $Y\}$. Итак, декартово произведение в этом случае есть в точности множество всех функций, отображающих множество A в Y; это множество иногда обозначают через Y^A. Хорошо известный пример такого рода произведения представляет *n-мерное евклидово пространство*. Его точками являются всевозможные вещественные функции, определенные на множестве первых n натуральных чисел: $0, 1, \ldots, n-1$; при этом i-я координата элемента x есть x_i.

Интересен еще один специальный случай. Предположим, что множество индексов само является некоторым семейством $\mathfrak{A}$ множеств и что для каждого A из $\mathfrak{A}$ A-е координатное множество есть A. В этом случае декартово произведение $\Pi\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ является множеством функций x на $\mathfrak{A}$ таких, что $x_A \in A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$. Эти функции — элементы декартова произведения — называются иногда *функциями выбора*, соответствующими семейству $\mathfrak{A}$, ибо интуитивно ясно, что каждая функция x осуществляет некоторый «выбор» по одному элементу x_A из каждого A. Если среди элементов семейства $\mathfrak{A}$ есть пустое множество, то у $\mathfrak{A}$, очевидно, нет функций выбора. Значит, декартово произведение в этом случае пусто. Если все элементы семейства являются непустыми множествами, то все же еще не вполне очевидно, что декартово произведение не пусто. В действительности вопрос о существовании функции выбора для такого семейства оказывается чрезвычайно деликатным. Следующий параграф посвящен нескольким предложениям, каждое из которых эквивалентно положительному ответу на возникший вопрос. Самое удобное из них мы примем за аксиому. (В приложении предпочтение отдается другому из этих предложений. Вместе с материалом следующего параграфа результаты приложения означают эквивалентность предложений, которые будут сейчас приведены.) Нам стоит большого труда воздержаться от обсуждения философских аспектов вопроса.

ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОСТИ ХАУСДОРФА

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство множеств (или семейство семейств множеств). Его элемент A называется *наибольшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если семейство A содержит любое другое семейство, принадлежащее $\mathfrak{A}$ (т. е. A больше любого другого элемента из $\mathfrak{A}$).

Аналогично A называется *наименьшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если элемент A содержится в каждом другом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Часто бывает важно знать, есть ли в семействе наибольший или наименьший элемент. Ясно, что наибольший и наименьший элементы, если они существуют, определены однозначно. Однако даже когда в семействе $\mathfrak{A}$ нет наибольшего элемента, в нем может существовать элемент A, который не является частью никакого другого элемента из $\mathfrak{A}$. При этом в $\mathfrak{A}$ могут быть элементы, которые одновременно не содержат A и сами в A не содержатся. Говорят тогда, что A является максимальным элементом семейства. Формальное определение: A называется *максимальным* элементом семейства $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда никакой элемент из $\mathfrak{A}$ не содержит A в качестве собственной части. Подобным же образом A называется *минимальным* элементом семейства $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда никакой элемент из $\mathfrak{A}$ не содержится в качестве собственной части в A. Очень легко построить примеры семейств без максимальных элементов, равно как и примеры семейств, в которых каждый элемент является максимальным и минимальным элементом одновременно (в качестве последнего годится семейство, состоящее из попарно непересекающихся множеств). Чтобы обеспечить существование максимальных элементов, надо, вообще говоря, наложить на семейство некоторые специальные ограничения.

Семейство $\mathfrak{N}$ называется *цепью* (иногда *башней*, *гнездом* *)) тогда и только тогда, когда для любых его элементов A и B либо $A \subset B$, либо $B \subset A$. Это условие в точности равносильно утверждению, что семейство $\mathfrak{N}$ линейно упорядочено по включению или — в принятой нами терминологии — что семейство $\mathfrak{N}$ вместе с отношением включения является цепью. Если $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ — гнездо, то говорят, что $\mathfrak{N}$ является *гнездом* в $\mathfrak{A}$. Мы знаем, что семейство может не иметь максимального элемента. Есть ли максимальный элемент в семействе всех гнезд, лежащих в фиксированном семействе $\mathfrak{A}$, т. е. в каждом ли семействе $\mathfrak{A}$ есть гнездо $\mathfrak{M}$, которое не содержится ни в каком другом гнезде, образованном элементами семейства $\mathfrak{A}$? Будем считать аксиомой следующее утверждение.

24. Принцип максимальности Хаусдорфа. *Для любого семейства множеств $\mathfrak{A}$ и любого гнезда $\mathfrak{N}$, образованного элементами семейства $\mathfrak{A}$, существует максимальное гнездо $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$, содержащее $\mathfrak{N}$.*

В следующей теореме выписан ряд важных следствий принципа максимальности Хаусдорфа. Прежде чем ее сформулировать, скажем несколько слов о сложившейся здесь терминологии. Говорят, что характер семейства $\mathfrak{A}$ *конечен*, тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество любого элемента из $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$, и каждое множество A, все конечные подмножества кото-

---

*) Иногда говорят еще в этом случае, что семейство имеет ранг 0. (*Прим. перев.*)

рого принадлежат $\mathfrak{A}$, само принадлежит $\mathfrak{A}$. Пусть $<$ — упорядочение на множестве A. Каждое подмножество B множества A, которое отношением $<$ упорядочивается линейно, называется цепью в A. Элемент x множества A называется максимальным, если x следует за каждым сравнимым с ним элементом из A, т. е. если всегда, когда $y \in A$, либо y предшествует элементу x, либо x не предшествует элементу y. Говорят, что отношение $<$ вполне упорядочивает множество A, тогда и только тогда, когда $<$ является таким линейным упорядочением множества A, что каждое непустое множество имеет первый элемент (элемент, который меньше любого другого элемента этого множества). Если такое отношение $<$ на множестве A существует, то говорят, что множество A можно вполне упорядочить.

25. Теорема. (а) Принцип максимального элемента. *Максимальный элемент в семействе $\mathfrak{A}$ множеств существует, если для каждого гнезда, лежащего в $\mathfrak{A}$, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент, который содержит произвольный элемент этого гнезда.*

(б) Принцип минимального элемента. *Минимальный элемент в семействе $\mathfrak{A}$ существует, если для каждого гнезда, лежащего в $\mathfrak{A}$, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент, содержащийся в каждом элементе этого гнезда.*

(в) Лемма Тьюки. *В каждом семействе множеств конечного характера есть максимальный элемент.*

(г) Лемма Куратовского. *Каждая цепь в (частично) упорядоченном множестве содержится в некоторой максимальной цепи.*

(д) Лемма Цорна. *Если каждая цепь некоторого частично упорядоченного множества ограничена сверху, то в этом множестве есть максимальный элемент.*

(е) Аксиома выбора. *Пусть X_a — непустое множество для каждого элемента a из множества индексов A. Тогда на A существует функция c такая, что $c(a) \in X_a$ для каждого a из A.*

(ж) Постулат Цермело. *Для любого семейства $\mathfrak{A}$ непересекающихся непустых множеств существует такое множество C, что $A \cap C$ для каждого A из $\mathfrak{A}$ состоит ровно из одной точки.*

(з) Принцип вполне упорядочения. *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Мы дадим наброски доказательств всех этих предложений, предоставив подробности читателям.

Доказательство (а). Возьмем какое-нибудь максимальное гнездо $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$, и пусть A — элемент семейства $\mathfrak{A}$, содержащий множество $\bigcup\{M : M \in \mathfrak{M}\}$. Тогда A — максимальный элемент семейства $\mathfrak{A}$, ибо если бы множество A являлось собственной частью множества $B \in \mathfrak{A}$, то семейство $\mathfrak{M} \cup \{B\}$ было бы гнездом в $\mathfrak{A}$, строго *) содержащим $\mathfrak{M}$, что ведет к противоречию.

Доказательство (б). Ясно, что утверждение (б) можно доказать приблизительно так, как мы доказали утверждение (а). Однако можно вместо этого просто применить утверждение (а). Положим $X = \bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ и обозначим через $\mathfrak{C}$ семейство дополнений в X до элементов семейства $\mathfrak{A}$. Заметим, что в силу формул де Моргана семейство $\mathfrak{C}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а). Следовательно, в $\mathfrak{C}$ есть максимальный элемент M. Тогда $X \setminus M$, очевидно, будет минимальным элементом семейства $\mathfrak{A}$.

Доказательство (в). Доказательство основано на принципе максимального элемента (а). Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство конечного характера и $\mathfrak{N}$ — гнездо в $\mathfrak{A}$. Положим $A = \bigcup\{N : N \in \mathfrak{N}\}$. Каждое конечное подмножество F множества A непременно является подмножеством некоторого элемента гнезда $\mathfrak{N}$. В самом деле, можно найти конечное семейство элементов из $\mathfrak{N}$, в объединении которых содержится F. В этом конечном семействе есть наибольший элемент — он и содержит F. Следовательно, $A \in \mathfrak{A}$. Значит, семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а) и потому имеет максимальный элемент.

Доказательство (г). Рассмотрим произвольную цепь B в частично упорядоченном множестве A. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех цепей в A, содержащих B. Можно непосредственно проверить, что $\bigcup\{N : N \in \mathfrak{N}\}$ для

*) Скажем, что множество (или семейство множеств) строго содержит некоторое множество (или семейство множеств), если последнее является собственной частью первого. (*Прим. перев.*)

любого гнезда $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$ тоже является элементом семейства $\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{A}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а) и потому имеет максимальный элемент.

Доказательство (д). Возьмем элемент, ограничивающий сверху какую-нибудь максимальную цепь.

Доказательство (е). Напомним, что функцией называется такое множество упорядоченных пар, что первые координаты различных пар различны. Обозначим через $\mathfrak{F}$ семейство всех функций f, областью определения каждой из которых служит некоторое подмножество множества A, удовлетворяющих условию $f(a) \in X_a$ для каждого a из области определения функции f. (Элементы семейства $\mathfrak{F}$ — это «фрагменты» искомой функции.) Мы сейчас покажем, что $\mathfrak{F}$ — семейство конечного характера. Если f — элемент семейства $\mathfrak{F}$, то каждое подмножество множества f, в частности каждое конечное его подмножество, тоже является элементом семейства $\mathfrak{F}$. С другой стороны, если каждое конечное подмножество некоторого множества f принадлежит семейству $\mathfrak{F}$, то элементами f служат пары, причем любые две различные пары имеют различные первые координаты. Следовательно, f — функция. Более того, если a принадлежит области определения функции f, то $\{(a, f(a))\} \in \mathfrak{F}$, откуда следует, что $f(a) \in X_a$.

Значит, $f \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — семейство конечного характера, то в $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент c и нужно проверить только, что областью определения функции c является все множество A. Предположим, что a — элемент множества A, не принадлежащий области определения функции c. Тогда, так как X_a — непустое множество, в X_a можно выбрать некоторый элемент y. Множество $c \cup \{(a, y)\}$ тоже является функцией и входит в качестве элемента в семейство $\mathfrak{F}$, что противоречит тому, что c — максимальный элемент этого семейства.

Доказательство (ж). Применим аксиому выбора к случаю, когда $\mathfrak{A}$ служит множеством индексов и $X_A = A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$.

Доказательство (з). Пусть X — непустое множество, которое надлежит вполне упорядочить. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех непустых подмножеств множества X, и пусть c — некоторая функция выбора на семействе $\mathfrak{A}$. Иными словами, c — такая функция на $\mathfrak{A}$, что $c(A) \in A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$. Идея доказательства состоит в определении такого упорядочения $\leqslant$ на множестве X, что для любого его «начального отрезка» A первой точкой, следующей за A, является точка $c(X \setminus A)$. Вот точные формулировки. Скажем, что множество A является отрезком (сегментом) по отношению к упорядочению $<$, тогда и только тогда, когда каждая точка, которая предшествует какому-либо элементу из A, сама принадлежит A. В частности, сегментом является пустое множество. Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех рефлексивных линейных упорядочений $\leqslant$, удовлетворяющих условиям: областью D упорядочения $\leqslant$ является подмножество множества X и для каждого сегмента A, отличного от D, первый элемент множества $D \setminus A$ есть $c(X \setminus A)$. Почти очевидно, что каждый элемент семейства $\mathfrak{C}$ является вполне упорядочением, ибо если B — непустое подмножество из области определения некоторого такого упорядочения $\leqslant$ и $A = \{y : y \leqslant x$ *и* $y \neq x$ *для каждого* x *из* $B\}$, то $c(X \setminus A)$ есть первый элемент множества B. Пусть $\leqslant$ и $\leqq$ — какие-либо элементы из $\mathfrak{C}$ с областью определения соответственно D и E. Обозначим через A множество всех точек x таких, что множества $\{y : y \leqslant x\}$ и $\{y : y \leqq x\}$ совпадают и что совпадают упорядочения, индуцированные на этом множестве рассматриваемыми упорядочениями. Тогда A является сегментом по отношению к каждому из упорядочений $\leqslant$ и $\leqq$. Если A не совпадает ни с D, ни с E, то $c(X \setminus A)$ в каждом из множеств D и E является первым элементом, не принадлежащим A. Но тогда $c(X \setminus A) \in A$ в силу определения A. Это означает, что либо $A = D$, либо $A = E$. Значит, любые два элемента семейства $\mathfrak{C}$ находятся в следующем отношении друг к другу: область определения одного из них является сегментом по отношению к другому, и на этом сегменте оба упорядочения согласуются. Опираясь на этот факт, нетрудно убедиться, что объединение $\prec$ элементов семейства $\mathfrak{C}$ снова является элементом семейства $\mathfrak{C}$ — наибольшим его элементом. Область определения F упорядочения $\prec$ должна непременно совпадать с X, в противном случае точка $c(X \setminus F)$ могла бы быть поставлена в конец упорядочения $<$ (такое упорядочение $< \cup (F \times \{c(X \setminus F)\})$ было бы элементом семейства $\mathfrak{C}$, строго содержащим $<$). Теорема доказана.

26. Замечания. Каждое из выписанных выше утверждений в действительности эквивалентно принципу максимальности Хаусдорфа, и для каждого из них есть различные основания именно его принять за аксиому. В приложении принцип максимальности выводится из аксиомы выбора. Вывод принципа вполне упорядочения из аксиомы выбора, данный выше, по существу, совпадает с доказательством Цермело [1]. Вполне осуществимо также доказательство этого принципа, основанное на утверждении 0.25(д). Стоит отметить, что объединение элементов гнезда вполне упорядочений, вообще говоря, не будет вполне упорядочением, так что прямое применение принципа максимальности к семейству вполне упорядочений невозможно.

Необходимо оговориться, что названия утверждений из 0.25 в значительной мере произвольны. Принцип максимальности Хаусдорфа был независимо применен Куратовским, Мором и Цорном в формулировках, близких к данным выше.

Наконец, можно сказать, что, хотя приведенная нами формулировка леммы Тьюки более или менее стандартна, она еще недостаточна для обычных применений этой леммы, в частности для доказательства того, что каждая группа содержит максимальную абелеву подгруппу. Есть более общая формулировка леммы Тьюки. Говоря нестрого, она состоит в следующем: если семейство $\mathfrak{A}$ множеств определено условиями (их может быть бесконечно много), касающимися лишь конечных множеств точек, то в $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент.

Глава 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ТОПОЛОГИИ И ОКРЕСТНОСТИ

Топология — это семейство $\mathfrak{J}$ множеств, удовлетворяющее двум условиям: пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{J}$ является элементом семейства $\mathfrak{J}$ и объединение элементов любого подсемейства семейства $\mathfrak{J}$ принадлежит $\mathfrak{J}$. Множество $X = \bigcup\{U : U \in \mathfrak{J}\}$ всегда является элементом $\mathfrak{J}$, ибо само $\mathfrak{J}$ является своим подсемейством. Каждый элемент семейства $\mathfrak{J}$ является подмножеством множества X. Множество X называется *пространством топологии* $\mathfrak{J}$, и $\mathfrak{J}$ есть *топология на* X. Пара $(X, \mathfrak{J})$ называется *топологическим пространством*. Когда не может возникнуть недоразумений, разрешается просто писать: «X есть топологическое пространство». Там, где это необходимо, мы будем пользоваться точным обозначением (например, если речь идет о двух различных топологиях на одном и том же множестве X).

Про элементы топологии $\mathfrak{J}$ говорят, что они *открыты* относительно $\mathfrak{J}$, или $\mathfrak{J}$-открыты, или, если речь идет только об одной топологии, элементы семейства $\mathfrak{J}$ просто называют открытыми множествами. Пространство X топологии всегда открыто. Открыто всегда и пустое множество, ибо оно является объединением элементов пустого подсемейства семейства $\mathfrak{J}$. Может случиться, что этими двумя множествами исчерпывается вся топология — ведь семейство, единственными элементами которого являются множество X и пустое множество, образует топологию на X. Эта топология не представляет большого интереса; однако она встречается достаточно часто, чтобы заслуживать специального наименования. Ее называют *антидискретной* (или *тривиальной*) топологией на X; говорят при этом, что $(X, \mathfrak{J})$ — *антидискретное топологическое пространство*. Другой крайностью является семейство всех подмножеств множества X. Оно называется *дискретной* топологией на X ($(X, \mathfrak{T})$ при этом называют *дискретным топологическим пространством*). В дискретном пространстве каждое подмножество открыто.

Дискретная и антидискретная топологии на множестве X являются соответственно наибольшей и наименьшей из всех возможных топологий на X. Мы имеем в виду, что каждая топология на X содержит антидискретную топологию и содержится в дискретной топологии. Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{U}$ — какие-нибудь топологии на X. Следуя соглашению, принятому для произвольных семейств множеств, скажем, что $\mathfrak{T}$ меньше $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{U}$ больше $\mathfrak{T}$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{U}$. Иными словами, $\mathfrak{T}$ меньше $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда каждое $\mathfrak{T}$-открытое множество $\mathfrak{U}$-открыто. В этом случае говорят также, что $\mathfrak{T}$ *грубее* $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{U}$ *тоньше* $\mathfrak{T}$. (К несчастью, эта же ситуация описывается в литературе еще двумя выражениями: говорят, что $\mathfrak{T}$ *сильнее* $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{T}$ *слабее* $\mathfrak{U}$ *).) Вообще говоря, для заданных на X топологий $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{U}$ может случиться, что ни одна из них не больше другой; в этом случае, следуя терминологии частично упорядоченных множеств, говорят, что топологии $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{U}$ *несравнимы*.

Очень интересное топологическое пространство образуют вещественные числа с естественной топологией. Это едва ли удивительно, так как само понятие топологического пространства возникло в результате абстрагирования, исходя из некоторых замечательных свойств вещественных чисел. *Обычная топология* на множестве вещественных чисел — это семейство всех тех множеств, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый интервал около нее. Иными словами, подмножество A множества вещественных чисел открыто в том и только в том случае, когда для каждой точки x из A существуют такие числа a и b, что $a<x<b$ и что множество $\{y : a<y<b\}$ является подмножеством

*) Справедливости ради отметим, что выражение «$\mathfrak{T}$ слабее $\mathfrak{U}$» употребляют в рассматриваемом случае гораздо чаще. (*Прим. перев.*)

множества A. Конечно, мы еще должны проверить, что указанное семейство множеств действительно является топологией, однако это не вызывает никаких затруднений. Удобное совпадение: открытый интервал является открытым множеством.

Подмножество U топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ называется *окрестностью* ($\mathfrak{J}$-окрестностью) точки x тогда и только тогда, когда в U лежит открытое множество, содержащее x. Окрестность точки не обязана быть открытым множеством, но каждое открытое множество является окрестностью любой своей точки. Каждая окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки. Если $\mathfrak{J}$ — антидискретная топология, то единственной окрестностью произвольной точки x пространства X является все пространство X. Если $\mathfrak{J}$ — дискретная топология, то каждое подмножество пространства является окрестностью любой своей точки. В случае, когда X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{J}$ — обычная топология, окрестностью точки является любое множество, содержащее какой-нибудь открытый интервал, которому принадлежит рассматриваемая точка.

1. Теорема. *Множество A открыто тогда и только тогда, когда оно содержит окрестность каждой из своих точек.*

Доказательство. Объединение U всех открытых подмножеств множества A является, очевидно, открытым подмножеством множества A. Если A содержит окрестность каждой своей точки, то каждая точка x множества A принадлежит некоторому его открытому подмножеству. Поэтому $x \in U$, откуда следует, что $A = U$, т. е. что A — открытое множество. С другой стороны, если множество A открыто, то каждая точка x из A входит в A вместе с некоторой своей окрестностью (таковой является, например, все множество A).

Из теоремы 1 следует, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой входящей в него точки.

Системой окрестностей точки называется семейство всех окрестностей этой точки.

2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{U}$ — система окрестностей точки. Тогда пересечение конечного множества эле-*

ментов из $\mathfrak{U}$ *принадлежит* $\mathfrak{U}$ *и каждое множество, которое содержит некоторый элемент из* $\mathfrak{U}$*, само входит в* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть U и V — окрестности точки x. Тогда существуют открытые окрестности U_0 и V_0 точки x, лежащие соответственно в U и V. Тогда множество $U \cap V$ содержит открытую окрестность $U_0 \cap V_0$ точки x и, значит, само является окрестностью точки x. Итак, пересечение двух (а следовательно, и любого конечного семейства) элементов системы $\mathfrak{U}$ снова является элементом системы $\mathfrak{U}$. Если множество U содержит окрестность точки x, то оно содержит и некоторую открытую окрестность этой точки, а потому и само является окрестностью точки x.

3. Замечания. Фреше [1] первый рассматривал абстрактные пространства. Развитие концепции топологического пространства в последующие годы сопровождалось широким экспериментированием с определениями и фундаментальными процессами. Эти теоретические изыскания в большей части отражены в классической работе Хаусдорфа [1] и в вышедших несколько позже томах журнала Fundamenta Mathematicae. В действительности они привели к двум фундаментальным понятиям: топологического пространства и равномерного пространства (глава 6). Последнее понятие, формализованное сравнительно недавно (А. Вейль [1]), возникло в значительной мере благодаря изучению топологических групп.

Вот стандартные руководства по общей топологии: Александров и Хопф [1] (первые две главы), Бурбаки [1], Вайдьянатасвами [1], Куратовский [1], Лефшец [1] (первая глава), Р. Мор [1], Ньюмен [1], Серпинский [1], Тьюки [1], Уайберн [1] и Фреше [2].

ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Подмножество A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ называется *замкнутым* тогда и только тогда, когда относительное дополнение $X \setminus A$ открыто. Дополнение к дополнению множества A есть снова A; следовательно, множество открыто в том и только в том случае, когда дополнение к нему замкнуто. Если $\mathfrak{J}$ — антидискретная топология, то дополнение к X и дополнение к пустому множеству являются единственными замкнутыми множествами; таким образом, только пустое множество и все X в этом случае замкнуты. Все пространство и пустое множество замкнуты (и одновременно открыты) в любом топологическом пространстве; как мы видели, может случиться, что они будут единственными замкнутыми множествами. Если $\mathfrak{J}$ — дискретная топология, то любое множество замкнуто и открыто. Если X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{J}$ — обычная топология, то ситуация совсем иная. *Замкнутый интервал* (т. е. множество вида $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$) замкнут — нам повезло!

Открытый интервал не замкнут, и *полуоткрытый интервал* (т. е. множество вида $\{x : a < x \leqslant b\}$ или вида $\{x : a \leqslant x < b\}$, где $a < b$) не открыт и не замкнут. В действительности (см. задачу 1.К) единственными множествами, открытыми и замкнутыми одновременно, являются в этом случае все пространство и пустое множество.

Согласно формулам де Моргана (0.3) объединение (пересечение) дополнений к элементам семейства множеств является дополнением к пересечению (соответственно к объединению). Следовательно, объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество и пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством. Эти свойства характеризуют семейства замкнутых множеств, как показывает следующая теорема. Простое ее доказательство опускается.

4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство множеств, объединение любого конечного подсемейства элементов которого, равно как и пересечение любого непустого подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$, снова является элементом семейства $\mathfrak{F}$, и пусть множество $X = \bigcup\{F : F \in \mathfrak{F}\}$ принадлежит семейству. Тогда $\mathfrak{F}$ есть в точности семейство замкнутых подмножеств множества X относительно топологии, образованной дополнениями к элементам семейства $\mathfrak{F}$.*

ТОЧКИ НАКОПЛЕНИЯ

Топология топологического пространства описывается в терминах окрестностей точек. Значит, должен существовать способ описать и замкнутые множества в терминах окрестностей. Это приводит, как мы сейчас увидим, к некоторой новой классификации точек. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ открыто, т. е. когда у каждой точки множества $X \setminus A$ есть окрестность, лежащая в $X \setminus A$ или, что эквивалентно, не пересекающая множества A. Следовательно, множество A замкнуто в том и лишь в том случае, когда каждая точка x, любая окрестность которой пересекает A, принадлежит этому множеству. Это обстоятельство подсказывает следующее определение.

Точка x называется *точкой накопления* (или *предельной* точкой) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ тогда и только тогда, когда любая окрестность точки x содержит отличную от x точку множества A *). Тогда можно утверждать, что любая окрестность точки x пересекает множество A, в том и только в том случае, когда либо x принадлежит A, либо x является предельной точкой для A. Поэтому не вызывает сомнений справедливость следующей теоремы.

5. Теорема. *Подмножество топологического пространства замкнуто в том и только в том случае, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Часто, если x — предельная точка для множества A, то говорят весьма многозначительную фразу: «В любой близости от x есть точки множества A». Под впечатлением от этого мы должны признать, что антидискретное пространство действительно чрезвычайно переполнено, ибо каждая точка x является точкой накопления любого множества, отличного от пустого множества и множества $\{x\}$. С другой стороны, в дискретном топологическом пространстве никакая точка не является предельной ни для какого множества. В случае множества X вещественных чисел с обычной топологией могут осуще-

*) Заметим сразу, что предельная точка множества A может не принадлежать множеству A. (*Прим. перев.*)

ствляться самые разнообразные возможности. Если A — открытый интервал $(0, 1)$, то каждая точка замкнутого интервала $[0, 1]$ является предельной точкой множества A. Если A — множество неотрицательных рациональных чисел, квадрат которых не превосходит 2, то множество предельных точек множества A — замкнутый интервал $[0, \sqrt{2}]$. Если A — множество чисел, обратных к целым числам, то 0 — единственная предельная точка множества A. Множество целых чисел вовсе не имеет предельных точек.

6. Теорема. *Если к множеству добавить множество всех его предельных точек, то получится замкнутое множество.*

Доказательство. Если x не принадлежит A и не является предельной точкой множества A, то найдется открытая окрестность U точки x, не пересекающаяся с A. Так как множество U является окрестностью любой лежащей в нем точки, то ни одна из точек множества U не является предельной для A. Следовательно, объединение множества A и множества всех его предельных точек является дополнением к открытому множеству.

Множество всех предельных точек множества A иногда называют *производным* множеством множества A.

ЗАМЫКАНИЕ

Замыкание ($\mathfrak{J}$-замыкание) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Замыкание множества A обозначается через $\bar{A}$ или через $[A]$. Множество $\bar{A}$ всегда замкнуто, как пересечение замкнутых множеств. Очевидно, $\bar{A}$ содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем A. Следовательно, $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A; значит, A замкнуто в том и только в том случае, когда $\bar{A} = A$. Следующая теорема описывает замыкание множеств в терминах предельных точек.

7. Теорема. *Замыкание произвольного множества есть объединение этого множества и множества его предельных точек.*

Доказательство. Каждая предельная точка множества A является предельной точкой и любого множества, содержащего множество A. Поэтому она входит в каждое замкнутое множество, содержащее A. Следовательно, множество A и все его предельные точки содержатся в $\bar{A}$. С другой стороны, в силу предыдущей теоремы множество, состоящее из точек множества A и всех предельных точек множества A, замкнуто и потому содержит $\bar{A}$.

Функцию, которая произвольному подмножеству топологического пространства ставит в соответствие его замыкание $\bar{A}$, можно было бы назвать функцией замыкания, или оператором замыкания, относительно топологии. Этот оператор определяет топологию полностью, ибо множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A=\bar{A}$. Иными словами, замкнуты те и только те множества, которые остаются неподвижными под действием оператора замыкания. Полезно задать вопрос: когда оператор, определенный для всех подмножеств фиксированного множества X, является оператором замыкания относительно некоторой топологии на X? Оказывается, операторы замыкания характеризуются четырьмя весьма простыми свойствами. Во-первых, так как пустое множество замкнуто, то замыкание пустого множества пусто. Во-вторых, каждое множество содержится в своем замыкании. Далее, так как замыкание любого множества замкнуто, то замыкание замыкания множества совпадает с замыканием этого множества (прибегая к обычной для алгебры терминологии, можно сказать, что оператор замыкания идемпотентен). Наконец, замыкание объединения двух множеств есть объединение их замыканий. В самом деле, $\overline{A \cup B}$ — замкнутое множество, содержащее как A, так и B. Следовательно, множества $\bar{A}$ и $\bar{B}$ тоже принадлежат множеству $\overline{A \cup B}$. Тогда их объединение $\bar{A} \cup \bar{B}$ содержится в $\overline{A \cup B}$. С другой стороны, $\bar{A} \cup \bar{B}$ — замкнутое множество, содержащее $A \cup B$, и, значит, оно содержит $\overline{A \cup B}$.

Оператор замыкания на X — это оператор, который ставит в соответствие каждому подмножеству A множества X некоторое подмножество $A^c \subset X$ таким образом, что выполняются следующие четыре условия, называемые *аксиомами замыкания Куратовского*:

(а) *если* Λ — *пустое множество, то* $\Lambda^c = \Lambda$,

(б) *для каждого* A $A \subset A^c$,

(в) *для каждого* A $A^{cc} = A^c$,

(г) *для любых* A *и* B $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

Следующая теорема Куратовского показывает, что эти четыре утверждения в действительности характеризуют операцию топологического замыкания. Топология, определенная ниже, называется топологией, ассоциированной с оператором замыкания.

8. Теорема. *Пусть* c — *оператор замыкания на* X *и* $\mathfrak{F}$ — *семейство всех подмножеств* A *множества* X *таких, что* $A^c = A$. *Обозначим через* $\mathfrak{J}$ *семейство, образованное дополнениями к элементам семейства* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{J}$ — *топология на* X *и* $A^c = \mathfrak{J}$-*замыкание множества* A *для любого* $A \subset X$.

Доказательство. Аксиома (а) показывает, что пустое множество принадлежит $\mathfrak{F}$, а (г) означает, что объединение любых двух множеств семейства $\mathfrak{F}$ тоже является его элементом. Следовательно, и объединение любого конечного (пустого или непустого) подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. В силу (б) $X \subset X^c$, так что $X = X^c$. Значит, объединение элементов семейства $\mathfrak{F}$ есть все X. В силу теоремы 1.4 будет доказано, что $\mathfrak{J}$ — топология на X, если мы убедимся, что пересечение любого подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Заметим сначала, что если $B \subset A$, то $B^c \subset A^c$, ибо $A^c = [(A \setminus B) \cup B]^c = (A \setminus B)^c \cup B^c$ *). Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь непустое подсемейство семейства $\mathfrak{F}$ и $B = \bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\}$. Множество B содержится в каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$; следовательно, $B^c \subset \bigcap \{A^c : A \in \mathfrak{A}\} = \bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\} = B$. Так как $B \subset B^c$, то $B = B^c$ и $B \in \mathfrak{F}$. Это показывает, что $\mathfrak{J}$ является топологией. Остается только доказать, что $A^c = \bar{A}$, где $\bar{A}$ — $\mathfrak{J}$-замыкание множества A. По определению $\bar{A}$ является пересечением всех $\mathfrak{J}$-замкнутых множеств, т. е. элементов семейства $\mathfrak{F}$, со-

*) Символ [ ] никогда в этой книге не означает замыкания; он выполняет обычную роль скобок. (*Прим. перев.*)

держащих множество A. В силу аксиомы (в) $A^c \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\bar{A} \subset A^c$. Так как $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ и $\bar{A} \supset A$, то $\bar{A} \supset A^c$; следовательно, $\bar{A} = A^c$.

ВНУТРЕННОСТЬ И ГРАНИЦА

На семействе всех подмножеств топологического пространства определен еще один оператор, тесно связанный с оператором замыкания. Точка x подмножества A топологического пространства называется *внутренней точкой* этого множества тогда и только тогда, когда A является окрестностью точки x. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через A^0 *). (В обычной терминологии отношение «(точка) является внутренней точкой (множества)» является обратным к отношению «(множество) является окрестностью (точки)».) Прежде чем рассмотреть примеры, удобно связать введенное сейчас понятие с ранее определенными.

9. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X. Тогда внутренность A^0 множества A есть открытое множество, причем наибольшее открытое множество из всех, содержащихся в A. Множество A открыто в том и только в том случае, когда $A = A^0$. Множество всех точек множества A, не являющихся предельными точками для $X \setminus A$, есть в точности A^0. Замыкание множества $X \setminus A$ совпадает с $X \setminus A^0$.*

Доказательство. Если точка x принадлежит внутренности множества A, то x является элементом некоторого открытого подмножества U множества A. Каждый элемент множества U тоже принадлежит A^0. Следовательно, A^0 содержит каждую свою точку вместе с некоторой окрестностью и потому открыто. Если V — открытое подмножество, лежащее в A, и $y \in V$, то A является окрестностью точки y и, значит, $y \in A^0$. Следовательно, множество A^0 содержит каждое открытое подмножество множества A и является, тем самым, наибольшим открытым подмножеством множества A. Если

*) В русской литературе приняты также термин «ядро» множества и обозначение $\langle A \rangle$. (*Прим. перев.*)

множество A открыто, то оно, конечно, совпадает с наибольшим своим открытым подмножеством. Значит, множество A открыто в том и только в том случае, когда $A=A^0$. Если точка $x\in A$ не является предельной для $X\setminus A$, то у x есть окрестность U, не пересекающая множества $X\setminus A$, т. е. целиком содержащаяся в A. Тогда множество A является окрестностью точки x и $x\in A^0$. С другой стороны, множество A^0 является окрестностью каждой своей точки и не пересекается с множеством $X\setminus A$. Значит, никакая точка из A^0 не является предельной для $X\setminus A$. Наконец, так как A^0 состоит из тех точек множества A, которые не являются предельными точками множества $X\setminus A$, то его дополнение $X\setminus A^0$ состоит в точности из тех точек, которые либо сами принадлежат $X\setminus A$, либо являются предельными точками для множества $X\setminus A$. Это означает, что множество $X\setminus A^0$ совпадает с замыканием $(\overline{X\setminus A})$ множества $X\setminus A$.

Последнее утверждение доказанной теоремы заслуживает дальнейшего рассмотрения. Условимся для удобства обозначать относительное дополнение $X\setminus A$ через A'. Тогда A'' — дополнение к дополнению множества A — есть снова A (иногда говорят, что $'$ является оператором с периодом два). Можно тогда предыдущий результат сформулировать так: $(A^0)'=\overline{A'}$. Переходя к дополнениям, заключаем, что $A^0=(\overline{A'})'$. Таким образом, внутренность множества A есть дополнение к замыканию дополнения множества A. Если заменить здесь A на его дополнение, получаем, что $\overline{A}=(A'^0)'$ — замыкание множества является дополнением к внутренности дополнения этого множества *).

*) Напрашивается забавная и полезная задача. Сколько различных множеств можно построить, исходя из фиксированного подмножества A топологического пространства, в результате последовательного применения в любом порядке операторов замыкания, перехода к внутренности и перехода к дополнению? В силу замечаний, высказанных в предыдущем абзаце, эта задача сводится к такой: сколько различных множеств можно получить, отправляясь от одного множества A, чередованием оператора перехода к дополнению и оператора замыкания? Неожиданный ответ на этот вопрос дается в формулировке задачи 1. E.

Если X — антидискретное пространство, то внутренность любого его подмножества, за исключением самого X, пуста. Если X — дискретное пространство, то любое его подмножество открыто и замкнуто одновременно и, следовательно, совпадает со своей внутренностью и со своим замыканием. Если X — множество вещественных чисел с обычной топологией, то внутренность множества всех целых чисел пуста. Внутренность замкнутого интервала в этом случае есть открытый интервал с теми же концами. Внутренность рациональных чисел пуста, а значит, пусто и замыкание этой внутренности. Замыкание множества рациональных чисел, как и внутренность этого замыкания, совпадает со всем X. Таким образом, внутренность замыкания множества может сильно отличаться от замыкания его внутренности. Мы видим, что оператор перехода к внутренности и оператор замыкания, вообще говоря, не коммутируют.

Есть еще один оператор, встречающийся достаточно часто для того, чтобы оправдать его определение. *Граница* подмножества A топологического пространства X состоит из всех тех точек, которые не являются внутренними ни для множества A, ни для множества $X \setminus A$. Эквивалентное определение: x является точкой границы в том и только в том случае, когда любая окрестность точки x пересекает как множество A, так и множество $X \setminus A$. Ясно, что граница множества A совпадает с границей множества $X \setminus A$. Если пространство X антидискретно и A — его непустое собственное подмножество, то границей множества A является всё X. В то же время в дискретном пространстве граница каждого множества пуста. Граница произвольного интервала вещественной прямой в обычной топологии вещественных чисел состоит лишь из концов этого интервала, независимо от того, открыт этот интервал, замкнут или полуоткрыт. Границей множества рациональных чисел, так же как и границей множества всех иррациональных чисел, служит все множество вещественных чисел.

Нетрудно обнаружить соотношения между границей, замыканием и внутренностью. Они собраны в формулировке следующей теоремы, доказательство которой мы опускаем.

10. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X и $b(A)$ — граница множества A. Тогда $b(A) = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A}) = \bar{A} \setminus A^0$, $X \setminus b(A) = A^0 \cup (X \setminus A)^0$, $\bar{A} = A \cup b(A)$ и $A^0 = A \setminus b(A)$.*

Множество замкнуто в том и только в том случае, когда ему принадлежит его граница; множество открыто тогда и только тогда, когда оно не имеет общих точек со своей границей.

БАЗЫ И ПРЕДБАЗЫ

При определении обычной топологии на множестве вещественных чисел мы отправлялись от семейства $\mathfrak{B}$ открытых интервалов — из них мы строили элементы топологии $\mathfrak{J}$. Тот же метод полезен и при других обстоятельствах; поэтому мы сейчас подробно исследуем соответствующее построение. Семейство $\mathfrak{B}$ множеств называется *базой топологии* $\mathfrak{J}$ в том и лишь в том случае, когда $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathfrak{J}$, и для каждой точки x пространства и любой ее окрестности U существует такой элемент $V \in \mathfrak{B}$, что $x \in V \subset U$. Таким образом, семейство открытых интервалов образует базу обычной топологии на множестве вещественных чисел в силу определения обычной топологии и того факта, что открытые интервалы открыты в этой топологии.

Есть простая характеристика базы, которая часто принимается за ее определение: подсемейство $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждый элемент из $\mathfrak{J}$ является объединением элементов из $\mathfrak{B}$. Докажем это. Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathfrak{J}$ и $U \in \mathfrak{J}$. Обозначим через V объединение всех тех элементов базы $\mathfrak{B}$, которые лежат в U, и предположим, что $x \in U$. Тогда в $\mathfrak{B}$ существует такой элемент W, что $x \in W \subset U$. Значит, $x \in V$. Следовательно, $U \subset V$ и так как V, очевидно, является подмножеством множества U, то $V = U$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{J}$ и каждый элемент топологии $\mathfrak{J}$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$. Если $U \in \mathfrak{J}$ и $x \in U$, то в совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$, объединением которых является множество U, найдется такой элемент V, что $x \in V \subset U$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathfrak{J}$.

Введя понятие базы, мы получили очень удобный способ построения топологий. Однако необходима некоторая осторожность, ибо не каждое семейство множеств может служить базой какой-нибудь топологии. Например, пусть множество X состоит из чисел 0, 1 и 2, множество B состоит из чисел 0 и 1 и A состоит из 1 и 2. Семейство $\mathfrak{S}$, состоящее из X, A, B и пустого множества, не может служить базой никакой топологии. В самом деле, как убеждает нас прямое вычисление, объединение каких-либо элементов семейства $\mathfrak{S}$ непременно является элементом $\mathfrak{S}$; таким образом, если бы семейство $\mathfrak{S}$ служило базой какой-нибудь топологии, то эта топология должна была бы совпадать с $\mathfrak{S}$, но $\mathfrak{S}$ не является топологией, так как $A \cap B \notin \mathfrak{S}$. Положение проясняет следующая теорема.

11. Теорема. *Семейство $\mathfrak{B}$ множеств является базой некоторой топологии на множестве $X = \bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}\}$ в том и только в том случае, когда для любых двух элементов U и V этого семейства и каждой точки x из $U \cap V$ существует такой элемент W в $\mathfrak{B}$, что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — база какой-нибудь топологии, U и V — элементы базы $\mathfrak{B}$ и $x \in U \cap V$. Тогда, так как множество $U \cap V$ открыто, в $\mathfrak{B}$ существует элемент, содержащий точку x и являющийся подмножеством множества $U \cap V$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство с выделенными нами специальными свойствами и $\mathfrak{J}$ — семейство всевозможных объединений элементов из $\mathfrak{B}$. Объединение элементов семейства $\mathfrak{J}$ само является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$ и, значит, принадлежит $\mathfrak{J}$. Остается только показать, что пересечение любых двух элементов U и V семейства $\mathfrak{J}$ снова принадлежит $\mathfrak{J}$. Если $x \in U \cap V$, то в $\mathfrak{B}$ можно найти такие элементы U' и V', что $x \in U' \subset U$ и $x \in V' \subset V$. В $\mathfrak{B}$ существует элемент W, для которого $x \in W \subset U' \cap V' \subset U \cap V$. Следовательно, множество $U \cap V$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{J}$ — топология.

Мы только что видели, что не всякое семейство $\mathfrak{S}$ множеств может служить базой топологии. Не теряя терпения, изменим несколько наш вопрос. Можно ли по произвольному семейству $\mathfrak{S}$ множеств естественно (в каком-то смысле) и однозначно определить некоторую топологию? Эта топология должна быть определена на множестве X, являющемся объединением всех элементов семейства $\mathfrak{S}$; каждый элемент семейства $\mathfrak{S}$ должен быть открыт в этой топологии, т. е. $\mathfrak{S}$ должно быть подсемейством искомой топологии. Это наводит на вопрос: существует ли наименьшая топология на X, содержащая $\mathfrak{S}$? Следующий простой пример поможет нам обнаружить эту наименьшую топологию.

12. Теорема. *Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное непустое семейство множеств. Тогда семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{S}$ образует базу некоторой топологии на множестве $X = \bigcup\{S : S \in \mathfrak{S}\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — любое семейство множеств и $\mathfrak{B}$ — семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathfrak{S}$. Тогда пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ снова является элементом $\mathfrak{B}$. Применяя предыдущую теорему, заключаем, что $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии.

Семейство $\mathfrak{S}$ множеств называется *предбазой топологии* $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathfrak{S}$ образует базу топологии $\mathfrak{J}$ (или, что то же самое, когда каждый элемент из $\mathfrak{J}$ является объединением конечных пересечений элементов семейства $\mathfrak{S}$). В предыдущей теореме утверждается, что каждое непустое семейство $\mathfrak{S}$ множеств является предбазой некоторой топологии. Эта топология, конечно, однозначно определяется семейством $\mathfrak{S}$; она является наименьшей топологией, содержащей $\mathfrak{S}$ (т. е. эта топология содержит $\mathfrak{S}$ и является подсемейством любой топологии, содержащей $\mathfrak{S}$).

Как правило, у топологии есть много баз и предбаз; предпочтение может быть отдано той или иной из них в зависимости от решаемой задачи. Весьма естественную предбазу обычной топологии на множестве вещественных чисел образует семейство всех открытых полупрямых, т. е. семейство всех множеств вида $\{x : x > a\}$ и $\{x : x < a\}$. Каждый открытый интервал является пересечением двух таких множеств, значит, указанное семейство действительно есть предбаза. Менее очевидную предбазу обычной топологии вещественной прямой образует семейство всех множеств того же вида, где a принимает лишь рациональные значения. Эта предбаза интереснее (см. задачу 1.К).

У пространств, топология которых обладает счетной базой, есть много хороших свойств. Про такие пространства говорят, что они удовлетворяют *второй аксиоме счетности*. (Иногда в этом случае употребляются выражения *сепарабельное пространство* и *совершенно сепарабельное пространство*; мы ими пользоваться не будем.)

13. Теорема. *Пусть A — несчетное подмножество пространства, топология которого имеет счетную базу. Тогда в A есть предельная точка для A.*

Доказательство. Предположим, что ни одна точка множества A не является предельной для него, и пусть $\mathfrak{B}$ — какая-нибудь счетная база рассматриваемого пространства. Для каждой точки x из A найдется ее открытая окрестность, не содержащая точек множества A, отличных от x. Так как $\mathfrak{B}$ — база, то можно затем выбрать $B_x \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $B_x \cap A = \{x\}$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками из A и элементами некоторого подсемейства семейства $\mathfrak{B}$; значит, множество A счетно.

Более сильное утверждение формулируется в задаче 1.3.

Множество A называется *плотным* в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда замыкание множества A есть всё X *).

Говорят, что топологическое пространство X *сепарабельно*, в том и лишь в том случае, когда существует счетное плотное в нем подмножество. Сепарабельное пространство может не удовлетворять второй аксиоме счетности. Например, пусть X — несчетное множество, топология которого состоит из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X и дополнения до всего X. В этом пространстве каждое беско-

---

*) В русских работах пишут в этом случае, что множество A *всюду плотно* в пространстве X. (*Прим. перев.*)

нечное подмножество плотно, ибо оно пересекается с каждым открытым множеством. Предположим, с другой стороны, что в X существует счетная база $\mathfrak{B}$, и пусть x — некоторая фиксированная точка пространства X. Пересечение всех открытых множеств, содержащих x, должно совпадать с $\{x\}$, ибо дополнение к любой точке, отличной от x, открыто. Отсюда следует, что пересечение элементов базы $\mathfrak{B}$, содержащих x, есть $\{x\}$. Но дополнение этого счетного пересечения является объединением счетного множества конечных множеств; значит, оно счетно, что ведет к противоречию. (Позже встретятся менее тривиальные примеры.) Не представляет труда доказать, что пространство со счетной базой сепарабельно.

14. Теорема. *Пространство, топология которого обладает счетной базой, сепарабельно.*

Доказательство. Выберем по точке из каждого элемента базы, получим в результате некоторое счетное множество A. Дополнение к замыканию множества A открыто и не пересекается с A, поэтому оно не содержит никакого элемента нашей базы и, значит, пусто.

Семейство $\mathfrak{A}$ называется *покрытием* множества B тогда и только тогда, когда B является подмножеством объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$, т. е. когда каждая точка множества B принадлежит некоторому элементу семейства $\mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{A}$ называют *открытым* покрытием множества B, если каждый элемент из $\mathfrak{A}$ является открытым множеством. *Подпокрытие* покрытия $\mathfrak{A}$ — это такое его подсемейство, которое само является покрытием.

15. Теорема. (Линделёф). *В произвольном открытом покрытии пространства со счетной базой есть счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть A — множество, $\mathfrak{A}$ — его открытое покрытие и $\mathfrak{B}$ — счетная база рассматриваемой топологии. Так как каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является объединением элементов $\mathfrak{B}$, то существует подсемейство $\mathfrak{C}$ семейства $\mathfrak{B}$, тоже покрывающее A, каждый элемент которого содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Для каждого элемента покрытия $\mathfrak{C}$ зафиксируем какой-нибудь содержащий его элемент семейства

$\mathfrak{A}$. В результате получится некоторое счетное подсемейство $\mathfrak{D}$ семейства $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{D}$ — покрытие множества A, ибо $\mathfrak{C}$ покрывает A. Значит, в $\mathfrak{A}$ есть счетное подпокрытие.

Топологическое пространство называется *линделёфовым* *) тогда и только тогда, когда в каждом открытом покрытии этого пространства есть счетное подпокрытие.

Так как мы уже сказали, что такое вторая аксиома счетности, уместно сообщить, в чем. состоит первая аксиома счетности. Эта аксиома касается локализованного понятия базы. Семейство окрестностей точки x называется *базой системы окрестностей* **) точки x, или *базой* ***) в x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из этого семейства. Например, семейство всех открытых окрестностей точки всегда является базой системы окрестностей этой точки. Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если система окрестностей произвольной его точки обладает счетной базой. Ясно, что каждое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности. С другой стороны, любое несчетное дискретное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности (у системы окрестностей произвольной точки x есть база, состоящая из единственной окрестности — множества $\{x\}$) и не удовлетворяет второй аксиоме счетности (покрытие, образованное одноточечными множествами $\{x\}$, $x \in X$, не имеет счетного подпокрытия). Вторая аксиома счетности является, следовательно, более сильным ограничением, чем первая.

Достойно внимания то обстоятельство, что если U_1, $U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная база в x, то можно построить некоторую новую счетную базу в этой точке: $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_n, \ldots$, для которой $V_n \supset V_{n+1}$ при каждом n. Построение просто: положим $V_n = \bigcap \{U_k : k \leqslant n\}$.

---

*) В русской литературе такие пространства обычно называются *финально компактными*. (*Прим. перев.*)

**) Говорят иногда — *базой топологии* в x. (*Прим. перев.*)

***) Термин автора *локальная база* двусмыслен — обычно под локальной базой понимают базу топологии, индуцированной в некоторой окрестности точки. (*Прим. перев.*)

Предбазой системы окрестностей в точке x, или *предбазой* в x, называется любое семейство множеств, конечные пересечения элементов которого образуют базу топологии в этой точке. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная предбаза в точке, то семейство множеств $V_1, V_2, \ldots \ldots, V_n, \ldots$, где $V_n = \bigcap\{U_k : k \leqslant n\}$, образует счетную базу в этой точке. Значит, из существования счетной предбазы в каждой точке вытекает первая аксиома счетности.

ПЕРЕХОД К ИНДУЦИРОВАННОЙ ТОПОЛОГИИ; ОТДЕЛЕННОСТЬ

Пусть $(X, \mathfrak{I})$ — топологическое пространство и Y — его подмножество. В этом случае можно определить некоторую топологию $\mathfrak{U}$ на множестве Y, называемую обычно топологией, *индуцированной топологией* $\mathfrak{I}$ на Y, или *сужением* топологии $\mathfrak{I}$ на множество Y. Индуцированная топология $\mathfrak{U}$ определяется как семейство пересечений всевозможных элементов $\mathfrak{I}$ с множеством Y. Таким образом, множество U принадлежит индуцированной топологии $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда $U = V \cap Y$ для некоторого $\mathfrak{I}$-открытого множества V. Легко видеть, что $\mathfrak{U}$ действительно является топологией. Про элементы U индуцированной топологии говорят, что они *открыты* в Y, а их относительные дополнения $Y \setminus U$ называют множествами, *замкнутыми* в Y. $\mathfrak{U}$-замыкание подмножества пространства Y называется его *замыканием* в Y. Каждое множество Y пространства X одновременно открыто и замкнуто в себе, хотя в X оно может быть и не открыто, и не замкнуто. Топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathfrak{I})$. Более формальное определение: топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством другого пространства $(X, \mathfrak{I})$ в том и только в том случае, когда $Y \subset X$ и $\mathfrak{U}$ — топология, индуцированная топологией $\mathfrak{I}$.

Стоит отметить, что если $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{I})$ и $(Z, \mathfrak{B})$— подпространство пространства $(Y, \mathfrak{U})$, то $(Z, \mathfrak{B})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{I})$. Это свойство транзитивности будет часто применяться без специального на то указания.

Пусть пространство $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{I})$ и A — подмножество множества Y. Может случиться тогда, что A $\mathfrak{I}$-замкнуто или $\mathfrak{U}$-замкнуто, точка y может быть $\mathfrak{U}$-предельной точкой для множества A и может быть $\mathfrak{I}$-предельной точкой для A *). Соотношения между этими различными понятиями важны для нас.

16. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{I})$ — топологическое пространство, $(Y, \mathfrak{U})$ — его подпространство и A — множество в Y. Тогда:*

(а) *множество A $\mathfrak{U}$-замкнуто в том и только в том случае, когда оно является пересечением множества Y с некоторым $\mathfrak{I}$-замкнутым множеством;*

(б) *точка $y \in Y$ является $\mathfrak{U}$-предельной точкой для множества A в том и только в том случае, когда она является $\mathfrak{I}$-предельной точкой для A;*

(в) *$\mathfrak{U}$-замыкание множества A есть пересечение множества Y и $\mathfrak{I}$-замыкания множества A.*

Доказательство. Множество A замкнуто в Y тогда и только тогда, когда его относительное дополнение $Y \setminus A$ имеет вид $V \cap Y$, где V — некоторое $\mathfrak{I}$-открытое множество. Но последнее имеет место тогда и только тогда, когда $A = (X \setminus V) \cap Y$ для некоторого V из $\mathfrak{I}$. Этим доказано утверждение (а). Утверждение (б) непосредственно следует из определения индуцированной топологии и из определения предельной точки. $\mathfrak{U}$-замыкание множества A представляет собой объединение множества A и множества всех его $\mathfrak{U}$-предельных точек; следовательно, в силу (б) оно является пересечением множества Y с $\mathfrak{I}$-замыканием множества A.

Если $(Y, \mathfrak{U})$ — подпространство пространства $(X, \mathfrak{I})$ а множество Y открыто в X, то каждое открытое в Y множество открыто и в X, как пересечение открытого в X множества с множеством Y. Верно и аналогичное утверждение для замкнутых множеств. Как правило, однако, то обстоятельство, что множество открыто или замкнуто в подпространстве, еще очень мало говорит

*) Наконец, всего этого может не быть! (*Прим. перев.*)

о расположении этого множества во всем пространстве X. Если множество X является объединением множеств Y и Z, и A — такое подмножество пространства X, что $A \cap Y$ открыто в Y и $A \cap Z$ открыто в Z, то, казалось бы, можно надеяться, что множество A открыто в X. Однако это не всегда так. В самом деле, пусть Y — произвольное подмножество пространства X и $Z = X \setminus Y$; тогда множества $Y \cap Y$ и $Y \cap Z$ открыты в Y и Z соответственно. В одном важном случае наша гипотеза оправдывается. Говорят, что подмножества A и B *отделены* в топологическом пространстве X, в том и лишь в том случае, когда оба множества $\bar{A} \cap B$ и $A \cap \bar{B}$ пусты. Это определение отделенности предполагает, что на множестве X задана операция замыкания. Однако зависимость от топологии на X в значительной степени иллюзорна: множества A и B отделены в X в том и только в том случае, когда ни в A, ни в B не только нет точек другого множества, но нет и предельных точек другого множества. Это утверждение можно переформулировать в терминах индуцированной топологии на $A \cup B$ в силу утверждения (б) теоремы 16 следующим образом: оба множества A и B замкнуты в $A \cup B$ (или, что эквивалентно, множество A (или B) открыто и замкнуто одновременно в подпространстве $A \cup B$) и не пересекаются. Для примера отметим, что интервалы $(0,1)$ и $(1,2)$ — отделенные подмножества пространства вещественных чисел в обычной топологии, хотя и существует точка 1, принадлежащая замыканию обоих. Однако множество $(0,1)$ не отделено от замкнутого отрезка $[1, 2]$, ибо точка 1, принадлежащая множеству $[1, 2]$, служит предельной точкой для $(0,1)$.

В последующем нам понадобятся три теоремы об отделенности.

17. Теорема. *Пусть подмножества Y и Z топологического пространства X либо оба открыты в X, либо оба замкнуты в X. Тогда множество $Y \setminus Z$ отделено от множества $Z \setminus Y$.*

Доказательство. Предположим, что Y и Z — замкнутые подмножества пространства X. Тогда множества Y и Z замкнуты и в подпространстве $Y \cup Z$. Следовательно, $Y \setminus Z = (Y \cup Z) \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ — множества, открытые в $Y \cup Z$. Отсюда следует, что оба множества: $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ — открыты в подпространстве $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$, а так как они являются взаимно дополняющими подмножествами этого подпространства, то каждое из них замкнуто в $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$. Следовательно, $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. В случае, когда Z и Y открыты в X, применимо двойственное рассуждение.

18. Теорема. *Пусть топологическое пространство X является объединением таких своих подмножеств Y и Z, что множества $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. Тогда замыкание в X множества $A \subset X$ является объединением замыкания в Y множества $A \cap Y$ и замыкания в Z множества $A \cap Z$.*

Доказательство. Замыкание объединения двух множеств является объединением их замыканий. Следовательно, $\bar{A} = (\overline{A \cap Y}) \cup (\overline{A \cap Z \setminus Y})$. Значит, $\bar{A} \cap Y = [(\overline{A \cap Y}) \cap Y] \cup [(\overline{A \cap Z \setminus Y}) \cap Y]$. Множество $\overline{Z \setminus Y}$ не пересекается с $Y \setminus Z$; следовательно, $(\overline{Z \setminus Y}) \subset Z$, откуда вытекает, что $(\overline{A \cap Z \setminus Y})$ является подмножеством множества $(\overline{A \cap Z}) \cap Z$. Подобным же образом доказывается, что множество $\bar{A} \cap Z$ можно представить как объединение множества $(\overline{A \cap Z}) \cap Z$ и некоторого подмножества множества $(\overline{A \cap Y}) \cap Y$. Следовательно, $\bar{A} = (\bar{A} \cap Y) \cup (\bar{A} \cap Z) = [(\overline{A \cap Y}) \cap Y] \cup [(\overline{A \cap Z}) \cap Z]$. Теорема доказана.

19. Следствие. *Пусть топологическое пространство X является объединением таких множеств Y и Z, что множества $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. Тогда подмножество A пространства X замкнуто (открыто) в том и только в том случае, когда замкнуто (открыто) множество $A \cap Y$ в Y и замкнуто (открыто) множество $A \cap Z$ в Z.*

Доказательство. Если множества $A \cap Y$ и $A \cap Z$ замкнуты в подпространствах Y и Z соответственно, то в силу предыдущей теоремы A непременно совпадает со своим замыканием и потому замкнуто. Если $A \cap Y$ и $A \cap Z$ открыты в Y и Z соответственно, то множества $Y \cap X \setminus A$ и $Z \cap X \setminus A$ замкнуты в пространствах Y и Z и, значит, множество $X \setminus A$ замкнуто, а множество A открыто.

СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *связным* тогда и только тогда, когда множество X нельзя представить в виде объединения двух непустых отделенных подмножеств. Говорят, что подмножество Y пространства X связно, в том и только в том случае, когда топологическое пространство Y с индуцированной топологией связно. Эквивалентно: множество Y связно тогда и только тогда, когда Y не является объединением никаких двух отделенных подмножеств. Еще один критерий связности вытекает из рассмотрения отношения отделенности: множество Y связно в том и только в том случае, когда единственными подмножествами подпространства Y, открытыми и замкнутыми в нем одновременно, являются все Y и пустое множество. Отсюда сразу следует, что любое антидискретное пространство связно. Дискретное пространство, в котором больше одной точки, не связно. Вещественные числа с обычной топологией образуют связное пространство (задача 1.K), но пространство рациональных чисел, топология которого индуцируется обычной топологией вещественных чисел, не связно. (Ибо для любого иррационального числа a множества $\{x : x<a\}$ и $\{x : x>a\}$ отделены.)

20. Теорема. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Пусть Y — связное подмножество некоторого топологического пространства и $\bar{Y}=A \cup B$, где каждое из множеств A и B одновременно открыто и замкнуто в $\bar{Y}$. Тогда каждое из множеств $A \cap Y$ и $B \cap Y$ открыто и замкнуто в Y и, так как Y связно, одно из этих двух множеств должно быть пусто. Пусть $B \cap Y$ пусто. Тогда Y является подмножеством множества A, а значит, и $\bar{Y}$ является подмножеством множества A, так как A замкнуто в $\bar{Y}$. Следовательно, B пусто, а это означает, что множество $\bar{Y}$ связно.

Есть иная формулировка этой теоремы, которая на первый взгляд сильнее данной нами. Вот она: если Y — связное подмножество пространства X и Z — такое подмножество, что $Y \subset Z \subset \bar{Y}$, то Z связно. Однако это утверждение получается немедленно, если применить предшествующую теорему к пространству Z с индуцированной топологией.

21. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство связных подмножеств топологического пространства. Если никакие два элемента семейства $\mathfrak{A}$ не отделены, то множество $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ связно.*

Доказательство. Обозначим через C объединение элементов семейства $\mathfrak{A}$, и пусть D — его подмножество, одновременно открытое и замкнутое в C. Тогда для каждого A из $\mathfrak{A}$ множество $A \cap D$ открыто и замкнуто в A. Так как множество A связно, то либо $A \subset D$, либо $A \subset C \setminus D$. Если теперь A и B — элементы семейства $\mathfrak{A}$, то включения $A \subset D$ и $B \subset C \setminus D$ не могут выполняться одновременно, — в противном случае множества A и B, будучи соответственно подмножествами отделенных множеств D и $C \setminus D$, были бы сами отделены. Следовательно, либо каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является подмножеством множества $C \setminus D$, и тогда множество D пусто, либо каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является подмножеством множества D, и тогда множество $C \setminus D$ пусто.

Компонентой топологического пространства называется любое его максимальное связное подмножество, т. е. такое связное подмножество, которое не является собственной частью никакого другого связного подмножества. Компонентой подмножества A топологического пространства называется любая компонента множества A, наделенного индуцированной топологией. Если пространство связно, то оно является единственной своей компонентой. Если пространство дискретно, то каждая его компонента состоит из одной точки. Конечно, существует много и недискретных пространств, все компоненты которых одноточечны, — таково, например, пространство рациональных чисел с (индуцированной) обычной топологией.

22. Теорема. *Каждое связное подмножество топологического пространства содержится в некоторой компоненте этого пространства, и каждая компонента замкнута. Различные компоненты топологического пространства отделены.*

Доказательство. Пусть A — непустое связное подмножество топологического пространства и C — объединение всех связных множеств, содержащих A. В силу предшествующей теоремы множество C непременно связно, и если D — какое-нибудь связное множество, содержащее C, то $D \subset C$ и тогда $D = C$. Значит, C — компонента. (Если множество A пусто, а пространство не пусто, то каждое одноточечное подмножество пространства содержится в некоторой его компоненте, значит, и A содержится в этой компоненте.) Каждая компонента C связна, и в силу теоремы 1.20 ее замыкание $\bar{C}$ тоже связно. Значит, C совпадает с $\bar{C}$, т. е. множество C замкнуто. Если A и B — различные компоненты и не отделены, то их объединение в силу теоремы 1.21 связно, что ведет к противоречию

Хорошо завершить наши замечания о компонентах следующим предостережением. Если точки x и y принадлежат одной компоненте топологического пространства, то они всегда попадают в одну половину любого разделения пространства, т. е. если пространство является объединением отделенных множеств A и B, то либо обе точки x, y принадлежат A, либо обе они принадлежат B. Обратное к этому утверждение не верно. Может случиться, что две точки всегда попадают в одну половину любого разделения пространства и тем не менее лежат в разных его компонентах. (См. задачу 1.Р.)

ЗАДАЧИ

А. Наибольшая и наименьшая топологии

(а) Пересечение любого семейства топологий на X является топологией на X.

(б) Объединение двух топологий на X может не быть топологией на X (если в X больше двух точек).

(в) Для любого семейства топологий на X существует единственная наибольшая из всех топологий, меньших каждой топологии из этого семейства, и существует единственная наименьшая из всех топологий, бо́льших каждой топологии из этого семейства.

Б. Топологии, возникающие из систем окрестностей

(а) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство; для каждой точки $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{U}_x$ семейство всех ее окрестностей. Тогда:

1) Если $U \in \mathfrak{U}_x$, то $x \in U$.

2) Если U и V — элементы системы $\mathfrak{U}_x$, то и $U \cap V \in \mathfrak{U}_x$.

3) Если $U \in \mathfrak{U}_x$ и $U \subset V$, то $V \in \mathfrak{U}_x$.

4) Если $U \in \mathfrak{U}_x$, то найдется элемент $V \in \mathfrak{U}_x$ такой, что $V \subset U$ и $V \in \mathfrak{U}_y$ для каждой y из V (иными словами, множество V должно быть окрестностью каждой из своих точек).

(б) Если функция $\mathfrak{U}$ ставит в соответствие произвольной точке $x \in X$ некоторое семейство $\mathfrak{U}_x$ и удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то семейство $\mathfrak{J}$ всех таких множеств, что $U \in \mathfrak{U}_x$, коль скоро $x \in U$, есть некоторая топология на X. Если условие 4) тоже выполняется, то $\mathfrak{U}_x$ представляет собой в точности систему окрестностей точки x относительно топологии $\mathfrak{J}$.

Замечание. Различные способы задания топологического пространства интенсивно исследовались. Три аксиомы замыкания Куратовского можно заменить одним условием, как показали Монтейро [1] и Исеки [1]. Можно положить в основу также понятие отделенности (Уоллес [1], Кришна Мурти [1] и Шиманский [1]). Понятие производного множества тоже можно было бы принять за исходное (см. об этом, например, работы Монтейро [2] и Рибейро [3]). Соотношения между различными операциями исследовались Стофером [1].

В. Задание топологии через оператор ядра

Пусть ^{i} — оператор, который переводит подмножества множества X в подмножества множества X, и $\mathfrak{J}$ — семейство всех таких множеств, что $A^i = A$.

При каких условиях $\mathfrak{J}$ будет топологией, а ^{i} (одновременно) — оператором перехода к ядру?

Г. Предельные точки в T_1-пространствах

Топологическое пространство называется *T_1-пространством* тогда и только тогда, когда каждое его одноточечное подмножество замкнуто. (Иногда, допуская вольность речи, мы в этом случае говорим, что «точка замкнута».)

(а) На каждом множестве X есть единственная наименьшая топология $\mathfrak{J}$ такая, что $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство.

(б) Если множество X бесконечно и $\mathfrak{J}$ — наименьшая топология такая, что $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство, то $(X, \mathfrak{J})$ связно.

(в) Если $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство, то множество предельных точек произвольного его подмножества замкнуто. Более сильный результат (Янг): для того чтобы множество предельных точек произвольного подмножества было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто множество предельных точек множества $\{x\}$, где x — любая точка из X

Замечание. Существует возрастающая цепочка ограничений этого рода на топологию пространства. Топологическое пространство называется *T_0-пространством* в том и лишь в том случае, когда для каждой пары различных точек x и y этого пространства по крайней мере у одной из них есть окрестность, не содержащая другой *). Чуть-чуть иначе это можно сказать так: пространство

*) T_0-пространства выделены А. Н. Колмогоровым. (*Прим. перев.*)

является T_0-пространством тогда и только тогда, когда для любых различных точек x и y будет либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$. Позднее мы определим T_2- и T_3-пространства. Терминология принадлежит П. С. Александрову и Х. Хопфу [1].

Д. Задача Куратовского о замыканиях и дополнениях

Пусть A — подмножество топологического пространства. Оказывается, можно построить самое большее 14 множеств, применяя к A операции замыкания и перехода к (относительному) дополнению. Существует подмножество пространства вещественных чисел (с обычной топологией), из которого можно таким образом получить ровно 14 различных множеств. (Заметим, прежде всего, что если A — замыкание открытого множества, то A является замыканием ядра множества A. Значит, для таких A будет $A = \overline{(\overline{A'})'}$, где $'$ символизирует переход к дополнению.)

Е. Упражнение, касающееся пространств со счетной базой

Если топология пространства имеет счетную базу, то каждая база этого пространства содержит некоторую его счетную базу.

Ж. Упражнение, касающееся понятия плотности

Если множество A плотно в топологическом пространстве, а множество U открыто, то $U \subset \overline{A \cap U}$.

З. Предельные точки

Пусть каждое подпространство топологического пространства X является линделёфовым пространством, A — некоторое его несчетное подмножество и B — множество всех точек $x \in A$, любая окрестность которых содержит несчетное множество элементов множества A *). Тогда множество $A \setminus B$ счетно и, значит, любая окрестность произвольной точки множества B содержит несчетное множество точек из B.

Замечание. Можно классифицировать предельные точки множества A в соответствии с наименьшей мощностью пересечения множества A с окрестностями таких точек. Если есть ограничения на мощность базы пространства, то должны выполняться определенные неравенства для мощностей этих множеств. Теоремы 1.13, 1.14 и 1.15 можно обобщить на пространства с базой произвольной мощности.

И. Порядковая топология

Пусть X — множество, линейно упорядоченное антисимметричным отношением $<$ (антисимметричность означает, что соотношение $x < x$ не имеет места ни для какого x).

---

*) У нас такие точки называются *точками конденсации* множества A *(Прим. перев.)*

Порядковая топология *) ($<$-порядковая топология) имеет предбазой семейство всех множеств вида $\{x : x<a\}$ и $\{x : a<x\}$, где a пробегает X.

(а) Порядковая топология на X — это наименьшая из всех топологий, относительно которых порядок непрерывен в следующем смысле: для любых a и b из X таких, что $a<b$, существуют окрестность U точки a и окрестность V точки b, для которых из $x \in U$ и $y \in V$ следует, что $x<y$.

(б) Пусть Y — подмножество множества X, линейно упорядоченного отношением $<$. Тогда Y само линейно упорядочено отношением $<$, однако $<$-порядковая топология на Y может не совпадать с топологией, индуцированной на Y $<$-порядковой топологией множества X.

(в) Если пространство X связно относительно порядковой топологии, то порядок на X полон. (Это означает, что каждое ограниченное непустое подмножество множества X имеет наименьшую верхнюю грань.)

(г) Если в X существуют такие точки a и b, что $a<b$, и нет точки $c \in X$, которая удовлетворяла бы соотношениям $a<c<b$, то X не связно. Про такое упорядочение говорят, что в нем есть *дыра*. Показать, что X связно относительно порядковой топологии тогда и только тогда, когда порядок, заданный на X, полон и в X нет дыр.

К. Свойства вещественных чисел

Пусть R — множество вещественных чисел с обычной топологией.

(а) Подгруппа аддитивной группы вещественных чисел, в которой больше одного элемента, либо плотна в R, либо имеет наименьший положительный элемент. В частности, множество рациональных чисел плотно в R.

(б) Обычная топология множества вещественных чисел совпадает с его порядковой топологией. У обычной топологии есть счетная база.

(в) Замкнутая подгруппа группы R либо счетна, либо совпадает с R. Связная подгруппа группы R есть либо $\{0\}$, либо R, а любая открытая подгруппа обязательно совпадает с R.

(г) (*Морс*). *Собственным* интервалом называется полуоткрытый, открытый или замкнутый интервал вещественной прямой, содержащий больше одной точки. Пусть $\mathfrak{A}$ — какое угодно семейство собственных интервалов. Тогда существует такое счетное подсемейство $\mathfrak{B}$ семейства $\mathfrak{A}$, что $\bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}\} = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$. (Заметьте, что семейство непересекающихся интервалов всегда счетно, и покажите, что все точки множества $U = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$, за исключением счетного подмножества, являются внутренними точками множества U).

(д) Семейство $\mathfrak{S}$ всех собственных интервалов образует предбазу дискретной топологии $\mathfrak{J}$ на R. Пространство $(R, \mathfrak{J})$ не

---

*) Можно говорить также «топология порядка». (*Прим. перев.*)

является линделёфовым, хотя из каждого его покрытия элементами семейства $\mathfrak{S}$ можно выбрать счетное подпокрытие. (Положение вещей, противоположное теореме 5.6 Александера.)

Замечание. Дальнейшие свойства вещественных чисел указаны в формулировке следующей задачи.

Л. Стрелка (пространство полуоткрытых интервалов)

Пусть X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{J}$ — топология на X, базой которой является семейство $\mathfrak{B}$ всех полуоткрытых интервалов вида $[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$, где a и b — вещественные числа. $\mathfrak{J}$-предельные точки множества называются *предельными точками справа* для него; предельные точки слева определяются аналогично.

(а) Элементы базы $\mathfrak{B}$ одновременно открыты и замкнуты. Пространство $(X, \mathfrak{J})$ не связно.

(б) Пространство $(X, \mathfrak{J})$ сепарабельно, но у $\mathfrak{J}$ нет счетной базы. (Для каждой точки $x \in X$ в любой базе должен быть элемент, наибольшей нижней гранью которого она является.)

(в) Каждое подпространство пространства $(X, \mathfrak{J})$ является линделёфовым пространством. (См. 1. К(г).)

(г) Пусть A — подмножество множества вещественных чисел; множество всех его предельных точек, не являющихся предельными точками справа по отношению к A, счетно. Более общее утверждение: множество всех точек из A, которые не являются предельными для него одновременно и справа и слева, счетно. (См. 1. З.)

(д) Каждое подпространство пространства $(X, \mathfrak{J})$ сепарабельно.

М. Пространство полуоткрытых прямоугольников

Пусть $Y = X \times X$, где X — пространство из предыдущей задачи, и $\mathfrak{U}$ — топология, базу которой образует семейство всех множеств вида $A \times B$, где A и B — элементы топологии $\mathfrak{J}$, описанной в предыдущем примере.

(а) Пространство $(Y, \mathfrak{U})$ сепарабельно.

(б) В пространстве $(Y, \mathfrak{U})$ есть несепарабельное подпространство (например, таково $\{(x, y) : x + y = 1\}$).

(в) Пространство $(Y, \mathfrak{U})$ не линделёфово. (Если в каждом открытом покрытии пространства Y есть счетное подпокрытие, то и любое его замкнутое подпространство обладает тем же свойством. Рассмотрите множество $\{(x, y) : x + y = 1\}$, наделенное индуцированной топологией.)

Замечание. Пространства, описанные в формулировках задач 1. Л и 1. М, относятся к числу постоянно применяемых противоречащих примеров общей топологии. Другие патологические черты этих пространств мы перечисляем, формулируя задачу 4. И. Халмош первым заметил, что произведение (в смысле, который будет уточнен в главе 3) линделёфовых пространств может не быть линделёфовым пространством.

Н. Пример, касающийся первой и второй аксиом счетности

Обозначим через Ω' множество всех порядковых чисел, меньших или равных первого несчетного порядкового числа Ω; пусть $X=\Omega' \setminus \{\Omega\}$ и ω — множество всех неотрицательных целых чисел; каждое из этих множеств наделим порядковой топологией.

(а) Пространство ω дискретно и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(б) Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности и не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(в) Пространство Ω' не удовлетворяет ни первой, ни второй аксиомам счетности; каждое сепарабельное подмножество U пространства Ω' само счетно.

О. Условие Суслина

Топологическое пространство удовлетворяет *условию Суслина* тогда и только тогда, когда каждое семейство непересекающихся открытых множеств этого пространства счетно. Каждое сепарабельное пространство удовлетворяет условию Суслина, но не наоборот. (Пример: несчетное множество, топологию которого составляют пустое множество и дополнения до всевозможных счетных подмножеств.) Есть более сложные примеры пространств (см., например, пространство Хелли из 5. Н), удовлетворяющих первой аксиоме счетности и сепарабельных, но лишенных счетной базы.

П. Евклидова плоскость

Евклидова плоскость — это множество всех упорядоченных пар вещественных чисел, а обычная топология на плоскости имеет базой семейство всевозможных произведений $A \times B$, где A и B — открытые интервалы с рациональными концами. Эта база счетна; следовательно, плоскость сепарабельна

(а) Базой обычной топологии плоскости служит семейство всевозможных открытых кругов — множеств вида $\{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$, где a, b и r — рациональные числа.

(б) Пусть X — множество всех тех точек плоскости, хотя бы одна координата которых иррациональна; наделим X индуцированной топологией. Тогда X связно.

Р. Пример на понятие компоненты

Через X обозначим следующее подмножество евклидовой плоскости с топологией, индуцированной обычной топологией этой плоскости. Для каждого целого положительного числа n положим $A_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1]$, где $[0, 1]$ — замкнутый интервал; множество X мы получим, присоединив точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ к объединению множеств A_n. Множества $\{(0, 0)\}$ и $\{(0, 1)\}$ являются компонентами пространства X, но любое открытое и замкнутое подмножество пространства X либо не содержит ни одной из этих точек, либо содержит обе.

С. Теорема об отделенных множествах

Если X — связное топологическое пространство, Y — его связное подмножество и $X \setminus Y = A \cup B$, где A и B — отделенные множества, то $A \cup Y$ связно.

Т. Теорема о конечных цепях для связных множеств

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство связных подмножеств топологического пространства, удовлетворяющее условию: если A и B принадлежат $\mathfrak{A}$, то существует конечная последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_n$ элементов $\mathfrak{A}$ такая, что $A_0 = A$, $A_n = B$ и для каждого i множества A_i и A_{i+1} не отделены. Тогда множество $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ связно. Выведите отсюда утверждение 1.21.

У. Локально связные пространства

Топологическое пространство называется *локально связным* тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U компонента множества U, содержащая точку x, является ее окрестностью.

(а) Каждая компонента открытого множества локально связного пространства открыта.

(б) Топологическое пространство локально связно в том и только в том случае, когда семейство всех его открытых связных подмножеств образует базу.

(в) Если точки x и y локально связного пространства X принадлежат разным его компонентам, то существуют такие отделенные подмножества A и B пространства X, что $x \in A$, $y \in B$ и $X = A \cup B$.

Замечание. По поводу многих других свойств локально связных пространств и обобщений см. Уайберн [1] и Уайлдер [1].

Ф. Теорема Брауэра о редукции

Обычная формулировка этой теоремы такова. Пусть топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Свойство P подмножеств пространства X называется *индуктивным* тогда и только тогда, когда из того, что каждый элемент счетного гнезда замкнутых множеств обладает свойством P, следует, что им обладает и их пересечение. Множество A называется *неприводимым* относительно свойства P в том и только в том случае, когда никакое собственное замкнутое подмножество множества A не обладает свойством P. Тогда если замкнутое подмножество A пространства X имеет свойство P, то в A существует неприводимое замкнутое подмножество со свойством P.

Эту теорему можно выразить более формально в терминах семейства множеств (семейства всех множеств, обладающих P).

(а) Сформулируйте и докажите теорему в этой формулировке. Предположите, что каждое подпространство рассматриваемого пространства линделёфово.

(б) Верно ли какое-нибудь общее утверждение этого рода для произвольного топологического пространства $(X, \mathfrak{I})$? (См. 0,25.)

Г л а в а 2

СХОДИМОСТЬ ПО МОРУ—СМИТУ

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена изучению сходимости по Мору — Смиту. Мы узнáем, что топологию пространства всегда можно описать в терминах сходимости, — такому описанию и посвящена бóльшая часть данной главы. Мы охарактеризуем также те связанные со сходимостью понятия, которые можно описать в терминах сходимости относительно некоторой топологии. Наш проект преследует ту же цель, что и теория операторов замыкания Куратовского; он даст нам удобный и интуитивно естественный путь выделения определенных топологий. Однако значение теории сходимости простирается далеко за пределы этого частного применения — фундаментальные конструкции анализа основаны на предельном переходе. Мы заинтересованы в построении теории, которая была бы приложима к вопросам сходимости последовательностей, двойных последовательностей, при суммировании рядов, к вопросам, связанным с дифференцированием и интегрированием. Теория, развиваемая ниже, никоим образом не является единственно возможной, но она, без сомнения, наиболее естественная.

Понятие сходящейся последовательности образует основу, на которой строится вся теория; поэтому мы выпишем немногие определения и теоремы о последовательностях, чтобы дать эту основу. В дальнейшем эти теоремы окажутся частными случаями более общих теорем.

Последовательность есть функция, определенная на множестве ω неотрицательных целых чисел. Последовательность вещественных чисел — эта такая последовательность, областью значений которой служит некоторое подмножество множества вещественных чисел. Значение последовательности S на элементе n обозначается либо через S_n, либо через $S(n)$. Говорят, что последовательность S является последовательностью в множестве A, тогда и только тогда, когда $S_n \in A$ для каждого неотрицательного целого числа n. Говорят, что последовательность S с некоторого момента лежит в множестве A, тогда и только тогда, когда существует такое целое число m, что $S_n \in A$ для всех $n \geqslant m$. Последовательность вещественных чисел *сходится* к числу s относительно обычной топологии *) в том и только в том случае, когда, начиная с некоторого момента, она лежит в произвольной окрестности точки s. При пользовании этими определениями выясняется, что в пространстве вещественных чисел (с обычной топологией) точка s тогда и только тогда принадлежит замыканию множества A, когда в A есть последовательность, сходящаяся к s, и что точка s является предельной для множества A тогда и только тогда, когда в $A \setminus \{s\}$ существует последовательность, сходящаяся к s.

Мы хотим строить подпоследовательности последовательностей. Последовательность S может не сходиться ни к какой точке, и все же может оказаться возможным выделить из нее сходящуюся последовательность в результате подходящего построения. Мы желаем так выбрать целое число N_i для каждого i из ω, чтобы последовательность S_{N_i} сходилась. Это можно сформулировать иначе: мы хотим найти такую последовательность N целых чисел, что композиция $S \circ N(i) = S_{N_i} = S(N(i)$ сходится. Если никаких других ограничений нет, то это сделать легко: положим $N_i = 0$ для каждого i. Тогда последовательность $S \circ N$ сходится к S_0, так как $S \circ N(i) = S_0$ при каждом i. Конечно, надо наложить дополнительное условие, которое связало бы поведение подпоследовательности с поведением последовательности при больших номерах. Обычное условие заключается в том, что последовательность N должна быть строго монотонно возрастающей, т. е. если $i > j$, то должно быть $N_i > N_j$. Это — неоправданно сильное условие; вместо него

*) Иногда говорят, что последовательность «сходится в обычной топологии». (*Прим. перев.*)

мы потребуем, чтобы, когда i становилось велико, N_i тоже становилось велико. Формально: T есть подпоследовательность последовательности S тогда и только тогда, когда существует последовательность N неотрицательных целых чисел, для которой $T = S \circ N$ (эквивалентно, $T_i = S_{N_i}$ при каждом i), такая, что, каково бы ни было целое число m, найдется целое число n со свойством: $N_i \geqslant m$, коль скоро $i \geqslant n$.

Точки, к которым сходятся подпоследовательности заданной последовательности, удовлетворяют условию, получающемуся ослаблением требования сходимости. Говорят, что последовательность S часто находится в множестве A, тогда и только тогда, когда для каждого неотрицательного целого числа m существует такое целое число n, что $n \geqslant m$ и $S_n \in A$. Это в точности то же самое, что сказать, что S ни с какого момента не находится в дополнении к множеству A. Интуитивно, последовательность часто находится в множестве A, если она никогда не перестает в него возвращаться. Точка s является предельной точкой последовательности S тогда и только тогда, когда S часто попадает в произвольную окрестность точки s. Если последовательность вещественных чисел с некоторого момента лежит в множестве, то это верно и для любой ее подпоследовательности. Следовательно, если последовательность сходится, то сходится и каждая ее подпоследовательность. Каждая предельная точка последовательности *) является пределом некоторой ее подпоследовательности.

Определения и утверждения, приведенные выше, сформулированы так, чтобы их можно было применить к любому топологическому пространству. К сожалению, однако, соответствующие теоремы в этой общности не верны. (См. задачи в конце этой главы.) Однако положение перестает казаться столь неблагоприятным после того, как мы замечаем, что лишь немногие свойства целых чисел нужны в доказательствах теорем о последовательностях вещественных чисел. Почти очевидно (хотя

*) Имеются в виду последовательности в пространстве вещественных чисел. В общих топологических пространствах (неметризуемых) это положение может нарушаться. (*Прим. перев.*)

мы и не дали никаких тому доказательств), что нам нужны только определенные свойства, связанные с наличием порядка. Строго говоря, в определение сходимости последовательностей входит не только понятие функции S на множестве неотрицательных целых чисел ω. В нем участвует еще и упорядочение $\geqslant$, заданное на множестве ω. Для удобства, работая со сходимостью, мы будем пользоваться несколько измененным определением последовательности — согласимся, что последовательность есть упорядоченная пара $(S, \geqslant)$, где S — функция на множестве положительных целых чисел; речь будет идти о сходимости пары $(S, \geqslant)$. (Окажется, что сходимость пары $(S, \leqslant)$ также имеет смысл, но совершенно другой.) Когда можно не опасаться недоразумений, символ, указывающий на упорядочение, будет опускаться, — сходимость последовательности S всегда следует понимать как сходимость пары $(S, \geqslant)$.

Удобно также иметь развернутое обозначение для последовательности (в терминах связанной переменной). В соответствии с этим, если S — функция на множестве неотрицательных целых чисел ω, будем понимать $\{S_n, n \in \omega, \geqslant\}$ как запись пары $(S, \geqslant)$.

После этого длинного введения общее определение сходимости почти самоочевидно, неясно только одно: какие свойства упорядочения $\geqslant$ нужны? Эти свойства выписаны ниже. При пользовании ими после небольших изменений остаются справедливыми обычные рассуждения, касающиеся сходимости последовательностей.

1. Замечания. Предпринятое Э. Мором изучение суммируемости неупорядоченных рядов (Э. Мор [1]) повело к построению общей теории сходимости (Мор и Смит [1]). Обобщение понятия подпоследовательности, которым мы будем пользоваться, тоже принадлежит Э. Мору [2]. Гаррет Биркгоф [3] применил теорию сходимости по Мору — Смиту к общей топологии. Форма нашего изложения теории приблизительно та же, что у Тьюки [1]. См. работу Мак Шейна [1] — обзор, который очень хорошо читается.

В задачах в конце главы коротко обсуждается другая теория сходимости и даются соответствующие ссылки.

НАПРАВЛЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И НАПРАВЛЕННОСТИ

Бинарное отношение $\geqslant$, заданное на множестве D, называется *направлением* на нем, если D не пусто, и

(а) если m, n и p — такие элементы множества D, что $m \geqslant n$ и $n \geqslant p$, то $m \geqslant p$;

(б) если $m \in D$, то $m \geqslant m$;

(в) если m и n принадлежат D, то найдется элемент p в D, для которого $p \geqslant m$ и $p \geqslant n$.

Мы говорим, что m следует за n при упорядочении $\geqslant$, или что элемент n предшествует элементу m, тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$. На обычном языке отношений (см. главу 0) условие (а) означает, что отношение $\geqslant$ транзитивно на множестве D, иначе говоря, $\geqslant$ является частичным упорядочением на D, и (б) означает, что отношение $\geqslant$ рефлексивно на D. Условие (в) носит специальный характер.

Есть несколько естественных примеров множеств, направленных отношениями. И множество вещественных чисел, и множество ω неотрицательных целых чисел направлены отношением порядка $\geqslant$. Обратите внимание на то обстоятельство, что элемент 0 следует за любым другим элементом из ω относительно порядка $\leqslant$. Стоит отметить и тот факт, что семейство всех окрестностей произвольной точки топологического пространства направлено отношением включения $\subset$ (пересечение двух окрестностей является окрестностью, которая следует за каждой из них в смысле упорядочения $\subset$). С другой стороны, семейство всех конечных подмножеств произвольного множества направлено отношением $\supset$. Любое множество превращается в направленное, если согласиться, что $x \geqslant y$ для любых двух его элементов x и y, так что каждый элемент следует как за самим собой, так и за любым другим элементом.

Направленное множество — это пара $(D, \geqslant)$, где $\geqslant$ — направление на множестве D. (Иногда называют это *направленной системой*.) *Направленностью* называется пара $(S, \geqslant)$, где S — функция и $\geqslant$ — направление на ее области определения. (Направленность тоже иногда называют направленным множеством *).) Если область определения функции S содержит D и множество D направлено отношением $\geqslant$, то $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ есть направленность $(S|D, \geqslant)$, где $S|D$ — это сужение функции S на множество D. Говорят, что направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ является направленностью *в* множестве A, тогда и только тогда, когда $S_n \in A$ для всех n; говорят, что направленность находится *в* множестве A *с некоторого момента*, тогда и только тогда, когда существует $m \in D$, для которого из $n \in D$ и $n \geqslant m$ следует, что $S_n \in A$. Направленность *часто встречается* с A в том и лишь в том случае, когда для каждого m из D найдется элемент $n \in D$ такой, что $n \geqslant m$ и $S_n \in A$. Если направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ часто встречается с множеством A, то множество E всех элементов n из D, для которых $S_n \in A$, обладает следующим свойством: для каждого m из D найдется элемент $p \in E$ такой, что $p \geqslant m$. Такие подмножества множества D называются *конфинальными*. Каждое конфинальное подмножество E множества D тоже направлено отношением $\geqslant$, ибо для любых двух элементов m и n из E найдется элемент $p \in D$ такой, что $p \geqslant m$ и $p \geqslant n$, а за ним найдется элемент q из E — он и будет искомым. Имеем следующую очевидную эквивалентность: направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ часто встречается с множеством A тогда и только тогда, когда некоторое конфинальное подмножество множества D отображается посредством S в A, а так будет в том и лишь в том случае, когда направленность не находится с некоторого момента в дополнении к A.

Направленность $\{S, \geqslant\}$ *сходится* в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{J})$ к точке s относительно топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда она с некоторого момента находится в произвольной $\mathfrak{J}$-окрестности точки s. Понятие сходимости предполагает наличие функции S, топологии $\mathfrak{J}$ и упорядочения $\geqslant$. Однако в случаях, когда можно не опасаться недоразумений, мы будем опускать символ $\mathfrak{J}$, указывающий на топологию, или символ $\geqslant$, или оба эти символа и просто говорить, что «направлен-

*) В русской литературе встречается также название «последовательность по направленному множеству». (*Прим. перев.*)

ность S (направленность $\{S_n, n \in D\}$) сходится к точке s». Если X — дискретное пространство (т. е. каждое его подмножество открыто), то направленность S сходится к точке s тогда и только тогда, когда с некоторого момента S лежит в множестве $\{s\}$; это означает, что, начиная с некоторого момента, все значения направленности S совпадают с s. С другой стороны, если пространство X антидискретно (т. е. его единственными открытыми подмножествами являются все X и пустое множество), то любая направленность в X сходится к каждой точке из X. Таким образом, направленность может сходиться к многим различным точкам одновременно.

Можно легко описать в терминах сходимости понятия предельной точки, замыкания множества и топологии пространства. Рассуждения здесь отличаются лишь легкими изменениями от соответствующих рассуждений о последовательностях вещественных чисел.

2. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*:

(а) *Точка s является предельной точкой подмножества A пространства X в том и только в том случае, когда в $A \setminus \{s\}$ есть направленность, сходящаяся к s.*

(б) *Точка s принадлежит замыканию подмножества A пространства X в том и только в том случае, когда в A есть направленность, сходящаяся к s.*

(в) *Множество A замкнуто в X тогда и только тогда, когда никакая направленность, содержащаяся в A, не сходится ни к какой точке из $X \setminus A$.*

Доказательство. Если s — предельная точка для A, то в любой окрестности U точки s найдется точка S_U множества A, принадлежащая $U \setminus \{x\}$. Семейство $\mathfrak{U}$ всех окрестностей точки s направлено отношением включения $\subset$, и если U и V — такие окрестности точки s, что $V \subset U$, то $S_V \in V \subset U$. Поэтому направленность $\{S_U, U \in \mathfrak{U}, \subset\}$ сходится к s. С другой стороны, если направленность в $A \setminus \{s\}$ сходится к s, то в каждой окрестности точки s содержатся точки этой направленности и множество $A \setminus \{s\}$, несомненно, пересекается с любой окрестностью точки s. Этим утверждение (а) доказано. Чтобы доказать (б), напомним, что замыкание произвольного множества A состоит из всех точек A и предельных точек для A. Для каждой предельной точки множества A по предыдущему существует направленность в A, сходящаяся к ней. Для каждой точки s из A направленность, которая на любом элементе своей области определения принимает значение s, сходится к s. Следовательно, для каждой точки из замыкания множества A в A есть направленность, сходящаяся к этой точке. Обратно, если в A есть направленность, сходящаяся к s, то каждая окрестность точки s пересекает множество A. Значит, s принадлежит замыканию множества A. Предложение (в) теперь очевидно.

Мы видели, что направленность, вообще говоря, может сходиться к нескольким различным точкам одновременно. Существуют пространства, в которых предел сходящейся направленности определен однозначно: если направленность S сходится и к точке s, и к точке t, то $s=t$. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* (или *T_2-пространством*) тогда и только тогда, когда у любых двух различных точек x и y этого пространства есть непересекающиеся окрестности.

3. Теорема. *Топологическое пространство является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда никакая направленность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, s и t — две его различные точки. У них есть непересекающиеся окрестности U и V соответственно. Так как никакая направленность не может находиться с некоторого момента одновременно в двух непересекающихся множествах, то ясно, что никакая направленность в X не сходится к s и к t одновременно. Докажем обратное. Пусть X — не хаусдорфово пространство. Выберем точки s и t в X так, чтобы любая окрестность точки s пересекала любую окрестность точки t. Обозначим через $\mathfrak{U}_s$ семейство всех окрестностей точки s и через $\mathfrak{U}_t$ — семейство всех окрестностей точки t. Тогда $\mathfrak{U}_s$ и $\mathfrak{U}_t$ являются направленными множествами относительно включения $\subset$. Упорядочим декартово произведение этих множеств, согласившись считать, что $(T, U) \geqslant (V, W)$, в том и лишь в том случае, когда $T \subset V$ и $U \subset W$. Ясно, что отношение $\geqslant$ превращает рассматриваемое произведение в направленное множество. Для каждого элемента (T, U) произведения $\mathfrak{U}_s \times \mathfrak{U}_t$ пересечение $T \cap U$ не пусто. Значит, из каждого множества $T \cap U$ можно выбрать по точке $S_{(T, U)}$. Если $(V, W) \geqslant (T, U)$, то $S_{(V, W)} \in \in V \cap W \subset T \cap U$ и, следовательно, направленность $\{S_{(T, U)}, (T, U) \in \mathfrak{U}_s \times \mathfrak{U}_t, \geqslant\}$ сходится и к s, и к t.

Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — хаусдорфово пространство и направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ сходится в X к точке s; будем писать в этом случае $\mathfrak{J}\text{-}\lim \{S_n, n \in D, \geqslant\} = s$. Когда нет оснований для путаницы, можно писать короче: $\lim \{S_n : n \in D\} = s$, или просто $\lim\limits_n S_n = s$. Употребление термина «предел» следовало бы ограничить случаем направленностей в хаусдорфовых пространствах. Тогда выполнялось бы обычное правило транзитивности отношения равенства: если $\lim \{S_n : n \in D\} = s$ и $\lim \{S_n : n \in D\} = t$, то $s = t$, — ведь мы всегда понимаем равенство как совпадение. Все-таки иногда мы будем писать $\lim\limits_n S_n = s$, имея в виду направленность S, сходящуюся к точке s в нехаусдорфовом пространстве.

Прием, примененный нами в последнем доказательстве, часто бывает полезен. Если $(D, \geqslant)$ и $(E, \succ)$ — направленные множества, то декартово произведение $D \times E$ превращается в направленное множество отношением $\gg$, где $(d, e) \gg (f, g)$ тогда и только тогда, когда $d \geqslant f$ и $e \succ g$. Направленное множество $(D \times E, \gg)$ называется *направленным произведением* направленных множеств $(D, \geqslant)$ и $(E, \succ)$. Мы хотим определить также произведение семейства направленных множеств. Предположим, что для каждого a из некоторого множества A задано направленное множество $(D_a, >_a)$. Декартовым произведением $\Pi\{D_a : a \in A\}$ называется множество всех функций d на A таких, что $d_a (= d(a))$ принадлежит D_a для каждого a из A. Направленное произведение есть пара $\{\Pi\{D_a : a \in A\}, \geqslant\}$, где d и e — элементы произведения и $d \geqslant e$ в том и лишь в том случае, когда $d_a >_a e_a$ для каждого $a \in A$. *Произведение направлений* есть $\geqslant$. Конечно, следует проверить, что направленное произведение действительно является направленным множеством. Пусть d и e — элементы декартова произведения

$\Pi\{D_a : a \in A\}$. Для каждого $a \in A$ в D_a найдется элемент f_a, который следует и за d_a, и за e_a относительно упорядочения $>_a$. Функция f, значение которой в a равно f_a, следует и за d, и за e относительно $\geqslant$. Важен специальный случай направленного произведения: когда все координатные множества D_a совпадают и совпадают заданные на них направления $>_a$, — тогда произведение $\Pi\{D_a : a \in A\}$ есть просто множество D^A всех отображений множества A в D, направленное посредством соглашения о том, что d следует за e в том и лишь в том случае, когда $d(a)$ следует за $e(a)$ для каждого $a \in A$. В точности таково, например, обычное упорядочение множества всех вещественных функций, определенных на множестве вещественных чисел.

Следующий результат о пределах связан с аксиомой замыкания: $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Он важен потому, что позволяет заменить двойной предел простым. Ситуация такова: рассмотрим класс всех функций S, значение которых $S(m, n)$ определено для всех m из некоторого направленного множества D и всех n из некоторого направленного множества E_m. Мы хотим найти направленность R со значениями в указанной области определения функций S, для которой $S \circ R$ сходится к $\lim\limits_m \lim\limits_n S(m, n)$, — предполагается, что S является отображением в топологическое пространство и указанный двойной предел существует. Интересно отметить, что для решения этой задачи необходимо пользоваться сходимостью по Мору — Смиту, ибо, обращаясь к двойным последовательностям, мы видим, что иногда никакая последовательность, областью значений которой служит подмножество множества $\omega \times \omega$, не обладает этим свойством. Построение, позволяющее решить поставленную задачу, является вариантом диагонального процесса. Обозначим через F направленное произведение $D \times \Pi\{E_n : n \in D\}$ и для каждой точки (m, f) из F положим $R(m, f) = (m, f(m))$. Тогда R — искомая направленность.

4. Теорема о повторном пределе. *Пусть D — направленное множество, и каждому m из D соответствует некоторое направленное множество E_m. Обо-*

значим через F *произведение* $D \times \Pi\{E_m : m \in D\}$ *и положим* $R(m, f) = (m, f(m))$ *для произвольного* (m, f) *из* F. *Если для каждой пары* $m \in D$, $n \in E_m$ $S(m, n)$ *есть элемент некоторого фиксированного топологического пространства, то направленность* $S \circ R$ *сходится к* $\lim_m \lim_n S(m, n)$, *если только этот повторный предел существует.*

Доказательство. Допустим, что $\lim_m \lim_n S(m, n) = s$ и что U открытая окрестность*) точки s. Мы должны найти такой элемент (m, f) из F, что если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $S \circ R(p, g) \in U$. Выберем m в D так, чтобы было $\lim_n S(p, n) \in U$ для каждого p, следующего за m, и затем выберем для каждого такого p некоторый элемент $f(p) \in E_p$, удовлетворяющий условию: $S(p, n) \in U$ для всех n, следующих за $f(p)$ в E_p. Если p — элемент из D, который не следует за m, то в качестве $f(p)$ возьмем какой угодно элемент множества E_p. Если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $p \geqslant m$. Значит, $\lim_n S(p, n) \in U$ и (так как $g(p) \geqslant f(p)$) $S \circ R(p, g) = S(p, g(p)) \in U$.

ПОДНАПРАВЛЕННОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В соответствии со сказанным во введении к этой главе, мы дадим теперь обобщение понятия подпоследовательности и докажем обещанные теоремы.

Направленность $\{T_m, m \in D\}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{S_n, n \in E\}$ тогда и только тогда, когда существует такая функция N на D со значениями в E, что:

(а) $T = S \circ N$ или, что эквивалентно, $T_i = S_{N_i}$ для каждого $i \in D$;

---

*) Существование у точки s открытой окрестности важно для доказательства. Теорема о повторном пределе, тот факт, что семейство открытых окрестностей точки образует базу в этой точке, и аксиома замыкания ($\overline{\overline{A}} = \overline{A}$) тесно связаны. Сходимость исследовалась и в пространствах со структурой, менее ограничительной, чем топология. См. Р и б е й р о [1].

(б) для каждого $m \in E$ найдется элемент $n \in D$ такой, что если $p \geqslant n$, то $N_p \geqslant m$.

Так как недоразумений, по-видимому, возникнуть не может, то мы опустили символ, указывающий на упорядочение. Второе условие интуитивно состоит в том, что «если p велико, то и N_p велико». Отсюда сразу ясно, что если направленность S с некоторого момента находится в множестве A, то и ее поднаправленность $S \circ N$ тоже с некоторого момента находится в A. Это очень важное обстоятельство; именно с ним мы согласовали определение поднаправленности. Обратите внимание на то обстоятельство, что каждое конфинальное подмножество E множества D само направлено заданным упорядочением и что $\{S_n : n \in E\}$ является поднаправленностью направленности S. (Пусть N — тождественное отображение на E; тогда условие (б) превращается в требование конфинальности множества E направленному множеству D.) Это — стандартный способ построения поднаправленностей; можно только огорчаться, что этот простой тип поднаправленностей годится не для всех целей (2.Д).

Есть специальная разновидность поднаправленностей, которой достаточно почти для всего. Предположим, что N — изотонная функция на направленном множестве E со значениями в направленном множестве D (т. е. $N_i \geqslant N_j$ при $i \geqslant j$), область значений которой конфинальна D. Тогда, очевидно, $S \circ N$ является поднаправленностью любой направленности S. Поднаправленность, которая строится в доказательстве следующей леммы, как раз относится к этому роду (это замечено Смитом).

5. Лемма. *Пусть S — какая-либо направленность и $\mathfrak{A}$ — семейство множеств, с каждым из которых S часто встречается, и такое, что пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ содержит некоторый элемент $\mathfrak{A}$. Тогда существует поднаправленность направленности S, которая попадает в каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$, начиная с некоторого момента.*

Доказательство. Пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ содержит некоторый элемент этого семейства; значит, $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\subset$. Пусть

$\{S_n, n \in D\}$ — направленность, которая часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{A}$, и E — множество всех пар (m, A) таких, что $m \in D$, $A \in \mathfrak{A}$ и $S_m \in A$. Тогда E направлено произведением направлений на $D \times \mathfrak{A}$. В самом деле, для любых двух элементов (m, A) и (n, B) из E существует такой элемент C в семействе $\mathfrak{A}$, что $C \subset A \cap B$, и элемент $p \in D$, следующий и за m, и за n и такой, что $S_p \in C$. Тогда $(p, C) \in E$, причем элемент (p, C) следует как за (m, A), так и за (n, B). Для произвольного (m, A) положим $N(m, A) = m$. Отображение N, очевидно, изотонное, а область его значений конфинальна D (ибо направленность $\{S_n, n \in D\}$ часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{A}$). Следовательно, $S \circ N$ — поднаправленность направленности S. Наконец, если A — элемент семейства $\mathfrak{A}$, m — произвольный элемент из D, для которого $S_m \in A$, и (n, B) — элемент направленного множества E, следующий за (m, A), то $S \circ N(n, B) = S_n \in B \subset A$. Значит, направленность $S \circ N$, начиная с некоторого момента, находится в множестве A.

Применим теперь эту лемму для исследования сходимости в топологическом пространстве. Точка s пространства называется предельной точкой направленности S тогда и только тогда, когда S часто встречается с каждой окрестностью точки s. У направленности может быть одна предельная точка, может быть много таких точек и может не быть ни одной. Например, если ω — множество неотрицательных целых чисел, то $\{n, n \in \omega\}$ — направленность, у которой нет предельной точки в обычной топологии вещественных чисел. Другую крайность представляет случай, когда S — последовательность, областью значений которой является все множество рациональных чисел (такая последовательность существует, так как множество рациональных чисел счетно). Легко видеть, что эта последовательность часто встречается с каждым открытым интервалом; следовательно, любое вещественное число является ее предельной точкой. Если направленность сходится к некоторой точке, то, конечно, эта точка является ее предельной точкой. Но может оказаться, что у последовательности есть только одна предельная точка, к которой она тем не менее не сходится.

Рассмотрим, например, последовательность —1, 1, —1, 2, —1, 3, —1, ..., получающуюся при чередовании —1 с натуральными числами. Тогда —1 — единственная предельная точка этой последовательности, хотя последняя к —1 не сходится.

6. Теорема. *Точка s топологического пространства является предельной точкой направленности S в том и только в том случае, когда некоторая поднаправленность последней сходится к s.*

Доказательство. Пусть s — предельная точка направленности S и $\mathfrak{U}$ — семейство всех окрестностей точки s. Тогда пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{U}$ снова является элементом $\mathfrak{U}$ и S часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{U}$. Следовательно, мы можем применить предыдущую лемму, получается поднаправленность S, которая, начиная с некоторого момента, лежит в произвольном элементе семейства $\mathfrak{U}$, т. е. сходится к s. Если s не является предельной точкой направленности S, то у точки s найдется окрестность U, с которой S не встречается часто, а это означает, что S начиная с некоторого момента находится в дополнении к окрестности U. Тогда и каждая поднаправленность направленности S начиная с некоторого момента лежит в дополнении к U и, таким образом, не может сходиться к s.

Следующее утверждение характеризует предельные точки в терминах замыканий.

7. Теорема. *Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — направленность в топологическом пространстве. Для каждого $n \in D$ обозначим через A_n множество всех точек S_m, для которых $m > n$. Тогда точка s является предельной для направленности $\{S_n, n \in D\}$ в том и только в том случае, когда s принадлежит замыканию множества A_n при каждом $n \in D$.*

Доказательство. Пусть s — предельная точка направленности $\{S_n, n \in D\}$. Тогда, каково бы ни было n, множество A_n пересекает любую окрестность точки s, ибо направленность $\{S_n, n \in D\}$ часто встречается с каждой из них. Следовательно, s принадлежит замыканию каждого из множеств A_n. Если s не является предельной точкой для $\{S_n, n \in D\}$, то у s найдется окрестность U, с которой направленность $\{S_n, n \in D\}$ не встречается часто. Значит, для некоторого $n \in D$ из $m \geqslant n$ следует, что $S_m \notin U$, т. е. множества U и A_n не пересекаются. Следовательно, точка s не входит в замыкание множества A_n.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Есть определенный интерес в том, чтобы знать, когда топология может быть описана исключительно в терминах сходимости последовательностей, — не только потому, что удобно иметь некоторую фиксированную область для произвольных направленностей, но еще и потому, что не все свойства последовательностей удается обобщить

Наиболее важный класс топологических пространств, описываемых в терминах сходимости последовательностей, образуют пространства с первой аксиомой счетности — топологические пространства, у которых в каждой точке есть счетная база. Последнее условие означает, что у каждой точки x пространства X существует такое счетное семейство окрестностей, что каждая окрестность точки x содержит некоторую окрестность из этого семейства. Если ограничиться такими пространствами, то почти во всех предшествующих теоремах слово «направленность» можно заменить на слово «последовательность».

Следует отметить, что последовательность может обладать поднаправленностями, не являющимися подпоследовательностями.

8. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда*:

(а) *Точка s является предельной для множества A в том и только в том случае, когда существует последовательность в $A \setminus \{s\}$, сходящаяся к s.*

(б) *Множество A открыто в том и только в том случае, когда каждая последовательность, которая сходится к некоторой точке из A, находится в A начиная с некоторого момента,* (в) *Если точка s является предельной точкой некоторой последовательности S, то в S есть подпоследовательность, сходящаяся к s.*

Доказательство. Предположим, что s — предельная точка подмножества A пространства X, и пусть $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная база системы окрестностей в точке s. Положим $V_n = \bigcap\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда последовательность $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ тоже образует базу системы окрестностей в точке s и, кроме того, удовлетворяет условию $V_{n+1} \subset V_n$ при каждом n. Выберем для каждого n некоторую точку S_n из множества $V_n \cap \cap (A \setminus \{s\})$. Полученная таким образом последовательность $\{S_n, n \in \omega\}$, очевидно, сходится к s. Этим доказана половина утверждения (а). Обратная половина его очевидна. Если A — неоткрытое подмножество пространства X, то в $X \setminus A$ найдется последовательность, сходящаяся к некоторой точке из A. Такая последовательность, разумеется, ни с какого момента не лежит в A, откуда следует утверждение (б). Предположим, наконец, что точка s является предельной точкой последовательности S и что $V_0, V_1, \ldots$ — база в s, для которой $V_{n+1} \subset V_n$ при любом n. Для каждого неотрицательного целого i выберем N_i так, чтобы было $N_i \geqslant i$ и чтобы элемент S_{N_i} принадлежал множеству V_i. Тогда непременно $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ — подпоследовательность последовательности S, сходящаяся к s.

КЛАССЫ СХОДИМОСТИ

Иногда бывает удобно задавать топологию, указывая, какие направленности к каким точкам сходятся. Например, если $\mathfrak{F}$ — семейство функций, определенных на множестве X со значениями в топологическом пространстве Y, то естественно сказать, что направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к функции g, тогда и только тогда, когда $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом $x \in X$. (Этот тип сходимости более подробно обсуждается в главе 7.) Согласившись с таким определением, мы, естественно, приходим к вопросу: существует ли такая топология на множестве $\mathfrak{F}$, что определенная нами сходимость является сходимостью относительно этой топологии? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам применить технику топологических пространств при исследовании строения семейства $\mathfrak{F}$.

Формально задача состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторый класс, образованный парами (S, s), где S — направленность в X и s — точка. В каких случаях существует топология $\mathfrak{T}$ на X такая, что $(S, s) \in \mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда направленность S сходится к точке s относительно топологии $\mathfrak{T}$? Из предыдущего обсуждения вопросов сходимости мы знаем, что семейство $\mathfrak{C}$ должно обладать рядом определенных свойств, если такая топология существует. Мы назовем семейство $\mathfrak{C}$ *классом сходимости* на X в том и лишь в том случае, когда оно удовлетворяет выписанным ниже условиям *). Для удобства мы говорим, что S сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, или что $\lim\limits_n S_n \equiv s\,(\mathfrak{C})$, тогда и только тогда, когда $(S, s) \in \mathfrak{C}$.

(а) *Если S — такая направленность, что $S_n = s$ при каждом n, то S сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

(в) *Если направленность S не сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, то и любая ее поднаправленность сходится к s.*

(в) *Если направленность S не сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, то существует ее поднаправленность, никакая поднаправленность которой не сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

(г) (*Теорема 2.4 о повторных пределах.*) *Пусть D — направленное множество и для каждого $m \in D$ задано некоторое направленное множество E_m. Обозначим через F произведение $D \times \Pi\{E_m : m \in D\}$ и положим $R(m, f) = (m, f(m))$ для произвольного $(m, f) \in F$. Если $\lim\limits_m \lim\limits_n S(m, n) \equiv s\,(\mathfrak{C})$, то $S \circ R$ сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

Ранее было доказано, что сходимость в топологическом пространстве удовлетворяет условиям (а), (б) и (г). Легко доказать, что и (в) в этом случае выполняется: если направленность $\{S_n, n \in D\}$ не сходится к

*) Первые три из этих условий, с заменой слова «направленность» словом «последовательность», представляют собой принадлежащие Куратовскому модификации аксиом Фреше, характеризующих пространства, называемые именем последнего. См. Куратовский [1].

точке s, то она часто встречается с дополнением к произвольной ее окрестности. Следовательно, для некоторого конфинального подмножества E множества D направленность $\{S_n, n \in E\}$ лежит в дополнении. Ясно, что $\{S_n, n \in E\}$ является поднаправленностью, никакая поднаправленность которой не сходится к s.

Покажем теперь, что каждый класс сходимости на самом деле возникает на основе некоторой топологии.

9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{C}$ — класс сходимости на множестве X. Для каждого подмножества A множества X обозначим через A^c множество всех точек $s \in X$, для каждой из которых в A существует направленность S, сходящаяся $(\mathfrak{C})$ к s. Тогда ^{c} — оператор замыкания, и $(S, s) \in \mathfrak{C}$ в том и только в том случае, когда направленность S сходится к точке s относительно топологии, ассоциированной с оператором ^{c}.*

Доказательство. Надо показать, прежде всего, что ^{c} — оператор замыкания (см. 1.8). Так как направленность является функцией на направленном множестве, которое по определению не пусто, то множество $(\Lambda)^c$ пусто. Ввиду ограничения (а) на постоянные направленности, для каждой точки s произвольного множества A, в A существует направленность, сходящаяся $(\mathfrak{C})$ к s. Следовательно, $A \subset A^c$. Если $s \in A^c$, то в силу определения оператора ^{c} имеем $s \in (A \cup B)^c$ и, значит, $A^c \subset \subset (A \cup B)^c$ для каждого множества B. Поэтому $A^c \cup B^c \subset \subset (A \cup B)^c$. Докажем противоположное включение. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — направленность в множестве $A \cup B$, сходящаяся $(\mathfrak{C})$ к точке s. Положим $D_A = \{n : n \in D$ *и* $S_n \in A\}$ и $D_B = \{n : n \in D$ *и* $S_n \in B\}$. Тогда $D_A \cap D_B = D$. Значит, либо множество D_A, либо множество D_B конфинально множеству D и, следовательно, либо $\{S_n, n \in D_A\}$, либо $\{S_n, n \in D_B\}$ образует поднаправленность направленности $\{S_n, n \in D\}$, тоже сходящуюся в силу условия (б) к точке s. Следовательно, $s \in A^c \cup B^c$. Этим доказано, что $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$. Теперь следует показать, что $A^{cc} = A^c$. Условие (г) — как раз то, что нужно для этого. Пусть $\{T_m, m \in D\}$ — направленность в множестве A^c, сходящаяся $(\mathfrak{C})$ к точке t. Для каждого $m \in D$ найдутся направленное множество E_m и направленность $\{S(m, n), n \in E_m\}$, сходящаяся $(\mathfrak{C})$ к точке T_m. Условие (г) позволяет заключить, что в множестве A существует направленность, которая сходится ($\mathfrak{C}$) к t; следовательно, $t \in A^c$. Значит, $A^{cc} = A^c$.

Осталась наиболее тонкая часть доказательства — надо показать, что сходимость ($\mathfrak{C}$) совпадает со сходимостью относительно топологии $\mathfrak{J}$, ассоциированной с оператором ^{c}. Предположим сначала, что направленность $\{S_n,\ n \in D\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к точке s и не сходится к s по топологии $\mathfrak{J}$. Тогда существует открытая окрестность U точки s такая, что $\{S_n,\ n \in D\}$ ни с какого момента не находится в U. Тогда для некоторого конфинального подмножества E множества D будет $S_n \in X \setminus U$ при всех n из E. Так как $\{S_n,\ n \in E\}$ является поднаправленностью направленности $\{S_n,\ n \in D\}$, то $\{S_n,\ n \in E\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к s в силу условия (б). Значит, $X \setminus U \neq \neq (X \setminus U)^c$ и множество U не открыто относительно $\mathfrak{J}$, что приводит к противоречию.

Наконец, предположим, что направленность P сходится к точке r относительно топологии $\mathfrak{J}$ и не сходится к ней ($\mathfrak{C}$). Тогда в силу условия (в) найдется поднаправленность $\{T_m,\ m \in D\}$ в P, никакая поднаправленность которой не сходится ($\mathfrak{C}$) к r. Противоречие будет получено, если мы все же найдем в $\{T_m,\ m \in D\}$ поднаправленность, сходящуюся ($\mathfrak{C}$) к r. Для каждого m из D положим $B_m = \{n : n \in D \text{ и } n \geqslant m\}$ и через A_m обозначим множество всех точек T_n, для которых $n \in B_m$. Так как направленность $\{T_m,\ m \in D\}$ сходится относительно $\mathfrak{J}$ к r, то элемент r должен принадлежать замыканию каждого из множеств A_m. Следовательно, для каждого m из D найдутся такие направленное множество E_m и направленность $\{U(m,\ n),\ n \in E_m\}$ в B_m, что композиция $\{T \circ U(m,\ n),\ n \in E_m\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к r. Теперь применимо условие (г) из определения класса сходимости. Положим $R(m,\ f) = (m,\ f(m))$ для каждого $(m,\ f)$ из $D \times \Pi\{E_m,\ m \in D\}$. Направленность $T \circ U \circ R$ сходится ($\mathfrak{C}$) к точке r. Далее, если $p \geqslant m$, то $U \circ R(p, f) = U(p, f(p)) \in B_m$. Это означает, что $U \circ R(p, f) \geqslant m$. Отсюда вытекает, что $T \circ U \circ R$ является поднаправленностью направленности T, и теорема доказана.

Предшествующей теоремой установлено взаимно однозначное соответствие между всеми топологиями на множестве X и всеми классами сходимости на X. Это соответствие обращает порядок в следующем смысле. Если $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — два класса сходимости и $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — ассоциированные с ними топологии, то $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}_1$. (Этот факт непосредственно вытекает из определения сходимости.) Заметим также, что пересечение $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ — снова некоторый класс сходимости в силу четырех характеристических свойств класса сходимости. Легко видеть, что топология, ассоциированная с $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$, есть наименьшая топология из тех, которые одновременно больше $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$, и (двойственное утверждение) класс сходимости, порождаемый топологией $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$, является наименьшим среди всех классов сходимости, бо́льших $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ одновременно.

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на последовательности

Пусть X — счетное множество с топологией, которая состоит из пустого множества и дополнений к всевозможным конечным множествам. Какие последовательности к каким точкам сходятся?

Б. Пример: последовательности не адекватны топологии

Обозначим через Ω' множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного числа Ω, вместе с ним. Наделим Ω' порядковой топологией. Тогда Ω является предельной точкой для множества $\Omega' \setminus \{\Omega\}$, но никакая последовательность из $\Omega' \setminus \{\Omega\}$ не сходится к Ω.

В. Упражнение на хаусдорфовы пространства: дверные пространства

Топологическое пространство называется *дверным* *) тогда и только тогда, когда каждое его подмножество либо открыто, либо замкнуто. В хаусдорфовом дверном пространстве не может существовать более одной предельной точки, и если x — не предельная точка, то множество $\{x\}$ открыто. (Если U — любая окрестность предельной точки y, то $U \setminus \{y\}$ — открытое множество.)

Г. Упражнение на подпоследовательности

Пусть N — какая-нибудь последовательность неотрицательных целых чисел, в которой каждое число встречается не более конечного числа раз, т. е. множество $\{i : N_i = m\}$ при любом целом m конечно (быть может, пусто). Тогда, для любой последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$, $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ будет ее подпоследовательностью. Если

*) Так как эти пространства далее почти не встречаются, то мы сохраняем неудачное название, данное автором. (*Прим. перев.*)

$\{S_n, n \in \omega\}$ — последовательность точек топологического пространства и N — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел, то либо $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ будет подпоследовательностью последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$, либо у последовательности $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ есть предельная точка.

Д. Пример: конфинальные подмножества не адекватны

Пусть X — множество всех пар неотрицательных целых чисел со следующей топологией: для любой точки (m, n), отличной от точки $(0, 0)$, множество $\{(m, n)\}$ открыто. Множество U является окрестностью точки $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда для всех чисел m, за исключением конечного числа, множество $\{n : (m, n) \notin U\}$ конечно. (Представляя множество X лежащим на евклидовой плоскости, можно сказать, что произвольная окрестность точки $(0, 0)$ содержит все (кроме конечного числа) элементы произвольного столбца, за исключением некоторого конечного числа столбцов.)

(а) X — хаусдорфово пространство.

(б) Каждая точка пространства X является пересечением счетного семейства ее замкнутых окрестностей.

(в) Построенное пространство линделёфово, т. е. из каждого его открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

(г) Никакая последовательность точек множества $X \setminus \{(0, 0)\}$ не сходится к точке $(0, 0)$. (Если бы некоторая последовательность S, лежащая в $X \setminus \{(0, 0)\}$, сходилась к $(0, 0)$, то, начиная с некоторого момента, она находилась бы в дополнении к произвольному столбцу, т. е. число ее членов, лежащих в любом фиксированном столбце, было бы конечно *).)

(д) В $X \setminus \{(0, 0)\}$ существует последовательность S, для которой точка $(0, 0)$ является предельной точкой и такая, что никакое сужение последовательности S на конфинальное подмножество множества целых чисел не сходится.

Замечание. Этот пример принадлежит Аренсу [1].

Е. Монотонные направленности

Пусть X — цепь с полным порядком, т. е. X — множество, линейно упорядоченное отношением $>$, такое, что у каждого непустого ограниченного сверху подмножества множества X есть наименьшая верхняя грань. Будем считать, что X наделено порядковой топологией (см. 1.И). Говорят, что направленность $(S, \succ)$ монотонно возрастает (убывает) в X, тогда и только тогда, когда из $m \succ n$ следует, что $S_m \geqslant S_n$ $(S_n \geqslant S_m)$.

(а) Каждая монотонно возрастающая направленность в X, область значений которой ограничена (существует элемент $x \in X$ такой, что $x \geqslant S_n$ при всех n), сходится к наименьшей верхней грани своей области значений.

---

*) А тогда дополнение к множеству точек этой последовательности было бы окрестностью точки $(0, 0)$. (*Прим. перев.*)

(б) Пусть X — множество всех вещественных чисел с обычным порядком или множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа. Тогда каждая монотонно возрастающая (убывающая) направленность, область значений которой ограничена сверху (снизу), сходится к наименьшей верхней грани (наибольшей нижней грани) своей области значений.

Ж. Теория интегрирования (начальная ступень)

Пусть f — вещественная функция, A — некоторое подмножество ее области определения и $\mathfrak{A}$ — семейство всех конечных подмножеств множества A. Для каждого элемента F семейства $\mathfrak{A}$ положим $S_F = \sum \{f(a) : a \in F\}$. Множество $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\supset$, и $\{S_F, F \in \mathfrak{A}, \supset\}$ — направленность. Если она сходится, то говорят, что функция f *суммируема* на A, а число, к которому сходится эта направленность, называют *неупорядоченной* суммой функции f по A. Обозначается последняя через $\sum \{f(a) : a \in A\}$, или просто через $\sum_A f$.

(а) Если функция f неотрицательна (неположительна), то f суммируема в том и лишь в том случае, когда суммы по всевозможным конечным подмножествам множества A ограничены сверху (ограничены снизу). (Примените предыдущую задачу о монотонных направленностях.)

(б) Положим $A_+ = \{a : f(a) \geqslant 0\}$ и $A_- = \{a : f(a) < 0\}$. Функция f суммируема на A тогда и только тогда, когда она суммируема и на A_+, и на A_-. Если f суммируема на A, то $\sum_A f = \sum_{A_+} f + \sum_{A_-} f$.

(в) Функция f суммируема на A в том и только в том случае, когда на A суммируема функция $|f|$, где $|f|(a) = |f(a)|$.

(г) Если функция f суммируема на множестве A, то множество тех точек из A, на которых она отлична от нуля, счетно. (Если бы это было не так, то для некоторого целого $n > 0$ множество $\left\{a : f(a) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ было бы несчетно *).)

(д) Если функции f и g суммируемы на множестве A, а r и s — какие угодно вещественные числа, то функция $rf + sg$ тоже суммируема на A, и $\sum_A (rf + sg) = r \sum_A f + s \sum_A g$.

(е) Пусть функция f суммируема на множестве A, и B, C — непересекающиеся подмножества множества A. Тогда f суммируема и на B, и на C, и $\sum_{B \cup C} f = \sum_B f + \sum_C f$.

(ж) *Упорядоченной суммой* последовательности x вещественных чисел (суммой ряда) называется предел последовательности $\{S_n\}$, где $S_n = \sum \{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Иными словами, упорядо-

*) Здесь есть небольшая неточность: такого несчетного множества может не существовать, но тогда непременно найдется несчетное множество вида $\left\{a : f(a) \leqslant -\frac{1}{n}\right\}$. (*Прим. перев*).

ченная сумма есть предел направленности $\{S_F, F\in\mathfrak{B}\}$, где $\mathfrak{B}$ — семейство всех множеств вида $\{m : m\leqslant n\}$ для некоторого n. Это — поднаправленность той направленности, с помощью которой определялась неупорядоченная сумма. Последовательность x называется *абсолютно суммируемой* в том и лишь в том случае, когда последовательность $|x|$, где $|x|_n=|x_n|$, обладает упорядоченной суммой. Неупорядоченная сумма функции x на множестве целых чисел существует тогда и только тогда, когда последовательность x абсолютно суммируема. В этом случае упорядоченная и неупорядоченная суммы равны.

(з) (*Фубини*). Пусть f — вещественная функция на декартовом произведении $A\times B$. Тогда:

1) Если функция f суммируема на $A\times B$, то $\sum_{A\times B} f = \sum\left\{\sum\{f(a, b) : b\in B\} : a\in A\right\}$. (Справа стоит одна из двух мыслимых повторных сумм.)

2) Если при каждом фиксированном a из A $f(a, b)$ либо неотрицательно при всех b, либо неположительно при всех b, и если функция $F(a)=\sum\{f(a, b) : b\in B\}$ определена для всех $a\in A$ и суммируема на A, то функция f суммируема на $A\times B$.

3) Вообще говоря, обе повторные суммы могут существовать, а функция f при этом может не быть суммируемой. В действительности, если A и B — бесконечные счетные множества, а F и G — произвольные вещественные функции, определенные на A и B соответственно, то найдется функция f на $A\times B$ такая, что $\sum\{f(a, b) : a\in A\}=G(b)$ и $\sum\{f(a, b) : b\in B\}=F(a)$ для всех b из B и всех a из A.

З а м е ч а н и я. Результаты, сформулированные в последней серии задач (з), нужны при построении теории меры на основе неупорядоченного суммирования, которое позволяет избежать обращения к абсолютно сходящимся рядам. У всех результатов, за исключением утверждений (г), (ж) и (з), 2), имеются гораздо более общие аналоги. В главе 7 мы снова вернемся к этим вопросам, пользуясь понятием полноты. Теоретико-множественный подход, развитый выше, проливает свет на суть более сложных примеров, связанных с интегрированием.

Исторически понятие неупорядоченной сходимости предшествовало понятию сходимости по Мору — Смиту (М о р [1]).

З. Теория интегрирования (дальнейшее развитие)

Пусть f — ограниченная вещественная функция, определенная на замкнутом интервале *) $[a, b]$ вещественных чисел. *Подразделением* S отрезка $[a, b]$ называется любое конечное семейство отрезков, покрывающее $[a, b]$, никакие два из которых не имеют больше одной общей точки. Длина интервала I будет обозначаться через $|I|$. *Мелкостью* $\|S\|$ подразделения S называется наибольшая из длин

*) Мы будем иногда называть замкнутый интервал отрезком. (*Прим. перев.*)

интервалов подразделения S. На семействе всех подразделений мы определим два различных направления:

1) $S \geqslant S'$ тогда и только тогда, когда S вписано в S' в том смысле, что каждый элемент из S содержится в качестве подмножества в некотором элементе разбиения S';

2) $S \gg S'$ тогда и только тогда, когда $\|S\| \leqslant \|S'\|$.

Пусть $M_f(I)$ — наименьшая верхняя грань функции f на отрезке I и $m_f(I)$ — ее наибольшая нижняя грань. *Верхняя и нижняя суммы Дарбу*, отвечающие подразделению S, определяются как $D_f(S) = \sum\{|I| M_f(I) : I \in S\}$ и $d_f(S) = \sum\{|I| m_f(I) : I \in S\}$ соответственно. Римановы суммы несколько сложнее. *Функция выбора* для подразделения S — это любая такая функция c на S, что $c(I) \in I$ для каждого I из S. Множество всех пар (S, c), где S — подразделение, а c — функция выбора для S, можно упорядочить двумя способами: $(S, c) \succ (S', c')$ эквивалентно $S \geqslant S'$, и $(S, c) \succ\succ (S', c')$ эквивалентно $S \gg S'$. Для пары (S, c) определяется *риманова сумма*: $R_f(S, c) = \sum\{|I| f(c(I)) : I \in S\}$.

Основное вычисление выполняется для упорядочения по вписанности.

(а) Направленности $(D_f, \geqslant)$ и $(d_f, \geqslant)$ являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей; значит, они сходятся.

(б) $d_f(S) \leqslant R_f(S, c) \leqslant D_f(S)$ для всех подразделений S и любых функций выбора c.

(в) Для каждого положительного числа e существует $\succ$-конфинальное подмножество множества пар (S, c) такое, что $R_f(S, c) + e \geqslant D_f(S)$. Имеет место также и двойственное утверждение.

(г) Направленность $(R_f, \succ)$ сходится в том и только в том случае, когда $\lim(D_f, \geqslant) = \lim(d_f, \geqslant)$. Если $(R_f, \succ)$ сходится, то $\lim(R_f, \succ) = \lim(D_f, \geqslant) = \lim(d_f, \geqslant)$.

(д) Направленность $(R_f, \succ)$ является поднаправленностью направленности $(R_f, \succ\succ)$.

(е) Направленность $(R_f, \succ\succ)$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim(D_f, \gg) = \lim(d_f, \gg)$. Если $(R_f, \succ\succ)$ сходится, то $\lim(R_f, \succ\succ) = \lim(R_f, \succ)$.

Замечания. Интеграл Римана от функции f обычно определяется как предел направленности $(R_f, \succ\succ)$. Рассмотрение упорядочения по вписанности наряду с упорядочением по мелкости имеет чисто технические преимущества. Если вместо конечных подразделений и длины интервалов взять счетные подразделения и лебегову меру $|I|$ множества I, то направленность $(R_f, \succ)$ будет сходиться к обычному лебегову интегралу от f, а направленность $(R_f, \succ\succ)$ — не обязательно. Далее, определение, основанное на отношении вписанности, можно применить для интегрирования некоторых функций, значения которых лежат в векторном пространстве (см. Хилле [1], глава 3). Интеграл типа Дарбу предполагает, что область значений функции, подлежащей интегрированию, частично упорядочена. К этому типу, по существу, относятся интеграл Даниеля и различные обобщения (Бурбаки [2], Мак Шейн [2] и [3] и М. Стоун [1]). Есть еще один стандартный способ введения интеграла, обладающий целым рядом преимуществ, — посредством пополнения по некоторой метрике (Халмош [1]).

И. Максимальные идеалы в структурах

Структура *) — это непустое множество X, на котором задано рефлексивное частичное упорядочение $\geqslant$ такое, что, какова бы ни была пара x, y элементов из X, среди всех элементов X, бо́льших и x, и y, существует (единственный) наименьший, обозначаемый через $x \vee y$, и среди всех элементов, меньших и x, и y, есть (единственный) наибольший элемент, обозначаемый через $x \wedge y$. Элементы $x \vee y$ и $x \wedge y$ называются соответственно *объединением* и *пересечением* элементов x и y. Говорят, что структура *дистрибутивна*, тогда и только тогда, когда $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ и $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ для всех x, y и z из X. Подмножество A структуры X называется *идеалом* (*дуальным идеалом*) в том и лишь в том случае, когда из $y \geqslant x$ и $y \in A$ всегда вытекает $x \in A$ и из $y \in A$, $z \in A$ вытекает $y \vee z \in A$ (соответственно, если из $x \geqslant y$ и $y \in A$ вытекает $x \in A$, а из $y \in A$ и $z \in A$ вытекает $y \wedge z \in A$).

Пусть A и B — непересекающиеся подмножества дистрибутивной структуры X, причем A является идеалом, а B — дуальным идеалом. Тогда существуют непересекающиеся множества A' и B', в сумме дающие все X, из которых первое является идеалом и содержит множество A, а второе является дуальным идеалом и содержит множество B.

Доказательство этого предложения распадается на ряд лемм.

(а) Семейство всех тех идеалов, которые содержат A и не пересекаются с B, обладает максимальным элементом A' (см. 0.25). Аналогичное утверждение: существует дуальный идеал B', который содержит B, не пересекается с A' и является максимальным по отношению к этим свойствам.

(б) Наименьший идеал, содержащий идеал A' и элемент c множества X, определяется так: $\{x : x \leqslant c$ *или* $x \leqslant c \vee y$ *для некоторого* y *из* $A'\}$. Из того, что A' — максимальный идеал, следует, что если элемент c не принадлежит ни A', ни B, то $c \vee x \in B$ для некоторого $x \in A'$. (Если $z \geqslant x \in B$, то $z \in B$.)

(в) Если c не принадлежит ни A', ни B', то существуют $x \in A$ и $y \in B'$ такие, что $c \vee x \in B'$ и $c \wedge y \in A'$. Тогда элемент $(c \vee x) \wedge y = (c \wedge y) \vee (x \wedge y)$ входит и в A', и в B'.

Замечания. Эта теорема принадлежит М. Стоуну [2]; она в наилучшей форме выражает один из основных фактов теории упорядоченных множеств. Мы опираемся на эту теорему при решении следующих двух задач. На ней основан также ряд важных результатов, касающихся бикомпактности (глава 5). Применение принципа максимума в том или ином виде при доказательстве

*) Этим термином принято в советской литературе переводить английский термин «lattice». (*Прим. перев.*)

теоремы М. Стоуна кажется неизбежным. В литературе писалось о том, что из теоремы М. Стоуна (или, точнее, из ее следствия, которое формулируется под видом задачи 2.Л) вытекает аксиома выбора. Однако мне неизвестно, так ли это на самом деле. Наконец, определение дистрибутивности, которое дано выше, избыточно: каждое из фигурирующих в нем двух равенств является следствием другого (Биркгоф [1])

К. Универсальные направленности

Направленность в множестве X называется *универсальной* тогда и только тогда, когда для каждого подмножества A множества X она либо находится с некоторого момента в A, либо находится с некоторого момента в $X \setminus A$.

(а) Если универсальная направленность часто встречается с некоторым множеством, то она с некоторого момента лежит в этом множестве. Значит, универсальная направленность в топологическом пространстве сходится к каждой своей предельной точке

(б) Если направленность универсальна, то и каждая ее поднаправленность универсальна. Если S — универсальная направленность в X и f — отображение множества X в множество Y, то $f \circ S$ — универсальная направленность в Y.

(в) Лемма. *Пусть S — какая-нибудь направленность в X. Тогда существует такое семейство $\mathfrak{C}$ подмножеств множества X, что S часто встречается с каждым элементом из $\mathfrak{C}$, пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{C}$ принадлежит $\mathfrak{C}$ и для каждого подмножества M множества X либо $M \in \mathfrak{C}$, либо $X \setminus M \in \mathfrak{C}$.* (Покажите, что есть семейство $\mathfrak{C}$, максимальное относительно первых двух свойств, и докажите затем, что оно обладает и третьим свойством, или примените утверждение 2.И, взяв в качестве A семейство всех множеств M таких, что S с некоторого момента находится в $X \setminus M$, в качестве B — семейство всех множеств L, в каждом из которых S находится с некоторого момента, а в качестве упорядочения выбрав отношение включения $\subset$.)

(г) В каждой направленности в X есть универсальная поднаправленность. (Воспользуйтесь предыдущим результатом и леммой 2.5.)

Л. Булевы кольца: существует достаточно много гомоморфизмов

Булево кольцо — это кольцо $(R, +, \cdot)$, в котором $r \cdot r = r$ и $r + r = 0$ при каждом r из R. Поле целых чисел по модулю 2 обозначается через I_2.

(а) Булево кольцо коммутативно. (Заметьте, что $(r+s)\cdot(r+s) = r+s$.)

(б) Если $(R, +, \cdot)$ — булево кольцо, то можно так определить умножение элементов R на элементы I_2, что R станет алгеброй над I_2.

(в) *Симметричная разность* $A \Delta B$ двух множеств A и B определяется как $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство всех подмножеств множества X; тогда $(\mathfrak{A}, \Delta, \cap)$ — булево кольцо с единицей.

(г) Пусть X — некоторое множество и I_2^X — семейство всех отображений множества X в I_2. Определим сложение и умножение таких отображений как поточечное (т. е. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ и $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$). Тогда $\left(I_2^X, +, \cdot\right)$ — булево кольцо с единицей, причем оно изоморфно булеву кольцу $(\mathfrak{A}, \Delta, \bigcap)$, где $\mathfrak{A}$ — семейство всех подмножеств множества X.

(д) *Естественное упорядочение* булева кольца определяется соглашением: $r \geqslant s$ тогда и только тогда, когда $r\cdot s=s$. Отношение $\geqslant$ частично упорядочивает множество R таким образом, что самый первый элемент, который следует и за r, и за s, есть $r\vee s=r+s+ +r\cdot s$, а наибольший элемент, предшествующий одновременно и r, и s, есть $r\wedge s=r\cdot s$. Каждая из операций $\vee$ и $\wedge$ ассоциативна, и выполняются следующие законы дистрибутивности: $r\wedge(s\vee t)= =(r\wedge s)\vee(r\wedge t)$ и $r\vee(s\wedge t)=(r\vee s)\wedge(r\vee t)$.

(е) Напомним, что S называется идеалом в булевом кольце $(R, +, \cdot)$ в том и лишь в том случае, когда S — такая аддитивная подгруппа группы R, что $r\cdot s\in S$, коль скоро $r\in R$ и $s\in S$. Идеал S называется максимальным тогда и только тогда, когда $R\neq S$ и никакой идеал, отличный от всего R, не содержит идеала S в качестве собственного подмножества. Имеет место взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами булева кольца R и нетривиальными гомоморфизмами кольца R в I_2. (Ядро каждого такого гомоморфизма есть некоторый максимальный идеал.)

(ж) Критерием того, что S является идеалом в булевом кольце, может служить следующее условие: $r\vee s\in S$ для любых элементов r и s из S, и $t\in S$, коль скоро в S существует элемент, которому t предшествует в естественном порядке (т. е. если $t\leqslant$ некоторого элемента из S). Подмножество T множества R называется *дуальным идеалом*, в том и только в том случае, когда $r\wedge s\in T$ для любых r и s из T и $t\in T$, если t следует за некоторым элементом из T. Если $r\in R$, то $\{s : r\geqslant s\}$ — идеал и $\{s : s\geqslant r\}$ — дуальный идеал. Если S — некоторый идеал, T — непересекающийся с ним дуальный идеал и $S\bigcup T=R$, то функция, принимающая значение нуль на элементах S и единицу на элементах T, является гомоморфизмом кольца R в I_2. (В булевом кольце множеств идеалы часто называют $\bigcap$-идеалами, а дуальные идеалы — $\bigcup$-идеалами.)

(з) Теорема *Пусть S — некоторый идеал в булевом кольце и T — дуальный идеал, не пересекающийся с ним. Тогда существует гомоморфизм этого кольца в I_2, принимающий значение нуль на элементах S и значение единица на элементах T. В частности, если r — произвольный отличный от нуля элемент кольца, то существует гомоморфизм h рассматриваемого булева кольца (в I_2) такой, что* $h(r)=1$. (Иными словами, гомоморфизмов булева кольца в I_2 достаточно много для того, чтобы с их помощью можно было различить его элементы. Можно доказать эту теорему, исходя из утверждений, сформулированных в 2.И.)

(и) Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{B}$ — семейство всех его открыто-замкнутых подмножеств. Тогда $(\mathfrak{B}, \Delta, \bigcap)$ — булева алгебра.

(к) Не всякая булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого множества. (Покажите это на примере счетно-бесконечной булевой алгебры.)

З а м е ч а н и е. Это исследование завершается упражнением 5.У.

М. Фильтры

Можно построить теорию сходимости на основе понятия фильтра. *Фильтром* $\mathfrak{F}$ в множестве X называется любое семейство непустых подмножеств множества X такое, что:

1) пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) если $A \in \mathfrak{F}$ и $A \subset B \subset X$, то и $B \in \mathfrak{F}$.

В терминологии предыдущей задачи фильтр — это собственный дуальный идеал в булевом кольце всех подмножеств множества X. Фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к точке x топологического пространства X тогда и только тогда, когда каждая ее окрестность является элементом фильтра $\mathfrak{F}$ (т. е. система окрестностей точки x является подсемейством семейства $\mathfrak{F}$).

(а) Множество U открыто в том и только в том случае, когда U принадлежит каждому фильтру, сходящемуся к какой-либо точке множества U.

(б) Точка x является предельной точкой для множества A тогда и только тогда, когда множество $A \setminus \{x\}$ принадлежит некоторому фильтру, сходящемуся к x.

(в) Обозначим через φ_x семейство всех фильтров, сходящихся к точке x. Тогда $\bigcap \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \in \varphi_x\}$ — система всех окрестностей точки x.

(г) Если фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к точке x и G — фильтр, содержащий $\mathfrak{F}$, то G сходится к x.

(д) Фильтр в X называется *ультрафильтром* тогда и только тогда, когда он не содержится в качестве собственного подмножества ни в каком фильтре в X. Если $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр в X, и объединение каких-либо двух множеств является элементом семейства $\mathfrak{F}$, то хотя бы одно из этих множеств входит в $\mathfrak{F}$. В частности, для любого подмножества A множества X либо A, либо $X \setminus A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ (См. задачу 2.И.)

(е) Можно заподозрить, что фильтры и направленности ведут к эквивалентным по существу теориям. Основания для такого предположения можно видеть в следующих фактах:

1) Если $\{x_n, n \in D\}$ — направленность в X, то семейство $\mathfrak{F}$ всех множеств A, в каждое из которых $\{x_n, n \in D\}$ попадает с некоторого момента, является фильтром в X.

2) Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в X и D — множество всех пар (x, F) таких, что $x \in F$ и $F \in \mathfrak{F}$. Направим множество D так: $(y, G) \geqslant (x, F)$ в том и лишь в том случае, когда $G \subset F$, и положим $f(x, F) = x$. Тогда $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех тех множеств A, в которые направленность $\{f(x, F), (x, F) \in D\}$ попадает с некоторого момента.

З а м е ч а н и я. Определение фильтра принадлежит Картану. Картаново изложение теории сходимости приведено полностью в книге Б у р б а к и [1]. Предложение (в) — замечание Готтшалка; утверждение (е) высказано в устной беседе.

Глава 3

ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы рассмотрим два способа построения новых топологических пространств из старых. Один из них заключается в определении некоторой стандартной топологии на декартовом произведении топологических пространств; этим самым по первоначально заданным пространствам определяется некоторое новое. Например, евклидова плоскость является произведением пространства вещественных чисел (с обычной топологией) самого на себя, а евклидово n-пространство является произведением n экземпляров пространства вещественных чисел. В главе 4 произведения произвольного множества пространств вещественных чисел послужат нам в качестве стандартных пространств, с которыми прочие будут сравниваться. При втором методе построения нового пространства из заданного начинают с некоторого разбиения заданного пространства на классы эквивалентности — эти классы служат точками конструируемого пространства. Грубо говоря, мы «отождествляем» точки внутри некоторых подмножеств множества X. В результате получается некоторое новое множество точек, которое затем наделяется определенной фактор-топологией. Множество классов эквивалентности вещественных чисел по модулю множества целых чисел при этом получает топологию, превращающую его в «копию» единичной окружности, лежащей на плоскости и наследующей у нее топологию.

Оба способа построения пространств мотивируются тем, что определенные отображения становятся при этом непрерывными. Мы начнем поэтому с определения понятия непрерывности и доказательства нескольких связанных с ним простых предложений.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Приведем для удобства краткий обзор терминологии и элементарных предложений, связанных с понятием отображения (глава 0). Слова «функция», «отображение», «соответствие», «оператор» и «преобразование» являются синонимами. Говорят, что функция f является отображением (множества, пространства и т. д.) X, тогда и только тогда, когда область определения функции f есть X. Говорят, далее, что f является отображением *в* Y, в том и лишь в том случае, когда область значений этого отображения является подмножеством множества Y, и что f — отображение *на* Y, в том и лишь в том случае, когда область значений f совпадает с Y. Значение f в точке x обозначается через $f(x)$ и называется также образом точки x при отображении f. Прообраз подмножества B множества Y при отображении f обозначается через $f^{-1}[B]$ — это множество $\{x: f(x) \in B\}$. Прообраз пересечения (объединения) элементов любого семейства множеств из Y при отображении f совпадает с пересечением (объединением) прообразов этих элементов. Иными словами, если Z_c — подмножество множества Y для каждого элемента c из некоторого множества индексов C, то $f^{-1}[\bigcap\{Z_c : c \in C\}] = \bigcap\{f^{-1}[Z_c] : c \in C\}$; аналогичная формула справедлива для объединений. Пусть $y \in Y$; в этом случае запись $f^{-1}[\{y\}]$, обозначающая прообраз множества, единственным элементом которого является точка y, будет сокращаться до такой записи: $f^{-1}[y]$. Образ $f[A]$ множества A, лежащего в X, представляет собой множество всех таких $y \in Y$, что $f(x) = y$ для некоторого x из A. Образ объединения множеств из X равен объединению их образов, но, вообще говоря, образ пересечения не равен пересечению образов. Отображение f называется взаимно однозначным тогда и только тогда, когда образы любых двух различных точек при нем различны. В этом случае f^{-1} является отображением, обратным к отображению f. (Обратите внимание на то, как подобраны обозначения: квадратные скобки встречаются в обозначениях подмножеств из области определения и области значений отображения, а круглые — в обозначениях элементов. Например, если f — взаимно однозначное отображение на Y и $y \in Y$, то $f^{-1}(y)$ — тот единственный элемент из X, для которого $f(x)=y$, а $f^{-1}[y]=\{x\}$.)

Отображение f топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ в топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ называется *непрерывным* в том и только в том случае, когда прообраз каждого открытого множества открыт. Точнее, f непрерывно относительно топологий $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{U}$, или $\mathfrak{J}$—$\mathfrak{U}$-непрерывно, тогда и только тогда, когда $f^{-1}[U]\in\mathfrak{J}$ для каждого U из $\mathfrak{U}$. Непрерывно отображение или нет — это зависит и от того, какая топология задана на области определения, и от того, какая топология задана на области значений. Однако мы будем следовать обычной практике, опуская все указания на эти топологии, когда можно не опасаться недоразумений. Есть одно или два утверждения о непрерывных отображениях, которые чрезвычайно важны и одновременно почти очевидны. Первое: если f — непрерывное отображение пространства X в Y и g — непрерывное отображение пространства Y в Z, то композиция $g\circ f$ является непрерывным отображением пространства X в пространство Z, ибо $(g\circ f)^{-1}[V]=f^{-1}[g^{-1}[V]]$ для каждого множества $V\subset Z$, откуда, пользуясь сначала непрерывностью отображения g, а затем непрерывностью f, заключаем, что если множество V открыто, то открыто и множество $(g\circ f)^{-1}[V]$. Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y и A — подмножество пространства X. Тогда сужение отображения f на множество A, $f|A$, тоже является непрерывным отображением относительно топологии, индуцированной на A топологией пространства X, ибо если U открыто в Y, то $(f|A)^{-1}[U]=A\cap f^{-1}[U]$, а последнее множество открыто в A. Отображение f, для которого отображение $f|A$ непрерывно, называется *непрерывным на множестве* A. Может случиться, что f непрерывно на A, но не непрерывно на X.

Ниже мы даем список условий, каждое из которых эквивалентно непрерывности. Так как непрерывность отображений часто приходится доказывать, этот список нам будет полезен в дальнейшем.

1. Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства и f — отображение X в Y. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) *Отображение* f *непрерывно.*

(б) *Прообраз каждого замкнутого множества замкнут.*

(в) *Прообраз каждого элемента некоторой предбазы топологии пространства* Y *открыт.*

(г) *Для любой точки* $x \in X$ *прообраз произвольной окрестности точки* $f(x)$ *является окрестностью точки* x.

(д) *Для каждой точки* $x \in X$ *и любой окрестности* U *точки* $f(x)$ *существует окрестность* V *точки* x *такая, что* $f[V] \subset U$.

(е) *Для любой направленности* S (*или* $\{S_n, n \in D\}$) *в* X, *сходящейся к некоторой точке* s, *композиция* $f \circ S$ (*или* $\{f(S_n), n \in D\}$) *сходится к точке* $f(s)$.

(ж) *Образ замыкания произвольного подмножества* A *множества* X *является подмножеством замыкания образа множества* A, т. е. $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$.

(з) *Для каждого подмножества* B *пространства* Y $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}]$.

Доказательство. (а)$\leftrightarrow$(б). Это вытекает непосредственно из того, что обратное отображение сохраняет относительное дополнение: $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$ для каждого подмножества B пространства Y.

(а)$\leftrightarrow$(в). Если f — непрерывное отображение, то прообраз произвольного элемента предбазы открыт, потому что предбаза состоит из открытых множеств. Обратно, так как каждое открытое в Y множество V является объединением конечных пересечений элементов предбазы *), то множество $f^{-1}[V]$ является объединением конечных пересечений прообразов элементов рассматриваемой предбазы. Если эти прообразы открыты, то и прообраз каждого открытого множества открыт.

(а)$\rightarrow$(г). Если отображение f непрерывно, $x \in X$ и V — окрестность точки $f(x)$, то в V содержится открытая окрестность W точки $f(x)$. Тогда $f^{-1}[W]$ — открытая окрестность точки x, являющаяся подмножеством множества $f^{-1}[V]$. Следовательно, $f^{-1}[V]$ — окрестность точки x.

(г) $\rightarrow$(д). Если U — окрестность точки $f(x)$, то $f^{-1}[U]$— окрестность точки x, для которой $f[f^{-1}[U]] \subset U$.

---

*) Под «конечным пересечением» здесь и в дальнейшем понимается пересечение конечного числа множеств. (*Прим. перев.*)

(д)→(е). Предположим, что условие (д) выполнено, и пусть S — направленность в X, сходящаяся к некоторой точке s. Для произвольной окрестности U точки $f(s)$ найдется окрестность V точки s такая, что $f[V]\subset U$. Так как направленность S с некоторого момента находится в V, то направленность $f\circ S$ с некоторого момента находится в U.

(е)→(ж). Пусть дано (е), A — любое подмножество множества X, а s — точка из его замыкания. Тогда в A существует направленность S, сходящаяся к s. Тогда направленность $f\circ S$ сходится к точке $f(s)$, которая поэтому принадлежит множеству $\overline{f[A]}$. Значит, $f[\bar{A}]\subset\overline{f[A]}$.

(ж) → (з). Пусть выполнено условие (ж). Тогда, если $A=f^{-1}[B]$, то $f[\bar{A}]\subset\overline{f[A]}\supset\bar{B}$ и, следовательно, $\bar{A}\subset\subset f^{-1}[\bar{B}]$. Таким образом, $\overline{f^{-1}[B]}\subset f^{-1}[\bar{B}]$.

(з)→(б). Пусть выполнено условие (з), и B — замкнутое подмножество множества Y. Тогда $\overline{f^{-1}[B]}\subset f^{-1}[\bar{B}]==f^{-1}[B]$, откуда следует, что множество $f^{-1}(B)$ замкнуто.

Полезен также локальный вариант понятия непрерывности. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным в точке* $x\in X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждой окрестности $f(x)$ при отображении f является окрестностью точки x. Непрерывность в точке легко охарактеризовать утверждениями, аналогичными 3.1(д) и 3.1(е). Очевидно, отображение f непрерывно в том и лишь в том случае, когда оно непрерывно в каждой точке своей области определения.

Гомеоморфизм, или *топологическое преобразование*, есть непрерывное взаимно однозначное отображение некоторого топологического пространства X на некоторое топологическое пространство Y, обратное отображение к которому f^{-1} тоже непрерывно. Про два пространства говорят, что они *гомеоморфны*, или что одно является *гомеоморфом* другого, если существует гомеоморфизм одного пространства на другое. Тождественное отображение топологического пространства на себя всегда является гомеоморфизмом, и обратное к гомеоморфизму отображение тоже является гомеоморфизмом. Ясно также, что композиция любых двух гомеоморфизмов снова является гомеоморфизмом. Следовательно, семейство всех топологических пространств можно разбить на классы эквивалентности так, что каждое топологическое пространство гомеоморфно любому пространству, входящему в его класс эквивалентности, и только таким пространствам. Два топологических пространства топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они гомеоморфны.

Дискретные пространства X и Y гомеоморфны в тех и лишь в тех случаях, когда существует взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, т. е. когда равны их мощности. Это действительно так, ибо любое отображение дискретного пространства непрерывно, независимо от того, какую топологию имеет его область значений. Верно также, что антидискретные пространства (в них единственными открытыми подмножествами являются все пространство и пустое множество) гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое, ибо любое отображение в антидискретное пространство непрерывно, независимо от того, какая топология задана на его области определения. Вообще говоря, может оказаться очень трудным выяснить, гомеоморфны ли заданные пространства. Множество всех вещественных чисел с обычной топологией гомеоморфно открытому интервалу $(0,1)$, наделенному индуцированной топологией: функция, значение которой на элементе x из $(0,1)$ равно $\frac{2x-1}{x(x-1)}$, является, как легко видеть, гомеоморфизмом. Однако интервал $(0,1)$ не гомеоморфен пространству $(0,1) \cup (1,2)$, ибо если бы функция f была гомеоморфизмом (или хотя бы непрерывной функцией) с областью определения $(0,1)$ и областью значений $(0,1) \cup (1,2)$, то множество $f^{-1}[(0,1)]$ было бы собственным открыто-замкнутым подмножеством множества $(0,1)$, в то время как множество $(0,1)$ связно. Нам удалось доказать отсутствие гомеоморфизма в рассмотренном случае благодаря тому, что мы заметили, что одно пространство связно, а другое нет и что пространство, гомеоморфное связному пространству, непременно связно. Свойство топологического пространства, принадлежащее каждому пространству, гомеоморфному данному, называется *топологическим инвариантом*. Доказательство того, что два пространства не гомеоморфны, обычно заключается в выделении топологического инварианта, которым обладает одно из них и не обладает другое. Каждое свойство, которое определяется в терминах элементов пространства и его топологии, автоматически оказывается топологическим инвариантом. Помимо связности, топологическими инвариантами являются свойства пространства иметь счетную базу топологии, иметь счетную базу в каждой точке, быть T_1-пространством или хаусдорфовым пространством. Говоря формально, топология — это наука о топологических инвариантах.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

На декартовом произведении семейства топологических пространств можно стандартным способом определить топологию. Это чрезвычайно важная конструкция, поэтому мы остановимся сейчас на исследовании свойств предлагаемой топологии. Пусть X и Y — топологические пространства и $\mathfrak{B}$ — семейство всех декартовых произведений вида $U\times V$, где U — множество, открытое в X, и V — множество, открытое в Y. Пересечение двух элементов из $\mathfrak{B}$ есть снова элемент из $\mathfrak{B}$ ибо $(U\times V)\cap(R\times S)=(U\cap R)\times(V\cap S)$. Следовательно, по теореме 1.11 $\mathfrak{B}$ — база некоторой топологии на множестве $X\times Y$. Эта топология называется *топологией произведения* на $X\times Y$. Подмножество W множества $X\times Y$ открыто в топологии произведения в том и только в том случае, когда для каждого элемента $(x, y)\in W$ можно найти открытые окрестности U и V точек x и y соответственно такие, что $U\times V\subset W$. Пространства X и Y называются *координатными пространствами*, а отображения P_0 и P_1, первое из которых переводит точку $(x, y)\in X\times Y$ в x, а второе — в y, называются *проектированиями* на координатные пространства. Эти проектирования являются непрерывными отображениями, ибо если U открыто в X, то $P_0^{-1}[U] = U \times Y$ — множество, открытое в $X \times Y$. Непрерывность проектирований может быть на самом деле положена в основу описания топологии произведения. А именно, пусть $\mathfrak{J}$ — какая-нибудь топология на $X \times Y$, относительно которой оба проектирования непрерывны. Тогда, если U открыто в X, а V открыто в Y, то множество $U \times V$ открыто в $\mathfrak{J}$, ибо $U \times V = P_0^{-1}[U] \cap P_1^{-1}[V]$, а стоящие справа множества открыты относительно $\mathfrak{J}$ в силу непрерывности проектирований. Следовательно, $\mathfrak{J}$ больше топологии произведения, т. е. топология произведения — наименьшая среди тех топологий, относительно которых проектирования на координатные пространства непрерывны.

Не составляет труда распространить данное определение топологии произведения на случай декартова произведения любого конечного числа координатных пространств. Пусть X_0, X_1, ..., X_{n-1} — топологические пространства. Базу топологии произведения на декартовом произведении $X_0 \times X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ образует семейство всевозможных множеств вида $U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$, где U_i — произвольное множество, открытое в X_i. В частности, если каждое X_i есть множество вещественных чисел с обычной топологией, то пространство произведения есть *евклидово n-пространство* E^n. Элементами пространства E^n являются всевозможные вещественные функции, определенные на множестве 0, 1, ..., $n-1$; значение функции x на элементе i обозначается через $x_i (= x(i))$.

Теперь будет определена топология произведения на декартовом произведении произвольного семейства топологических пространств. Предположим, что для каждого элемента a из какого-то множества индексов A задано некоторое множество X_a. Декартово произведение $\Pi\{X_a : a \in A\}$ определяется как множество всех таких функций x на A, что $x_a \in X_a$ для каждого a из A. Множество X_a называется a-м координатным множеством. Проектирование P_a произведения на a-е координатное множество определяется формулой $P_a(x) = x_a$. Предположим, что на каждом координатном множестве задана некоторая топология $\mathfrak{J}_a$. Конструкция топологии произведения, которая будет описана, мотивируется *) требованием, чтобы каждое проектирование P_a было непрерывным отображением. Чтобы обеспечить непрерывность всех проектирований, необходимо и достаточно, чтобы были открытыми все множества вида $P_a^{-1}[U]$, где U — произвольное множество, открытое в X_a. Семейство всех таких множеств образует предбазу некоторой топологии. Ясно, что эта топология — наименьшая среди тех, относительно которых проектирования непрерывны. Это и есть *топология произведения.* Элементы определенной нами предбазы имеют вид $\{x : x_a \in U\}$, где U может быть любым открытым подмножеством пространства X_a. Интуитивно они ассоциируются с цилиндрами над открытыми подмножествами координатных пространств. Иногда говорят, что элементы рассматриваемой предбазы получаются «ограничением a-й координаты некоторым открытым подмножеством a-го координатного пространства». Базу топологии произведения образует семейство всевозможных конечных пересечений элементов указанной предбазы. Произвольный элемент U этой базы имеет вид $\bigcap\{P_a^{-1}[U_a] : a \in F\} = \{x : x_a \in U_a \textit{ для каждого } a \textit{ из } F\}$, где F — конечное подмножество множества A и U_a — открытое подмножество пространства X_a для каждого a из F. Отметим, что речь идет о *конечных* пересечениях **). Вообще говоря, не верно, что множество вида $\Pi\{U_a : a \in A\}$ открыто в топологии произведения, если каждое U_a открыто в X_a. *Пространство произведения*, или *произведение пространств*, — это декартово произведение этих пространств, наделенное топологией произведения.

Проектирования пространства произведения на координатные пространства обладают еще одним очень полезным свойством. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *открытым* тогда и только тогда, когда образ каждого открытого множества открыт, т. е. когда из того, что множество U открыто в пространстве X, следует, что множество $f[U]$ открыто в пространстве Y.

*) Предлагаемое описание топологии произведения принадлежит Бурбаки.

**) См. примечание на стр. 122.

2. Теорема. *Проектирование пространства произведения на произвольное его координатное пространство открыто.*

Доказательство. Обозначим через P_c проектирование пространства $\Pi\{X_a : a \in A\}$ на пространство X_c. Чтобы показать, что отображение P_c открыто, достаточно убедиться, что образ произвольной окрестности любой точки x произведения является окрестностью точки $P_c(x)$. Можно при этом предположить, что окрестность, выбранная в пространстве произведения, принадлежит описанной выше базе его топологии. Пусть $x \in V = \{y : y_a \in U_a$ *при* a *из* $F\}$, где F — некоторое конечное подмножество множества A и U_a — множество, открытое в X_a для каждого a из F. Мы построим копию пространства X_c, содержащую точку x. Для произвольного $z \in X_c$ положим $f(z)_c = z$, и пусть при $a \neq c$ будет $f(z_a) = x_a$. Тогда $P_c \circ f(z) = z$. Если $c \notin F$, то ясно, что $f[X_c] \subset V$ и $P_c[V] = X_c$ — открытое множество. Если $c \in F$, то $f(z) \in V$ в том и лишь в том случае, когда $z \in U_c$; тогда $P_c[V] = U_c$. Этим теорема доказана. (Заметим, что построенное в приведенном доказательстве отображение f является гомеоморфизмом, — иногда этот факт бывает полезен.)

Можно было бы подумать, что проекция множества, замкнутого в произведении пространств, всегда замкнута. Однако легко видеть, что это неверно, ибо подмножество $\{(x, y) : xy = 1\}$ евклидовой плоскости, будучи само замкнутым, обладает незамкнутыми проекциями на координатные пространства.

Есть очень полезная характеристика непрерывности тех отображений, область значений которых является подмножеством некоторого произведения пространств.

3. Теорема. *Отображение f топологического пространства в пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывна каждая из композиций $P_a \circ f$, где $a \in A$.*

Доказательство. Если f — непрерывное отображение, то и отображение $P_a \circ f$ непрерывно, ибо проектирование P_a непрерывно. Если отображение $P_a \circ f$ непрерывно при каждом a, то для каждого открытого множества U из X_a множество $(P_a \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[P_a^{-1}[U]]$

открыто. Отсюда следует, что прообраз при f каждого элемента выбранной выше предбазы пространства произведения открыт. Значит, в силу утверждения 3.1 (в) f — непрерывное отображение.

Сходимость в пространстве произведения можно очень просто описать в терминах проекций.

4. Теорема. *Направленность S в пространстве произведения сходится к точке s в том и только в том случае, когда ее проекция в произвольное координатное пространство сходится к проекции точки s.*

Доказательство. Так как проектирование на произвольное координатное пространство непрерывно, то из сходимости направленности $\{S_n, n \in D\}$ в произведении $\Pi\{X_a : a \in A\}$ к точке s следует, что направленность $\{P_a(S_n), n \in D\}$ сходится к $P_a(s)$. Докажем обратное. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — такая направленность, что $\{P_a(S_n), n \in D\}$ сходится к s_a для каждого a из A. Тогда, какова бы ни была открытая окрестность U_a точки s_a, направленность $\{P_a(S_n), n \in D\}$ находится с некоторого момента в множестве U_a и, значит, направленность $\{S_n, n \in D\}$ находится с того же момента в множестве $P_a^{-1}[U_a]$. Но тогда направленность $\{S_n, n \in D\}$ должна находиться с некоторого момента в любом конечном пересечении множеств вида $P_a^{-1}[U_a]$. Так как семейство всевозможных таких конечных пересечений образует базу топологии произведения в точке s, то направленность $\{S_n, n \in D\}$ сходится к s.

Сходимость относительно топологии произведения называется *покоординатной*, или *поточечной*, *сходимостью*. Обычно последний термин употребляется, когда все координатные пространства идентичны. В этом важном специальном случае декартово произведение $\Pi\{X : a \in A\}$ есть просто множество всех функций, определенных на A, со значениями в X, и обычно обозначается через X^A. Направленность $\{F_n, n \in D\}$ в множестве X^A сходится к функции f в топологии поточечной сходимости тогда и только тогда, когда направленность $\{F_n(a), n \in D\}$ сходится к $f(a)$ при каждом a из A. Этот факт оправдывает название «поточечная сходимость». Топологию произведения называют в этом случае еще и топологией *простой сходимости*.

Естественно поинтересоваться, когда произведение топологических пространств наследует свойства, которыми обладают координатные пространства? Например, можно спросить, будет ли пространство произведения хаусдорфовым или будет ли оно удовлетворять первой или второй аксиоме счетности, если каждое из координатных пространств обладает соответствующим свойством? Следующие теоремы содержат ответы на эти вопросы.

5. Теорема. *Произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Если x и y — разные точки произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$, то $x_a \neq y_a$ для некоторого a из A. Если каждое координатное пространство хаусдорфово, то у точек x_a и y_a есть непересекающиеся открытые окрестности U и V соответственно. Тогда $P_a^{-1}[U]$ и $P_a^{-1}[V]$ — непересекающиеся окрестности точек x и y в произведении.

Напомним, что антидискретным называется такое топологическое пространство, в котором единственными открытыми множествами являются пустое множество и все пространство.

6. Теорема. *Пусть X_a для каждого элемента a из некоторого множества индексов A — пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только в том случае, когда все, за исключением счетного множества, пространства X_a антидискретны.*

Доказательство. Пусть B — счетное подмножество множества A и все X_a при $a \in A \setminus B$ антидискретны. Рассмотрим произвольную точку x пространства произведения. Выберем для каждого a из A некоторую счетную базу $\mathfrak{U}_a$ системы окрестностей точки x_a в пространстве X_a. Тогда $\mathfrak{U}_a = \{X_a\}$ для каждого $a \in A \setminus B$. Рассмотрим семейство всех конечных пересечений множеств вида $P_a^{-1}[U]$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$. Это семейство счетно, так как $P_a^{-1}[U] = \Pi\{X_b : b \in A\}$ при $a \in A \setminus B$ Но совокупность этих конечных пересечений образует базу системы окрестностей в точке x. Следовательно, пространство произведения удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Докажем обратное. Пусть B — такое несчетное подмножество множества A, что для каждого a из B у точки x_a в X_a есть окрестность, являющаяся собственным подмножеством множества X_a, и пусть существует счетная база $\mathfrak{U}$ топологии в точке x. Каждый элемент U базы $\mathfrak{U}$ содержит некоторый элемент стандартной базы, через посредство которой вводилась выше топология произведения. Следовательно, $P_a[U]=X_a$ для всех a из A, за исключением конечного числа. Так как множество B несчетно, то найдется элемент a в B такой, что $P_a[U]=X_a$ для каждого U из $\mathfrak{U}$. Но у точки x_a есть открытая окрестность V, являющаяся собственным подмножеством множества X_a. Ясно, что никакой элемент базы $\mathfrak{U}$ не является подмножеством множества $P_a^{-1}[V]$, так как каждый элемент из $\mathfrak{U}$ проектируется на все X_a. Получилось противоречие.

Верно также, что и координатные пространства наследуют определенные свойства пространства произведения. Если пространство произведения хаусдорфово, то хаусдорфово и каждое координатное пространство, и если пространство произведения удовлетворяет в каждой точке первой аксиоме счетности, то то же можно сказать и о каждом координатном пространстве. Эти утверждения доказываются легко, мы этого делать не будем.

7. Замечания. Топология произведения была определена А. Н. Тихоновым. В двух классических работах [1] и [2] им были получены важнейшие результаты, которые ныне стали стандартными инструментами общей топологии (см. также главу 5). До работ Тихонова много исследований посвящалось сходимости последовательностей функций относительно топологии поточечной сходимости. При этом возникало много трудностей, ибо эту топологию нельзя полностью описать в терминах сходящихся последовательностей, по крайней мере в самых интересных случаях (см. задачу 3. И).

ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Начнем с краткого обзора тех рассмотрений, которые привели к определению топологии произведения. Пусть f — функция на множестве X со значениями в топологическом пространстве Y. На множестве X всегда можно так определить топологию, чтобы f стала непрерывной. Одна из таких топологий очевидна и неинтересна — это дискретная топология. Более интересную топологию, удовлетворяющую поставленному условию, образует семейство $\mathfrak{J}$ всех множеств вида $f^{-1}[U]$, где U — произвольное множество, открытое в Y. Это действительно топология, ибо переход к прообразу сохраняет операции объединения и пересечения. Каждая топология, относительно которой отображение f непрерывно, содержит топологию $\mathfrak{J}$. Следовательно, $\mathfrak{J}$ — наименьшая из всех топологий, относительно которых f непрерывно. Если задано некоторое семейство функций — по одной функции f_a для каждого элемента a из некоторого множества индексов A, — то топология, предбазой которой служит семейство всех множеств вида $f_a^{-1}[U]$, где $a \in A$ и U — открытое подмножество области значений функции f_a, обладает в точности теми же свойствами. Этот путь как раз и привел к определению топологии произведения.

Целью данного параграфа является исследовать обратную проблему. Пусть f — функция, определенная на топологическом пространстве X с областью значений Y. Как задать топологию на множестве Y, чтобы функция f стала непрерывной? Если подмножество U множества Y открыто в какой-либо из тех топологий, относительно которых функция f непрерывна, то множество $f^{-1}[U]$ открыто в пространстве X. С другой стороны, семейство $\mathfrak{U}$ всех подмножеств U множества Y, для которых $f^{-1}[U]$ открыто в X, образует топологию на Y, ибо прообраз пересечения (или объединения) элементов из этого семейства является пересечением (объединением) их прообразов. Топология $\mathfrak{U}$, следовательно, будет наибольшей из всех топологий на Y, относительно которых f непрерывна; она называется *фактор-топологией* *) на Y (фактор-топологией относительно отображения f и топологии, заданной на X). Подмножество B множества Y

*) Понятие фактор-пространства впервые было определено в книге П. С. Александрова и Хопфа [1]. (*Прим. перев.*)

замкнуто относительно фактор-топологии тогда и только тогда, когда $f^{-1}[Y\setminus B]=X\setminus f^{-1}[B]$ открыто в X. Следовательно, множество B замкнуто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}[B]$ замкнут.

Без дополнительных жестких ограничений на f о фактор-топологии можно сказать очень мало*). Поэтому мы будем рассматривать только отображения, принадлежащие к одной из двух двойственных категорий. Напомним, что отображение f одного топологического пространства в другое называется *открытым* в том и лишь в том случае, когда образ каждого открытого множества открыт. Отображение f называется *замкнутым* в том и лишь в том случае, когда образ каждого замкнутого множества замкнут. Уже отмечалось, что проектирование евклидовой плоскости на ее первое координатное пространство является открытым, не замкнутым отображением. Беря подпространства плоскости, можно построить замкнутые отображения, которые не открыты, и непрерывные отображения, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми. Подпространство $X=\{(x,y) : x=0$ *или* $y=0\}$, состоящее из точек двух осей, отображается на пространство вещественных чисел посредством проектирования $P(x, y)=x$. Образ малой окрестности точки $(0,1)$ состоит тогда из одной лишь точки 0. Следовательно, отображение P на множество X не открыто; но легко проверить, что оно замкнуто. Если точку $(0,0)$ удалить, то на оставшемся подпространстве $X\setminus\{0,0\}$ отображение P не будет ни открытым, ни замкнутым (образ замкнутого множества $\{(x,y)\colon y=0$ *и* $x\neq 0\}$ не замкнут).

Ясно из определения, что открыто ли отображение или же замкнуто — это зависит, в частности, от того, какая топология задана на его области значений. Однако если известно, что отображение f непрерывно и либо открыто, либо замкнуто, то топология его области значений однозначно определяется топологией, заданной на области определения, и отображением f.

---

*) Сейчас в этой области достигнут ряд продвижений; см., например, Архангельский [1], Стоун [2], Чобан [1], [2]. *(Прим. перев.)*

8. Теорема. *Если отображение f топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ на топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ открыто или замкнуто, то $\mathfrak{U}$ — фактор-топология.*

Доказательство. Если отображение f открыто и U — подмножество множества Y, прообраз которого $f^{-1}[U]$ открыт, то множество $U = f[f^{-1}(U)]$ открыто в топологии $\mathfrak{U}$. Следовательно, если f — открытое отображение, то каждое множество, открытое относительно фактор-топологии, открыто и относительно топологии $\mathfrak{U}$. Если f не только открыто, но еще и непрерывно, то, поскольку фактор-топология — наибольшая среди тех топологий, относительно которых отображение f непрерывно, топология $\mathfrak{U}$ совпадает с фактор-топологией. Чтобы доказать нашу теорему для случая замкнутого отображения f, достаточно заменить всюду в предшествующем рассуждении слово «открытое» на слово «замкнутое».

Отображение f топологического пространства в произведение пространств непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция отображения f с каждым проектированием. У этого утверждения есть аналог, касающийся фактор-пространств.

9. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение пространства X на пространство Y, топология которого является фактор-топологией. Тогда отображение g пространства Y в пространство Z непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывна композиция $g \circ f$.*

Доказательство. Пусть U — произвольное множество, открытое в Z, и отображение $g \circ f$ непрерывно. Тогда $(g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]]$ — множество, открытое в X. Значит, и множество $g^{-1}[U]$ открыто в силу определения фактор-топологии. Обратное утверждение ясно.

Почти очевидно, что, изучая фактор-топологии и свойства открытых и замкнутых отображений, нам, по существу, незачем привлекать топологическое пространство, являющееся областью значений. Действительно, если f — непрерывное отображение топологического пространства X на пространство Y, имеющее фактор-топологию, то можно построить топологическую копию пространства Y, исходя из множества X, топологии, заданной на нем, и семейства всех множеств вида $f^{-1}[y]$, где $y \in Y$. Построение осуществляется следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{D}$ семейство всех подмножеств множества X, имеющих вид $f^{-1}[y]$, где $y \in Y$, и пусть P — отображение пространства X на множество $\mathfrak{D}$, значение которого на x есть $f^{-1}[f(x)]$. Для каждого элемента y из Y положим $g(y) = f^{-1}[y]$. Тогда g — взаимно однозначное отображение множества Y на $\mathfrak{D}$, причем $g \circ f = P$ и $f = g^{-1} \circ P$. Если наделить множество $\mathfrak{D}$ фактор-топологией (относительно отображения P), то из предыдущей теоремы будет следовать, что g — непрерывное отображение (так как $g \circ f = P$) и что g^{-1} — непрерывное отображение (так как $g^{-1} \circ P = f$) Следовательно, g — гомеоморфизм.

Предшествующие замечания показывают, что пространство значений является, по существу, чем-то посторонним. Оставшиеся теоремы данного параграфа будут формулироваться так, чтобы подчеркнуть этот факт. Для большей четкости рассмотрим предварительно семейства подмножеств фиксированного множества X. *Разбиение* пространства X есть семейство $\mathfrak{D}$ непересекающихся подмножеств множества X, объединением которых является всё X. *Проектирование* (*фактор-отображение*) множества X на разбиение $\mathfrak{D}$ есть функция P, значением которой на x служит тот единственный элемент множества $\mathfrak{D}$, которому принадлежит точка x. Есть равносильный этому способ описания разбиения. Для заданного разбиения $\mathfrak{D}$ определим отношение R на множестве X, согласившись считать, что точка x R-связана с точкой y, тогда и только тогда, когда эти точки принадлежат одному элементу разбиения. Формально отношение R, *отвечающее разбиению* $\mathfrak{D}$, есть подмножество множества $X \times X$, образованное всеми теми парами (x, y), для которых x и y принадлежат одному элементу разбиения $\mathfrak{D}$ или, коротко, $R = \bigcup \{D \times D : D \in \mathfrak{D}\}$. Если P — проектирование множества X на $\mathfrak{D}$, то $R = \{(x, y) : P(x) = P(y)\}$. Отношение R является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно (см. главу 0). Обратно, каждое отношение эквивалентности на X определяет некоторое семейство подмножеств (имеются в виду классы эквивалентности), являющееся разбиением множества X. Если R — отношение эквивалентности на множестве X, то множество X/R определяется как семейство его классов эквивалентности. Через $R[A]$ для любого подмножества A множества X обозначается множество всех точек, R-эквивалентных точкам из A, т. е. $R[A]=\{y:(x,y)\in R$ *для некоторого* x *из* $A\}$ или, что то же самое, $R[A]=\bigcup\{D:D\in X/R$ *и* $D\cap A$ *не пусто*$\}$. Если x — точка из X, то запись $R[\{x\}]$ будет сокращаться до $R[x]$. Множество $R[x]$ — это тот класс эквивалентности, который содержит точку x. Если P — проектирование множества X на разбиение, то $P(x)=R[x]$.

Во всей оставшейся части этого параграфа мы будем предполагать, что X — некоторое фиксированное топологическое пространство, R — отношение эквивалентности на X и P — проектирование множества X на семейство X/R классов эквивалентности. Соответствующее *фактор-пространство* — это множество X/R, наделенное фактор-топологией (относительно отображения P). Если $\mathfrak{A}\subset X/R$, то $P^{-1}[\mathfrak{A}]=\bigcup\{A:A\in\mathfrak{A}\}$. Следовательно, множество $\mathfrak{A}$ открыто (замкнуто) в фактор-пространстве тогда и только тогда, когда множество $\bigcup\{A:A\in\mathfrak{A}\}$ открыто (соответственно замкнуто) в пространстве X.

10. Теорема. *Пусть P — проектирование топологического пространства X на фактор-пространство X/R. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(а) *P — открытое отображение.*

(б) *Если множество A открыто в X, то и множество $R[A]$ открыто в X.*

(в) *Если множество A замкнуто в X, то и объединение всех элементов из X/R, являющихся подмножествами множества A, замкнуто в X.*

Если поменять местами слова «открытое» и «замкнутое» в формулировках утверждений (а), (б) *и* (в), *то снова получатся равносильные между собой утверждения.*

Доказательство. Покажем, прежде всего, что условие (а) эквивалентно условию (б). Для каждого подмножества A множества X пусть $R[A]=P^{-1}[P[A]]$. Если отображение P открыто и A — открытое множество, то в силу непрерывности P $P^{-1}[P[A]]$ — открытое множество. Если множество $P^{-1}[P[A]]$ открыто для любого открытого множества A, то в силу определения фактор-топологии множество $P[A]$ открыто, т. е. P — открытое отображение. Докажем эквивалентность условий (б) и (в). Заметим, что объединение всех элементов из X/R, являющихся подмножествами множества A, есть $X\setminus R[X\setminus A]$. Последнее множество замкнуто для любого замкнутого множества A в том и только в том случае, когда из того, что открыто множество $X\setminus A$, следует, что открыто множество $R[X\setminus A]$. Доказательство двойственного утверждения получается перестановкой всюду слов «открыто» и «замкнуто».

Пусть X — хаусдорфово пространство или пространство, удовлетворяющее одной из двух аксиом счетности. Естественно спросить тогда, непременно ли фактор-пространство X/R наследует эти свойства? Если не налагать жестких дополнительных ограничений, то ответ будет «нет». Например, если X — множество всех вещественных чисел с обычной топологией и R — множество всех пар (x, y), для которых разность $x - y$ является рациональным числом, то фактор-пространство X/R антидискретно, а проектирование P пространства X на пространство X/R открыто. Следовательно, открытое отображение может переводить хаусдорфово пространство в нехаусдорфово пространство. Замкнутое отображение, переводящее хаусдорфово пространство в нехаусдорфово, и замкнутое отображение, переводящее пространство с первой аксиомой счетности в пространство без нее, выглядят чуть более громоздкими, но строятся без труда (3.Т, 4.Ж). Иногда бывает полезно дополнительно предположить, что отношение R, являющееся множеством упорядоченных пар, замкнуто в произведении $X\times X$. Можно это условие переформулировать так: если x и y — не R-эквивалентные точки пространства X, то у точки (x, y) в произведении $X\times X$ есть окрестность W, не пересекающаяся с множеством R. Такая окрестность W содержит окрестность вида $U\times V$, где U и V — окрестности точек x и y соответственно. Произведение $U\times V$ не пересекается с R тогда и только тогда, когда никакая точка из U не R-эквивалентна никакой точке из V. Это значит, что множество R замкнуто в $X\times X$ тогда и только тогда, когда у любых не R-эквивалентных точек x и y из X есть окрестности U и V соответственно такие, что никакая точка множества U не R-эквивалентна никакой точке множества V или, равносильно, что никакой элемент разбиения X/R не пересекает множества U и V одновременно.

11. Теорема. *Если фактор-пространство X/R хаусдорфово, то множество R замкнуто в пространстве произведения $X \times X$.*

Если проектирование P пространства X на фактор-пространство X/R открыто и множество R замкнуто в пространстве $X \times X$, то X/R — хаусдорфово пространство.

Доказательство. Если X/R — хаусдорфово пространство и $(x, y) \notin R$, то $P(x) \neq P(y)$ и можно найти непересекающиеся открытые окрестности U для точки $P(x)$, V для точки $P(y)$. Множества $P^{-1}[U]$ и $P^{-1}[V]$ открыты, и, так как их образы при отображении P не пересекаются, никакая точка множества $P^{-1}[U]$ не R-эквивалентна никакой точке множества $P^{-1}[V]$. Значит, $P^{-1}[U] \times P^{-1}[V]$ — окрестность точки (x, y), не пересекающаяся с множеством R, т. е. R замкнуто. Первое утверждение теоремы доказано. Пусть теперь проектирование P открыто, множество R замкнуто в $X \times X$ и $P(x)$, $P(y)$ — различные элементы множества X/R. Тогда точка x не R-эквивалентна точке y и, так как множество R замкнуто, у x и y есть соответственно такие открытые окрестности U и V, что никакая точка множества U не R-эквивалентна никакой точке множества V. Следовательно, образы окрестностей U и V не пересекаются и, так как отображение P открыто, эти образы являются открытыми окрестностями точек $P(x)$ и $P(y)$ соответственно.

Замкнутые отображения довольно широко изучались под иным названием. Разбиение $\mathfrak{D}$ топологического пространства X называется *непрерывным* в том и лишь в том случае, когда для каждого D из $\mathfrak{D}$ и любого открытого множества U, содержащего множество D, существует такое открытое множество V, что $D \subset V \subset U$ и V — объединение некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{D}$ (см. задачу 3.Е.).

12. Теорема (П. С. Александров и Хопф [1]). *Разбиение $\mathfrak{D}$ топологического пространства X непрерывно в том и только в том случае, если проектирование P пространства X на фактор-пространство $\mathfrak{D}$ замкнуто.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 3.10 отображение P замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества U из X объединение V тех элементов семейства $\mathfrak{D}$, которые являются подмножествами множества U, является открытым множеством. Если отображение P замкнуто, $D \in \mathfrak{D}$ и $D \subset U$, то V — искомое открытое множество. Значит, разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{D}$ — непрерывное разбиение и U — произвольное множество, открытое в X. Снова обозначим через V объединение всех тех элементов разбиения $\mathfrak{D}$, которые являются подмножествами множества U. Если $x \in V$, то $x \in D \subset U$ для некоторого D из $\mathfrak{D}$. В силу непрерывности разбиения $\mathfrak{D}$ найдется открытое множество W, являющееся объединением элементов семейства $\mathfrak{D}$, такое, что $D \subset W \subset U$. Тогда W — подмножество множества V и, значит, V — окрестность точки x. Множество V открыто, ибо оно является окрестностью каждой своей точки. Из теоремы 3.10 вытекает теперь, что P — замкнутое отображение.

Пусть A и B — какие-нибудь непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Можно рассмотреть тогда следующее разбиение $\mathfrak{D}$ пространства X: его элементами служат A, B и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (A \cup B)$. Про фактор-пространство этого разбиения часто говорят, что оно «получено в результате отождествления всех точек множества A и всех точек множества B». Очень легко проверяется, что разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно и что если X — хаусдорфово пространство, то множество $R = \bigcup \{D \times D : D \in \mathfrak{D}\}$ замкнуто в $X \times X$. Можно было бы предположить, что получающееся при этом простом построении фактор-пространство наследует лучшие качества пространства X. К сожалению, это неверно: X может быть хаусдорфовым пространством или пространством с первой аксиомой счетности, а полученное таким образом фактор-пространство не будет обладать этими свойствами.

13. Замечание. Понятие непрерывного разбиения было введено П. С. Александровым [9] и Мором в середине двадцатых годов. Открытые отображения впервые интенсивно исследовались Ароншайном немного позже (А р о н ш а й н [2]). Многие результаты предшествующего параграфа можно найти в книге У а й б ё р н а [2] *).

ЗАДАЧИ

А. Связные пространства

Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Б. Теорема о непрерывности

Пусть A и B — такие подмножества топологического пространства X, что $X=A\cup B$ и множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ отделены. Тогда, если отображение f пространства X непрерывно и на множестве A, и на множестве B, то f непрерывно и на всем X (см. 1.19).

В. Упражнение на непрерывные отображения

Пусть f и g — два непрерывных отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Тогда множество всех точек $x\in X$, для которых $f(x)=g(x)$, замкнуто. Следовательно, если отображения f и g согласуются на плотном подмножестве в X ($f(x)=g(x)$ для всех x из некоторого плотного подмножества в X), то $f=g$.

Г. Непрерывность в точке.
Продолжение непрерывного отображения

Пусть f — отображение, определенное на некотором подмножестве X_0 топологического пространства X со значениями в хаусдорфовом пространстве Y Скажем тогда, что отображение f непрерывно в точке x пространства X, в том и только в том случае, когда x принадлежит замыканию множества X_0 и существует точка $y\in X$, прообраз каждой окрестности которой представляется в виде пересечения множества X_0 с некоторой окрестностью точки x.

(а) Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любых направленностей S и T, сходящихся к x, направленности $f\circ S$ и $f\circ T$ сходятся к одной и той же точке пространства Y.

(б) Обозначим через C множество всех точек, в которых отображение f непрерывно, и пусть f' — функция на C, значением которой в точке $x\in C$ служит тот элемент y области значений Y, который фигурирует в определении непрерывности в точке (точнее, график функции f' является пересеченнем множества $C\times Y$ с замыканием графика отображения f). Функция f' обладает следующим свойством: если множество U открыто в X, то $f'[U]\subset\overline{f[U]}$. Функ-

---

*) Теория отображений последние десять лет бурно развивалась; естественные дополнения к этой главе увеличили бы ее объем вдвое. Поэтому мы только укажем литературу; А р х а н г е л ь с к и й [1], [5], [8], [9], П о н о м а р е в [1]—[7], С т о у н [2]—[4], С к л я р е н к о [1]—[3], Е ф и м о в [1], М а й к л [3], [4], Л а ш н е в [1], П а с ы н к о в [2], М о р и т а и Х а н а и [1], Х е н р и к с е н и И с б е л л [1], Ч о б а н [1], [2] и др.

ция f' непрерывна, если пространство Y удовлетворяет условию: семейство всех замкнутых окрестностей произвольной точки пространства Y образует базу топологии в этой точке. (Такие топологические пространства называются *регулярными*. Отказаться здесь от требования регулярности нельзя, как показано Бурбаки и Дьедонне [1].)

Д. Упражнение на вещественные непрерывные функции

Пусть f и g — вещественные функции, заданные на некотором топологическом пространстве, непрерывные относительно обычной топологии вещественных чисел, и a — фиксированное вещественное число.

(а) Функция af, значение которой в точке x равно $af(x)$, непрерывна. (Покажите, что функция, которая переводит число r в число ar, непрерывна, и воспользуйтесь тем, что композиция непрерывных функций есть непрерывная функция.)

(б) Функция $|f|$, значение которой в точке x равно $|f(x)|$, непрерывна.

(в) Отображение $F(x)=(f(x), g(x))$ непрерывно относительно обычной топологии евклидовой плоскости. (Проверьте, что композиции отображения F с проектированиями на координатные пространства непрерывны.)

(г) Функции $f+g$, $f-g$ и $f \cdot g$ непрерывны, а если g нигде не обращается в нуль, то и $\frac{f}{g}$ — непрерывная функция. (Покажите сначала, что операции $+$, $-$ и $\cdot$ задают непрерывные отображения евклидовой плоскости в пространство вещественных чисел; см. также 3.У.)

д) Функции $\max[f, g]=\frac{1}{2}(|f+g|+|f-g|)$ и $\min[f, g]=$ $=\frac{1}{2}(|f+g|-|f-g|)$ непрерывны.

Е. Функции, полунепрерывные сверху

Вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве X, называется *полунепрерывной сверху* тогда и только тогда, когда $\{x : f(x) \geqslant a\}$ замкнуто для любого вещественного числа a. *Верхняя* топология $\mathfrak{U}$ на множестве R вещественных чисел состоит из пустого множества, множества R и всех множеств вида $\{t : t<a\}$, где a — любой элемент R. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — какая-нибудь направленность вещественных чисел, тогда $\lim\sup \{S_n, n \in D\}$ определяется как $\lim\{\sup\{S_m, m \in D \text{ и } m \geqslant n\}, n \in D\}$, где предел берется относительно обычной топологии вещественных чисел.

(а) Направленность $\{S_n, n \in D\}$ вещественных чисел сходится к точке s относительно топологии $\mathfrak{U}$ в том и лишь в том случае, когда $\lim\sup\{S_n, n \in D\} \leqslant s$.

(б) Вещественная функция f на X полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно относительно верхней топологии $\mathfrak{U}$, а это будет тогда и только тогда, когда $\lim\sup\{f(x_n), n \in D\} \leqslant f(x)$ для любой направленности $\{x_n, n \in D\}$, сходящейся в X к точке x.

(в) Если функции f и g полунепрерывны сверху, а t — какое угодно неотрицательное вещественное число, то функция $f+g$ и функция tf полунепрерывны сверху.

(г) Пусть F — такое семейство полунепрерывных сверху функций, что $i(x)=\inf\{f(x) : f\in F\}$ существует для каждого x из X. Тогда $i(x)$ — полунепрерывная сверху функция. (Заметьте, что $\{x : i(x)\geqslant a\}=\bigcap\{\{x : f(x)\geqslant a\} : f\in F\}$.)

(д) Для любой ограниченной вещественной функции f на X существует наименьшая полунепрерывная сверху функция f^- такая, что $f^-\geqslant f$. Пусть $\mathfrak{V}$ — семейство всех окрестностей точки x и $S_V=\sup\{f(y) : y\in V\}$, тогда $f^-(x)=\lim\{S_V,\ V\in\mathfrak{V},\ \subset\}$.

(е) Вещественная функция g называется *полунепрерывной снизу* тогда и только тогда, когда функция $-g$ полунепрерывна сверху. Для ограниченной вещественной функции f положим $f_-=-(-f)^-$ и определим *колебание* Q_f функции f так: $Q_f(x)=f^-(x)-f_-(x)$ для всех x из X. Функция Q_f полунепрерывна сверху, и функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $Q_f(x)=0$ для всех x из X.

(ж) Пусть f — неотрицательная вещественная функция на X, R — пространство вещественных чисел с обычной топологией и множество $G=\{(x, t) : 0\leqslant t\leqslant f(x)\}$ имеет топологию, индуцированную топологией произведения пространств $X\times R$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ разбиение пространства G на «вертикальные слои», т. е. на множества вида $(\{x\}\times R)\cap G$. Если разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно, то функция f полунепрерывна сверху. (Обратное утверждение тоже верно, но самое простое его доказательство опирается на теорему 5.12.)

Ж. Упражнение на топологическую эквивалентность

(а) Любые два открытых интервала вещественных чисел с топологией, индуцированной обычной топологией вещественных чисел, гомеоморфны.

(б) Два любых замкнутых интервала гомеоморфны, и каждый полуоткрытый интервал гомеоморфен любому другому полуоткрытому интервалу.

(в) Никакой открытый интервал не гомеоморфен никакому замкнутому и никакому полуоткрытому интервалу, и никакой замкнутый интервал не гомеоморфен никакому полуоткрытому интервалу.

(г) Подпространство $\{(x, y) : x^2+y^2=1\}$ евклидовой плоскости не гомеоморфно никакому подпространству пространства вещественных чисел.

(У одних из предшествующих пространств есть лишь единственная точка, дополнение до которой связно, у других таких точек больше, а у третьих их нет.)

З. Гомеоморфизмы и взаимно однозначные непрерывные отображения

Если каждое из топологических пространств X и Y можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на другое, то пространства X и Y могут быть все же не гомеоморфны. Пусть X — пространство, образованное счетным семейством попарно непересекающихся полуоткрытых интервалов и счетным множеством *изолированных* точек (т. е. таких точек x, что $\{x\}$ — открытое множество в X). Рассмотрим, кроме того, пространство Y, состоящее из счетного семейства открытых интервалов и счетного множества изолированных точек. Заметим, что объединение счетного семейства полуоткрытых интервалов можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить на открытый интервал. По-видимому, этот пример принадлежит Фоксу.

И. Непрерывность по каждой из двух переменных

Пусть X и Y — топологические пространства, $X\times Y$ — их произведение и f — отображение пространства $X\times Y$ в некоторое третье топологическое пространство. Говорят, что отображение f *непрерывно по* x, тогда и только тогда, когда для каждого $y\in Y$ функция $f(\ ,y)$, значение которой в точке x равно $f(x,y)$, непрерывна. Аналогично отображение $f(x,y)$ непрерывно по y в том и лишь в том случае, когда для каждого $x\in X$ функция $f(x,\ )$, определенная условием $f(x,\ )(y)=f(x,y)$, непрерывна. Функция f, непрерывная на произведении, непрерывна и по каждой переменной; однако обратное не верно. (Классический пример — вещественная функция f, определенная на евклидовой плоскости следующим образом: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ и $f(0,0)=0$.)

К. Упражнение на евклидово n-пространство

Подмножество A евклидова n-пространства E^n называется *выпуклым* тогда и только тогда, когда для каждой пары x и y точек множества A и каждого вещественного числа t, удовлетворяющего условию $0\leqslant t\leqslant 1$, точка $tx+(1-t)y$ принадлежит множеству A. (Мы полагаем $(tx+(1-t)y)_i=tx_i+(1-t)y_i$.) Любые два открытых выпуклых подмножества пространства E^n гомеоморфны. Что можно сказать о его замкнутых выпуклых подмножествах?

Л. Упражнение на замыкание, внутренность и границу в произведении

Пусть X и Y — топологические пространства и $X\times Y$ — их произведение. Границу произвольного множества C условимся обозначать через C^b. Пусть A и B — подмножества пространств X и Y соответственно; тогда:

(а) $(\overline{A\times B})=\overline{A}\times\overline{B}$,

(б) $(A\times B)^0=A^0\times B^0$ и

(в) $(A\times B)^b=(\overline{A\times B})\setminus(A\times B)^0=((A^b\cup A^0)\times$ $\times(B^b\cup B^0))\setminus(A^0\times B^0)=(A^b\times B^b)\cup(A^b\times B^0)\cup(A^0\times B^b)=$ $=(A^b\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times B^b)$.

М. Упражнение на топологию произведения

Пусть для каждого элемента множества индексов A задано некоторое топологическое пространство X_a. Пусть B и C — непересекающиеся подмножества множества A такие, что $A=B\cup C$. Тогда пространство произведения $\Pi\{X_b : b \in B\} \times \Pi\{X_c : c \in C\}$ гомеоморфно пространству произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$. Для произвольно фиксированного топологического пространства X произведение X^A гомеоморфно произведению $X^B \times X^C$, и произведение $(X^B)^C$ гомеоморфно произведению $X^{B\times C}$, где все пространства берутся с топологией произведения.

Н. Произведение пространств со счетной базой

Топология произведения обладает счетной базой в том и только в том случае, когда топология каждого координатного пространства имеет счетную базу и все координатные пространства, кроме счетного множества, антидискретны.

О. Пример на произведения и сепарабельность

Пусть Q — замкнутый единичный интервал и X — пространство произведения Q^Q. Обозначим через A подмножество пространства X, образованное характеристическими функциями точек. Точнее, $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x(q)=1$ для некоторого q из Q и на $Q \setminus \{q\}$ функция x обращается в нуль.

(а) Пространство X сепарабельно. (Множество всех x из X с конечной областью значений (их иногда называют ступенчатыми функциями) плотно в X. Некоторое счетное подмножество этого множества тоже плотно в X *).)

(б) Множество A с индуцированной топологией дискретно и несепарабельно.

(в) У множества A есть только одна предельная точка x в пространстве X, причем для любой окрестности U точки x множество $A \setminus U$ конечно.

П. Произведение связных пространств

Произведение произвольного семейства связных топологических пространств связно. (Зафиксируем в произведении точку x, и пусть A — множество всех точек y, для которых существует связное множество, содержащее x и y одновременно. Покажите, что A плотно в произведении.)

Р. Упражнение на T_1-пространства

Произведение T_1-пространств является T_1-пространством. Если $\mathfrak{D}$ — разбиение топологического пространства, то фактор-пространство является T_1-пространством в том и только в том случае, когда все элементы разбиения $\mathfrak{D}$ замкнуты.

С. Упражнение на фактор-пространства

Проектирование топологического пространства X на фактор-пространство X/R является замкнутым отображением тогда и толь-

---

*) Плотно в X, например, множество тех ступенчатых функций, каждая ступенька которых лежит на рациональной высоте над рациональным интервалом. Оно счетно. *(Прим. перев.)*

ко тогда, когда для каждого подмножества A множества X имеем $\overline{R[A]} \subset R[\overline{A}]$. Проектирование является открытым отображением в том и лишь в том случае, когда $R[A^0] \subset R[A]^0$ для каждого подмножества A. ($^-$ и ^{0} — это операторы замыкания и перехода к внутренности, соответственно.)

Т. Пример на фактор-пространства и диагональные последовательности

Пусть X — евклидова плоскость с обычной топологией и A — множество всех точек (x, y), для которых $y=0$. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{D}$, элементами которого являются множество A и все одноточечные множества $\{(x, y)\}$, где $(x, y) \notin A$.

Множество $\mathfrak{D}$, наделенное фактор-топологией, обладает следующими свойствами:

(а) Проектирование X на фактор-пространство замкнуто.

(б) Существует счетное семейство окрестностей элемента $\{A\}$, пересечение которых есть $\{A\}$.

(в) Для каждого неотрицательного целого числа m последовательность $\left\{\left(m, \frac{1}{n+1}\right), n \in \omega\right\}$ сходится в фактор-пространстве к элементу A. Если $\{N_n, n \in \omega\}$ — какая-либо подпоследовательность последовательности $\{n, n \in \omega\}$, то последовательность $\left\{\left(n, \frac{1}{N_n+1}\right), n \in \omega\right\}$ не сходится к элементу A. (Последнюю последовательность можно было бы назвать диагональю исходного семейства последовательностей.)

(г) Построенное фактор-пространство не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Замечание. Этот пример принадлежит Новосаду.

У. Топологические группы

Тройка $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ называется *топологической группой* тогда и только тогда, когда $(G, \cdot)$ — группа, $(G, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство и отображение, значение которого на элементе (x, y) пространства $G \times G$ равно $x \cdot y^{-1}$, непрерывно относительно топологии произведения на $G \times G$. Когда недоразумения маловероятны, мы не будем указывать в обозначениях ни групповую операцию, ни топологию $\mathfrak{J}$; просто будем говорить, что «G является топологической группой». Пусть X и Y — подмножества множества G; тогда $X \cdot Y$ — множество всех таких элементов $z \in G$, что $z = x \cdot y$ для некоторого $x \in X$ и некоторого $y \in Y$. В случаях, когда x — элемент множества G, записи $\{x\} \cdot Y$ и $Y \cdot \{x\}$ будут сокращаться соответственно до $x \cdot Y$ и $Y \cdot x$. Множество Y^{-1} определяется как $\{x : x^{-1} \in Y\}$.

(а) Пусть X, Y и Z — подмножества множества G, тогда $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ и $(X \cdot Y)^{-1} = Y^{-1} \cdot X^{-1}$.

(б) Пусть $(G, \cdot)$ — группа и $\mathfrak{J}$ — некоторая топология на множестве G. Тогда $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — топологическая группа тогда и только тогда, когда для любых точек x и y из G и произвольной окрестности W точки $x \cdot y^{-1}$ найдутся окрестность U точки x и окрестность V точки y такие, что $U \cdot V^{-1} \subset W$. Равносильное условие: $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — топологическая группа тогда и только тогда, когда непрерывны отображения i и m, где $i(x) = x^{-1}$ и $m(x, y) = x \cdot y$.

(в) Пусть G — топологическая группа. Тогда отображение i, описываемое формулой $i(x) = x^{-1}$, является гомеоморфизмом пространства G на себя. Гомеоморфизмами являются также отображение L_a и отображение R_a, называемые *левым и правым переносами* и определяемые формулами $L_a(x) = a \cdot x$ и $R_a(x) = x \cdot a$, где a — произвольный фиксированный элемент группы G.

Очень важное обстоятельство: топология топологической группы однозначно определяется системой окрестностей какого-либо элемента группы. Этот факт (точно он формулируется ниже) позволяет «локализовать» многие понятия.

(г) Пусть G — топологическая группа и $\mathfrak{U}$ — система всех окрестностей ее единичного элемента. Тогда множество $A \subset G$ открыто в том и только в том случае, когда $x^{-1} \cdot A \in \mathfrak{U}$ для каждого x из A или, что эквивалентно, если $A \cdot x^{-1} \in \mathfrak{U}$ для каждого x из A. Замыканием множества A является множество $\bigcap \{U \cdot A : U \in \mathfrak{U}\} = \bigcap \{A \cdot U : U \in \mathfrak{U}\}$. (Заметьте, что $x \in U \cdot A$ тогда и только тогда, когда множество $(U^{-1} \cdot x) \cap A$ не пусто.)

(д) Семейство $\mathfrak{U}$ окрестностей единицы e произвольной топологической группы обладает следующими свойствами:

1) если U и V принадлежат $\mathfrak{U}$, то $U \cap V \in \mathfrak{U}$;

2) если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset V$, то $V \in \mathfrak{U}$;

3) если $U \in \mathfrak{U}$, то для некоторого $V \in \mathfrak{U}$ имеем $V \cdot V^{-1} \subset U$ и

4) для каждого U из $\mathfrak{U}$ и каждого x из G выполняется $x \cdot U \cdot x^{-1} \in \mathfrak{U}$.

Обратно, если заданы группа G и семейство $\mathfrak{U}$ ее непустых подмножеств, удовлетворяющее перечисленным выше четырем условиям, то на G существует единственная топология $\mathfrak{J}$ такая, что тройка $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ является топологической группой, а семейство $\mathfrak{U}$ — системой всех окрестностей единичного элемента группы G в этой топологии.

(е) Каждая группа вместе с дискретной топологией или вместе с антидискретной топологией является топологической группой.

Пусть G — множество вещественных чисел, тогда $(G, +, \mathfrak{J})$, где $\mathfrak{J}$ — обычная топология, будет топологической группой, и $(G \setminus \{0\}, \cdot, \mathfrak{J})$ тоже является топологической группой. Пусть G — множество всех целых чисел, p — некоторое простое число и $\mathfrak{U}$ — семейство всех таких подмножеств U множества G, что для некоторого положительного целого числа k каждое целое кратное числа p^k принадлежит U. Тогда $\mathfrak{U}$ — система окрестностей элемента 0 в некоторой топологии $\mathfrak{J}$, относительно которой $(G, +, \mathfrak{J})$ является топологической группой.

(ж) Топологическая группа является хаусдорфовым пространством, коль скоро ее топология удовлетворяет T_0-аксиоме отделимости. (То есть для любых двух различных точек x и y по крайней мере у одной из них найдется окрестность, не содержащая другой. Заметьте, что если $x \notin U \cdot y$, то $x \cdot y^{-1} \notin U$, и если, кроме того, $V^{-1} \cdot V \subset U$, то множество $V \cdot x \cap V \cdot y$ пусто.)

(з) Если U — открытое, а X — произвольное подмножество топологической группы, то $U \cdot X$ и $X \cdot U$ — открытые множества. Однако может случиться, что множества X и Y замкнуты, а множество $X \cdot Y$ не замкнуто. (Рассмотрите евклидову плоскость с обычным сложением, и пусть $X = Y = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x^2} \right\}$.)

(и) Декартово произведение $\Pi\{G_a : a \in A\}$ групп является группой относительно следующей операции: $(x \cdot y)_a = x_a \cdot y_a$ для каждого a из A. Если декартово произведение групп наделить топологией произведения, то оно становится топологической группой. Проектирования на координатные пространства превращаются при этом в непрерывные открытые гомоморфизмы *).

Замечание. Понтрягин [1], Бурбаки [1] и Вейль [2] — основные учебники по теории топологических групп; см. также Шевалле [1].

Ф. Подгруппы топологической группы

(а) Если наделить подгруппу топологической группы индуцированной топологией, то получится топологическая группа.

(б) Замыкание подгруппы является подгруппой, а замыкание инвариантной подгруппы (т. е. нормального делителя) является инвариантной подгруппой.

(в) Каждая подгруппа, внутренность которой не пуста, открыта и замкнута одновременно. Произвольная подгруппа H либо замкнута, либо множество $\overline{H} \setminus H$ плотно в $\overline{H}$.

(г) Наименьшая подгруппа, содержащая фиксированное открытое подмножество топологической группы, образует открыто-замкнутое множество.

(д) Компонента единицы топологической группы является нормальным делителем.

(е) Каждая дискретная (в индуцированной топологии) нормальная подгруппа **) связной топологической группы содержится в ее центре. (Рассмотрите для фиксированного элемента h заданной дискретной подгруппы H отображение группы G в H, которое переводит x в $x^{-1} \cdot h \cdot x$.)

Х. Фактор-группы и гомоморфизмы

Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа и G/H — семейство левых классов смежности группы G по подгруппе H (т. е. семейство всех множеств, представимых в виде $x \cdot H$ для

---

*) Некоторые авторы пользуются для обозначения непрерывного гомоморфизма термином «представление», оставляя название «гомоморфизм» за теми непрерывными гомоморфизмами, которые являются открытыми отображениями на область значений.

**) Нормальная подгруппа и нормальный делитель — равносильные выражения. (*Прим. перев.*)

некоторого $x \in G$). Множество G/H, наделенное фактор-топологией, есть *однородное пространство.* Если H — нормальный делитель, то G/H — группа, называемая фактор-группой группы G.

(а) Проектирование топологической группы G на однородное фактор-пространство G/H открыто и непрерывно. (Покажите, что объединение всех левых классов смежности, пересекающих фиксированное открытое множество U, есть $U \cdot H$, и примените утверждение 3.10.)

(б) Если H — нормальный делитель, то группа G/H, наделенная фактор-топологией, является топологической группой. При этом проектирование является непрерывным открытым гомоморфизмом.

(в) Отображение однородного пространства, при котором элемент A переходит в элемент $a \cdot A$, где a — фиксированный элемент группы G, является гомеоморфизмом.

(г) Пусть f — гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз произвольной окрестности единичного элемента группы H является окрестностью единичного элемента группы G.

(д) Пусть f — непрерывный гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу J. Тогда отображение группы G на группу $f[G]$, наделенную фактор-топологией, является непрерывным открытым гомоморфизмом, а тождественное отображение множества $f[G]$, взятого с фактор-топологией, в топологическую группу J непрерывно. Таким образом, каждый непрерывный гомоморфизм можно «профакторизовать», представив его в виде композиции некоторого непрерывного открытого гомоморфизма с последующим непрерывным взаимно однозначным гомоморфизмом. Если f — непрерывный открытый гомоморфизм группы G на группу J, то J топологически изоморфна топологической группе G/K, где K — ядро гомоморфизма f.

(е) Если $J \subset H \subset G$, J и H — нормальные делители группы G, то H/J является подгруппой группы G/J, причем фактор-топология группы H/J совпадает с топологией, индуцированной на ней фактор-топологией группы G/J, а отображение группы G/J в группу G/H, при котором элемент A переходит в элемент $A \cdot H$, непрерывно и открыто. Таким образом, группа $(G/J)/(H/J)$ топологически изоморфна группе G/H.

Ц. Ящичные пространства

Базой *ящичной* топологии декартова произведения $\Pi \{X_a : a \in A\}$ служит семейство всех множеств вида $\Pi\{U_a : a \in A\}$, где U_a для каждого a из A — некоторое открытое подмножество пространства X_a. Таким образом, декартово произведение открытых множеств в ящичной топологии всегда открыто.

(а) Проектирование в любое из координатных пространств является непрерывным и открытым отображением в ящичной топологии.

(б) Пусть Y — декартово произведение бесконечного семейства экземпляров пространства вещественных чисел, т. е. $Y = R^A$, где R —

пространство вещественных чисел, а A — бесконечное множество. Пространство Y, наделенное ящичной топологией, не удовлетворяет первой аксиоме счетности, а компонента пространства Y, содержащая точку y, — это множество всех точек x, для которых множество $\{a : x_a \neq y_a\}$ конечно. (Предположим, что координаты точек x и y пространства Y отличаются на бесконечном множестве $a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots$ элементов из A. Обозначим через Z множество всех $z \in Y$ таких, что для некоторого k $\dfrac{p\,|z(a_p) - x(a_p)|}{|x(a_p) - y(a_p)|} < k$ для всех p. Тогда Z — открыто-замкнутое множество, причем $x \in Z$ и $y \notin Z$.)

(в) Докажите утверждения (б) для случая произведения бесконечного числа связных хаусдорфовых топологических групп, каждая из которых содержит по крайней мере два различных элемента. Покажите сначала, что произведение топологических групп, наделенное ящичной топологией, является топологической группой.

Ч. Функционалы на вещественных линейных пространствах

Пусть $(X, +, \cdot)$ — вещественное линейное пространство. Вещественнозначная линейная функция, определенная на X, называется *линейным функционалом*. Множество Z всех линейных функционалов на X при естественном определении сложения и умножения на число становится вещественным линейным пространством. Ясно, что Z — подмножество произведения $R^X = \prod\{R : x \in X\}$, где R — пространство вещественных чисел. Топология, индуцированная на Z топологией произведения, называется *слабой* топологией, или w^*-топологией (*простая* топология). (Пространство Z является подгруппой группы R^X, которая в силу утверждения (и) задачи 3. У является топологической группой. Однако при доказательстве нижеследующих результатов выписанные выше утверждения о топологических группах нам не понадобятся.)

Ниже характеризуются w^*-плотные подпространства пространства Z и w^*-непрерывные линейные функционалы.

(а) Если $f, g_1, \ldots, g_n$ — элементы пространства Z и $f(x) = 0$, коль скоро $g_i(x) = 0$ при каждом i, то найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что $f = \sum\{a_i g_i : i = 1, \ldots, n\}$. (Рассмотрите отображение G пространства X в евклидово пространство E^n, определенное формулой $(G(x))_i = g_i(x)$. Покажите, что тогда существует некоторое отображение F (см. главу 0), для которого $f = F \circ G$.)

(б) Лемма о плотности. *Пусть Y — такое линейное подпространство пространства Z, что для каждого ненулевого элемента $x \in X$ существует функционал $g \in Y$ такой, что $g(x) \neq 0$. Тогда пространство Y w^*-плотно в Z.* (Чтобы установить, что $f \in \overline{Y}$, необходимо для каждого конечного подмножества $x_1, \ldots, x_n$ элементов пространства X научиться находить элемент пространства X, который приближает f в каждой из точек $x_1, \ldots, x_n$. Покажите, что существует такой функционал $g \in Y$, что $g(x_i) = f(x_i)$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$.)

в) Теорема о значении. *Линейный функционал F на Z w^*-непрерывен тогда и только тогда, когда он представляет собой значение, т. е. когда для некоторого x из X имеем $F(g) = g(x)$ при всех g из Z.* (Если функционал F w^*-непрерывен, то существуют набор $x_1, \ldots, x_n$ элементов пространства X и набор положительных вещественных чисел $r_1, \ldots, r_n$, для которых из того, что $|g(x_i)| < r_i$ при каждом i, следует, что $|F(g)| < 1$. Покажите, что тогда, если $g(x_i) = 0$ при каждом i, то $F(g) = 0$.)

Замечания. Понятие топологии произведения выросло на почве изучения сходимости последовательностей относительно ω^*-топологии. Эта последняя исследовалась очень широко (см., например, книгу Банаха [1]). В процессе этого изучения выявился ряд несуразностей, прояснившихся после развития топологического подхода. Можно было бы определить секвенциальное замыкание множества как объединение этого множества и множества пределов всевозможных сходящихся последовательностей элементов исходного множества и согласиться затем считать множество секвенциально замкнутым в том и только в том случае, когда оно совпадает со своим секвенциальным замыканием. Нетрудно убедиться тогда, что множество может быть секвенциально замкнутым по отношению к w^*-топологии, не будучи w^*-замкнуто. Это не является серьезным препятствием, если мы изучаем именно сходимость последовательностей. По-настоящему опечаливает, однако, тот факт, что секвенциальное замыкание множества может не быть секвенциально замкнутым, т. е. оператор секвенциального замыкания не является оператором замыкания Куратовского. Из-за этого техника общей топологии непригодна для изучения оператора секвенциального замыкания, и для каждого заключения необходимы дополнительные аргументы. См. книгу Банаха [1], стр. 208, где дается дальнейшее обсуждение предмета и приводятся примеры.

Ш. Вещественные линейные топологические пространства

Вещественное линейное топологическое пространство (в. л. т. п.) — это четверка $(X, +, \cdot, \mathfrak{I})$, где $(X, +, \cdot)$ — вещественное линейное пространство, $(X, +, \mathfrak{I})$ — топологическая группа, и умножение на число — операция $\cdot$ — является непрерывным отображением пространства произведения $X \times$ (*пространство вещественных чисел*) в X. Напомним, что подмножество K вещественного линейного пространства называется выпуклым тогда и только тогда, когда $tx + (1-t)y \in K$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и любых двух элементов $x, y \in K$.

(а) Пусть a — некоторое отличное от нуля фиксированное вещественное число. Отображение, которое переводит произвольный элемент x вещественного линейного топологического пространства в элемент $a \cdot x$, является гомеоморфизмом.

(б) Декартово произведение вещественных линейных топологических пространств, наделенное топологией произведения, является вещественным линейным топологическим пространством по отношению к покоординатному сложению и покоординатному умножению на число.

(в) Пусть Y — линейное подпространство в. л. т. п. X; если наделить Y индуцированной топологией, то оно само станет в. л. т. п.; X/Y вместе с фактор-топологией тоже есть в. л. т. п.

(г) Пусть K — выпуклое подмножество вещественного линейного топологического пространства X и f — линейный функционал на X. Функционал f непрерывен на K тогда и только тогда, когда для каждого вещественного числа t множество $f^{-1}[t] \cap K$ замкнуто в K. (Пусть $\{x_n, n \in D\}$ — направленность в K, сходящаяся к некоторому элементу x из K, такая, что направленность $\{f(x_n), n \in D\}$ не сходится к $f(x)$. Тогда для каждого n из некоторого конфинального подмножества множества D можно так выбрать y_n, чтобы $f(y_n)$ было константой, не зависящей от n и отличной от $f(x)$.

(д) Вещественная линейная функция f (т. е. линейный функционал) на в. л. т. п. X непрерывна в том и лишь в том случае, когда множество $\{x : f(x) = 0\}$ замкнуто.

Замечания. Понятие линейного топологического пространства определено сравнительно недавно (Колмогоров [1] и Нейман [1]). Оно выросло на почве изучения слабой топологии на банаховом пространстве и слабой топологии на сопряженном к нему пространстве. Значительная часть элементарной теории линейных топологических пространств получается непосредственным применением теории топологических групп. Все результаты теории, отличающие ее от теории топологических групп, связаны с понятием выпуклости. (Это совершенно естественно, ибо умножение на числа, — а наличие такого умножения и есть то единственное, что отличает в. л. т. п. от топологических групп, — применяется исключительно в рассуждениях, касающихся выпуклости.)

Немногие результаты теории вещественных линейных топологических пространств, изложенные в виде задач в этой книге, не образуют удовлетворительного введения в эту теорию, ибо нами не включены утверждения о выпуклости, существенные для серьезного изучения. Для дальнейшего чтения мы рекомендуем обратиться к книгам: Бурбаки [3], Нахбин [1] и Накано [1]. В первой из них изучаются линейные топологические пространства над топологическим (не обязательно коммутативным) полем.

Глава 4

ВЛОЖЕНИЯ И МЕТРИЗАЦИЯ

Путь, по которому эволюционировала общая топология, во многом характерен для математики. Сначала замечается сходство некоторых ситуаций, аналогии и повторения в рассуждениях. Затем предпринимаются попытки выделить понятия и методы, общие для различных примеров; при условии, что анализ достаточно глубок, есть надежда найти теорию, которая охватывает многие или даже все наши примеры и достойна самостоятельного изучения. Именно на этом пути после длительного экспериментирования было получено понятие топологического пространства. Оно — естественный продукт непрерывного процесса консолидации, абстрагирования и обобщения. Чтобы избежать формализма в обобщении, каждую возникающую таким образом абстракцию следует испытать с целью выяснения, действительно ли центральные идеи воплощены в ней. Это испытание обычно заключается в сравнении абстрактно построенного объекта с объектами, от которых он произошел. В рассматриваемом нами случае естественно стремиться выяснить, будет ли топологическое пространство — по крайней мере при некоторых разумных дополнительных предположениях о нем — гомеоморфно одному из тех специальных конкретных пространств, от которых произошло понятие топологического пространства. «Стандартные» пространства, с которыми естественно сравнивать все прочие, — это декартовы произведения единичных интервалов и метрические пространства. В этой главе выясняются элементарные свойства метрических и псевдометрических пространств и даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство было копией метрического пространства. Характеризуются также подпространства декартова произведения интервалов.

Предостережение: топологические пространства вовсе не обладают всеми свойствами метрических пространств. В главе 6 описывается другое, более тонкое обобщение метрических пространств.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы докажем четыре леммы. Все они касаются построения непрерывных вещественных функций на топологических пространствах. Пространство называется нормальным тогда и только тогда, когда для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$. *T_4-пространство* — это нормальное T_1-пространство (множество $\{x\}$ замкнуто при каждом x). Если согласиться называть множество U *окрестностью множества* A в том и только в том случае, когда A содержится во внутренности U^0 множества U, то определение нормальности можно переформулировать так: пространство нормально тогда и только тогда, когда любые его непересекающиеся замкнутые подмножества обладают непересекающимися окрестностями. Есть еще одна удачная переформулировка определения нормальности. Семейство окрестностей множества называется *базой системы окрестностей* этого множества в том и лишь в том случае, когда каждая окрестность последнего содержит некоторую окрестность из нашего семейства. Пусть W — произвольная окрестность замкнутого подмножества A нормального пространства. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $X \setminus W^0 \subset V$. Таким образом, каждая окрестность W замкнутого множества A содержит некоторую его замкнутую окрестность $\bar{U}$. Следовательно, семейство всевозможных замкнутых окрестностей замкнутого множества A является базой системы окрестностей множества A, если пространство нормально. Обратное тоже верно, ибо если A и B — непересекающиеся замкнутые множества и W — замкнутая окрестность множества A, содержащаяся в множестве $X \setminus B$, то W^0 и $X \setminus W$ — непересекающиеся открытые окрестности множеств A и B соответственно.

Все дискретные пространства и все антидискретные пространства нормальны. Таким образом, не каждое нормальное пространство хаусдорфово и не каждое нормальное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности (а также и первой). Однако T_4-пространство (T_1 и нормальное) непременно является хаусдорфовым пространством. Замкнутое подмножество нормального пространства, наделенное индуцированной топологией, нормально. Однако подпространства, произведения и фактор-пространства нормальных пространств могут не быть нормальными пространствами (см. 4Д, 4Е).

Есть условие, занимающее в случае T_1-пространств промежуточное положение по отношению к требованиям хаусдорфовости и нормальности. Топологическое пространство называется *регулярным* тогда и только тогда, когда для каждой его точки x и любой окрестности U этой точки существует замкнутая окрестность V точки x, содержащаяся в U. Иными словами, семейство замкнутых окрестностей произвольной точки должно быть базой топологии в этой точке. Равносильное условие: для каждой точки x и каждого замкнутого множества A, не содержащего этой точки, можно найти непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $x \in U$ и $A \subset V$. Регулярное пространство, одновременно являющееся T_1-пространством, называется *T_3-пространством*. Напоминаем, что линделёфовым называется топологическое пространство, из каждого открытого покрытия которого можно выбрать счетное подпокрытие.

1. Лемма (Тихонов). *Каждое регулярное линделёфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X. В силу регулярности X у каждой точки множества A найдется окрестность, замыкание которой не пересекается с множеством B. Следовательно, семейство $\mathfrak{U}$ всех открытых множеств, замыкания которых не пересекают множества B, покрывает множество A. Аналогично семейство $\mathfrak{V}$ всех открытых множеств, замыкания которых не пересекают множества A, покрывает множество B. Поэтому $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \cup \{X \setminus (A \cup B)\}$ — покрытие пространства X. Существует последовательность $\{U_n,\ n \in \omega\}$ элементов семейства $\mathfrak{U}$, покрывающая A, и последовательность $\{V_n,\ n \in \omega\}$ элементов семейства $\mathfrak{V}$, покрывающая B. Положим $U'_n = U_n \setminus \bigcup \{\overline{V}_p : p \leqslant n\}$ и $V'_n = V_n \setminus \bigcup \{\overline{U}_p : p \leqslant n\}$. Так как $U'_n \cap V_m$ пусто при $m \leqslant n$, то и $U'_n \cap V'_m$ пусто при $m \leqslant n$. Поменяв ролями множества U и V и повторив наше рассуждение, получим, что множество $U'_n \cap V'_m$ пусто при всех m и n. Следовательно, множества $\bigcup \{U'_n : n \in \omega\}$ и $\bigcup \{V'_n : n \in \omega\}$ не пересекаются. Наконец, множества $\overline{V}_p \cap A$ и $\overline{U}_p \cap B$ пусты для всех p. Значит, открытые непересекающиеся множества $\bigcup \{U'_n : n \in \omega\}$ и $\bigcup \{V'_n : n \in \omega\}$ содержат A и B соответственно.

В частности, регулярное топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, непременно нормально.

Приступим теперь к построению некоторых непрерывных вещественных функций. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества. Мы хотим построить непрерывную вещественную функцию, равную нулю на A и единице на B, все значения которой принадлежат замкнутому интервалу $[0,1]$. Вместо того чтобы строить функцию непосредственно, мы опишем множества, соответствующие (приближенно) множествам вида $\{x : f(x) < t\}$. Следующие ниже две леммы выясняют связь между некоторыми семействами подмножеств и некоторыми вещественными функциями.

2. Лемма. *Пусть для каждого элемента t некоторого всюду плотного подмножества D множества положительных вещественных чисел задано некоторое подмножество F_t множества X такое, что*:

(а) *если $t < s$, то $F_t \subset F_s$;*

(б) $\bigcup \{F_t : t \in D\} = X$.

Для каждого x из X положим $f(x) = \inf\{t : x \in F_t\}$. Тогда $\{x : f(x) < s\} = \bigcup \{F_t : t \in D$ и $t < s\}$ и $\{x : f(x) \leqslant s\} = \bigcap \{F_t : t \in D$ и $t > s\}$ для каждого вещественного числа s.

Доказательство. Проводится непосредственное вычисление. Имеем $\{x : f(x) < s\} = \{x : \inf \{t : x \in F(t)\} < s\}$, и так как стоящая в скобках наибольшая нижняя грань меньше s тогда и только тогда, когда некоторый элемент множества $\{t : x \in F_t\}$ меньше s, то множество $\{x : f(x) < s\}$ состоит из всех таких x, что $t < s$ и $x \in F_t$ для некоторого t, т. е. совпадает с множеством $\bigcup\{F_t : t \in D$ *и* $t < s\}$. Этим доказано первое равенство. Докажем второе. Заметим, что $\inf\{t : x \in F_t\} \leqslant s$, если для каждого u, большего s, найдется такое $t < u$, что $x \in F_t$. Обратно, если для каждого t из D, большего s, $x \in F_t$, то $\inf\{t : x \in F_t\} \leqslant \leqslant s$, ибо D плотно в множестве вещественных чисел. Следовательно, множество всех x, для которых $f(x) = = \inf\{t : x \in F_t\} \leqslant s$, есть $\{x$: *если* $t \in D$ *и* $t > s$, *то* $x \in F_t\} = = \bigcap\{F_t : t \in D$ *и* $t > s\}$.

3. Лемма. *Пусть для каждого элемента t некоторого всюду плотного подмножества D множества положительных вещественных чисел задано открытое подмножество F_t топологического пространства X такое, что выполняются условия*:

(а) *если $t < s$, то замыкание множества F_t содержится в множестве F_s*;

(б) $\bigcup\{F_t : t \in D\} = X$.

Тогда функция f, определенная формулой $f(x) = = \inf\{t : x \in F_t\}$, непрерывна.

Доказательство. В соответствии с теоремой 3.1 функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента некоторой предбазы топологии пространства значений открыт. Семейство всех множеств вида $\{t : t < s\}$ и $\{t : t > s\}$, где s — произвольное вещественное число, является предбазой обычной топологии пространства вещественных чисел. Следовательно, для доказательства непрерывности функции f достаточно установить, что множество $\{x : f(x) < s\}$ открыто, а множество $\{x : f(x) \leqslant s\}$ замкнуто при любом вещественном s. В силу предыдущей леммы первое из этих множеств, $\{x : f(x) < s\}$, является объединением открытых множеств F_t и потому открыто. Снова в силу предыдущей леммы $\{x : f(x) \leqslant s\} = \bigcap\{F_t : t \in D$ *и* $t > s\}$. Доказательство леммы 3 будет завершено, если мы покажем, что последнее множество совпадает с множеством $\bigcap\{\bar{F}_t : t \in D$ *и* $t > s\}$. Так как $F_t \subset \bar{F}_t$ при любом t, то не вызывает сомнений, что $\bigcap\{F_t : t \in D$ *и* $t > s\} \subset \{\bar{F}_t : t \in D$ *и*

$t>s\}$. С другой стороны, для каждого $t\in D$, большего s, найдется $r\in D$ такое, что $s<r<t$; тогда $\bar{F}_r\subset F_t$. Доказано тем самым и обратное включение.

Принципиально важный результат этого параграфа доказывается теперь легко.

4. Лемма (Урысон). *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B нормального пространства X существует непрерывная функция f на X со значениями в интервале* $[0, 1]$, *равная нулю на A и единице на B.*

Доказательство. Пусть D — множество положительных двоично рациональных чисел (т. е. множество всех чисел вида $p\cdot 2^{-q}$, где p и q — положительные целые числа). Пусть $t\in D$; при $t>1$ положим $F(t)=X$, пусть $F(1)=X\setminus B$ (случай $t=1$) и $F(0)$ — любое открытое множество, содержащее A, замыкание которого не пересекается с B. Если $t\in D$ и $0<t<1$, то запишем t в виде $t=(2m+1)\cdot 2^{-n}$ и выберем, применяя индукцию по n, в качестве $F(t)$ какое-нибудь открытое множество, содержащее множество $\overline{F(2m\cdot 2^{-n})}$ и такое, что $\overline{F(t)}\subset$ $\subset F((2m+2)\cdot 2^{-n})$. Сделать это можно в силу нормальности пространства X. Положим $f(x)=\inf\{t: x\in F(t)\}$. По предыдущей лемме f — непрерывная функция. Она равна нулю на A, ибо $A\subset F(t)$ при каждом t из D, и равна единице на B, ибо $F(t)\subset X\setminus B$ при $t\leqslant 1$ и $F(t)=X$ при $t>1$.

ВЛОЖЕНИЕ В КУБЫ

Декартово произведение замкнутых единичных интервалов, наделенное топологией произведения, называется *кубом.* Куб, таким образом, — это множество Q^A всех функций, определенных на некотором множестве A со значениями в замкнутом единичном интервале Q, наделенное топологией поточечной, или покоординатной, сходимости. Кубы играют роль стандартных пространств. Мы собираемся описать топологические пространства, гомеоморфные подпространствам кубов. Способ, которым это делается, прост, но замечателен*). Он будет применяться затем при других обстоятельствах.

---

*) Этот способ, восходящий еще к П. С. Урысону, в полной общности впервые был развит А. Н. Тихоновым (*Прим. перев.*)

Пусть F — некоторое семейство отображений, определенных на одном и том же топологическом пространстве X со значениями в разных, вообще говоря, пространствах (пространство значений отображения $f \in F$ будет обозначаться через Y_f). Тогда имеет место естественное отображение пространства X в произведение $\Pi\{Y_f : f \in F\}$ — точка $x \in X$ переходит при этом отображении в элемент произведения, f-я координата которого равна $f(x)$. Формально отображение вычисления определяется так: $e(x)_f = f(x)$. Оказывается, отображение e непрерывно, если непрерывны отображения из F, и e является гомеоморфизмом, если семейство F содержит «достаточно отображений». Говорят, что семейство F отображений множества X *различает точки*, тогда и только тогда, когда для каждой пары различных точек x и y найдется такой элемент $f \in F$, что $f(x) \neq f(y)$. Семейство F *различает точки и замкнутые множества* в том и только в том случае, когда для каждого замкнутого подмножества A пространства X и каждой точки x из $X \setminus A$ существует такое отображение $f \in F$, что $f(x)$ не принадлежит замыканию множества $f[A]$.

5. Лемма о вложении. *Пусть F — семейство, произвольный элемент которого f есть непрерывное отображение топологического пространства X в некоторое топологическое пространство Y_f. Тогда:*

(а) *Отображение вычисления является непрерывным отображением пространства X в пространство произведения $\Pi\{Y_f : f \in F\}$.*

(б) *Если семейство F различает точки и замкнутые множества, то отображение e является открытым отображением пространства X на пространство $e[X]$.*

(в) *Отображение e взаимно однозначно в том и только в том случае, когда семейство F различает точки.*

Доказательство. Последовательно выполняя отображение e и проектирование P_f на f-е координатное пространство, мы получаем непрерывное отображение, ибо $P_f \circ e(x) = f(x)$. Следовательно, в силу теоремы 3.3 отображение e непрерывно. Для доказательства утверждения (б) достаточно установить, что образ при e любой открытой окрестности U произвольной точки x содержит пересечение множества $e[X]$ с некоторой окрестностью точки $e(x)$ в произведении. Выберем в F элемент f так, чтобы точка $f(x)$ не входила в замыкание множества $f[X \setminus A]$. Множество всех точек y произведения таких, что $y_f \notin \overline{f[X \setminus U]}$, открыто и, очевидно, его пересечение с множеством $e[X]$ содержится в $e[U]$. Значит, e — открытое отображение пространства X на пространство $e[X]$. Утверждение (в) ясно без доказательства.

Предшествующая лемма сводит задачу топологического вложения пространства в куб к отысканию «богатого» семейства непрерывных вещественных функций, определенных на этом пространстве. Бывают топологические пространства, на которых каждая непрерывная вещественная функция постоянна. Например, таково любое антидискретное пространство. Есть и менее тривиальные примеры: существуют регулярные хаусдорфовы пространства, на которых каждая непрерывная вещественная функция является константой *). Топологическое пространство X называется *вполне регулярным* тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю в точке x и тождественно равная единице на множестве $X \setminus U$. Ясно, что семейство всех непрерывных отображений вполне регулярного пространства в единичный интервал $[0,1]$ различает точки и замкнутые множества в смысле предшествующей леммы. (Верно и обратное утверждение, но это нам здесь не понадобится.) Если вполне регулярное пространство удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости ($\{x\}$ — замкнутое множество для любой точки x), то семейство всех его непрерывных отображений в отрезок $[0,1]$ различает также и точки. Вполне регулярное T_1-пространство называется *тихоновским пространством* **). Пусть X — тихо-

---

*) Первое пространство этого рода было построено П. С. Урысоном. См. также Хьюитт [1], Новак [1], ван Эст и Фрёйденталь [1].

**) Заметим, что в журнальной литературе на русском и английском языках принято называть вполне регулярными лишь вполне регулярные T_1-пространства. Аналогичное замечание относится и к нормальным пространствам. (*Прим. перев.*)

новское пространство и F — семейство всех непрерывных вещественных функций на X, значения которых заключены в отрезке $[0,1]$. Лемма 4.5 о вложении позволяет утверждать, что отображение вычисления пространства X в куб Q^F является гомеоморфизмом. Таким образом, каждое тихоновское пространство гомеоморфно подпространству некоторого куба. Это свойство в действительности характеризует тихоновские пространства, как мы очень скоро увидим.

Каждое нормальное T_1-пространство является тихоновским пространством в силу леммы Урысона (4.4). Любое вполне регулярное пространство регулярно, ибо если U — какая-нибудь окрестность точки x и f — непрерывная функция, равная нулю в x и единице на $X \setminus U$, то $V = \left\{ y : f(y) < \frac{1}{2} \right\}$ — открытое множество, замыкание которого содержится в множестве $\left\{ y : f(y) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$, а последнее является частью множества U. Есть целая иерархия аксиом отделимости для T_1-пространств: хаусдорфовость, регулярность, полная регулярность и нормальность. За исключением нормальности, все они передаются по наследству — в том смысле, что если некоторое пространство обладает одним из перечисленных свойств, то и любое его подпространство обладает этим свойством. Произведение пространств, относящихся к одному из названных типов, снова будет пространством того же типа; исключение опять составляют нормальные пространства. Доказать все эти факты, за исключением одного, описанного ниже, — он понадобится нам теперь — предоставляется читателю в качестве упражнений (4.3).

6. Теорема. *Произведение тихоновских пространств является тихоновским пространством.*

Доказательство. Условимся для удобства говорить, что непрерывное отображение f топологического пространства X в замкнутый единичный интервал *соответствует* паре (x, U), в том и только в том случае, когда x — точка, U — ее окрестность, $f(x) = 0$ и функция f тождественно равна единице на множестве $X \setminus U$. Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ соответствуют парам $(x, U_1), \ldots$

..., (x, U_n), где n — положительное целое число, и $g(y) = \sup\{f_i(y): i=1, \ldots, m\}$ для любого y; тогда функция g соответствует паре $(x, \cap\{U_i: i=1, \ldots, n\})$. Следовательно, пространство вполне регулярно, если для каждой точки x и каждой ее окрестности U из некоторой фиксированной предбазы топологии найдется функция, соответствующая паре (x, U). Пусть X — пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ тихоновских пространств, x — любая его точка, а U_a — произвольная окрестность точки x_a в X_a. Пусть функция f соответствует паре (x_a, U_a), тогда функция $f \circ P_a$, где P_a — проектирование на a-е координатное пространство, соответствует паре $(x, P_a^{-1}[U_a])$. Семейство множеств вида $P_a^{-1}[U_a]$ образует предбазу топологии произведения. Следовательно, пространство произведения вполне регулярно. Так как произведение T_1-пространств является T_1-пространством, то теорема доказана.

7. Теорема о вложении (Тихонов [2]). *Для того чтобы топологическое пространство было тихоновским, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно подпространству некоторого куба.*

Доказательство. Замкнутый единичный интервал является тихоновским пространством. Значит, куб, будучи произведением единичных интервалов, тоже является тихоновским пространством. Поэтому и каждое подпространство куба — тихоновское пространство. Уже отмечалось, что если X — тихоновское пространство и F — семейство всех непрерывных отображений пространства X в замкнутый единичный интервал Q, то (по лемме о вложении, 4.5) соответствующее отображение вычисления является гомеоморфизмом пространства X в куб Q^F.

МЕТРИЧЕСКИЕ И ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Есть много топологических пространств, топология которых определяется через расстояние. *Метрика* на множестве X — это определенная на декартовом произведении $X \times X$ функция d, значениями которой служат неотрицательные вещественные числа, удовлетворяющая при любых x, y и z из X следующим условиям*):

(а) $d(x, y) = d(y, x)$,

(б) (*неравенство треугольника*) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$,

(в) $d(x, y) = 0$, если $x = y$,

(г) если $d(x, y) = 0$, то $x = y$.

Последнее условие для многих целей несущественно. Функция d, которая удовлетворяет только условиям (а), (б) и (в), называется *псевдометрикой*. В этом параграфе все определения формулируются для псевдометрик. Само собой разумеется, имеют место аналогичные определения и для метрик.

Псевдометрическим пространством называется пара (X, d), где X — множество, а d — псевдометрика на нем. Число $d(x, y)$, где x и y — элементы из X, называется *расстоянием* между x и y (d-расстоянием, если возможна путаница). Пусть r — положительное число. Множество $\{y : d(x, y) < r\}$ называется *открытым шаром* d-*радиуса* r *с центром в точке* x (*около точки* x) или, коротко, *открытым* r-*шаром около* x; множество $\{y : d(x, y) \leqslant r\}$ — *замкнутым* r-*шаром около* x. Пересечение двух открытых шаров не обязано быть шаром. Однако если $d(x, y) < r$ и $d(x, z) < s$, то любая точка w, для которой $d(w, x) < \min[r - d(x, y),\ s - d(x, z)]$, входит как в открытый r-шар около y, так и в открытый s-шар около z в силу неравенства треугольника. Следовательно, каждая точка из пересечения любых двух открытых шаров входит в это пересечение вместе с некоторым открытым шаром около нее. Значит, семейство всех открытых шаров является базой некоторой топологии на X (см. 1.11). Эту топологию называют *псевдометрической топологией*, или топологией, *индуцированной на X заданной псевдометрикой*. Заметьте, что каждый замкнутый шар замкнут относительно соответствующей псевдометрической топологии.

---

*) Обычно (в частности, в русской, польской и немецкой литературе) принято расстояние обозначать через $\rho(x, y)$ (а не через $d(x, y)$) (*Прим. перев.*)

Пусть X — некоторое множество. Положим $d(x, y)=0$, если $x=y$, и $d(x, y)=1$ в противном случае. Тогда d — метрика на X, а открытый 1-шар около произвольной точки x совпадает с множеством $\{x\}$. Следовательно, множество $\{x\}$ открыто в топологии, индуцированной рассматриваемой метрикой, т. е. топологическое пространство, порожденное d, дискретно. Замкнутый 1-шар около произвольной точки из X есть все множество X; таким образом, замыкание открытого r-шара может сильно отличаться от замкнутого r-шара с центром в той же точке. Если положить функцию d равной нулю для всех пар (x, y) из $X \times X$, то d не будет метрикой, но будет псевдометрикой. В этом случае открытым r-шаром с центром в произвольной точке служит все пространство, а псевдометрическая топология совпадает с антидискретной топологией на X. Пусть X — множество всех вещественных чисел и $d(x, y)=|x-y|$; тогда d будет метрикой на X — она называется *обычной метрикой* вещественных чисел. Топология, индуцированная обычной метрикой, совпадает, к счастью, с обычной топологией вещественных чисел.

Расстояние от точки x до подмножества A относительно псевдометрики d есть $D(A, x)=\inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

8. Теорема. *Пусть A — фиксированное подмножество некоторого псевдометрического пространства. Расстояние от точки x до множества A является непрерывной функцией x относительно псевдометрической топологии.*

Доказательство. Из неравенства $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$, беря нижнюю грань левой и правой части по всем $z \in A$, выводим, что $D(A, x) \leqslant d(x, y)+D(A, y)$. Верно также неравенство, которое получится из этого, если поменять местами x и y. Значит, $|D(A, x)-D(A, y)| \leqslant d(x, y)$. Следовательно, для любой точки y из открытого r-шара с центром в точке x будет $|D(A, x)-D(A, y)|<r$, чем непрерывность доказана.

9. Теорема. *Замыкание множества A в псевдометрическом пространстве есть множество всех точек этого пространства, лежащих от A на нулевом расстоянии.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $D(A, x)$ в точке x множество $\{x : D(A, x) = 0\}$ замкнуто и содержит множество A. Поэтому оно содержит и замыкание $\bar{A}$ множества A. Пусть $y \notin \bar{A}$. Тогда у точки y найдется окрестность, не пересекающая множества A, которую можно считать открытым r-шаром. При этом $D(A, y) \geqslant r$ и, значит, $\{x : D(A, x) = 0\} \subset \bar{A}$. Следовательно, $\bar{A} = \{x : D(A, x) = 0\}$.

10. Теорема. *Каждое псевдометрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества псевдометрического пространства X и $D(A, x)$, $D(B, x)$ — расстояния от точки x до множеств A и B соответственно. Положим $U = \{x : D(A, x) - D(B, x) < 0\}$ и $V = \{x : D(A, x) - D(B, x) > 0\}$. Функция $D(A, x) - D(B, x)$ непрерывна в точке x, поэтому множества U и V открыты. Ясно, что множества U и V не пересекаются; применяя 4.9, мы заключаем, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

11. Теорема. *Каждое псевдометрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Вторая аксиома счетности выполняется в псевдометрическом пространстве в том и только в том случае, когда оно сепарабельно.*

Доказательство. Множество открыто в псевдометрической топологии тогда и только тогда, когда оно содержит каждую свою точку вместе с некоторой ее шаровой окрестностью. Это означает, что семейство открытых шаров с центром в точке x образует базу топологии в x. Так как произвольный открытый шар с центром в x содержит концентрический шар рационального радиуса, то у системы окрестностей точки x есть счетная база, т. е. наше пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Каждое пространство со счетной базой сепарабельно. Значит, осталось доказать, что топология сепарабельного псевдометрического пространства имеет счетную базу. Пусть Y — счетное плотное в рассматриваемом пространстве подмножество и $\mathfrak{U}$ — семейство всех открытых шаров рационального радиуса с центрами в точках множества Y. Семейство $\mathfrak{U}$, несомненно, счетно. Пусть U — любая окрестность произвольной точки x; при некотором положительном r открытый r-шар с центром в x содержится в U. Пусть s — какое-нибудь положительное рациональное число, меньшее r, и y — точка из Y, для которой $d(x, y) < \frac{s}{3}$. Обозначим через V открытый $\frac{2s}{3}$-шар с центром в точке y. Тогда $x \in V \subset U$; значит, $\mathfrak{U}$ — база рассматриваемой топологии.

12. Теорема. *Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в псевдометрическом пространстве (X, d) сходится к точке s в том и только в том случае, когда направленность $\{d(S_n, s), n \in D\}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Направленность $\{S_n, n \in D\}$ сходится к точке s тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого момента, она попадает в произвольный открытый r-шар, описанный около s. Однако последнее имеет место в том и лишь в том случае, когда направленность $\{d(S_n, s), n \in D\}$ с некоторого момента находится в каждом открытом r-шаре около нулевой точки множества вещественных чисел, наделенного обычной метрикой.

Диаметром подмножества A псевдометрического пространства (X, d) называется $\sup\{d(x, y): x \in A$ *и* $y \in A\}$. Если наименьшей верхней грани у стоящего в скобках множества чисел нет, то говорят, что диаметр множества бесконечен. Очевидно, свойство иметь конечный диаметр не является топологическим инвариантом.

13. Теорема. *Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $e(x, y) = \min[1, d(x, y)]$. Тогда (X, e) — псевдометрическое пространство, топология которого совпадает с топологией пространства (X, d).*

Следовательно, каждое псевдометрическое пространство гомеоморфно псевдометрическому пространству, диаметр которого не превосходит единицы.

Доказательство. Для доказательства того, что e — псевдометрика, достаточно установить, что если неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a + b \geqslant c$, то $\min[1, a] + \min[1, b] \geqslant \min[1, c]$. В самом деле, последнее неравенство становится неравенством треугольника, если положить $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ и $c = d(x, z)$. Если хотя бы одно из чисел $\min[1, a]$,

$\min[1, b]$ равно единице, то проверяемое неравенство, очевидно, выполняется — ведь $\min[1, c] \leqslant 1$. Если ни одно из них не равно единице, то достаточно сослаться на неравенство $a+b \geqslant c \geqslant \min[1, c]$. Значит, e — псевдометрика на X. Семейство всех открытых шаров радиуса, меньшего единицы, образует базу соответствующей псевдометрической топологии. Так как это семейство одно и то же для псевдометрик d и e, то соответствующие им псевдометрические топологии совпадают. Ясно, что e — диаметр множества X — равен, самое большее, единице.

Произведение несчетного множества топологических пространств не удовлетворяет, как правило, первой аксиоме счетности (см. 3.6). Не следует поэтому ожидать, что на произведении произвольного семейства псевдометрических пространств удастся так определить псевдометрику, что соответствующая псевдометрическая топология будет топологией произведения. Гораздо лучше обстоят дела в случае счетных произведений. В силу предыдущей теоремы мы ограничимся псевдометрическими пространствами, диаметр которых не превосходит единицы.

14. Теорема. *Пусть* $\{(X_n, d_n),\ n \in \omega\}$ — *последовательность псевдометрических пространств, диаметр каждого из которых не превосходит единицы; положим* $d(x, y) = \sum \{2^{-n} d_n(x_n, y_n) : n \in \omega\}$. *Функция* d *является псевдометрикой на декартовом произведении пространств* X_n, $n \in \omega$, *причем соответствующая ей псевдометрическая топология совпадает с топологией произведения.*

Доказательство. Что d — псевдометрика, доказывается просто; мы этого делать не будем. (Задача 2.Ж о суммируемости дает необходимую технику.) Докажем, что совпадают топологии. Заметим сначала, что если V есть 2^{-p}-шаровая окрестность около точки x произведения и $U = \{y : d_n(x_n, y_n) < 2^{-p-n-2}$ *при* $n \leqslant p+2\}$, то $U \subset V$. Действительно, если $y \in U$, то

$$d(x, y) < \sum \{2^{-p-n-2} : n = 0, \ldots, p+2\} + \\ + \sum \{2^{-n} : n = p+2, \ldots\} < 2^{-p-1} + 2^{-p-1} = 2^{-p}.$$

Но U — окрестность точки x в топологии произведения, значит, каждое множество, открытое в псевдометрической топологии, открыто и в топологии произведения. Докажем обратное. Рассмотрим произвольный элемент U определяющей предбазы *) топологии произведения. Множество U имеет вид $\{x : x_n \in W\}$, где W — некоторое открытое подмножество пространства X_n. Для каждой точки $x \in U$ можно найти открытый r-шар в пространстве X_n с центром в x_n, целиком лежащий в W. Так как $d(x, y) \geqslant 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$, то открытый $r \cdot 2^{-n}$-шар в произведении с центром в x содержится в U. Значит, каждый элемент определяющей предбазы, а следовательно и каждый элемент топологии произведения, открыт в псевдометрической топологии.

Пусть (X, d) и (Y, e) — псевдометрические пространства, f — отображение X на Y. Говорят, что f — *изометрия* (d-изометрия), в том и только в том случае, когда $d(x, y) = e(f(x), f(y))$ для всех точек x и y из X. Каждая изометрия является непрерывным открытым отображением (относительно соответствующих псевдометрических топологий), ибо образ открытого r-шара около x является открытым r-шаром около $f(x)$. Композиция двух изометрий — снова изометрия, и если изометрия взаимно однозначна, то обратное к ней отображение тоже является изометрией. В случае метрического пространства изометрия непременно взаимно однозначна; каждая изометрия метрического пространства является гомеоморфизмом. Совокупность всех метрических пространств распадается на классы эквивалентности, образованные попарно изометричными пространствами. Каждое свойство метрического пространства, которым обладает также любое изометричное ему метрическое пространство, называется метрическим инвариантом. Метрический инвариант может не быть топологическим инвариантом (примером может служить свойство бесконечности диаметра).

---

*) Определяющей предбазой топологии произведения называется здесь и в дальнейшем предбаза, построенная при определении топологии произведения в этой книге. (*Прим. перев.*)

Псевдометрические пространства лишь немного отличаются от метрических; в каком смысле — мы сейчас точно сформулируем. Удобно согласиться называть *расстоянием между подмножествами A и B* псевдометрического пространства число $D(A, B) = \mathrm{dist}\,(A, B) = \inf\{(x, y) : x \in A$ *и* $y \in B\}$. Вообще говоря, D — не псевдометрика, ибо все пространство X лежит на нулевом расстоянии от каждого своего непустого подмножества и, значит, не выполняется неравенство треугольника. Однако D является метрикой на множестве элементов некоторого разбиения, которое мы сейчас определим. Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех множеств вида $\overline{\{x\}}$. В силу 4.9 множество $\overline{\{x\}}$ состоит в точности из всех тех точек y, для которых $d(x, y) = 0$, и разбиение $\mathfrak{D}$ есть фактор-множество X/R, где R — отношение $\{(x, y) : d(x, y) = 0\}$.

15. Теорема. *Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех множеств вида $\overline{\{x\}}$, где $x \in X$. Положим $D(A, B) = \mathrm{dist}(A, B)$ для произвольных элементов A и B разбиения $\mathfrak{D}$. Тогда $(\mathfrak{D}, D)$ — метрическое пространство, топология которого совпадает с фактор-топологией на $\mathfrak{D}$; при этом проектирование пространства X на пространство $\mathfrak{D}$ является изометрией.*

Доказательство. Точка u принадлежит множеству $\overline{\{x\}}$ тогда и только тогда, когда $d(u, x) = 0$, а последнее выполняется тогда и только тогда, когда $x \in \overline{\{u\}}$. Если $u \in \overline{\{x\}}$ и $v \in \overline{\{y\}}$, то $d(u, v) \leqslant d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) = d(x, y)$. Следовательно, так как в этом случае $x \in \overline{\{u\}}$, $y \in \overline{\{v\}}$, то $d(u, v) = d(x, y)$. Таким образом, для любых элементов A и B семейства $\mathfrak{D}$ число $D(A, B)$ совпадает с расстоянием $d(x, y)$ между произвольной точкой x из A и произвольной точкой y из B. Поэтому $(\mathfrak{D}, D)$ — метрическое пространство и проектирование X на $\mathfrak{D}$ является изометрией. Если U — множество, открытое в X, и $x \in U$, то для некоторого $r > 0$ U содержит открытый r-шар с центром в x, а потому содержит и множество $\overline{\{x\}}$. В силу 3.10 отсюда следует, что проектирование пространства X на $\mathfrak{D}$ является открытым отображением относительно фактор-топологии на $\mathfrak{D}$. Оно является открытым отображением и по отношению к метрической топологии, соответствующей метрике D. Следовательно, в силу 3.8 эти топологии совпадают.

МЕТРИЗАЦИЯ

Пусть задано топологическое пространство $(X, \mathfrak{T})$; естественно спросить: существует ли на множестве X метрика, которая индуцирует на X топологию $\mathfrak{T}$*)? Если такая метрика существует, то говорят, что она *метризует* рассматриваемое топологическое пространство, которое в этом случае называется *метризуемым*. Подобным же образом говорят, что топологическое пространство *псевдометризуемо*, в том и только в том случае, когда на нем существует псевдометрика, псевдометрическая топология которой совпадает с топологией этого пространства. Псевдометрика является метрикой в том и только в том случае, когда индуцированная ею топология удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости (т. е. когда множество $\{x\}$ замкнуто для каждой точки x пространства). В этом параграфе теоремы формулируются для случая метризуемых пространств. Аналогичные утверждения для псевдометризуемых пространств будут очевидны сами по себе.

В двух основных теоремах этого параграфа даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы топологическое пространство было соответственно метризуемо и сепарабельно или просто метризуемо. Первая из них — это классическая метризационная теорема Урысона. Все части ее доказательства уже подготовлены нами; осталось только соединить их. Вторая теорема была доказана лишь недавно (история ее описывается в замечаниях в конце этого параграфа). Оказывается, немного изменив процедуру, предложенную Урысоном, можно доказать достаточность общего метризационного условия. Однако доказательство необходимости этого условия требует качественно нового построения.

*) Этот вопрос был впервые поставлен и исследован П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их совместных работах [1], [2] и Урысоном в [2] в 1922—1924 гг. (*Прим. перев.*)

Определяемые в этом параграфе понятия подвергаются затем дальнейшему изучению в последнем параграфе главы 5. Наконец, иная точка зрения на проблему метризации развивается в главе 7, однако, полученные там результаты не содержат теорем данного параграфа.

План доказательства условия метризуемости очень прост. В соответствии с теоремой 4.14 произведение счетного семейства псевдометрических пространств псевдометризуемо. По лемме о вложении (4.5), если F — семейство непрерывных отображений T_1-пространства X, где областью значений отображения $f \in F$ служит некоторое подпространство пространства Y_f, то отображение вычисления пространства X в произведение $\Pi\{Y_f : f \in F\}$ является гомеоморфизмом, коль скоро F различает точки и замкнутые множества (т. е. если A — замкнутое подмножество пространства X и x — точка из $X \setminus A$, то $f(x) \notin \overline{f[A]}$ для некоторого $f \in F$). Проблема метризации T_1-пространства X сводится поэтому к отысканию счетного семейства отображений пространства X в псевдометризуемые пространства, отделяющего точки от замкнутых множеств. (Ведь псевдометризуемое T_1-пространство непременно метризуемо.)

Для удобства условимся через Q^ω обозначать произведение замкнутого единичного интервала на себя счетное число раз, т. е. Q^ω — это семейство всех отображений множества неотрицательных целых чисел в замкнутый единичный интервал, наделенное топологией произведения.

16. Метризационная теорема (Урысон). *Регулярное T_1-пространство со счетной базой гомеоморфно некоторому подпространству куба Q^ω и потому метризуемо* *).

Доказательство. Ввиду замечаний, предшествующих теореме, достаточно доказать, что существует счетное семейство непрерывных отображений пространства X в Q, отделяющее точки от замкнутых множеств.

*) На самом деле Урысон формулировал свою теорему для нормальных пространств со счетной базой. На регулярные пространства со счетной базой ее распространил впоследствии А. Н. Тихонов. (*Прим. перев.*)

Пусть $\mathfrak{B}$ — какая-нибудь счетная база топологии, заданной на X. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех пар (U, V) элементов базы $\mathfrak{B}$ таких, что $\overline{U} \subset V$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ счетно. Выберем для каждой пары (U, V) из $\mathfrak{A}$ непрерывную функцию на X со значениями в Q, равную нулю на U и единице на $X \setminus V$ (такая функция существует в силу леммы Тихонова 4.1 и леммы Урысона 4.4), и обозначим через F семейство всех отобранных функций. Семейство F счетно; остается только показать, что F отделяет точки от замкнутых множеств. Пусть B — замкнутое множество и $x \in X \setminus B$. Выберем $V \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $x \in V \subset X \setminus B$; далее, выберем $U \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $x \in \overline{U} \subset V$. Тогда $(U, V) \in \mathfrak{A}$, и для соответствующего этой паре элемента $f \in F$ мы имеем $f(x) = 0 \notin \{1\} = \overline{f(B)}$.

Легко описать класс топологических пространств, к которым применима предшествующая метризационная теорема.

17. Теорема. *Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:*

(а) *X регулярно, и у его топологии есть счетная база.*

(б) *X гомеоморфно подпространству куба Q^{ω}.*

(в) *X метризуемо и сепарабельно.*

Доказательство. Предыдущая теорема показывает, что из (а) следует (б). Куб Q^{ω} метризуем в силу теоремы 4.14 и удовлетворяет второй аксиоме счетности (3.H). Следовательно, и каждое его подпространство метризуемо и удовлетворяет второй аксиоме счетности (значит, сепарабельно). Таким образом, из (б) следует (в). (Предостережение: не верно, что подпространство сепарабельного пространства непременно сепарабельно.) Наконец, из (в) следует (а), ибо если X метризуемо и сепарабельно, то оно обязательно регулярно и в силу теоремы 4.11 удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Метризационная теорема, охватывающая не только сепарабельные пространства, существенно опирается на идеи, примененные при доказательстве теоремы Урысона. При простом обсуждении методологии мы легко обнаружим место, где примененная процедура может быть усовершенствована. Построение метрики на X основывается на определении подходящего семейства отображений X в псевдометризуемые пространства. Но заметьте: до сих пор в качестве пространства значений фигурировал исключительно единичный интервал Q. Рассуждая чуть иначе, чем раньше, можно сказать, что если f — отображение X в Q, то, полагая $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, мы получаем некоторую псевдометрику на X. В процессе урысоновской метризации участвует счетное множество таких псевдометрик. Задача состоит в том, чтобы обобщить это построение. Пусть F — семейство отображений пространства X в Q; на роль псевдометрики естественно претендует тогда сумма $\Sigma\{|f(x) - f(y)| : f \in F\}$. Нужно, чтобы эта сумма была непрерывна по x и y, для того, чтобы тождественное отображение X на псевдометрическое пространство (X, d) было непрерывно. Это требование выполняется при гораздо более слабом условии, чем конечность семейства F, — достаточно, чтобы у каждой точки $x \in X$ существовала окрестность U, на которой обращаются в нуль все элементы семейства F, за исключением конечного числа. Иными словами, годится некоторое условие типа локальной конечности. Понятие локальной конечности — ключ к решению задачи.

Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется *локально конечным* *) тогда и только тогда, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathfrak{A}$. Из этого определения немедленно следует, что точка является предельной для объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ тогда и только тогда, когда она является предельной точкой для некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Следовательно, замыкание этого объединения равно объединению замыканий слагаемых, т. е. $\overline{\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}} = \bigcup\{\bar{A} : A \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно также, что замыкания элементов семейства $\mathfrak{A}$ образуют локально конечное семейство. Семейство $\mathfrak{A}$ называется *дискретным*, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом семейства $\mathfrak{A}$. Любое дискретное семейство локально конечно. Если $\mathfrak{A}$ дискретно, то семейство замыканий элементов

*) Это понятие было введено П. С. Александровым в 1924 г. в работе [1]. (*Прим. перев.*)

из $\mathfrak{A}$ тоже дискретно. Наконец, скажем, что семейство $\mathfrak{A}$ *σ-локально конечно* (σ-дискретно), в том и только в том случае, когда оно является объединением счетного числа локально конечных (соответственно дискретных) своих подсемейств.

Теперь мы можем сформулировать следующую метризационную теорему. Ее доказательство распадается в последовательность лемм.

18. Метризационная теорема. *Следующие три ограничения на топологическое пространство равносильны:*

(а) *Пространство метризуемо.*

(б) *Пространство удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости, регулярно и обладает σ-локально конечной базой.*

(в) *Пространство является регулярным T_1-пространством с σ-дискретной базой.*

Ясно, что из условия (в) следует (б). Мы докажем, что из (б) следует (а) и что из (а) следует (в). Первый этап рассуждения заключается в доказательстве леммы, являющейся разновидностью леммы Тихонова (4.1).

19. Лемма. *Регулярное пространство с σ-локально конечной базой нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Тогда существуют открытые покрытия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ множеств A и B соответственно такие, что замыкание никакого элемента $\mathfrak{U}$ не пересекается с B, замыкание никакого элемента $\mathfrak{V}$ не пересекается с A и $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — подсемейства элементов σ-локально конечной базы N. Таким образом, $\mathfrak{U} = \bigcup\{\mathfrak{U}_n: n\in\omega\}$ и $\mathfrak{V} = \bigcup\{\mathfrak{V}_n : n\in\omega\}$, где $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{V}_n$ — локально конечные семейства. Положим $U_n = \bigcup\{W : W\in\mathfrak{U}_n\}$ и $V_n = \bigcup\{W : W\in\mathfrak{V}_n\}$. Тогда $\overline{U}_n = \bigcup\{\overline{W} : W\in\mathfrak{U}_n\}$ и, значит, множество $\overline{U}_n$ не пересекается с множеством B; аналогично доказывается, что $\overline{V}_n$ не пересекается с A. Это — в точности та ситуация, которая встретилась нам в доказательстве леммы 4.1; как и там, завершим доказательство, положив $U_n' = U_n \setminus \bigcup\{\overline{V}_k : k\leqslant n\}$, $V_n' = V_n \setminus \bigcup\{\overline{U}_k : k\leqslant n\}$. Объединение множеств U_n' и объединение множеств V_n' — искомые непересекающиеся окрестности множеств A и B соответственно.

Следующая лемма завершает доказательство достаточности перечисленных в формулировке теоремы 4.18 условий для метризуемости пространства.

20. Лемма. *Регулярное T_1-пространство, обладающее σ-локально конечной базой, метризуемо.*

Доказательство. Будет показано, что на пространстве X существует счетное семейство D псевдометрик, каждая из которых непрерывна на $X \times X$, такое, что, каковы бы ни были замкнутое подмножество A пространства X и точка $x \in X \setminus A$, d-расстояние от x до A относительно некоторой псевдометрики $d \in D$ положительно. Этим метризуемость пространства X будет доказана. В самом деле, отображение пространства X на псевдометрическое пространство (X, d) при любом выборе d из D непрерывно; теперь утверждения 4.5 и 4.14 применяются так же, как при доказательстве теоремы Урысона. Таким образом, задача состоит в построении семейства D с нужными свойствами. Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-локально конечная база топологии пространства X, и предположим, что $\mathfrak{B} = \bigcup \{\mathfrak{B}_n : n \in \omega\}$, где каждое $\mathfrak{B}_n$ — локально конечное семейство множеств. Для каждой упорядоченной пары целых чисел m и n и произвольного элемента U семейства $\mathfrak{B}_m$ обозначим через U' объединение тех элементов семейства $\mathfrak{B}_n$, замыкания которых содержатся в U. В силу локальной конечности $\mathfrak{B}_n$ замыкание множества U' содержится в U. Из теорем 4.19 и 4.4 следует, что существует непрерывное отображение f_U пространства X в отрезок $[0,1]$, переводящее множество U' в единицу и множество $X \setminus U$ в нуль. Положим $d(x, y) = \Sigma\{|f_U(x) - f_U(y)| : U \in \mathfrak{B}_m\}$. Непрерывность функции d на $X \times X$ — непосредственное следствие локальной конечности системы $\mathfrak{B}_m$. Пусть, наконец, D — семейство всех псевдометрик, полученных таким образом. Так как каждой паре целых чисел соответствует ровно одна из них, то D счетно. Рассмотрим замкнутое множество $A \subset X$ и точку $x \in X \setminus A$. Тогда для некоторого m и некоторого $U \in \mathfrak{B}_m$ будет $x \in U \subset X \setminus A$, и для некоторого n и некоторого $V \in \mathfrak{B}_n$ будет $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Ясно, что d-расстояние от точки x до множества A относительно псевдометрики, соответствующей паре $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_n$, не меньше единицы.

Осталось провести наиболее интересную часть доказательства метризационной теоремы. Мы должны доказать, что каждое метрическое пространство обладает σ-дискретной базой. Имеет место более сильный результат; позднее он все равно нам понадобится, поэтому мы его сейчас сформулируем, а для этого введем одно новое понятие. Покрытие $\mathfrak{B}$ множества X называется *измельчением* *) покрытия $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда каждый элемент покрытия $\mathfrak{B}$ содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Например, в метрическом пространстве семейство всех открытых шаров радиуса половина является измельчением семейства всех открытых шаров радиуса единица. Следующая теорема утверждает, что в любое открытое покрытие псевдометрического пространства можно вписать σ-дискретное открытое покрытие. Отсюда следует, что у каждой псевдометрической топологии есть σ-дискретная база, ибо в каждое покрытие пространства открытыми шарами радиуса $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно вписать σ-дискретное покрытие $\mathfrak{B}_n$; объединение семейств $\mathfrak{B}_n$ образует σ-дискретную базу. Этим завершается доказательство метризационной теоремы 4.18.

21. Теорема. *В каждое открытое покрытие псевдометризуемого пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное открытое покрытие псевдометрического пространства (X, d). Первый шаг доказательства теоремы заключается в разбиении каждого элемента U семейства $\mathfrak{U}$ на «концентрические диски». Для каждого положительного целого числа n и каждого элемента U из $\mathfrak{U}$ обозначим через U_n множество всех тех точек $x \in U$, для которых $\operatorname{dist}[x, X \setminus U] \geqslant 2^{-n}$. Из неравенства треугольника ясно, что $\operatorname{dist}[U_n, X \setminus U_{n+1}] \geqslant 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$. Вполне упорядочим семейство $\mathfrak{U}$ каким-нибудь отношением $<$ (см. 0.25, (з)), и для каждого положительного целого числа n и любого элемента U из $\mathfrak{U}$ положим $U_n^* = U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1} : V \in \mathfrak{U}$

*) В русской литературе принято писать в этом случае, что покрытие $\mathfrak{B}$ вписано в покрытие $\mathfrak{A}$. (*Прим. перев.*).

$u V < U\}$. Для любой пары элементов U из V и $\mathfrak{U}$ и любого целого положительного n верно одно из двух соотношений: либо $U_n^* \subset X \setminus V_{n+1}$, либо $V_n^* \subset X \setminus U_{n+1}$, в зависимости от того, предшествует U элементу V или следует за ним. В любом случае $\operatorname{dist}[U_n^*, V_n^*] \geqslant 2^{-n-1}$. Следовательно, если определить $\tilde{U}_n$ как множество всех точек x, лежащих от U_n^* на расстоянии, меньшем 2^{-n-3}, то $\operatorname{dist}[\tilde{U}_n, \tilde{V}_n] \geqslant 2^{-n-2}$. Значит, для каждого фиксированного n семейство всех множеств вида $\tilde{U}_n$ дискретно. Обозначим через $\mathfrak{V}$ семейство всех $\tilde{U}_n$ для всех целых $n>0$ и всех $U \in \mathfrak{U}$. Оно является открытым покрытием пространства X, ибо если U — первый элемент покрытия $\mathfrak{U}$, содержащий x, то непременно $x \in \tilde{U}_n$ для некоторого n. Очевидно, $\tilde{U}_n \subset U$, следовательно, $\mathfrak{V}$ — вписанное в $\mathfrak{U}$ σ-дискретное открытое покрытие пространства X.

22. Замечания. На самом деле есть две метризационные проблемы. Топологическая задача только что была рассмотрена. Задача метризации равномерных пространств будет рассмотрена в главе 6 (там она формулируется и дается историческая справка). Любопытно, что удовлетворительное решение этой второй задачи было найдено значительно раньше, чем удовлетворительное решение топологической задачи. Хотя теорема Урысона и касалась только специального случая, долгое время она оставалась наилучшей теоремой этого рода. Достигнутое сейчас решение метризационной задачи, которое можно признать вполне достаточным*), было подготовлено двумя работами. Дьедонне [1] начал**)

---

*) В настоящее время метризационная проблема получила качественно другое решение по крайней мере в двух различных направлениях. Одно из них дано в работах Джонса [1], Стоуна [5] и Архангельского [1], [3]. Оно основывается на понятии звездного измельчения и восходит к самому первому метризационному критерию П. С. Александрова и Урысона (см. [2]), несправедливо обойденному в этих замечаниях (см. также работы Бинга [1], Пономарева [2] и П. С. Александрова [7]. Другое решение найдено в работах П. С. Александрова [7] и Архангельского [2]).

**) Через 20 лет после того, как локально конечные покрытия были определены П. С. Александровым. См. сноску на стр. 172. (*Прим. перев.*)

изучать пространства, в каждое открытое покрытие которых можно вписать локально конечное открытое покрытие (паракомпактные пространства; см. главу 5). А. Стоун [1] доказал, что каждое метризуемое пространство паракомпактно (специальный случай этой теоремы был ранее получен Даукером [1]). Характеристика метризуемых пространств в терминах σ-локально конечной базы была затем замечена рядом математиков, в частности, Нагатой [1] и Ю. М. Смирновым [1]. Характеристика посредством σ-дискретной базы принадлежит Бингу [1]. Доказательство необходимости условий теоремы 4.21, по существу, является начальным фрагментом стоуновского доказательства паракомпактности.

Ю. М. Смирнов [2] показал также, что локально метризуемое паракомпактное пространство метризуемо.

В заключение скажем несколько слов о роли псевдометризуемых пространств. Возникающие в анализе пространства чаще бывают псевдометрическими, чем метрическими. Даже при решении задачи метризации оказалось удобным предварительно построить ряд псевдометрик. Конечно, всегда можно перейти от псевдометрического пространства к соответствующему метрическому (теорема 4.15), однако необходимость все время обращаться к фактор-пространству быстро утомляет. К тому же условие: $d(x, y)=0$ эквивалентно $x=y$ — чаще всего является излишним. Но работать исключительно с псевдометриками тоже не всегда удобно — например, если надо построить топологическое отображение.

ЗАДАЧИ

А. Регулярные пространства

(а) Пусть X — регулярное пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех его подмножеств вида $\overline{\{x\}}$, где $x \in X$. Тогда $\mathfrak{D}$ — разбиение пространства X, причем естественное проектирование пространства X на фактор-пространство $\mathfrak{D}$ одновременно открыто и замкнуто, а само фактор-пространство является регулярным хаусдорфовым пространством. (Если A — открытое или замкнутое подмножество пространства X, то $\overline{\{x\}} \subset A$ для любой точки x из A.)

(б) Произведение регулярных пространств — регулярное пространство.

Б. Непрерывные отображения метрических пространств

Отображение f псевдометрического пространства (X, d) в псевдометрическое пространство (Y, e) непрерывно тогда и только тогда, когда для каждой точки x из X и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$ при $d(x, y) < \delta$.

В. Упражнение на метрики

Пусть f — непрерывная неубывающая вещественная функция, определенная на множестве всех неотрицательных вещественных чисел и удовлетворяющая условиям: $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, и $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ при всех неотрицательных x и y. (Функции, для которых выполняется последнее условие, называются *субаддитивными*.) Пусть (X, d) — метрическое пространство, $e(x, y) = f(d(x, y))$. Тогда (X, e) — метрическое пространство, топология которого совпадает с топологией пространства (X, d). (В литературе часто встречается случай, когда $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.)

Г. Хаусдорфова метрика на множестве подмножеств

Пусть (X, d) — некоторое метрическое пространство конечного диаметра и $\mathfrak{A}$ — семейство всех его замкнутых подмножеств. Для $r > 0$ и A из $\mathfrak{A}$ положим $V_r(A) = \{x : \operatorname{dist}(x, A) < r\}$, и для каждой пары элементов A и B семейства $\mathfrak{A}$ положим $d'(A, B) = \inf\{r : A \subset V_r(B)$ *и* $B \subset V_r(A)\}$. Функция d' называется хаусдорфовой метрикой; значение ее на паре множеств далеко не то же самое, что расстояние между ними, которое рассматривалось раньше.

(а) $(\mathfrak{A}, d')$ — метрическое пространство, причем отображение, в силу которого точке $x \in X$ соответствует элемент $\{x\} \in \mathfrak{A}$, является изометрией пространства X на подпространство пространства $\mathfrak{A}$.

(б) Топология, которая порождается хаусдорфовой метрикой на $\mathfrak{A}$, не определяется метрической топологией на X. Например, пусть X — множество всех положительных вещественных чисел; положим $d(x, y) = \left| \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+x} \right|$, и пусть $e(x, y) = \min[1, |x - y|]$. В этом случае метрические топологии пространств (X, d) и (X, e) совпадают, но топологии метрических пространств $(\mathfrak{A}, d')$ и $(\mathfrak{A}, e')$ различны. (В $(\mathfrak{A}, d')$ множество всех положительных чисел является предельной точкой для семейства всех его конечных подмножеств.)

Замечание. Дальнейшие сведения (и библиографию) можно почерпнуть в статье Майкла [2].

Д. Пример (порядковые числа) произведения нормальных пространств

Произведение нормальных пространств не обязательно нормально *). Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших пер-

---

*) Более эффективное решение части этой задачи можно получить, опираясь на методы следующей главы. Однако изложенные здесь факты вскоре нам понадобятся. Я думаю, что этот пример был независимо построен Дьедонне и Морсом.

вого несчетного трансфинита Ω, и $\Omega'=\Omega_0\cup\{\Omega\}$. Каждое из этих множеств возьмем с порядковой топологией.

(а) Лемма о чередующихся последовательностях. Пусть $\{x_n, n\in\omega\}$ и $\{y_n, n\in\omega\}$ — две такие последовательности в Ω_0, что $x_n\leqslant y_n\leqslant x_{n+1}$ при каждом n. Тогда обе они сходятся в Ω_0, причем к одной точке.

(б) Если A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства Ω_0, то точка Ω не может быть предельной в Ω' для множеств A и B одновременно.

(в) Пространства Ω_0 и Ω' нормальны. (Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества одного из этих пространств и первая точка множества $A\cup B$ принадлежит A; найдите конечную последовательность точек a_0, b_0, a_1, ..., a_n (или b_n) такую, что для каждого i $a_i\in A$, $b_i\in B$, между a_i и b_i нет точек из A, а между b_i и a_{i+1} нет точек из B. Интервалы $(a_i, b_i]$ одновременно открыты и замкнуты.)

(г) Пусть f — такое отображение пространства Ω_0 в Ω_0, что $f(x)\geqslant x$ при каждом x Тогда при некотором $x\in\Omega_0$ точка (x, x) является предельной для графика отображения f. (Постройте по индукции последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условию $x_{n+1}=f(x_n)$; покажите, что $x_n\leqslant f(x_n)\leqslant x_{n+1}$, и примените лемму о чередующихся последовательностях.)

(д) Произведение $\Omega_0\times\Omega'$ не нормально. (Пусть A — множество всех точек вида (x, x) и $B=\Omega_0\times\{\Omega\}$. Рассмотрим произвольную окрестность U множества A и обозначим через $f(x)$ наименьшее порядковое число, большее, чем x, для которого $(x, f(x))\notin U$. Теперь можно сослаться на (г).)

E. Пример (плоскость Тихонова), касающийся подпространств нормальных пространств

Подпространство нормального пространства может не быть нормальным. Пусть Ω' — множество всех порядковых чисел, не превосходящих первого несчетного порядкового числа Ω, и пусть ω' — множество всех порядковых чисел, не превосходящих первого бесконечного порядкового числа ω. Наделим эти множества порядковыми топологиями. Произведение $\Omega'\times\omega'$ называется *плоскостью Тихонова*. Нетрудно непосредственно проверить, что плоскость Тихонова — нормальное пространство. Впрочем, этот факт является немедленным следствием одной общей теоремы из следующей главы. Положим $X=(\Omega'\times\omega')\setminus\{(\Omega, \omega)\}$, так что X получается из плоскости Тихонова путем удаления «угловой» точки. Обозначим через A множество всех точек пространства X, первая координата которых есть Ω, и через B — множество всех точек пространства X, вторая координата которых есть ω. У множеств A и B нет непересекающихся окрестностей в X. (Пусть U — окрестность множества A; для каждого $x\in\omega$ обозначим через $f(x)$ первое порядковое число, для которого из $y>f(x)$ следует, что $(y, x)\in U$. Наименьшая верхняя грань значений функции f (в Ω') меньше Ω.)

Ж. Пример: произведения фактор-пространств и нерегулярных хаусдорфовых пространств

Пусть X — какое-нибудь ненормальное регулярное хаусдорфово пространство и A, B — такие его непересекающиеся замкнутые подмножества, что любая окрестность множества A пересекает любую окрестность множества B. Обозначим через Δ множество всех (x, x), где $x \in X$ (Δ — тождественное отношение на X).

(а) Положим $R = \Delta \cup (A \times A)$. Множество R замкнуто в $X \times X$, а фактор-пространство X/R хаусдорфово, но не регулярно. (Элементами этого фактор-пространства служат множество A и множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus A$.)

(б) Положим $S = \Delta \cup (A \times A) \cup (B \times B)$. Множество S замкнуто в пространстве $X \times X$, однако фактор-пространство X/S не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. (Элементами пространства X/S служат множества A, B и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (A \cup B)$.)

(в) Имеет место естественное отображение пространства $X \times X$ на пространство $(X/S) \times (X/S)$, которое переводит (x, y) в $(S[x], S[y])$. Естественно спросить, будет ли это отображение открытым, если X/S наделить фактор-топологией, а $(X/S) \times (X/S)$ и $X \times X$ снабдить топологией произведения. (Это эквивалентно вопросу о том, совпадает ли произведение фактор-топологий с соответствующей фактор-топологией произведения *)). Если S — отношение, определенное в (б), то отображение, о котором идет речь, не является открытым. (Рассмотрите окрестность $X \times X \setminus (A \times A \cup B \times B \cup \Delta)$ множества $A \times B$.)

З. Наследственные свойства, инвариантные относительно умножения и деления

Свойство P топологического пространства называется *наследственным* тогда и только тогда, когда каждое подпространство любого пространства, обладающего свойством P, само обладает свойством P. Говорят, что свойство P *инвариантно относительно умножения,* в том и лишь в том случае, когда произведение двух пространств со свойством P обладает свойством P. Говорят, что свойство P *делимо*, тогда и только тогда, когда фактор-пространство каждого пространства со свойством P обладает свойством P. Рассмотрим следующие свойства: T_1, Х — хаусдорфовость, Р — регулярность, ПР — полная регулярность, Т — тихоновость, Н — нормальность, С — связность, S — сепарабельность, C_I — первая аксиома счетности, C_{II} — вторая аксиома счетности, М — метризуемость

*) На самом деле эти вопросы не эквивалентны и второй естественнее первого. (Пусть X — отрезок $[0,1]$ и A — отрезок $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$; тогда отображение $X \times X \to X/A \times X/A$ не открыто, но замкнуто и является фактор-отображением. Значит, здесь произведение фактор-топологий равносильно фактор-топологии произведения.) (*Прим. перев.*

и Л — линделёфовость. Следующая таблица заполнена знаками + и —; они ставились в зависимости от того, принадлежит ли к названному слева типу свойство, возглавляющее соответствующий столбец. Приведите примеры (большинство нужных теперь примеров уже встречалось нам в задачах) и доказательства, подтверждающие правильность этой таблицы.

	T_1	Х	Р	ПР	Т	Н	С	S	$С_I$	$С_{II}$	М	Л
Наследственно	+	+	+	+	+	—	—	—	+	+	+	—
Инвариантно относительно умножения	+	+	+	+	+	—	+	—	—	—	—	—
Делимо	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+

Таблица будет выглядеть совсем иначе, если мы ограничимся одними замкнутыми подпространствами или одними открытыми отображениями.

И. Стрелка (пространство полуоткрытых интервалов)

Пусть X — множество всех вещественных чисел с топологией, базой которой служит семейство всех полуоткрытых интервалов $[a, b)$; см. 1.Л и 1.М. Тогда:

(а) X регулярно.

(б) X нормально. (Напомним, что каждое открытое покрытие пространства X содержит счетное подпокрытие.)

(в) Пространство произведения $X \times X$ не нормально. (Пусть $Y = \{(x, y) : x+y=1\}$, A — множество всех элементов из Y, первая координата которых иррациональна, и $B = Y \setminus A$. Предположим, что U и V — непересекающиеся окрестности множеств A и B, и пусть $f(x) = \sup\{e : [x+e) \times [1-x+e) \subset U\}$ для x из A. Отображение f можно рассматривать как вещественную функцию, определенную на множестве всех иррациональных чисел, нигде не равную нулю. Противоречие получается из-за того, что для некоторого целого $n > 0$ существует рациональная точка, являющаяся предельной для множества $\left\{x : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Последнее немедленно следует из теоремы: пространство вещественных чисел (в обычной топологии) является множеством второй категории (см. главу 7). Непосредственное доказательство нужного нам факта выглядело бы довольно неуклюжим.)

Замечание. Этот пример принадлежит Зоргенфрею [1].

К. Множество нулей вещественной непрерывной функции

Подмножество топологического пространства называется множеством типа G_δ тогда и только тогда, когда оно является пересечением некоторого счетного семейства открытых множеств.

(а) Пусть f — непрерывная вещественная функция на топологическом пространстве X; тогда $f^{-1}[0]$ — множество типа G_δ. (Ибо множество $\{0\}$ имеет тип G_δ в пространстве вещественных чисел.)

(б) Для любого замкнутого множества типа G_δ в нормальном топологическом пространстве X найдется непрерывная вещественная функция f на X такая, что $A = f^{-1}[0]$.

Л. Совершенно нормальные пространства *)

Топологическое пространство называется *совершенно нормальным* тогда и только тогда, когда оно нормально и каждое замкнутое в нем множество имеет тип G_δ.

(а) Каждое псевдометризуемое пространство совершенно нормально.

(б) Произведение несчетного множества единичных интервалов не совершенно нормально. (Множества типа G_δ в этом пространстве не могут состоять из одной точки.)

М. Характеристика вполне регулярных пространств **)

Топологическое пространство вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств.

Н. Непрерывные разбиения нормальных пространств

Образ нормального пространства при замкнутом непрерывном отображении является нормальным пространством.

---

*) Совершенно нормальные пространства были впервые определены и исследованы в работе П. С. Александрова и Урысона [2] под другим названием (см. стр. 893). *(Прим. перев.)*

**) Напомним, что в принятой у Келли терминологии вполне регулярное пространство может не быть T_1-пространством, т. е. может не быть тихоновским пространством. *(Прим. перев.)*

Глава 5

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие бикомпактного топологического пространства (как и многие другие понятия, рассматриваемые в этой книге) возникло в результате абстракции от некоторых важных свойств пространства вещественных чисел. Классическая теорема Гейне — Бореля — Лебега утверждает, что каждое открытое покрытие произвольного замкнутого ограниченного подмножества пространства вещественных чисел содержит конечное подпокрытие. У этой теоремы есть необычайно глубокие следствия. С ней произошло то же, что и с большинством хороших теорем: заключение ее стало определением *). Топологическое пространство называется *бикомпактным* в том и только в том случае, когда из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие **). Про подмножество A топологического пространства говорят, что оно бикомпактно, тогда и только тогда, когда оно бикомпактно в индуцированной топологии, или, что равносильно, когда каждое его покрытие открытыми множествами в X содержит конечное подпокрытие.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе бикомпактность характеризуется в терминах замкнутых множеств, сходимости, баз и предбаз.

---

*) Жаль, что автор не отмечает здесь, что совершилось это не само собой, а при решающем участии П. С. Александрова. Напомним также, что теория бикомпактных топологических пространств впервые построена в работе П. С. Александрова и Урысона [2]. *(Прим. перев.)*

**) Пространство называется *компактным*, если из любого его счетного открытого покрытия можно выбрать конечное. Бывают еще секвенциально-компактные и псевдокомпактные пространства (см. задачи в конце главы). *(Прим. перев.)*

Семейство $\mathfrak{A}$ множеств называется *центрированным* тогда и только тогда, когда пересечение любого конечного множества элементов этого семейства не пусто. Формулы де Моргана (0.2), касающиеся перехода к дополнению, помогают установить связь между понятием центрированной системы и понятием бикомпактности.

1. Теорема. *Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда каждая центрированная система замкнутых в нем множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств топологического пространства X. Согласно формуле де Моргана $X \setminus \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\} = \bigcap \{X \setminus A : A \in \mathfrak{A}\}$. Значит, $\mathfrak{A}$ покрывает X тогда и только тогда, когда пересечение дополнений к элементам из $\mathfrak{A}$ пусто. Бикомпактность пространства X равносильна требованию, чтобы каждое семейство открытых множеств, никакое конечное подсемейство которого не покрывает X, само не покрывало пространства X, — а это требование, очевидно, совпадает с требованием того, чтобы каждое центрированное семейство замкнутых множеств имело непустое пересечение.

2. Теорема. *Топологическое пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в X имеет предельную точку.*

Следовательно, X бикомпактно в том и только в том случае, когда каждая направленность в X обладает поднаправленностью, сходящейся к некоторой точке пространства X.

Доказательство. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — некоторая направленность в бикомпактном топологическом пространстве X. Для каждого n из D обозначим через A_n множество всех точек S_m, для которых $m \geqslant n$. Семейство всех множеств A_n центрировано, ибо множество D направлено отношением $\geqslant$. Тем более центрировано семейство всех их замыканий — множеств $\bar{A}_n$. Так как X бикомпактно, то существует точка s, общая для всех $\bar{A}_n$. В соответствии с теоремой 2.7 каждая такая точка s является предельной точкой направленности $\{S_n, n \in D\}$. Докажем обратное утверждение. Пусть X — топологическое пространство, в котором каждая направленность имеет предельную точку, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств. Определим $\mathfrak{B}$ как семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{B}$ центрировано; так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, то достаточно показать, что $\bigcap \{B : B \in \mathfrak{B}\}$ не пусто. Пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ принадлежит ему; таким образом, семейство $\mathfrak{B}$ направлено отношением включения $\subset$. Если выбрать из каждого $B \in \mathfrak{B}$ по точке S_B, то получим направленность в X. У нее по предположению есть некоторая предельная точка s. Если элементы B и C семейства $\mathfrak{B}$ таковы, что $C \subset B$, то $S_C \in C \subset B$. Значит, направленность $\{S_B, B \in \mathfrak{B}\}$ с некоторого момента находится в замкнутом множестве B, а потому ее предельная точка s принадлежит B. Итак, точка s принадлежит каждому элементу семейства $\mathfrak{B}$. Значит, пересечение элементов семейства $\mathfrak{B}$ не пусто. Наконец, второе утверждение теоремы 5.2 вытекает из того (2.6), что точка является предельной точкой направленности в том и только в том случае, когда некоторая поднаправленность последней сходится к этой точке.

Иногда оказывается возможным описать бикомпактность в терминах предельных точек подмножеств. Когда это бывает — выясняют расположенная ниже последовательность лемм и заключающая ее теорема. Задачи в конце главы показывают, что наложенные ограничения необходимы. Чтобы результаты формулировались лучше, мы выделим одну разновидность понятия предельной точки. Точка x называется *ω-предельной точкой* (для) множества A тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки x содержит бесконечно много точек множества A. Каждая ω-предельная точка множества является его предельной точкой. Если пространство удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости, то верно и обратное утверждение.

3. Лемма. *В топологическом пространстве у каждой последовательности есть предельная точка в том и только в том случае, когда каждое бесконечное подмножество этого пространства обладает в нем ω-предельной точкой.*

Доказательство. Предположим, что у каждой последовательности есть предельная точка, и пусть A — бесконечное множество. Тогда существует последовательность элементов множества A, все элементы которой попарно различны (взаимно однозначная последовательность). Ясно, что каждая предельная точка этой последовательности является ω-предельной точкой для множества A. Обратно, если каждое бесконечное подмножество топологического пространства обладает ω-предельной точкой и $\{S_n, n \in \omega\}$ — какая-нибудь последовательность в этом топологическом пространстве, то верно одно из двух: либо область значений этой последовательности бесконечна, — тогда любая ω-предельная точка для этого множества является предельной точкой рассматриваемой последовательности, — либо область значений последовательности конечна. В последнем случае для некоторой точки x будет $S_n = x$ для бесконечного множества целых положительных n. Тогда x — предельная точка последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$.

4. Лемма. *Если X — линделёфово пространство и каждая последовательность в X имеет предельную точку, то X бикомпактно.*

Доказательство. Надлежит показать, что каждое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. По условию леммы можно считать, что рассматриваемое покрытие состоит из множеств $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, где $n \in \omega$. Будем действовать по индукции. Положим $B_0 = A_0$ и для произвольного $p \in \omega$ определим B_p как первое среди тех множеств A_n, которые не покрыты совокупностью элементов $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$. Если в какой-то момент такой выбор осуществить невозможно, то уже построенные B_i образуют искомое конечное подпокрытие. В противном случае можно в каждом B_p, $p \in \omega$, выбрать по точке b_p так, чтобы было $b_p \notin B_i$ при $i < p$. Пусть x — какая-нибудь предельная точка полученной последовательности. Тогда $x \in B_p$ для некоторого p, и так как x — предельная точка, то $b_q \in B_p$ для некоторого $q > p$. Но это ведет к противоречию.

В формулировке следующей теоремы суммируются сведения о взаимоотношениях понятий последовательности, подпоследовательности, предельной точки и бикомпактности.

5. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда условия, выписанные ниже, относятся между собой следующим образом. Для всех пространств* (а) *эквивалентно* (б) *и из* (г) *следует* (а). *Для пространств с первой аксиомой счетности эквивалентны условия* (а), (б) *и* (в). *Для пространств со счетной базой все четыре условия равносильны. Если X — псевдометрическое пространство, то из каждого из четырех выписанных условий вытекает, что X имеет счетную базу, и следуют остальные три условия.*

(а) *Каждое бесконечное подмножество пространства X имеет в X ω-предельную точку.*

(б) *Каждая последовательность в X имеет предельную точку.*

(в) *В каждой последовательности элементов пространства X есть подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из X.*

(г) *Пространство X бикомпактно.*

Доказательство. Из леммы 5.3 следует, что условия (а) и (б) эквивалентны, а так как каждая последовательность является направленностью, то теорема 5.2 показывает, что из (г) всегда следует (б). Для пространств с первой аксиомой счетности условия (б) и (в) эквивалентны в силу теоремы 2.8. Если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из каждого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. Применяя лемму 5.4, получаем, что все четыре утверждения об X в этом случае эквивалентны. Если X — псевдометрическое пространство, то в X выполнена первая аксиома счетности и потому первые три условия эквивалентны, причем каждое из них следует из бикомпактности. Поэтому теорема будет доказана, если мы обнаружим, что псевдометрическое пространство, в котором для каждого бесконечного подмножества есть предельная точка, сепарабельно и, следовательно, обладает счетной базой. Пусть X — такое псевдометрическое пространство. Для произвольного положительного r рассмотрим семейство всех множеств A, в которых расстояние между любыми двумя точками не меньше r. В силу

0.25 легко видеть, что в этом семействе есть максимальный элемент A_r. Множество A_r непременно конечно, ибо $\frac{r}{2}$-шар с центром в произвольной точке пространства X может содержать не более одного элемента множества A_r, что означает, что у A_r нет ни одной предельной точки в X. Далее, r-шар с центром в любой точке $x \in X$ непременно пересекает множество A_r в силу максимальности A_r; в противном случае точку x можно было бы присоединить к A_r. Наконец, объединение A множеств A_r, где r пробегает множество чисел, обратных к целым положительным числам, несомненно, счетно и плотно в X.

Если $\mathfrak{B}$ — база топологии бикомпактного пространства X и $\mathfrak{A}$ — покрытие пространства X элементами этой базы, то в $\mathfrak{A}$ найдется конечное подпокрытие. Обратно, предположим, что $\mathfrak{B}$ — база некоторой топологии на X и что каждое покрытие X элементами базы $\mathfrak{B}$ содержит конечное подпокрытие. Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех элементов базы $\mathfrak{B}$, являющихся подмножествами элементов покрытия $\mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{B}$ — база, то $\mathfrak{A}$ покрывает X и в $\mathfrak{A}$ по предположению существует конечное подпокрытие $\mathfrak{A}'$. Для каждого элемента семейства $\mathfrak{A}'$ можно в $\mathfrak{C}$ выбрать содержащий его элемент. В результате получим конечное подпокрытие, принадлежащее $\mathfrak{C}$. Это означает, что «если база топологии удовлетворяет условию бикомпактности, то пространство бикомпактно». Это полезный, но не очень глубокий результат. Глубже и полезнее соответствующая теорема о предбазах.

6. Т е о р е м а (А л е к с а н д е р). *Если $\mathfrak{S}$ — такая предбаза топологии пространства X, что из любого покрытия X элементами $\mathfrak{S}$ можно выбрать конечное подпокрытие, то пространство X бикомпактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условимся ради краткости называть семейство подмножеств пространства X неполноценным тогда и только тогда, когда оно не покрывает X, и конечно неполноценным тогда и только тогда, когда никакое его конечное подсемейство не покрывает X. Тогда условие бикомпактности пространства X можно переформулировать следующим образом: каждое конечно неполноценное семейство открытых подмножеств пространства X неполноценно. Заметьте, что класс конечно неполноценных семейств открытых множеств имеет конечный характер. Поэтому каждое конечно неполноценное семейство содержится в некотором максимальном семействе в силу леммы Тьюки 0.25, (в). Каждое максимальное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{A}$ обладает специальным свойством *): если $C \notin \mathfrak{A}$ и множество C открыто, то в силу максимальности $\mathfrak{A}$ существует конечное подсемейство $A_1, \ldots, A_m$ элементов $\mathfrak{A}$ такое, что $C \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m = X$. Следовательно, никакое открытое множество, содержащее множество C, не принадлежит семейству $\mathfrak{A}$. Если D — еще одно открытое множество, не принадлежащее $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ существуют $B_1, \ldots, B_n$ такие, что $D \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = X$. При этом, как показывает простое теоретико-множественное вычисление, $(C \cap D) \cup \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = X$. Значит, $C \cap D \notin \mathfrak{A}$. Следовательно, если ни один элемент конечного семейства открытых множеств не принадлежит $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ не входит и никакое открытое множество, которое содержит пересечение элементов этого семейства. Иначе говоря, если некоторый элемент из $\mathfrak{A}$ содержит пересечение $C_1 \cap \ldots \cap C_p$ конечного числа открытых множеств, то непременно какое-нибудь из них входит в $\mathfrak{A}$.

Теперь наша теорема доказывается непосредственно. Пусть $\mathfrak{S}$ — такая предбаза, что каждое покрытие пространства ее элементами содержит конечное подпокрытие (т. е. каждое конечно неполноценное подсемейство этой предбазы неполноценно). Рассмотрим произвольное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств пространства X. Тогда существует максимальное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{A}$ открытых множеств, содержащее $\mathfrak{B}$. Достаточно показать, что $\mathfrak{A}$ неполноценно. Семейство $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}$, состоящее из тех элементов семейства $\mathfrak{A}$, которые принадлежат предбазе $\mathfrak{S}$, конечно неполноценно и потому не покрывает пространства X. Следовательно, теорема будет доказана, если мы установим, что каждая точка множества $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$

---

*) Результат задачи 2.1 — в точности то, что нам нужно сейчас.

принадлежит множеству $\bigcup\{A : A\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{A}\}$. Так как $\mathfrak{S}$ — предбаза, то каждая точка x из произвольного элемента A семейства $\mathfrak{A}$ принадлежит пересечению некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{S}$, лежащему целиком в A. В предыдущем абзаце мы выяснили, что тогда некоторый элемент из этого семейства входит в $\mathfrak{A}$. Значит, $\bigcup\{A : A\in\mathfrak{A}\} = \bigcup\{A : A\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{A}\}$, и теорема доказана.

БИКОМПАКТНОСТЬ И АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

В этом параграфе мы изучим следствия бикомпактности, взятой вместе с той или иной аксиомой отделимости. Каждая из доказываемых теорем устроена следующим образом: ее заключение отличается от посылки тем, что в нем вместо слова «точка» фигурирует сочетание «бикомпактное множество». Из совокупности полученных результатов извлекается простое, но важное следствие, касающееся непрерывных отображений бикомпактных пространств в хаусдорфовы пространства. В заключение мы доказываем теорему Уоллеса об отделимости, содержащую бо́льшую часть теорем, полученных ранее.

Замкнутое подмножество A бикомпактного пространства X всегда бикомпактно, ибо каждая направленность в A имеет поднаправленность, которая сходится к некоторой точке пространства X, непременно принадлежащей множеству A ввиду его замкнутости. (Почти столь же просто этот факт выводится непосредственно из определения бикомпактности.) Обратное утверждение неверно, ибо если A — собственное непустое подмножество антидискретного пространства X (в нем только все X и пустое множество открыты), то A заведомо бикомпактно, хотя и не замкнуто в X. Такая ситуация исключена в случае хаусдорфовых пространств.

7. Теорема. *Если A — бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства X и $x\in X\setminus A$, то у точки x и множества A существуют непересекающиеся окрестности.*

Следовательно, каждое бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто *).

Доказательство. Так как X — хаусдорфово пространство, то у каждой точки из множества A есть окрестность U, замыкание которой $\overline{U}$ не содержит точки x. В силу бикомпактности A существует конечное семейство U_0, U_1, ..., U_n открытых множеств, покрывающих в совокупности множество A и таких, что $x \notin \overline{U_i}$ при $i=0, 1, \ldots, n$. Положим $V = \bigcup\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$; тогда $A \subset V$ и $x \notin \overline{V}$. Следовательно, $X \setminus \overline{V}$ и V — непересекающиеся окрестности точки x и множества A.

8. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение бикомпактного топологического пространства X на топологическое пространство Y. Тогда пространство Y бикомпактно; если оно удовлетворяет хаусдорфовой аксиоме отделимости, а отображение f взаимно однозначно, то f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное открытое покрытие пространства Y. Тогда семейство всех множеств вида $f^{-1}[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, образует открытое покрытие пространства X; в этом покрытии есть конечное подпокрытие. Семейство образов элементов последнего образует конечное подсемейство семейства $\mathfrak{A}$, покрывающее Y. Значит, пространство Y бикомпактно. Предположим теперь, что Y — хаусдорфово пространство и что отображение f взаимно однозначно. Произвольное замкнутое подмножество A пространства X бикомпактно: поэтому его образ $f[A]$ бикомпактен, а значит, и замкнут в пространстве Y. Таким образом, множество $(f^{-1})^{-1}[A]$ замкнуто, если замкнуто A, т. е. f^{-1} — непрерывное отображение.

9. Теорема. *У любых непересекающихся бикомпактных подмножеств A и B хаусдорфова пространства X существуют непересекающиеся окрестности.*

Следовательно, каждое бикомпактное хаусдорфово пространство нормально.

---

*) Эта теорема, как и многие другие результаты данной главы, впервые появилась в классическом труде П. С. Александрова и Урысона [2], посвященном созданной ими теории бикомпактных пространств. (*Прим. перев.*)

Доказательство. Какова бы ни была точка $x \in A$, у x и B в силу теоремы 5.7 существуют непересекающиеся окрестности. Иначе говоря, у каждой точки $x \in A$ есть окрестность U, замыкание которой не пересекается с множеством B, и, так как множество A бикомпактно, найдется конечное семейство $U_0, U_1, \ldots, U_n$ открытых множеств такое, что $\overline{U}_i$ не пересекается с B при $i=0, 1, \ldots, n$ и $A \subset V = \bigcup\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда V — окрестность множества A и $X \setminus \overline{V}$ — окрестность множества B, не пересекающаяся с V.

10. Теорема. *Если X — регулярное топологическое пространство, A — его бикомпактное подмножество и U — окрестность множества A, то существует замкнутая окрестность V множества A, содержащаяся в U.*

Следовательно, каждое бикомпактное регулярное пространство нормально.

Доказательство. В силу регулярности пространства X у каждой точки x множества A есть открытая окрестность W, замыкание которой содержится в U; из бикомпактности X следует, что найдется такое конечное открытое покрытие $W_0, W_1, \ldots, W_n$ множества A, что $\overline{W}_i \subset U$ при каждом i. Тогда $V = \bigcup\{\overline{W}_i : i=0, 1, \ldots, n\}$ — искомая окрестность множества A.

11. Теорема. *Пусть X — вполне регулярное пространство, A — его бикомпактное подмножество и U — окрестность множества A. Тогда на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом интервале $[0,1]$, равная единице на A и нулю на $X \setminus U$.*

Доказательство. Для каждого x из A найдется функция g, равная единице в точке x и нулю на множестве $X \setminus U$. Множество $\left\{y : g(y) > \frac{1}{2}\right\}$ открыто в X; полагая $h(y) = \min[2g(y), 1]$, мы получаем непрерывную функцию h со значениями в $[0,1]$, равную нулю на $X \setminus U$ и равную единице на некоторой окрестности точки x. Так как множество A бикомпактно, то найдется такое конечное семейство $h_0, h_1, \ldots, h_n$ функций, непрерывных на X, со значениями в $[0,1]$, что $A \subset \bigcup\{h_i^{-1}[1] : i=0, 1, \ldots, n\}$ и каждая h_i равна нулю на $X \setminus U$. Функция x, значение которой в точке x равно $\max\{h_i(x) : i=0, 1, \ldots, n\}$, будет искомой.

Две последние теоремы можно сформулировать несколько иначе. Предположение «A бикомпактно и U — окрестность множества A» можно заменить на такое: «если A бикомпактно и B — не пересекающееся с ним замкнутое множество»; форма заключения меняется при этом очевидным образом.

Большинство результатов этого параграфа легко вытекает из следующей теоремы.

12. Теорема (Уоллес). *Пусть X и Y — топологические пространства; A, B — бикомпактные подмножества пространств X и Y соответственно. Пусть, далее, W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$. Тогда существуют такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \times V \subset W$.*

Доказательство. Для каждого элемента (x, y) множества $A \times B$ найдутся открытая окрестность R точки x и открытая окрестность S точки y такие, что $R \times S \subset \subset W$. Так как множество B бикомпактно, то, зафиксировав $x \in A$, можно найти окрестности R_i точки x и соответствующие им открытые множества S_i, где $i = 0, 1, \ldots, n$, так, чтобы было $B \subset Q = \bigcup \{S_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Положим $P = \bigcap \{R_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Тогда P — окрестность точки x, а Q — окрестность множества B, причем они удовлетворяют условию $P \times Q \subset W$. Так как множество A бикомпактно, то существуют открытые множества P_i в X и Q_i в Y, где $i = 0, 1, \ldots, m$, такие, что каждое Q_i является окрестностью множества B, $P_i \times Q_i \subset W$ и $A \subset \bigcup \{P_i : i = = 0, 1, \ldots, m\} = U$. Тогда U и $V = \bigcap \{Q_i : i = 0, 1, \ldots, m\}$ — окрестности множества A и B соответственно и $U \times V$ — подмножество множества W. Теорема доказана.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Классическая теорема А. Н. Тихонова о произведении бикомпактных пространств, несомненно, является самой полезной теоремой о бикомпактности. Весьма правдоподобно, что это вообще самая важная теорема общей топологии. Настоящий параграф посвящен теореме Тихонова и некоторым следствиям из нее.

13. Теорема (Тихонов). *Декартово произведение произвольного семейства бикомпактных топологических пространств бикомпактно относительно топологии произведения.*

Доказательство. Пусть $Q=\Pi\{X_a : a\in A\}$, где каждое X_a — бикомпактное топологическое пространство, причем множество Q наделено топологией произведения. Обозначим через $\mathfrak{S}$ предбазу топологии произведения, образованную всеми множествами вида $P_a^{-1}[U]$, где P_a — проектирование в a-е координатное пространство и U — произвольное множество, открытое в X_a. Чтобы доказать, что пространство Q бикомпактно, достаточно в силу теоремы 4.6 установить, что каждое подсемейство $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{S}$, никакое конечное подсемейство которого не покрывает Q, само не покрывает пространства Q. При каждом $a\in A$ обозначим через $\mathfrak{B}_a$ семейство всех открытых подмножеств U пространства X_a, для которых $P_a^{-1}[U]\in\mathfrak{A}$. Никакое конечное подсемейство семейства $\mathfrak{B}_a$ не покрывает пространства X_a. Поэтому в силу бикомпактности X_a найдется такая точка x_a, что $x_a\in X_a\setminus U$ для любого элемента U семейства $\mathfrak{B}_a$. Точка x, a-я координата которой равна x_a *), не принадлежит тогда ни одному элементу семейства $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ не покрывает пространства Q.

Мы дадим теперь доказательство теоремы Тихонова, не связанное с теоремой 5.6 Александера.

Другое доказательство (Бурбаки). Будет доказано, что если $\mathfrak{B}$ — центрированное семейство подмножеств произведения, то $\bigcap\{\bar{B} : B\in\mathfrak{B}\}$ не пусто. Класс всех центрированных семейств имеет конечный характер. В силу леммы Тьюки 0.25, (в) можно, следовательно, предположить, что $\mathfrak{B}$ — максимальное относительно центрированности семейство. Из максимальности $\mathfrak{B}$ следует, что каждое множество, содержащее какой-нибудь элемент семейства $\mathfrak{B}$, само принадлежит $\mathfrak{B}$ и что пересечение любых двух элементов $\mathfrak{B}$ входит в $\mathfrak{B}$. Далее, если множество C пересекается с каждым элементом семейства $\mathfrak{B}$, то $C\in\mathfrak{B}$ в силу максимальности **) $\mathfrak{B}$. Нако-

---

*) Для каждого $a\in A$. (*Прим. перев.*)

**) Мы сейчас, очевидно, передоказываем часть предложения 2. И.

нец, семейство проекций элементов $\mathfrak{B}$ в координатное пространство X_a центрировано. Следовательно, существует точка $x_a \in \bigcap\{\overline{P_a[B]} : B \in \mathfrak{B}\}$. Точка x, a-я координата которой есть x_a, обладает тогда следующим свойством: каждая окрестность U точки x_a пересекает множество $P_a[B]$ для каждого B из $\mathfrak{B}$. Этому эквивалентно условие: $P_a^{-1}[U] \in \mathfrak{B}$, какова бы ни была окрестность U точки x_a в пространстве X_a. Значит, и конечное пересечение множеств этого вида тоже принадлежит $\mathfrak{B}$. Но тогда каждая окрестность точки x, взятая из определяющей базы топологии произведения, принадлежит $\mathfrak{B}$ и, значит, пересекается с каждым элементом семейства $\mathfrak{B}$. Следовательно, $x \in \overline{B}$ для каждого $B \in \mathfrak{B}$, что доказывает теорему.

С важными применениями теоремы Тихонова мы встретимся в главе о пространствах отображений. Сейчас мы рассмотрим одно очень простое ее следствие. Подмножество псевдометрического пространства называется ограниченным тогда и только тогда, когда диаметр его конечен. Таким образом, подмножество пространства вещественных чисел ограничено в том и только в том случае, когда у него есть верхняя и нижняя грань. Следующее утверждение — классическая теорема Гейне — Бореля — Лебега.

14. Теорема. *Подмножество n-мерного евклидова пространства бикомпактно в том и только в том случае, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть A — бикомпактное подмножество пространства E_n. Тогда A замкнуто, ибо E_n — хаусдорфово пространство. Из бикомпактности множества A следует, что его можно покрыть конечной совокупностью открытых шаров радиуса 1. Так как каждый шар является ограниченным множеством, то все множество A ограничено. Пусть A — замкнутое и ограниченное подмножество пространства E_n. Обозначим через B_i образ множества A при проектировании на i-е координатное пространство. Заметим, что каждое B_i ограничено, ибо при проектировании расстояния не увеличиваются. Тогда $A \subset \Pi\{B_i : i=0, 1, \ldots, n-1\}$, причем справа стоит подмножество произведения замкнутых ограниченных интервалов вещественных чисел. Так как множество замкнуто в этом произведении, а произведение бикомпактных пространств бикомпактно, то доказательство теоремы сводится к тому, чтобы установить, что замкнутый интервал $[a, b]$ бикомпактен в обычной топологии.

Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольное открытое покрытие отрезка $[a, b]$ и c — верхняя грань множества таких $x \in [a, b]$, что в $\mathfrak{C}$ есть конечное покрытие множества $[a, x]$. Названное множество не пусто, так как ему принадлежит точка a. Возьмем какой-нибудь элемент U семейства $\mathfrak{C}$, содержащий точку c, и выберем точку d в открытом интервале (a, c) так, чтобы было $[d, c] \subset U$. В $\mathfrak{C}$ есть конечное покрытие множества $[a, d]$. Если присоединить к этому семейству множество U, то получим конечное покрытие отрезка $[a, c]$. Если только c не совпадает с b, то последнее семейство покрывает и некоторый интервал, идущий вправо от c, что противоречит выбору элемента c. Теорема доказана.

Замкнутый единичный интервал бикомпактен. Следовательно, каждый куб (произведение замкнутых единичных интервалов) бикомпактен. Это замечание делает почти очевидной следующую характеристику тихоновских пространств (т. е. вполне регулярных T_1-пространств).

15. Теорема. *Топологическое пространство является тихоновским в том и только в том случае, когда оно гомеоморфно подпространству бикомпактного хаусдорфова пространства.*

Доказательство. В силу 4.6 каждое тихоновское пространство гомеоморфно подпространству куба, а каждый куб есть бикомпактное хаусдорфово пространство. Обратно, каждое бикомпактное хаусдорфово пространство нормально и, следовательно (лемма Урысона 4.4), является тихоновским пространством. А каждое подпространство тихоновского пространства само есть тихоновское пространство.

Произведение бесконечного множества небикомпактных пространств не бикомпактно в очень сильном смысле. Подмножество топологического пространства называют *нигде не плотным* в этом пространстве тогда и только тогда, когда внутренность его пуста *).

16. Теорема. *Если множество небикомпактных координатных пространств бесконечно, то каждое бикомпактное подмножество произведения нигде не плотно в нем.*

Доказательство. Пусть в $\Pi\{X_a : a \in A\}$ есть бикомпактное множество B с внутренней точкой x. Тогда B содержит некоторую окрестность U точки x, принадлежащую определяющей базе и, следовательно, имеющую вид $\bigcap\{P_a^{-1}[V_a] : a \in F\}$, где F — конечное подмножество множества A и каждое V_a открыто в X_a. Если индекс b принадлежит множеству $A \setminus F$, то $P_b[B]=X_b$ и пространство X_b бикомпактно, как непрерывный образ бикомпактного пространства. Следовательно, все координатные пространства, за исключением конечного числа, бикомпактны.

ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА **)

Топологическое пространство X называется локально бикомпактным тогда и только тогда, когда у каждой его точки есть хотя бы одна открытая окрестность, замыкание которой представляет собой бикомпактное подпространство пространства X. Бикомпактное пространство автоматически локально бикомпактно; каждое дискретное пространство локально бикомпактно, и каждое замкнутое подпространство локально бикомпактного пространства само локально бикомпактно (пересечение замкнутого множества и бикомпактного множества замкнуто в последнем и потому бикомпактно). Локально бикомпактные пространства обладают многими хорошими свойствами бикомпактных пространств. Следующее пред-

---

*) Обычно называют нигде не плотными множества, замыкание которых удовлетворяет сформулированному условию. Именно так и мы будем поступать в дальнейшем. (*Прим. перев.*)

**) Понятие локально бикомпактного (как и локально компактного) пространства введено и исследовано П. С. Александровым в работе [2]; подробное изложение результатов этой работы включено в работу П. С. Александрова и Урысона [2]. (*Прим. перев.*)

ложение — удобный инструмент для изучения таких пространств.

17. Теорема. *Если локально бикомпактное пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа или регулярно, то семейство замкнутых бикомпактных окрестностей его произвольной точки образует базу системы всех ее окрестностей.*

Доказательство. Пусть x — любая точка пространства X, C — ее бикомпактная окрестность и U — произвольная окрестность точки x. Если пространство X регулярно, то у x есть замкнутая окрестность V, содержащаяся в пересечении множества U с внутренностью множества C; очевидно V — замкнутое и бикомпактное множество. Пусть X — хаусдорфово пространство и W — внутренность множества $U \cap C$. Применяя теорему 5.9 к бикомпактному хаусдорфову пространству $\overline{W}$, мы заключаем, что в W содержится замкнутое бикомпактное множество, являющееся окрестностью точки x в $\overline{W}$. Тогда множество V будет окрестностью точки x в пространстве W (мы имеем в виду топологию, индуцированную в W из $\overline{W}$, т. е. из X), а значит, и в пространстве X.

В частности, мы получаем, что каждое хаусдорфово локально бикомпактное пространство регулярно. В действительности имеет место более сильный результат.

18. Теорема. *Пусть U — окрестность замкнутого бикомпактного подмножества A регулярного локально бикомпактного топологического пространства X. Тогда существует замкнутая бикомпактная окрестность V множества A такая, что $A \subset V \subset U$.*

Более того, на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю на A и единице на $X \setminus V$.

Доказательство. У каждой точки $x \in A$ есть окрестность W, являющаяся замкнутым бикомпактным подмножеством множества U. Так как множество A бикомпактно, то внутренности некоторого конечного семейства таких окрестностей покрывают A. Объединение элементов этого семейства является искомой бикомпактной окрестностью множества A. Множество V в индуцированной топологии представляет собой регулярное бикомпактное и, следовательно, нормальное пространство (теорема 5.10). Значит, на V существует непрерывная функция g со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю на A и единице на $V \setminus V^0$, где V^0 — внутренность множества V. Пусть f — функция на X, равная g на V и 1 на $X \setminus V$. Функция f непрерывна, ибо множества V^0 и $X \setminus V$ отделены, а на них она непрерывна (задача 3.Б).

Следовательно, каждое локально бикомпактное регулярное топологическое пространство вполне регулярно, и каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство является тихоновским пространством.

Вообще говоря, непрерывный образ локально бикомпактного пространства не обязательно является локально бикомпактным пространством — ведь каждое дискретное пространство локально бикомпактно, и любое топологическое пространство является непрерывным образом дискретного пространства (достаточно взять то же множество, дискретную топологию и тождественное отображение). Если отображение одновременно открыто и непрерывно, то образ бикомпактной окрестности точки является бикомпактной окрестностью образа этой точки. Значит, образ локально бикомпактного пространства при непрерывном открытом отображении является локально бикомпактным пространством. Этот простой факт и один из предшествующих результатов позволяют точно описать те пространства произведений, которые локально бикомпактны.

19. Теорема. *Если произведение локально бикомпактно, то и каждое координатное пространство локально бикомпактно, причем все они, за исключением, быть может, конечного числа, бикомпактны.*

Доказательство. Если произведение локально бикомпактно, то и все координатные пространства локально бикомпактны, так как проектирование на любое из них открыто. Если среди координатных пространств бесконечно много небикомпактных, то в соответствии с 5.16 каждое бикомпактное подмножество произведения нигде не плотно в нем; в этом случае ни у одной точки произведения нет бикомпактной окрестности.

ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

В этой главе продолжается исследование фактор-пространств, начатое в главе 3. Мы интересуемся здесь результатами, характерными для бикомпактных пространств. Они собраны в единственной теореме параграфа. Уже отмечалось, что непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен. Однако без дополнительных ограничений образ может все же оказаться малопривлекательным пространством. Например, пусть X — замкнутый единичный интервал с обычной топологией и $\mathfrak{D}$ — его разбиение на множества вида $\{x : x - a$ — *рациональное число*$\}$; соответствующее фактор-пространство бикомпактно и проектирование на него открыто, но фактор-топология антидискретна (только все пространство и пустое множество открыты). Оказывается, однако, что при непрерывном разбиении топологического пространства X на бикомпактные элементы фактор-пространству передаются многие свойства пространства X.

20. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{D}$ — непрерывное разбиение пространства X на бикомпактные множества, наделенное фактор-топологией. Тогда пространство $\mathfrak{D}$ хаусдорфово, регулярно, локально бикомпактно, имеет счетную базу, коль скоро пространство X обладает соответствующим свойством.*

Доказательство. Согласимся для удобства называть подмножество пространства X отмеченным тогда и только тогда, когда оно является объединением элементов семейства $\mathfrak{D}$. Из определения непрерывности разбиения $\mathfrak{D}$ следует, что любая окрестность произвольного элемента A семейства $\mathfrak{D}$ в X содержит некоторую отмеченную окрестность множества A. Значит, образ любой окрестности множества A в X при проектировании является окрестностью точки A в $\mathfrak{D}$. Далее, проектирование переводит замкнутые множества в замкнутые (3.12). Пусть теперь X — хаусдорфово пространство и A, B — различные элементы разбиения $\mathfrak{D}$. В силу теоремы 5.9 у множеств A и B существуют непересекающиеся окрестности в пространстве X; в них содержатся отмеченные непересекающиеся окрестности, а проекции последних являются искомыми непересекающимися окрестностями точек A и B в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — регулярное пространство, $A \in \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{U}$ — окрестность точки A в $\mathfrak{D}$, то объединение U элементов, входящих в $\mathfrak{U}$, является окрестностью множества A в X. В силу теоремы 5.10 в U содержится некоторая замкнутая окрестность множества A в пространстве X. Образ последней при проектировании является искомой окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — локально бикомпактное пространство, то ясно, что у каждого элемента разбиения $\mathfrak{D}$ есть бикомпактная окрестность в X; образ ее при проектировании на $\mathfrak{D}$ является бикомпактной окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$.

Наконец, пусть пространство X обладает счетной базой $\mathfrak{B}$. Семейство $\mathfrak{U}$ всевозможных конечных объединений элементов этой базы счетно. Для каждого $U \in \mathfrak{U}$ обозначим через U' объединение всех элементов разбиения $\mathfrak{D}$, являющихся подмножествами множества U, и через $\mathfrak{J}$ — семейство всех множеств U', где U пробегает $\mathfrak{U}$. Образы элементов семейства $\mathfrak{J}$ при проектировании открыты; мы сейчас покажем, что они образуют базу фактор-топологии. Достаточно установить, что для каждого $A \in \mathfrak{D}$ и каждой окрестности V множества A в X существует такое $U \in \mathfrak{J}$, что $A \subset U \subset V$. Но множество A можно покрыть конечной совокупностью элементов базы $\mathfrak{B}$ так, чтобы их объединение W, являющееся элементом семейства $\mathfrak{U}$, содержалось в V. Положим $U = W'$; тогда $U \in \mathfrak{J}$ и $A \subset U \subset V$, откуда и следует теорема.

У этой теоремы есть интересное следствие. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство; рассмотрим произвольное его непрерывное разбиение на бикомпактные множества. Тогда фактор-пространство хаусдорфово, нормально, удовлетворяет второй аксиоме счетности и, следовательно, метризуемо.

БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

Изучая небикомпактное топологическое пространство X, часто бывает удобно перейти к бикомпактному пространству, содержащему X в качестве подпространства. Например, иногда полезно присоединить к пространству вещественных чисел еще две точки, $+\infty$ и $-\infty$.

Получающееся пространство часто называют *расширенным пространством* вещественных чисел. Оно становится линейно упорядоченным, если дополнительно согласиться считать $+\infty$ его наибольшим, а $-\infty$ — его наименьшим элементом. При таком продолжении обычного упорядочения оказывается, что у каждого непустого подмножества расширенного пространства вещественных чисел есть как нижняя, так и верхняя грань и что в топологии, порожденной порядком, это пространство бикомпактно (5.В). Расширенное пространство вещественных чисел является бикомпактным расширением пространства вещественных чисел — в каком точно смысле, сейчас будет сказано. Конечно, все это нужно лишь для удобства и ничего не прибавляет к нашим знаниям о вещественных числах. Однако мы в результате получаем возможность применить стандартные рассуждения, связанные с бикомпактностью; многие доказательства при этом упрощаются.

Простейшая конструкция расширения топологического пространства до бикомпактного основана на добавлении одной точки. Эта процедура знакома по анализу: в теории функций комплексная сфера *) строится посредством добавления одной точки, обозначаемой символом ∞, к евклидовой плоскости. Окрестностями точки ∞ объявляются дополнения до ограниченных подмножеств плоскости. Можно провести подобное построение для любого топологического пространства; ключ к определению правильной топологии в расширении дает следующее замечание: дополнение до произвольной открытой окрестности точки ∞ в комплексной сфере бикомпактно. *Одноточечным бикомпактным расширением* **) топологического пространства X называется множество $X^* = X \cup \{\infty\}$ с топологией, в которую входят открытые подмножества пространства X и все такие подмножества U множества X^*, что $X^* \setminus U$ — замкнутое

*) У нас принято название «сфера Римана». Под комплексной сферой более естественно понимать сферу в комплексном пространстве. (*Прим перев.*)

**) Это определение в действительности не полно, пока не определен элемент ∞. Годится любой элемент, не принадлежащий X, например само X.

бикомпактное подмножество пространства X. Конечно, следует проверить, что тем самым определена некоторая топология на X^*. Мы делаем это, доказывая следующее утверждение.

21. Теорема (Александров). *Одноточечное бикомпактное расширение X^* топологического пространства X бикомпактно, причем пространство X является его подпространством. Пространство X^* удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа в том и только в том случае, когда X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство.*

Доказательство. Множество U открыто в X^* тогда и только тогда, когда (а) $U \cap X$ открыто в X и (б) если $\infty \in U$, то $X \setminus U$ бикомпактно. Следовательно, конечные пересечения и произвольные объединения открытых в X^* множеств пересекают X по открытым множествам. Если точка ∞ принадлежит пересечению двух каких-нибудь открытых подмножеств пространства X^*, то дополнением к этому пересечению служит объединение двух замкнутых бикомпактных подмножеств пространства X, т. е. замкнутое и бикомпактное множество. Если точка ∞ входит в объединение некоторого семейства открытых в X^* множеств, то она принадлежит некоторому элементу U этого семейства. Тогда дополнение к рассматриваемому объединению является замкнутым подмножеством бикомпактного множества $X \setminus U$ и потому само замкнуто и бикомпактно. Следовательно, X^* — топологическое пространство и X — его подпространство. Пусть $\mathfrak{U}$ — любое открытое покрытие пространства X^*. Точка ∞ принадлежит некоторому его элементу U. Множество $X \setminus U$ бикомпактно, поэтому в $\mathfrak{U}$ существует конечное покрытие этого множества. Значит, пространство X^* бикомпактно. Если X^* — хаусдорфово пространство, то X, как его открытое подпространство, локально бикомпактно и хаусдорфово. Наконец, надо доказать, что если X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, то X^* — хаусдорфово пространство. Нужно лишь установить, что у любой точки $x \in X$ и у точки ∞ имеются непересекающиеся окрестности. Но так как X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, то у точки x в X есть замкнутая бикомпактная окрестность U. Тогда $X^* \setminus U$ — нужная окрестность точки ∞.

Если X — бикомпактное топологическое пространство, то ∞ — изолированная точка в одноточечном бикомпактном расширении (т. е. множество $\{\infty\}$ одновременно открыто и замкнуто). Обратно, если ∞ — изолированная точка пространства X^*, то X замкнуто в X^* и, значит, бикомпактно.

Расширение до бикомпакта посредством добавления одной точки очень специально; мы хотим рассмотреть другие способы вложения топологических пространств в бикомпактные топологические пространства. Оказывается, удобнее говорить о вложениях, чем о подпространствах. Поэтому *бикомпактное расширение* топологического пространства X определяется как пара (f, Y), где Y — бикомпактное топологическое пространство, а f — гомеоморфизм пространства X на всюду плотное подпространство пространства Y. (Для согласования с ранее сказанным укажем, что одноточечное бикомпактное расширение пространства X можно понимать как пару (i, X^*), где i — тождественное отображение *).) Бикомпактное расширение (f, Y) называется хаусдорфовым в том и только в том случае, когда Y — хаусдорфово пространство. На семействе всех бикомпактных расширений пространства X можно определить отношение порядка по такому правилу: $(f, Y) \geqslant (g, Z)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $h: Y \to Z$ такое, что $h \circ f = g$. Равносильное утверждение: $(f, Y) \geqslant (g, Z)$ тогда и только тогда, когда отображение $g \circ f^{-1}$ пространства $f[X]$ в Z можно продолжить до непрерывного отображения всего Y в Z. Если в качестве h можно взять гомеоморфизм, то расширения (f, Y) и (g, Z) называются *топологически эквивалентными*. В этом случае выполняются оба соотношения — и $(f, Y) \geqslant (g, Z)$, и $(g, Z) \geqslant (f, Y)$, ибо h^{-1} — непрерывное отображение Z на Y такое, что $f = h^{-1} \circ g$.

22. Теорема. *Семейство всех бикомпактных расширений произвольного топологического пространства*

---

*) Общее понятие (хаусдорфова) бикомпактного расширения впервые появляется у Тихонова [1].

частично упорядочено отношением $\geqslant$. *Если* (f, Y) *и* (g, Z) — *хаусдорфовы бикомпактные расширения некоторого пространства и* $(f, Y) \geqslant (g, Z) \geqslant (f, Y)$, *то расширения* (f, Y) *и* (g, Z) *топологически эквивалентны.*

Доказательство. Если $(f, Y) \geqslant (g, Z) \geqslant (h, U)$ для некоторых бикомпактных расширений пространства X, то имеются непрерывное отображение j пространства Y в Z и непрерывное отображение k пространства Z в U такие, что $g = j \circ f$ и $h = k \circ g$. Тогда $h = k \circ j \circ f$ и $(f, Y) \geqslant (h, U)$. Значит, $\geqslant$ — частичное упорядочение семейства всех бикомпактных расширений пространства X. Если (f, Y) и (g, Z) — хаусдорфовы бикомпактные расширения, каждое из которых следует за другим относительно упорядочения $\geqslant$, то у отображения $f \circ g^{-1}$ и у отображения $g \circ f^{-1}$ есть непрерывные продолжения j и k соответственно на все Z и на все Y. Так как $k \circ j$ — тождественное отображение на всюду плотном подмножестве $g[X]$ пространства Z и Z — хаусдорфово пространство, то $k \circ j$ — тождественное отображение пространства Z на себя. Точно так же $j \circ k$ — тождественное отображение пространства Y на себя. Следовательно, (f, Y) и (g, Z) — топологически эквивалентные расширения.

Наименьшим бикомпактным расширением бикомпактного хаусдорфова пространства X является само X (точнее, пара (i, X), где i — тождественное отображение пространства X на себя). Можно было бы ожидать, что одноточечное бикомпактное расширение небикомпактного пространства будет наименьшим относительно упорядочения $\geqslant$ среди всех его бикомпактных расширений. Если ограничиться хаусдорфовыми бикомпактными расширениями, то это действительно так (следствие из 5.Ж), но легко показать, что в общем случае не существует бикомпактного расширения, меньшего всех остальных. С другой стороны, если у пространства X есть хаусдорфово бикомпактное расширение (таковы в силу 5.15 тихоновские пространства), то у X есть и максимальное хаусдорфово бикомпактное расширение. Сейчас мы построим последнее.

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Обозначим через $F(X)$ семейство всех непрерывных на X функций со значениями в замкнутом единичном интервале Q. Куб $Q^{F(X)}$ (произведение $F(X)$ экземпляров единичного интервала Q) бикомпактен в силу теоремы Тихонова. Отображение вычисления e переводит элемент x пространства X в элемент $e(x)$ куба $Q^{F(x)}$, f-я координата которого для каждого f из $F(X)$ есть $f(x)$. Вычисление является непрерывным отображением пространства X в куб $Q^{F(X)}$, а если X — тихоновское пространство, то e — гомеоморфизм X на подпространство куба $Q^{F(X)}$. (В точности это утверждается в лемме о вложении 4.5.) *Расширением Стоуна—Чеха* пространства X называется пара $(e, \beta(X))$, где $\beta(X)$ — замыкание множества $e[X]$ в кубе $Q^{F(X)}$. Прежде чем сформулировать основное свойство этого бикомпактного расширения, докажем одну лемму.

23. Лемма. *Пусть f — отображение множества A в множество B и f^* — отображение куба Q^B в куб Q^A, определенное формулой $f^*(y) = y \circ f$ для всех y из Q^B. Отображение f^* непрерывно.*

Доказательство. Отображение в пространство произведения тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывна его суперпозиция с каждым проектированием на координатное пространство (3.3). Если a — элемент множества A, то $P_a \cdot f^*(y) = P_a(y \circ f) = y(f(a))$. Но $y(f(a))$ — это просто проекция точки y в $f(a)$-е координатное пространство произведения Q^B, а отображение проектирования непрерывно.

Описанная в этой лемме конструкция заслуживает внимания; она систематически встречается в рассуждениях о пространствах отображений. Отметим, что отображение f^*, индуцированное f, действует в направлении, противоположном f в том смысле, что f переводит A в B, а f^* переводит Q^B в Q^A.

После этой леммы доказательство главной теоремы о бикомпактном расширении Стоуна — Чеха сводится к стандартному, хотя и не совсем простому, вычислению.

24. Теорема (М. Стоун и Чех). *Пусть X — тихоновское пространство и f — его непрерывное отображение на бикомпактное хаусдорфово пространство Y. Тогда существует продолжение отображения f до непрерывного отображения всего бикомпактного расширения $\beta(X)$ в Y. (Точнее, пусть $(e, \beta(X))$ — расширение Стоуна — Чеха,* *тогда $f\circ e^{-1}$ можно продолжить до непрерывного отображения пространства $\beta(X)$ в пространство Y.)*

Доказательство. По заданному отображению f определим отображение $f^*\colon F(Y)\to F(X)$, положив $f^*(a)=a\circ f$ для каждого a из $F(Y)$. Продолжая так же, определим $f^{**}\colon Q^{F(X)}\to Q^{F(Y)}$ правилом $f^{**}(q)=q\circ f^*$ для каждого q из $Q^{F(X)}$. Обозначим через e отображение вычисления X в $Q^{F(X)}$ и через g — отображение вычисления Y в $Q^{F(Y)}$. Следующая диаграмма отражает возникшую ситуацию.

$$\begin{tikzcd}
\beta(X)\subset Q^{F(X)} \arrow[r, "f^{**}"] & Q^{F(Y)}\supset\beta(Y) \\
X \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Отображение e является гомеоморфизмом. Отображение g — гомеоморфизм пространства Y на $\beta(Y)$, ибо Y — бикомпактное хаусдорфово пространство. Отображение f^{**} непрерывно в силу леммы 5.23, и если доказать, что $f^{**}\circ e=g\circ f$, то будет ясно, что $g^{-1}\circ f^{**}$ — искомое непрерывное продолжение отображения $f\circ e^{-1}$. Пусть x — произвольный элемент из X и h — любой элемент из $F(Y)$. Тогда $(f^{**}\circ e)(x)(h)=(e(x)\circ f^*)(h)=e(x)(h\circ f)=h\circ$ $\circ f(x)=g(f(x))(h)=(g\circ f)(x)(h)$ в силу определений отображений f^{**}, f^*, e и g соответственно. Отсюда следует заключение теоремы.

Из возможности продолжения отображений, установленной в предыдущей теореме, следует, что бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $(e, \beta(X))$ следует за любым другим бикомпактным хаусдорфовым расширением пространства X относительно упорядочения $\geqslant$ и является, таким образом, наибольшим бикомпактным хаусдорфовым расширением. Если (f, Y) — какое-нибудь бикомпактное расширение, до которого продолжаются все непрерывные отображения пространства X в бикомпакты *), то $(f, Y)\geqslant(e, \beta(X))$ и в силу теоремы 5.22 расширение (f, Y) топологически эквивалентно расширению

*) Бикомпактами в русской терминологии называются бикомпактные хаусдорфовы пространства. (*Прим. перев.*)

$(e, \beta(X))$. Следовательно, возможность продолжения отображений, установленная в теореме 5.24, характеризует бикомпактное расширение $(e, \beta(X))$ с точностью до топологической эквивалентности.

25. Замечание. Приведенные выше результаты (М. Стоун [2] и Чех [1]) дают нам максимальное бикомпактное расширение. Много меньших бикомпактных расширений было построено для различных целей. Литература, посвященная этим вопросам, чрезвычайно велика, и мы в состоянии указать только на немногие из наиболее важных вкладов. По поводу недавнего дополнения к одной из самых старых теорий бикомпактного расширения (теория простых концов Каратеодори) см. работу Урсела и Янга [1]. Фрёйденталь в работе [1] исследовал бикомпактное расширение, являющееся максимальным в классе, гораздо более узком, чем тот, в котором главенствует $\beta(X)$ *). Общее обсуждение бикомпактных расширений дается в работах Мышкиса [1], [2] и [3]. Он делит описания бикомпактных расширений на «внешние» (таковы описания $\beta(X)$ и почти периодического бикомпактного расширения группы — последнее намечено в 7.Ф) и «внутренние» (например, так определяются бикомпактные расширения П. С. Александрова **) и Уолмена (5.Т)). Во взаимоотношении между внутренним и внешним описаниями бикомпактного расширения часто и кроется главный интерес рассмотрения последнего. Кое-что ***) о внутренней структуре расширения $\beta(X)$ говорится в работах Ю. Нагата [2], Ю. М. Смирнова [4] и Уоллеса [2]. Бикомпактное расширени $\beta(X)$ также связано с понятием абсолютного замыкания; см., например, работы М. Стоуна [2], А. Д. Александрова [1], Катетова [1] и Раманатана [1] ****).

*) См. в связи с этим работу Скляренко [1] о совершенных бикомпактных расширениях. (*Прим. перев.*)

**) Хороший обзор теории бикомпактных расширений дан в статье П. С. Александрова [4]. (*Прим. перев.*)

***) В работе Пономарева [6] дано спектральное описание $\beta(X)$. (*Прим. перев.*)

****) Основным новым методом, введенным в теорию бикомпактных расширений и, к сожалению, ускользнувшим от внимания автора, является созданный П. С. Александровым метод центриро-

ЛЕММА ЛЕБЕГА О ПОКРЫТИИ

Очень полезна лемма Лебега, в которой утверждается, что для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ замкнутого интервала вещественных чисел существует такое положительное число r, что если $|x - y| < r$, то в $\mathfrak{U}$ есть элемент, содержащий обе точки x и y. В каком-то смысле можно сказать, что $\mathfrak{U}$ покрывает рассматриваемый интервал «равномерно». В этом параграфе высказанное утверждение будет доказано вместе с его топологическим вариантом, пригодным для произвольных бикомпактных пространств. Последний результат может рассматриваться как прелюдия к идеям следующего параграфа, связанным с паракомпактностью.

ванных систем открытых множеств (П. С. Александров [4]), на полную универсальность которого впервые указал Фомин [2].

Метод этот широко применялся впоследствии многими математиками, в том числе Смирновым, Пономаревым, Илиадисом, Фоминым [2] и др. В частности, П. С. Александров и Пономарев дали этим методом простроение всех бикомпактных (хаусдорфовых) расширений данного тихоновского пространства, что, по существу, является лишь новой аранжировкой теоремы Смирнова [5] о близостях (см. работы: П. С. Александров и Пономарев [1], Илиадис и Фомин [1], а также уже цитированный обзор П. С. Александрова [4]).

Наконец, в связи с понятием бикомпактного расширения нельзя не указать на понятие H-замкнутого пространства и связанные с ним две характеризации бикомпактных пространств.

Хаусдорфово пространство называется H-замкнутым (П. С. Александров), если оно замкнуто во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве.

В работе П. С. Александрова и Урысона [2] даны следующие два критерия бикомпактности, из которых второй во всей общности доказан впервые М. Стоуном [2]:

1. Хаусдорфово пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и H-замкнуто (П. С. Александров и Урысон).

2. Хаусдорфово пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество H-замкнуто.

Дальнейшие сведения об H-замкнутых пространствах (в частности, построение Фоминым максимального H-замкнутого расширения всякого хаусдорфова пространства) можно найти в новейшей работе Илиадиса и Фомина [1], где приведена обширная литература по ряду вопросов общей топологии, разрабатывавшихся в последнее время. (*Прим. перев.*)

26. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *открытое покрытие бикомпактного подмножества* A *псевдометрического пространства* (X, d). *Тогда существует такое положительное число* r, *что открытый* r-*шар с центром в произвольной точке множества* A *содержится в некотором элементе покрытия* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — какое-нибудь конечное подпокрытие открытого покрытия $\mathfrak{U}$ множества A. Положим $f_i(x) = \operatorname{dist}[x, X \setminus U_i]$ и $f(x) = \max[f_i(x) : i = 1, \ldots, n]$. Каждая из функций f_i непрерывна, значит, непрерывна и функция f. Каждая точка множества A принадлежит некоторому U_i; следовательно, $f(x) \geqslant f_i(x) > 0$ для любой точки x из A. Тогда $f[A]$ — бикомпактное подмножество пространства положительных вещественных чисел; значит, существует вещественное число $r > 0$ такое, что $f(x) > r$ для всех x из A. Следовательно, для каждого $x \in A$ имеется такое i, что $f_i(x) > r$, откуда и вытекает, что открытый r-шар с центром в x лежит в U_i.

У доказанной теоремы есть интересное следствие. Если A — бикомпактное подмножество псевдометрического пространства и U — окрестность множества A, то для некоторого положительного r U содержит открытый r-шар с центром в произвольной точке множества A, что означает, что расстояние от A до множества $X \setminus U$ положительно *).

Теорему 5.26 можно удачно перефразировать. Пусть V — множество всех пар (x, y) точек пространства X, расстояние между которыми $d(x, y)$ меньше r. Тогда $V(x) = \{y : (x, y) \in V\}$ — просто открытый шар с центром в x. Множество V — открытое подмножество произведения $X \times X$, содержащее диагональ Δ (множество всех пар вида (x, x), где $x \in X$). Из предыдущей теоремы тогда вытекает такой топологический результат: если $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие бикомпактного псевдометрического пространства, то у диагонали в $X \times X$ есть такая окрестность V, что для любой точки $x \in X$ множество $V[x]$

---

*) См., в связи с этим, Архангельский [7], где показано, что это свойство псевдометрики топологически эквивалентно аксиоме треугольника. (*Прим. перев.*)

содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{U}$. Оказывается, что в этой формулировке лемма Лебега справедлива для любого бикомпактного регулярного пространства.

Покрытие $\mathfrak{U}$ топологического пространства называется *однообразным* тогда и только тогда, когда у диагонали в $X \times X$ есть такая окрестность V, что для каждой точки x множество $V[x]$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{U}$. Иными словами, семейство всех множеств вида $V[x]$ вписано в $\mathfrak{U}$. Напомним, что покрытие $\mathfrak{A}$ именуется вписанным в $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда каждый элемент из $\mathfrak{A}$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{U}$, и что семейство $\mathfrak{B}$ множеств называется локально конечным в том и только в том случае, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов этого семейства. Говорят, что семейство множеств *замкнуто*, тогда и только тогда, когда каждый элемент этого семейства замкнут.

27. Теорема. *Если в открытое покрытие пространства можно вписать замкнутое локально конечное покрытие, то исходное покрытие однообразно.*

Следовательно, каждое открытое покрытие бикомпактного регулярного пространства однообразно.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие топологического пространства X и $\mathfrak{A}$ — вписанное в него замкнутое локально конечное покрытие. Для каждого A из $\mathfrak{A}$ выберем такой элемент U_A в $\mathfrak{U}$, что $A \subset U_A$, и пусть $V_A = (U_A \times U_A) \cup ((X \setminus A) \times (X \setminus A))$. Очевидно, V_A — открытая окрестность диагонали в $X \times X$, причем если $x \in A$, то $V_A[x] = U_A$. Положим $V = \bigcap \{V_A : A \in \mathfrak{A}\}$. Тогда для каждой точки x будет $V[x] \subset V_A[x] = U_A$ и, следовательно, семейство всех множеств вида $V[x]$ образует покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$. Остается доказать, что V — окрестность диагонали. Для каждой точки (x, x) диагонали найдем окрестность W точки x, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathfrak{A}$. Если $W \cap A$ — пустое множество, то $W \subset X \setminus A$ и $W \times W \subset V_A$. Следовательно, V содержит пересечение множества $W \times W$ с некоторым конечным числом множеств V_A и потому является окрестностью точки (x, x).

Наконец, если X — бикомпактное регулярное пространство, то в каждое его открытое покрытие $\mathfrak{U}$ можно вписать замкнутое конечное покрытие (возьмем открытые множества, замыкания которых содержатся в элементах $\mathfrak{U}$). Следовательно, каждое открытое покрытие пространства X однообразно.

ПАРАКОМПАКТНОСТЬ *)

Топологическое пространство называется паракомпактным тогда и только тогда, когда оно регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие. Целью данного параграфа является доказательство эквивалентности паракомпактности ряду других условий. Мы пользуемся при этом методами, тесно связанными с методами главы 6.

Напомним, что семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется дискретным в том и только в том случае, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом этого семейства. Семейство $\mathfrak{A}$ σ-дискретно (σ-локально конечно) тогда и только тогда, когда оно является объединением счетного множества дискретных (соответственно локально конечных) подсемейств. Можно теперь сформулировать основной результат этого параграфа; доказательство его распадается в последовательность изложенных ниже лемм.

28. Теорема. *Если X — регулярное топологическое пространство, то следующие утверждения равносильны:*

---

*) В обычном определении паракомпактности вместо требования регулярности участвует требование хаусдорфовости. Нетрудно показать, что если в любое открытое покрытие хаусдорфова пространства можно вписать открытое локально конечное покрытие, то это пространство регулярно.

Вообще же свойство паракомпактности, заключающееся в существовании для каждого открытого покрытия вписанного в него локально конечного открытого покрытия, логически не зависит от каких бы то ни было аксиом отделимости (так же как и свойство бикомпактности). В русской литературе паракомпактные хаусдорфовы пространства принято называть паракомпактами. (*Прим. перев.*)

(а) *Пространство X паракомпактно.*

(б) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие.*

(в) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое локально конечное покрытие.*

(г) *Каждое открытое покрытие пространства X однообразно.*

(д) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

(е) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие.*

Вот план доказательства: (а) $\to$ (б) $\to$ (в) $\to$ (г) $\to$ $\to$ (д) $\to$ (е) $\to$ (б) $\to$ (а). Первое из этих следований ясно; второе обнаруживает следующая лемма:

29. Лемма. *Если пространство X регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, то в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать и некоторое замкнутое локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие пространства X. Тогда существует покрытие $\mathfrak{V}$, замыкания элементов которого содержатся в элементах покрытия $\mathfrak{U}$, ибо X регулярно. (Если $x \in U$, то у x есть открытая окрестность V, для которой $\bar{V} \subset U$.) Пусть $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь локально конечное покрытие, вписанное в $\mathfrak{V}$. Тогда семейство $\mathfrak{B}$ замыканий элементов покрытия $\mathfrak{A}$ локально конечно; при этом каждое такое замыкание содержится в некотором $\bar{V}$, где $V \in \mathfrak{V}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — замкнутое локально конечное покрытие пространства X, вписанное в $\mathfrak{U}$.

Если в некоторое открытое покрытие топологического пространства можно вписать замкнутое локально конечное покрытие, то исходное открытое покрытие однообразно согласно теореме 4.27. Из утверждения (в), таким образом, следует утверждение (г). Доказательству дальнейшего следования мы предпошлем две леммы, которые представляют и некоторый самостоятельный интерес. Напомним для удобства некоторые факты, которые нам сейчас понадобятся (см. параграф об отношениях в главе 0). Для подмножества U множества $X \times X$ и точки $x \in X$ через $U[x]$ обозначается множество всех

$y \in X$, для которых $(x, y) \in U$. Если A — подмножество множества X, то $U[A] = \{y : (x, y) \in U$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Ясно, что $U[A]$ является объединением множеств вида $U[x]$ по всем x из A. Множество $\{(x, y) : (y, x) \in U\}$ обозначается через U^{-1}. Говорят, что U — симметричное множество, если $U = U^{-1}$. Множество $U \cap U^{-1}$ всегда симметрично. Через $U \circ V$, где U и V — подмножества множества $X \times X$, обозначается множество всех таких пар (x, z), что для некоторого y из X одновременно и $(x, y) \in V$ и $(y, z) \in U$. Иными словами, $(x, z) \in U \circ V$ тогда и только тогда, когда $(x, z) \in V^{-1}[y] \times U[y]$ для некоторого y. Следовательно, $U \circ V$ является объединением множеств вида $V^{-1}[y] \times U[y]$ по всем y из X. В частности, если V симметрично, то $V \circ V = \bigcup \{V[y] \times V[y] : y \in X\}$. Наконец, для каждого подмножества A множества X имеет место $U \circ V[A] = U[V[A]]$.

30. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, каждое открытое покрытие которого однообразно. Для любой окрестности U диагонали в $X \times X$ найдется такая симметричная окрестность V диагонали, что $V \circ V \subset U$.*

Доказательство. У каждой точки $x \in X$ есть такая окрестность $W(x)$, что $W(x) \times W(x) \subset U$, ибо U — окрестность диагонали. Семейство $\mathfrak{W}$ всех множеств вида $W(x)$ образует открытое покрытие пространства X. Поэтому существует окрестность R диагонали, для которой семейство $R[x]$ вписано в $\mathfrak{W}$. Тогда $R[x] \times R[x] \subset U$ при каждом x. Наконец, положим $V = R \cap R^{-1}$. Множество V — симметричная окрестность диагонали, и $V[x] \times V[x] \subset U$ при всех x. Так как $V \circ V$ — объединение множеств вида $V[x] \times V[x]$, то $V \circ V \subset U$.

Интуитивное содержание предшествующей леммы таково. Скажем, что точки x и y удалены друг от друга не более чем на U, если $(x, y) \in U$. В лемме утверждается, что для любого U существует такое V, что коль скоро точки x, y и точки y, z удалены друг от друга не более чем на V, то точки x и z лежат одна от другой не далее чем на U.

Следующая лемма показывает, что паракомпактные пространства удовлетворяют очень сильному условию типа нормальности.

31. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, каждое открытое покрытие которого однообразно, и $\mathfrak{A}$ — локально конечное (или дискретное) семейство подмножеств пространства X. Тогда существует окрестность V диагонали в $X \times X$ такая, что семейство всех множеств $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно (соответственно дискретно).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — локально конечное семейство подмножеств. Тогда существует открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства X, каждый элемент которого пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathfrak{A}$. Пусть U — такая окрестность диагонали, что множества вида $U[x]$ вписаны в элементы покрытия $\mathfrak{U}$. В силу предыдущей леммы у диагонали есть такая окрестность V, что $V \circ V \subset U$; при этом можно предположить, что $V = V^{-1}$. Если множество $V \circ V[x] \cap A$ пусто, то $V[x]$ должно не пересекаться с $V[A]$, ибо если $y \in V[x] \cap V[A]$, то $(y, x) \in V^{-1} = V$, $(z, y) \in V$ для некоторого $z \in A$ и, следовательно, $(z, x) \in V \circ V$. Тогда $z \in V \circ V[x]$, в чем и состоит противоречие. Значит, если $V[x]$ пересекает $V[A]$, то $V \circ V[x]$ пересекает A, откуда следует, что семейство множеств вида $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно. Если в приведенном рассуждении выражение «конечное число» заменить на слова «не более одного», то получится доказательство соответствующего утверждения для случая дискретного семейства.

Если V — открытое подмножество пространства $X \times X$, то $V[x]$ открыто для каждой точки $x \in X$, ибо $V[x]$ — прообраз множества V при непрерывном отображении, заключающемся в том, что точке $y \in X$ ставится в соответствие точка $(x, y) \in X \times X$. Для любого подмножества A пространства X множество $V[A]$ открыто, ибо оно является объединением множеств вида $V[x]$ по всем x из A. Таким образом, предшествующая лемма позволяет продолжать локально конечные и дискретные семейства множеств до локально конечных (соответственно дискретных) семейств открытых множеств. В частности, если в каждое открытое покрытие $\mathfrak{U}$ некоторого регулярного пространства можно вписать локально конечное покрытие $\mathfrak{A}$, то применима доказанная лемма (мы показали, что (б) $\to$ (в) $\to$ (г) в 5.28). Поэтому существует такая окрестность диагонали, что семейство всех множеств вида $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно. Последнее семейство может не быть вписанным в $\mathfrak{U}$, однако это затруднение легко преодолеть: выберем в $\mathfrak{U}$ для каждого множества A из семейства $\mathfrak{A}$ какой-нибудь содержащий его элемент $U_A \in \mathfrak{U}$ и положим $W_A = U_A \cap V[A]$. Построенное описанным способом семейство открыто, локально конечно, вписано в $\mathfrak{U}$ и покрывает рассматриваемое пространство; значит, последнее паракомпактно. Доказано, таким образом, следование (б)$\to$(а) из 5.28.

Утверждение 5.31 имеет очевидное следствие. Семейство, состоящее из двух замкнутых непересекающихся множеств, разумеется, дискретно. Значит,

32. Следствие. *Каждое паракомпактное пространство нормально.*

Доказательство теоремы 5.28 будет завершено, если мы установим два факта. Первый: пусть каждое открытое покрытие некоторого регулярного пространства однообразно; тогда в любое его открытое покрытие можно вписать открытое σ-дискретное покрытие. Второй: если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-локально конечное покрытие, то в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. (Отсюда, очевидно, вытекает следование (д)$\to$(е) утверждений из 5.28.)

33. Лемма. *Если каждое открытое покрытие пространства X однообразно, то в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения, подобно доказательству теоремы 4.21, получается применением одной идеи А. Стоуна. (Можно вывести данную лемму из утверждения 4.21 и результатов главы 6.) В силу леммы 5.31 достаточно найти какое-нибудь σ-дискретное покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$, так как затем это покрытие можно «расширить» до вписанного в $\mathfrak{U}$ σ-дискретного открытого покрытия. Пусть V — такая окрестность диагонали, что семейство всех множеств вида $V[x]$, где $x \in X$, вписано в покрытие $\mathfrak{U}$. Положим $V_0 = V$ и, действуя по индукции, выберем в качестве V_n такую открытую симметричную окрестность диагонали, что $V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$ при каждом целом положительном n. Положим $U_1 = V_1$, и по индукции пусть $U_{n+1} = V_{n+1} \circ U_n$. Легко видеть, что $U_n \subset V_0$ при каждом n. Отсюда следует, что для каждого n семейство всех $U_n[x]$, где $x \in X$, вписано в $\mathfrak{U}$. Вполне упорядочим множество X с помощью некоторого отношения $<$ (см. 0.25). Обозначим для каждого x и каждого n через $U_n^*(x)$ множество $U_n[x] \setminus \bigcup \{U_{n+1}[y] : y < x\}$. При каждом фиксированном n семейство $\mathfrak{U}_n$ всех множеств вида $U_n^*(x)$ дискретно; это можно доказать следующим образом. Ясно, что множество $U_n^*(x)$ не пересекается с множеством $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ при $x \neq y$ по построению. Если для некоторой точки $z \in X$ окрестность $V_{n+1}[z]$ пересекает $U_n^*(y)$, то $z \in V_{n+1}[U_n^*(y)]$ и $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ является окрестностью точки z, не пересекающейся ни с одним $U_n^*(x)$, для которого $x \neq y$. Следовательно, семейство $\mathfrak{U}_n$ дискретно. Остается доказать, что каждая точка пространства X принадлежит некоторому элементу некоторого семейства $\mathfrak{U}_n$. Пусть $x \in X$ и y — первая точка из X, для которой x принадлежит множеству $U_n[y]$ при некотором n. Тогда непременно $x \in U_n^*(y)$ при том же n.

34. Лемма. *Если в каждое открытое покрытие пространства можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие, то в каждое покрытие этого пространства можно вписать и локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие и $\mathfrak{V}$ — вписанное в него открытое σ-локально конечное покрытие, т. е. $\mathfrak{V} = \bigcup \{\mathfrak{V}_n : n \in \omega\}$, где каждое $\mathfrak{V}_n$ — локально конечное семейство открытых множеств, содержащихся в элементах покрытия $\mathfrak{U}$. Для каждого n и каждого $V \in \mathfrak{V}_n$ положим $V^* = V \setminus \bigcup \{U : U \in \mathfrak{V}_k$ *для некоторого* $k < n\}$ и обозначим через $\mathfrak{W}$ семейство всех V^*. Семейство $\mathfrak{W}$ покрывает X и вписано в $\mathfrak{U}$. Наконец, пусть $x \in X$ и n — наименьшее целое число такое, что x принадлежит некоторому V из $\mathfrak{V}_n$. Тогда V — окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним элементом семейства $\mathfrak{W}$, за исключением построенных на основе тех $\mathfrak{V}_k$, для которых $k \leqslant n$. Следовательно, покрытие $\mathfrak{W}$ локально конечно.

В теореме 4.21 говорится, что в любое открытое покрытие псевдометризуемого пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие. Этот факт вместе с теоремой 28 настоящего параграфа приводит к следующему выводу:

35. Следствие. *Каждое псевдометризуемое пространство паракомпактно.*

В заключение следует отметить, что подпространства, фактор-пространства и произведения паракомпактных пространств обычно бывают не паракомпактны. Далее, пространство может быть локально метризуемо, локально бикомпактно, хаусдорфово, нормально (значит, удовлетворять первой аксиоме счетности) и все же не быть паракомпактным. Стандартные примеры можно найти в упражнениях в конце этой главы.

36. Замечания. Есть еще одна характеристика паракомпактности, которой можно было бы пополнить список, данный в 5.28. Для регулярных пространств паракомпактность эквивалентна звездной нормальности (см. задачу 5.Ц). Этот критерий принадлежит А. Стоуну [1]*). Эквивалентность утверждений (б), (в), (д) и (е) теоремы 5.28 была доказана Майклом [2]. Равносильность же условия (г) и паракомпактности впервые была замечена, насколько я знаю, Дж. С. Гриффином и мной.

Описание паракомпактности в терминах σ-дискретных открытых покрытий в равной мере естественно принять за определение счетномерности (см. Гуревич и Уолмен [1; 32], и Эйленберг [1]) **). Теорема Майкла (Майкл [2]) о наследовании паракомпактности по подмножествам типа F_σ интерпретируется при этом как естественный результат теории размерности.

---

*) Несомненно, теорема Стоуна является самой замечательной теоремой о паракомпактности. Вообще паракомпактным пространствам в новейшее время посвящена обширная литература, включающая работы Майкла, Исбелла, Пономарева, Архангельского и многих других. (*Прим. перев.*)

**) В настоящее время счетномерными считаются пространства, распадающиеся в сумму счетного семейства нульмерных подпространств. В этом смысле не каждое метрическое пространство счетномерно. (*Прим. перев.*)

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на вещественные функции, определенные на бикомпактных пространствах

(а) Если A — непустое бикомпактное подмножество пространства вещественных чисел, то и наименьшая верхняя, и наибольшая нижняя грань множества A принадлежат A.

(б) Каждая непрерывная функция f, определенная на бикомпактном пространстве, достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. в этом пространстве существуют такие точки x и y, что $f(x)$ и $f(y)$ являются соответственно наименьшей верхней и наибольшей нижней гранями функции f на X.

(в) Пусть f — непрерывная вещественная функция на бикомпактном пространстве X. Если f везде положительна, то она отграничена от нуля в том смысле, что существует такое $e>0$, что $f(x)>e$ для всех x из X.

Б. Бикомпактные подмножества

(а) Пересечение двух бикомпактных подмножеств топологического пространства может не быть бикомпактно. Пересечение любого семейства замкнутых бикомпактных множеств непременно замкнуто и бикомпактно. (Ясно, что пространство, в котором лежат бикомпактные подмножества с небикомпактным пересечением, не может быть хаусдорфовым. Такие множества можно найти в произведении пространства вещественных чисел и антидискретного пространства, состоящего из двух точек.)

(б) Замыкание бикомпактного подмножества топологического пространства может не быть бикомпактно. Однако в регулярном пространстве замыкание бикомпактного подмножества непременно бикомпактно.

(в) Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества псевдометрического пространства, причем A бикомпактно. Тогда существует точка x в A, для которой $\operatorname{dist}(A, B)=\operatorname{dist}(x, B)>0$. (Дело в том, что функция $\operatorname{dist}(x, B)$ непрерывна и положительна во всех x из A.)

(г) Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые бикомпактные подмножества псевдометрического пространства. Тогда существуют такие точки $x \in A$ и $y \in B$, что $d(x, y)=\operatorname{dist}(A, B)$.

В. Бикомпактность относительно топологии порядка

Пусть множество X линейно упорядочено отношением $<$ и наделено порядковой топологией (см. задачу 1.И). Тогда (П. С. Александров [1]) каждое замкнутое ограниченное подмножество пространства X бикомпактно тогда и только тогда, когда X полно относительно порядка $<$. (Семейство всех подмножеств X вида $\{x : a<x\}$ или $\{x : x<a\}$ образует предбазу порядковой топологии на X; можно применить теорему 5.6 Александера о предбазе. Можно

доказать этот факт, не прибегая к теореме 5.6, рассуждением, похожим на доказательство теоремы 5.14*).)

Г. Изометрии бикомпактных метрических пространств

Пусть X и Y — метрические пространства, причем пространство X бикомпактно, и f — изометрия пространства X на подпространство пространства Y, а g — изометрия пространства Y на подпространство пространства X. Тогда f отображает X на все Y. (Пусть h — изометрия пространства X на его собственную часть и $x \in X \setminus h[X]$. Положим $a = \operatorname{dist}(x, h[X])$. Определим по индукции последовательность точек, начинающуюся с $x_0 = x$, правилом: $x_{n+1} = h(x_n)$. Докажите, что при $m \neq n$ будет $d(x_m, x_n) \geqslant a$.)

Д. Счетно компактные и секвенциально компактные пространства

Топологическое пространство называется *счетно компактным* тогда и только тогда, когда каждое его счетное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Пространство называется *секвенциально компактным* тогда и только тогда, когда в каждой последовательности его точек есть сходящаяся подпоследовательность.

Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны его счетной компактности:

(а) Каждая последовательность в X имеет предельную точку.

(б) Каждое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку (см. 5.3).

(в) В каждом бесконечном открытом покрытии X есть собственное подпокрытие. (Если A — бесконечное множество, у которого нет ни одной предельной точки, то каждое подмножество множества A замкнуто. Определим некоторое открытое покрытие $\mathfrak{U}$, взяв у каждой точки множества A открытую окрестность, не содержащую других точек из A, и присоединив, если нужно, к полученной системе множеств множество $X \setminus A$. Тогда в покрытии $\mathfrak{U}$ не содержится никакого меньшего покрытия. С другой стороны, если в открытом покрытии $\mathfrak{B}$ не содержится никакого меньшего покрытия, то в каждом элементе $V \in \mathfrak{B}$ есть точка, не принадлежащая никакому другому элементу покрытия $\mathfrak{B}$.)

(г) Для пространств с первой аксиомой счетности секвенциальная компактность и счетная компактность эквивалентны между собой (5.5).

(д) Пространство Ω_0 всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω, локально бикомпактно, хаусдорфово, удовлетворяет первой аксиоме счетности, секвенциально компактно, но не бикомпактно.

З а м е ч а н и е. Предложение (в) принадлежит А р е н с у и Д у г у н д ж и [1].

---

*) В последнее время теория упорядоченных топологических пространств далеко продвинута в работах М а р д е ш и ч а и П а п и ч а [1], Ф е д о р ч у к а [1], Л и ф а н о в а [1] и др. (*Прим. перев.*)

Е. Бикомпактность; пересечение бикомпактных связных множеств

(а) Пусть $\mathfrak{A}$ — такое семейство замкнутых бикомпактных множеств, что $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\}$ — подмножество открытого множества U. Тогда для некоторого конечного подсемейства $\mathfrak{F}$ семейства $\mathfrak{A}$ будет $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{F}\} \subset U$.

(б) Если $\mathfrak{A}$ — семейство бикомпактных подмножеств хаусдорфова пространства X, причем пересечение любого конечного числа элементов $\mathfrak{A}$ связно, то множество $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\}$ связно.

Ж. Упражнение на локальную бикомпактность

Если X — хаусдорфово пространство и Y — плотное в нем локально бикомпактное подпространство, то Y открыто в X.

З Характеристика бикомпактности в терминах гнезд

Топологическое пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда каждое гнездо его замкнутых непустых подмножеств имеет непустое пересечение. (Напомним, что гнездом называется семейство множеств, линейно упорядоченное по включению. Пусть каждое гнездо замкнутых непустых множеств имеет непустое пересечение и $\mathfrak{A}$ — некоторое центрированное семейство замкнутых множеств. Обозначим через $\mathfrak{B}$ какое-нибудь максимальное центрированное семейство замкнутых множеств, содержащее $\mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое максимальное гнездо в $\mathfrak{B}$. Исследуя свойства $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{N}$, мы приходим к доказательству. Совершенно другое доказательство можно дать, прибегнув к вполне упорядоченности, с помощью процедуры, указанной в следующей задаче.)

И. Точки полного накопления (П. С. Александров)

Точка x называется *точкой полного накопления* подмножества A топологического пространства в том и лишь в том случае, когда для каждой окрестности U точки x множества A и $A \cap U$ имеют одинаковую мощность. Имеет место следующая теорема П. С. Александрова *). Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда у каждого его бесконечного подмножества в этом пространстве есть точка полного накопления. (Пусть X — небикомпактное пространство. Возьмем открытое покрытие $\mathfrak{A}$ пространства X наименьшей возможной мощности c, не содержащее никакого конечного подпокрытия. Пусть C — некоторое вполне упорядоченное множество мощности c такое, что множество элементов, предшествующих произвольному элементу этого множества, имеет мощность, меньшую c. (В приложении показано, что таково множество c.) Пусть f — какое-нибудь взаимно однозначное отображение множества C на множество $\mathfrak{A}$. Тогда, каков бы ни был элемент $b \in C$, объединение $\bigcup \{f(a) : a < b\}$ не покрывает пространства X; в действительности дополнение до этого объединения должно иметь мощность, не меньшую c. Поэтому из каждого

---

*) Последняя фраза добавлена переводчиком.

такого дополнения можно выбрать по точке x_b так, чтобы было $x_a \neq x_b$ при $a<b$. Рассмотрите множество всех x_b.)

К. Пример: единичный квадрат в лексикографическом упорядочении (П. С. Александров и Урысон [2])

Пусть X — декартово произведение замкнутого единичного интервала Q на себя, упорядоченное лексикографически (т. е. $(a, b) < (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a<c$ или $a=c$ и $b<d$). Множество X, наделенное топологией, индуцированной порядком, становится бикомпактным связным хаусдорфовым пространством. Оно удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабельно и, следовательно, не метризуемо.

Л. Пример (порядковые числа) на нормальность и произведения

Произведение локально бикомпактного нормального хаусдорфова пространства и бикомпактного хаусдорфова пространства может не быть нормально. (Трудная часть доказательства уже изложена в задаче 4.Д; надо только показать, что Ω' и Ω_0 — бикомпактное и локально бикомпактное хаусдорфовы пространства соответственно. Здесь Ω' — множество порядковых чисел, меньших или равных Ω, и Ω_0 — его подмножество, состоящее из порядковых чисел, меньших Ω; оба они берутся в порядковой топологии.)

М. Трансфинитная прямая *)

Пусть A — вполне упорядоченное множество, $[0,1)$ — полуинтервал с обычной топологией, а произведение $A \times [0,1)$ взято в лексикографическом упорядочении и наделено порядковой топологией. Исследуйте свойства этого пространства.

Н. Пример: пространство Хелли

Пространство Хелли H состоит из всех неубывающих функций, определенных на замкнутом единичном интервале Q со значениями в Q. Будучи подмножеством пространства произведения Q^Q, оно наделяется топологией, индуцированной из этого произведения. Пространство H обладает следующими свойствами:

(а) H — бикомпактное хаусдорфово пространство. (Оно замкнуто в Q^Q.)

(б) В H выполнена первая аксиома счетности; следовательно, оно секвенциально компактно. (Множество точек разрыва каждой функции из H счетно. Это обстоятельство и тот факт, что Q — сепарабельное пространство, следует применить при построении счетной определяющей системы окрестностей произвольной точки h в пространстве H.)

(в) H сепарабельно. (Счетное плотное в нем множество можно построить, исходя из множества рациональных чисел.)

(г) H не метризуемо. (Для каждого t из Q определим $f_t(x)$ как 0 при $x<t$, 1 при $x>t$ и положим $f_t(t) = \frac{1}{2}$. Семейство A всех

*) Широко принят термин «прямая Александрова». (*Прим. перев.*)

функций вида f_t несчетно, и никакая точка множества A не является предельной для A. В то же время каждое подпространство бикомпактного метрического пространства сепарабельно.)

О. Примеры на замкнутые отображения и локальную бикомпактность

(а) Пусть X — пространство вещественных чисел с обычной топологией, I — множество целых чисел и $\mathfrak{D}$ — разбиение, элементами которого являются множество I и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus I$. Тогда проектирование пространства X на фактор-пространство замкнуто и непрерывно, но фактор-пространство не локально бикомпактно и не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(б) Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших Ω, с порядковой топологией, A — его замкнутое несчетное подмножество, дополнение к которому тоже несчетно, и $\mathfrak{D}$ — разбиение, элементами которого являются A и все множества вида $\{x\}$, где $x \in \Omega_0 \setminus A$. Тогда проектирование пространства Ω_0 на фактор-пространство непрерывно и замкнуто, причем фактор-пространство бикомпактно, но первая аксиома счетности в нем не выполняется. (Примените лемму о чередовании 4.Д.)

П. Канторовы пространства

Канторовым дисконтинуумом (*канторовым множеством*) называется множество всех точек замкнутого единичного интервала, в троичном разложении которых отсутствует единица. (На протяжении всей формулировки этой задачи удобно пользоваться только иррациональными троичными разложениями, не равными нулю тождественно, начиная с некоторого момента. Каждое вещественное число имеет единственное иррациональное разложение, как отмечалось в 0.14.) Вот простое описание канторова дисконтинуума. Открытый интервал длины $\frac{1}{3}$, лежащий посередине отрезка $[0, 1]$, — это в точности множество тех чисел, в троичном разложении которых на первом месте после запятой стоит единица. Средняя треть каждого из оставшихся отрезков состоит из точек, в троичном разложении которых единица стоит не на первом, а на втором месте. Продолжая рассуждение, мы выясняем, что канторово множество можно получить, последовательно выкидывая средние трети.

Пространство произведения 2^A (т. е. множество всевозможных отображений множества A в дискретное пространство, единственными элементами которого являются 0 и 1, наделенное топологией произведения) называется *канторовым пространством* *).

(а) Канторов дисконтинуум гомеоморфен пространству 2^ω. (Произвольному x из 2^ω поставим в соответствие тот элемент $f(x)$ отрезка $[0, 1]$, в троичном разложении которого на p-м месте стоит $2x(p)$.)

---

*) В русской литературе принято название *обобщенный канторов дисконтинуум*. (*Прим. перев.*)

(б) Каждая точка канторова множества является предельной для него, а дополнение к дисконтинууму является открытым всюду плотным подмножеством пространства вещественных чисел.

(в) Для любого замкнутого непустого подмножества A пространства 2^ω существует непрерывное отображение r пространства 2^ω в A такое, что $r(x)=x$ при всех x из A *). (Усмотреть доказательство немного легче, если исходить из канторова дисконтинуума, гомеоморфного пространству 2^ω.)

(г) Каждое бикомпактное хаусдорфово пространство является непрерывным образом замкнутого подмножества некоторого канторова пространства (П. С. Александров [3]). (Пусть F — семейство всех таких многозначных отображений множества $\{0; 1\}$ в X, что $f(0) \cup f(1) = X$. $f(x_f)$ — замкнутое подмножество пространства X для любого x из 2^F и $f \in F$. Пересечение $\bigcap \{f(x_f) : f \in F\}$ пусто или состоит ровно из одной точки; в последнем случае эта точка принимается за $\varphi(x)$. Можно проверить, что областью определения отображения φ является некоторое замкнутое подмножество пространства 2^F. Для каждого подмножества U пространства X имеем $\varphi^{-1}[U]=\{x : x$ *принадлежит области определения* φ *и* $\bigcap \{f(x_f) : f \in F\} \subset U\}$.)

(д) Каждое бикомпактное метрическое пространство X является непрерывным образом канторова множества 2^ω (П. С. Александров [3]). (Вместо семейства F, определенного выше, можно взять меньшее семейство, способное играть ту же роль. Пусть $U_0, \ldots, U_n$ — база топологии пространства X; положим $f_n(0) = \bar{U}_n$, $f_n(1) = X \setminus U_n$.)

(е) Каждое канторово пространство 2^A удовлетворяет отрицательной аксиоме счетности: каждое семейство его непересекающихся открытых подмножеств счетно. (Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство непересекающихся открытых подмножеств пространства 2^A. Можно предположить, что элементы $\mathfrak{U}$ принадлежат определяющей базе топологии произведения. Таким образом, каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ является пересечением конечного числа полупространств в естественном смысле. Тогда для некоторого целого числа n найдется бесконечное (в действительности даже несчетное) семейство непересекающихся подмножеств, каждый элемент которого является пересечением в точности n полупространств. Несложное рассуждение, учитывающее тот факт, что подмножества семейства не пересекаются, завершает доказательство.

Существует более короткое и более формальное доказательство этого факта. Канторово пространство относительно покоординатного сложения по модулю 2 образует бикомпактную топологическую группу. Следовательно, на нем существует мера Хаара (см. Халмош [1], стр. 254) Так как эта мера конечна и положительна на открытых множествах, то ясно, что отрицательная аксиома счетности должна выполняться.)

---

*) Иначе говоря, A является *ретрактом* пространства 2^ω. (*Прим. перев.*)

(ж) Не каждое бикомпактное хаусдорфово пространство является непрерывным образом канторова множества. (Расширение несчетного дискретного пространства до бикомпакта путем присоединения одной точки не удовлетворяет отрицательной аксиоме счетности.)

Замечание. Предложение (б) принадлежит Кантору, предложение (д) — П. С. Александрову, а утверждение (е) и (ж) получены Тьюки. Утверждение (ж) вытекает также из некоторых результатов Шпильрайна [1].

Замечание переводчика. Хаусдорфовы пространства, являющиеся непрерывными образами канторовых пространств, выделены П. С. Александровым под названием диадических бикомпактов. В настоящее время им посвящена обширная литература, включающая работы П. С. Александрова, В. И. Пономарева, Б. А. Ефимова, Энгелькинга, Пелчинского и др. Необходимо упомянуть и более старые работы Н. А. Шанина и А. С. Есенина-Вольпина, а также замечательную теорему, доказанную независимо друг от друга Л. Н. Ивановским и В. И. Кузьминовым и утверждающую, что пространство каждой бикомпактной топологической группы является диадическим бикомпактом.

Р. Характеристика бикомпактного расширения Стоуна—Чеха

Пусть (f, Y) — такое бикомпактное хаусдорфово расширение топологического пространства X, что для каждой непрерывной вещественной функции g на X функцию $g \circ f^{-1}$ можно непрерывно продолжить на пространство Y. Тогда расширение (f, Y) топологически эквивалентно расширению Стоуна — Чеха $(e, \beta(X))$. (Взгляните на определение $\beta(X)$.)

С. Пример (порядковые числа) на бикомпактные расширения

Пусть Ω' — множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω, и $\Omega_0 = \Omega' \setminus \{\Omega\}$. Каждое из этих множеств наделим топологией, индуцированной порядком. Оказывается, что тогда бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $\beta(\Omega_0)$ гомеоморфно Ω'. (Это будет следовать из результата предшествующей задачи, если доказать, что каждая ограниченная вещественная непрерывная функция f на Ω_0 начиная с некоторого момента постоянна *) в том смысле, что существует $x \in \Omega_0$, для которого $f(y) = f(x)$ при $y > x$. Пусть f — ограниченная непрерывная вещественная функция на Ω_0 и r, s — вещественные числа, $r > s$. Лемма о чередовании 4.Д показывает, что хотя бы одно из множеств $\{x : f(x) \geqslant r\}$ и $\{x : f(x) \leqslant s\}$ счетно. Пользуясь этим фактом, нетрудно доказать, что функция f с некоторого момента постоянна. Предположение о том, что f — ограниченная функция, в действительности несущественно.)

Замечание. Этот результат принадлежит Смирнову [1].

---

*) Хьюитт [1] применил это любопытное свойство пространства Ω_0 при построении регулярного хаусдорфова пространства X, на котором каждая непрерывная вещественная функция постоянна.

Т. Бикомпактное расширение Уолмена

Пусть X — T_1-пространство, $\mathfrak{F}$ — семейство всех его замкнутых подмножеств и $\omega(X)$ — совокупность всех максимальных центрированных подсемейств $\mathfrak{A}$ семейства $\mathfrak{F}$.

(а) Если $\mathfrak{A} \in \omega(X)$, то пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ снова является его элементом. Двойственное утверждение: если A и B принадлежат $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$, то и $A \cup B$ принадлежит $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ (см. задачу 2.И).

(б) Для каждой точки $x \in X$ положим $\varphi(x) = \{A : A \in \mathfrak{F}$ *и* $x \in A\}$ Тогда φ — взаимно однозначное отображение пространства X в множество $\omega(X)$.

(в) Для каждого открытого в X множества U положим $U^* = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in \omega(X)$ *и* $A \subset U$ *для некоторого* A *из* $\mathfrak{A}\}$. Тогда $\omega(X) \setminus U^* = \{\mathfrak{A} : X \setminus U \in \mathfrak{A}\}$. Для любых открытых в X множеств U и V имеем $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$ и $(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$.

(г) Наделим $\omega(X)$ топологией, базой которой служит семейство всех множеств вида U^*, где U — любое открытое в X множество. Пространство $\omega(X)$ бикомпактно, отображение φ непрерывно *) и $\varphi(X)$ всюду плотно в $\omega(X)$ (Для доказательства бикомпактности пространства $\omega(X)$ рассмотрите центрированные системы дополнений к элементам определенной нами базы.)

(д) Если пространство X нормально, то $\omega(X)$ — хаусдорфово пространство.

(е) Если f — ограниченная непрерывная вещественная функция на X, то $f \circ \varphi^{-1}$ можно продолжить до непрерывной функции, определенной на всем $\omega(X)$. (Если бы непрерывное продолжение было невозможно, то можно было бы легко показать, что в пространстве вещественных чисел существуют такие замкнутые непересекающиеся подмножества R и S, что множества $f^{-1}[R]$ и $f^{-1}[S]$ не пересекаются, но замыкания их образов при отображении φ пересекаются. Но если A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X, то множества $\{\mathfrak{A} : A \in \mathfrak{A}\}$ и $\{\mathfrak{A} : B \in \mathfrak{A}\}$ замкнуты в $\omega(X)$ и не пересекаются.)

(ж) Если $\omega(X)$ — хаусдорфово пространство, то оно топологически эквивалентно бикомпактному расширению Стоуна — Чеха пространства X (см. 5.Р).

З а м е ч а н и я. Принципиальное значение расширения Уолмена (У о л м е н [1]) состоит в том, что соответствие $U \to U^*$ сохраняет конечные пересечения и объединения. Далее, при этом соответствии топология на X переходит в базу топологии $\omega(X)$, а отсюда следует, что размерности пространств X и $\omega(X)$ совпадают и что группы гомологий Александрова — Чеха **) пространств X и $\omega(X)$

---

*) Важно, что не только φ непрерывно, но непрерывно и φ^{-1}; таким образом, φ — «гомеоморфизм в». (*Прим. перев.*)

**) Эти группы называются еще группами спектральных гомологий. Они основаны на фундаментальном понятии нерва, введенном П. С. Александровым, и для компактов были впервые определены Александровым. Чех перенес их на общие топологические пространства. (Автор несправедливо называет эти группы группами гомологий Чеха.) (*Прим. перев.*)

изоморфны. См. работу Самюэля [1] по поводу одного построения, связанного с этой конструкцией *).

У. Булевы кольца: теорема М. Стоуна о представлении

Пусть $(R, +, \cdot)$ — булево кольцо (см. 2.Л) и S' — множество всех кольцевых гомоморфизмов кольца R в I_2 (фактор целых чисел по mod 2). Положим $S=S' \setminus \{0\}$, где 0 обозначает тривиальный гомоморфизм всего кольца R в нуль. Множество S' является подмножеством произведения I_2^R.

Стоуновским пространством кольца R называется множество S, наделенное топологией, индуцированной из произведения (I_2 берется с дискретной топологией).

Булевым пространством называется хаусдорфово пространство, в котором семейство всех множеств, одновременно открытых и бикомпактных, образует базу. Каждое булево пространство автоматически локально бикомпактно. *Характеристическое кольцо* булева пространства — это кольцо всех его непрерывных отображений f в I_2, для которых множество $f^{-1}[1]$ бикомпактно (таким образом, речь идет обо всех функциях со значениями в I_2, обращающихся в нуль вне некоторого бикомпактного множества, — иногда такие функции называют функциями с бикомпактным носителем).

(а) Стоуновское пространство булева кольца R является булевым пространством; оно бикомпактно, коль скоро в R есть единица. (В этом случае $S=\{h : h \in S' \text{ и } h(1)=1\}$.)

(б) Теорема Вейерштрасса — Стоуна по mod 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *характеристическое кольцо булева пространства* X *и* $\mathfrak{G}$ — *подкольцо кольца* $\mathfrak{F}$, *обладающее свойством двух точек (это означает, что для любых различных* x *и* y *из* X *и любых* a, b *из* I_2 *существует* g *в* $\mathfrak{G}$ *такое, что* $g(x)=a$ *и* $g(y)=b$). *Тогда* $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$.

(Если X бикомпактно, то $\mathfrak{F}$ обладает свойством двух точек всегда, когда $1 \in \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}$ различает точки в том смысле, что для любых двух разных точек x, y пространства X существует такое $g \in \mathfrak{G}$, что $g(x) \neq g(y)$. В основе доказательства утверждения (б) лежит стандартное, хотя и вполне содержательное, рассуждение о бикомпактности. Можно было бы начать с доказательства того, что, каковы бы ни были бикомпактное подмножество Y пространства X и точка $x \in X \setminus Y$, существует функция g в $\mathfrak{G}$, равная нулю в x и равная единице на Y.)

(в) Теорема о представлении. *Каждое булево кольцо изоморфно (посредством отображения вычисления) характеристическому кольцу своего стоуновского пространства.* (Произвольному элементу r кольца R соответствует вычисление в r — определенная на пространстве S функция $e(r)$, значение которой в произвольной

*) Интересный аналог расширения Уолмена построен Пономаревым [1] под названием пространства $w_\varkappa(X)$, отличающегося от $w(X)$ тем, что точками $w_\varkappa(X)$ являются максимальные центрированные системы $\xi=\{C_\alpha\}$ канонических замкнутых множеств $C_\alpha=\overline{C_\alpha^0}$ пространства X. Ряд любопытных свойств пространства $w_\varkappa(X)$ установил Зайцев [1]. (*Прим. перев.*)

точке $s \in S$ равно $s(r)$. Эта теорема основывается на теореме о существовании достаточного числа гомоморфизмов (см. 2.Л) и на предшествующем утверждении (б).)

(г) Если X — булево пространство, $\mathfrak{F}$ — его характеристическое кольцо и $\mathfrak{J}$ — максимальный собственный идеал в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{J} = \{f : f(x) = 0\}$ для некоторой точки x из X. (Покажите прежде всего, что если не существует точки, в которой обращаются в нуль все элементы из $\mathfrak{J}$, то $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$.)

(д) Двойственная теорема о представлении. *Каждое булево пространство X гомеоморфно (посредством отображения вычисления) стоуновскому пространству своего характеристического кольца.* (Произвольный максимальный идеал есть множество нулей однозначно соответствующего ему гомоморфизма в I_2, причем каждое такое множество нулей является максимальным идеалом. Предшествующее утверждение (г), по существу, означает, что вычисление отображает X на все стоуновское пространство.)

Замечания. Сформулированные выше результаты принадлежат М. Стоуну [1].

У процесса представления булева пространства есть любопытная разновидность. Пусть X — булево пространство и $\mathfrak{F}$ — кольцо всех его непрерывных отображений в пространство I_2. (Мы не требуем теперь, чтобы множество $f^{-1}[1]$ было бикомпактно.) Отображение вычисления пространства X в стоуновское пространство S кольца $\mathfrak{F}$ снова оказывается гомеоморфизмом, но S уже бикомпактно и в действительности гомеоморфно $\beta(X)$ — расширению Стоуна — Чеха пространства X. Мы опускаем доказательство этого факта, равно как и доказательства характеристик идеалов и подколец булева кольца в терминах стоуновских пространств.

Наконец, наш подход ко всей этой проблематике дает возможность построить по той же схеме рассуждение об алгебре всех непрерывных вещественных функций f, определенных на произвольном локально бикомпактном хаусдорфовом пространстве X, таких, что для любого $e>0$ множество $\{x : |f(x)| \geqslant e\}$ бикомпактно. Самым трудным шагом в этом рассуждении является доказательство теоремы Вейерштрасса — Стоуна (7.Р), с которой в миниатюре мы познакомились в утверждении (б). Оказывается также, что если X — тихоновское пространство, то пространство всех вещественных гомоморфизмов алгебры ограниченных непрерывных функций, определенных на X, гомеоморфно $\beta(X)$, — ситуация здесь очень напоминает положение вещей, описанное в предыдущем абзаце.

Ф. Связные бикомпактные пространства (рассуждения с цепочками)

Пусть (X, d) — бикомпактное псевдометрическое пространство и e — произвольное положительное число. Назовем *e-цепью* от точки x пространства X до точки $y \in X$ любую конечную последовательность точек, первым элементом которой служит x, последним y и расстояние между любыми двумя последовательными элементами которой меньше e. Для каждого подмножества A пространства X рассматривается множество $C_e(A)$, состоящее из всех точек, соединимых e-цепью хотя бы с одной точкой множества A. Множество $C(A)$ определяется как $\bigcap\{C_e(A) : e>0\}$. Эквивалентно этому такое определение. Положим $V_0(A)=A$, $V_1(A)=\{x : \operatorname{dist}(x, A)<e\}$ и по индукции $V_{n+1}(A)=V_1(V_n(A))$. Тогда $C_e(A)=\bigcup\{V_n(A) : n\in\omega\}$.

(а) Множество $C_e(A)$ для каждого A и $e>0$ открыто и замкнуто.

(б) Если A — связное подмножество пространства X, то и множество $C(A)$ связно. Отсюда следует, что $C(\{x\})$ для каждой точки x совпадает с ее компонентой C_x в пространстве X. (Пусть $C(A)$ является объединением замкнутых непересекающихся множеств B и D; взяв $f=[\operatorname{dist}(B, D)]/3$ и воспользовавшись утверждением 5.Ж, покажите, что $C_e(A)\subset\{x : \operatorname{dist}(x, B\cup D)<f\}$ для некоторого положительного e.)

(в) Для любого подмножества A пространства X имеем $C(A)=\bigcup\{C_x : x\in\overline{A}\}$. (Если $x\notin C(A)$, то $x\notin C_e(A)$ при некотором положительном e.)

(г) Разбиение пространства X на компоненты непрерывно (П. С. Александров [3]).

(д) *) Пусть X — связное пространство и U — его открытое подмножество. Тогда замыкание произвольной компоненты множества U пересекает множество $X\setminus U$. (Пусть это не так для некоторой компоненты P множества U, и пусть $x\in P$. Тогда P замкнуто в X и лежит целиком в U; поэтому найдется бикомпактная окрестность V множества P в X, содержащаяся в U. Компонента точки x в пространстве V содержится в P и потому лежит во внутренности V^0 множества V. Так как $V\setminus V^0$ бикомпактно, то некоторая e-компонента точки x в V не пересекается с $V\setminus V^0$ и потому ее пересечение с множеством V^0 является (непустым) открыто-замкнутым в X множеством.)

(е) *) Никакое замкнутое связное неодноточечное подмножество пространства X не является объединением счетного семейства попарно непересекающихся замкнутых подмножеств. (Основную роль в доказательстве этого факта играет утверждение (д). Пусть множество $\bigcup\{A_n : n\in\omega\}$ замкнуто и связно и все множества A_n замкнуты и попарно не пересекаются; возьмем в качестве U дополнение к некоторой замкнутой окрестности множества A_1, не пересекающейся с A_2. Тогда замыкание в X компоненты точки $x\in A_2$ в U является замкнутым связным множеством, не пересекающимся с A_1 и содержащим точки как из множества A_2, так и из множества $X\setminus A_2$.)

(ж) Пусть X — подмножество $\{(x, y) : x^2y^2=1\}$ евклидовой плоскости, наделенное обычной метрикой. Пространство X локально бикомпактно, и любые две его точки можно соединить e-цепью при любом $e>0$; однако X не связно.

Замечания. Результаты этого раздела очень естественно распространяются на любые бикомпакты (бикомпактные хаусдорфовы пространства). Теорема 5.27 об однообразии покрытий дает необходимое средство для этого.

---

*) Здесь оригинальное изложение несколько туманно. Оно развернуто мной. (*Прим. перев.*)

Чтобы читатель не предавался излишнему оптимизму относительно свойств связных множеств, мы отсылаем его к классическому примеру Кнастера и Куратовского [1]. Существует связное подпространство X евклидовой плоскости и в нем точка x такие, что в $X \setminus \{x\}$ нет нетривиальных связных подмножеств.

Х. Звездно нормальные пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторое семейство подмножеств множества X и x — точка из X. Звездой точки x относительно $\mathfrak{U}$ называется объединение всех элементов семейства $\mathfrak{U}$, содержащих точку x. Покрытие $\mathfrak{V}$ называется *звездным измельчением* покрытия $\mathfrak{U}$ *) тогда и только тогда, когда семейство звезд всевозможных точек множества X относительно $\mathfrak{V}$ вписано в $\mathfrak{U}$. Топологическое пространство *звездно нормально* в том и лишь в том случае, когда каждое его открытое покрытие допускает открытое звездное измельчение. Замечательная теорема А. Стоуна [1] гласит, что регулярное топологическое пространство звездно нормально тогда и только тогда, когда оно паракомпактно. (Если X паракомпактно, то свойство однообразности покрытия вместе с утверждением 5.30 позволяет легко доказать звездную нормальность. С другой стороны, если пространство X звездно нормально, $\mathfrak{U}$ — любое его открытое покрытие и $\mathfrak{V}$ — открытое покрытие, звездно вписанное в $\mathfrak{U}$, то $\bigcup\{V \times V : V \in \mathfrak{V}\}$ — искомая окрестность диагонали.)

Замечание. Определение звездной нормальности принадлежит Тьюки [1], установившему много полезных свойств звездно нормальных пространств.

Ц. Точечно конечные покрытия и слабо паракомпактные пространства

Семейство подмножеств множества X называется *точечно конечным* тогда и только тогда, когда в X не существует точки, принадлежащей бесконечному множеству элементов этого семейства. Топологическое пространство *слабо паракомпактно* в том и лишь в том случае, когда в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое точечно конечное покрытие.

(а) Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное точечно конечное открытое покрытие нормального пространства X. Тогда для каждого $U \in \mathfrak{U}$ можно выбрать открытое множество $G(U)$ так, что $\overline{G(U)} \subset U$ и семейство всех $G(U)$ покрывает X. (Возьмите максимальный элемент в классе всех функций F, удовлетворяющих следующим условиям: областью определения F служит некоторое подсемейство семейства $\mathfrak{U}$, $F(U)$ для любого U из области определения F — открытое множество, лежащее в U вместе с замыканием, и $\bigcup\{F(U) : U \in$ *области определения функции* $F\} \cup \bigcup\{V : V \in \mathfrak{U}$ *и* $V \notin$ *области определения* $F\} = X$. Точечная конечность семейства $\mathfrak{U}$ гарантирует существование максимального F.)

---

*) У нас пишут в этом случае также, что $\mathfrak{V}$ *звездно вписано* в $\mathfrak{U}$. (*Прим. перев.*)

(б) В каждом точечно конечном покрытии множества содержится минимальное подпокрытие (т. е. такое подпокрытие, никакое собственное подсемейство которого не является покрытием).

(в) Для слабо паракомпактных T_1-пространств счетная компактность (см. 5. Д) эквивалентна бикомпактности.

Замечание. Предложения (б) и (в) взяты непосредственно из работы Аренса и Дугунджи [1].

Ч. Разбиение единицы

Разбиением единицы на топологическом пространстве X называется семейство F непрерывных отображений пространства X в множество неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющее двум условиям: 1) $\sum \{f(x): f \in F\} = 1$ для каждой точки $x \in X$; 2) все функции из семейства F, за исключением конечного числа, обращаются в нуль вне некоторой окрестности каждой точки пространства X. Говорят, что разбиение F единицы *подчинено* покрытию $\mathfrak{U}$ пространства X, тогда и только тогда, когда каждая функция из семейства F равна нулю вне некоторого элемента покрытия $\mathfrak{U}$. Имеет место следующее утверждение: для каждого локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U}$ нормального пространства существует разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{U}$. Можно доказать несколько более сильный результат: пусть $\mathfrak{U}$ — локально конечное открытое покрытие нормального пространства; тогда для каждого U из $\mathfrak{U}$ можно построить неотрицательную непрерывную функцию f_U, равную нулю вне U и везде меньшую или равную единицы, так, чтобы было $\sum \{f_U(x): U \in \mathfrak{U}\} = 1$ для всех x. (См. 5. Ц, (а).)

Замечание. Насколько мне известно, в близких формулировках этот результат был независимо доказан Гуревичем, Бохнером и Дьедонне.

Ш. Теорема о промежуточной функции для полунепрерывных функций

Пусть g и h — вещественные функции на паракомпактном пространстве X, полунепрерывные соответственно снизу и сверху, и пусть $h(x) < g(x)$ для всех x из X. Тогда существует такая непрерывная вещественная функция p на X, что $h(x) < p(x) < g(x)$ при каждом x. (Рассмотрим семейство $\mathfrak{U}$ открытых подмножеств U пространства X, на которых наименьшая верхняя грань функции h меньше, чем наибольшая нижняя грань функции g. Пусть F — какое-нибудь разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{U}$. Для каждого f из F выберем k_f так, чтобы из $f(x) \neq 0$ следовало, что $h(x) < k_f < g(x)$, и положим $p(x) = \sum \{k_f f(x): f \in F\}$. Значение функции p в точке x — среднее значение чисел, заключенных между $h(x)$ и $g(x)$.)

Замечание. Полученный выше результат можно улучшить. Следует начать с отыскания счетного покрытия, вписанного в семейство $\mathfrak{U}$. Ясно, что заключение остается справедливым и для всех счетно паракомпактных пространств (т. е. таких пространств, в любое счетное открытое покрытие которых можно вписать локально конечное покрытие). Верно обратное к усиленному таким образом утверждению. Даукер [2] доказал эквивалентность следующих условий: 1) пространство X счетно паракомпактно и нормально; 2) произведение X и замкнутого единичного интервала нормально; 3) утверждение, сформулированное выше. Даукер показал также, что каждое совершенно нормальное пространство (т. е. нормальное пространство, в котором каждое замкнутое множество есть G_δ) счетно паракомпактно. Неизвестно, каждое ли нормальное хаусдорфово пространство счетно паракомпактно *).

Щ. Паракомпактные пространства

(а) Каждое регулярное линделёфово пространство паракомпактно.

(б) Топологическое пространство называется *σ-бикомпактным* тогда и только тогда, когда оно является объединением счетного семейства бикомпактных подмножеств. Каждое σ-бикомпактное пространство линделёфово.

(в) Если регулярное пространство является объединением дискретного семейства своих открытых линделёфовых подпространств, то оно паракомпактно. Следовательно, каждая локально бикомпактная группа паракомпактна. (Рассмотрите семейство классов смежности по наименьшей подгруппе, содержащей какую-либо фиксированную бикомпактную окрестность единицы.)

(г) Пространство полуоткрытых интервалов (стрелка, см. 1. Л и 4. И) регулярно и линделёфово; следовательно, оно паракомпактно. Декартово произведение этого пространства на себя не нормально и, следовательно, не паракомпактно (и не линделёфово).

(д) Множество порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа, не паракомпактно в порядковой топологии. (Рассмотрите покрытие, состоящее из всех множеств вида $\{x : x<a\}$. Верхняя грань каждого элемента произвольного покрытия, вписанного в это покрытие, меньше Ω.)

Замечания. Утверждение (а) принадлежит Морита [1]. Дальнейшие результаты, касающиеся паракомпактности (F_σ-теорема, произведения и т. п.), содержатся в работе Майкла [2] **). Бинг [1] изучил условие типа нормальности ***), промежуточное по отношению к нормальности и паракомпактности. В связи с этим отметим, что достойное внимания свойство типа нормальности, присущее паракомпактным пространствам, устанавливается в лемме 5.31.

*) Эта задача Даукера оказалась очень трудной: несмотря на ряд усилий, она не решена до сих пор. (*Прим. перев.*)

**) См. также работы Пономарева [6], Майкла [3], [4], Архангельского [2], [5]. (*Прим. перев.*)

***) Речь идет о *коллективной нормальности*. (*Прим. перев.*)

Глава 6

РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Есть несколько свойств метрических пространств, не являющихся топологическими, но тесно связанных с таковыми. Мы дадим сейчас примеры такого рода связей, отложив определения и доказательства. Свойство быть последовательностью Коши не является топологическим инвариантом: например, отображение $f(x) = \frac{1}{x}$, представляющее собой гомеоморфизм пространства положительных вещественных чисел на себя, переводит последовательность Коши $\left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \omega \right\}$ в последовательность $\{n+1: n \in \omega\}$, не удовлетворяющую условию Коши. Однако, отправляясь от утверждений о последовательностях Коши, можно получать топологические результаты. Например, подмножество A пространства всех вещественных чисел замкнуто в том и только в том случае, когда каждая последовательность Коши в A сходится к некоторой точке из A. Верны в некотором смысле обратные утверждения. Так, каждая непрерывная на бикомпактном метрическом пространстве функция равномерно непрерывна. Здесь из топологической предпосылки (пространство бикомпактно) мы выводим нетопологическое заключение (что функция равномерно непрерывна). Данная глава посвящена изучению квазитопологических вопросов описанного типа.

При изучении равномерных свойств применяется специальная математическая конструкция — равномерное пространство. Краткое обсуждение поможет понять, как работает это понятие, принадлежащее А. Вейлю [1].

Последовательность $\{x_n, n \in \omega\}$ точек в псевдометрическом пространстве (X, d) называется последовательностью Коши тогда и только тогда, когда $d(x_m, x_n)$ стремится к нулю с ростом m и n. В случае произвольного топологического пространства это понятие не имеет смысла: чтобы говорить о последовательностях Коши, надо знать, для каких пар расстояние $d(x, y)$ мало. Точно сформулировать условие Коши можно так: положим $V_{d,r}=\{(x, y) : d(x, y)<r\}$; тогда $\{x_n, n\in\omega\}$ является последовательностью Коши в том и только в том случае, когда (x_m, x_n) принадлежит $V_{d,r}$ при достаточно больших m и n для каждого положительного r. Определение равномерной непрерывности тоже можно дать в терминах семейства всех множеств вида $V_{d,r}$. Мы приходим, таким образом, к рассмотрению множества X и специального семейства подмножеств произведения $X\times X$.

Если X — топологическая группа, то последовательность $\{x_n, n\in\omega\}$ можно назвать последовательностью Коши тогда и только тогда, когда элемент $x_mx_n^{-1}$ лежит вблизи единицы e рассматриваемой группы при достаточно больших m и n. Чтобы это описание стало определением, опять-таки нужна информация о парах точек. Мы должны знать, для каких пар (x, y) элемент xy^{-1} лежит вблизи единицы e. Для каждой окрестности U элемента e положим $V_U=\{(x, y) : xy^{-1}\in U\}$. Ясно тогда, что семейство всех множеств вида V_U позволяет определить последовательности Коши.

Равномерное пространство определяется как множество X вместе с некоторым семейством подмножеств произведения $X\times X$, удовлетворяющим определенным естественным условиям. Последние получаются при абстрагировании от обоих рассмотренных выше примеров. Следует, однако, подчеркнуть, что предлагаемая аксиоматизация равномерных пространств отнюдь не единственно возможная. Можно было бы изучать множество X вместе с некоторым семейством псевдометрик на нем, на которое наложен ряд ограничений; можно также было бы выделить семейство покрытий множества X, называемых равномерными (грубо говоря, равномерных в смысле леммы Лебега о покрытии 5.26). Можно рассматривать также «метрики» со значениями в структурах более общих, чем структура вещественных чисел.

Возникающие при этом конструкции, по существу, эквивалентны, как указано в задачах в конце этой главы.

Наконец, следует сказать, что существуют свойства типа равномерности метрических пространств, по-видимому, не распространяющиеся на менее ограничительные ситуации. Последний параграф посвящен изучению некоторых таких свойств.

РАВНОМЕРНОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Нам предстоит рассматривать подмножества декартова произведения $X \times X$ некоторого множества X на себя. Эти подмножества являются отношениями в смысле главы 0, поэтому для удобства мы напомним некоторые из относящихся сюда определений и результатов, уже встречавшихся нам ранее. Отношение — это множество, элементами которого являются упорядоченные пары. Если U — отношение, то обратное к нему отношение U^{-1} определяется как множество всех пар (x, y) таких, что $(y, x) \in U$. Операция перехода к обратному инволютивна в том смысле, что $(U^{-1})^{-1}$ всегда есть U. Если $U = U^{-1}$, то U называется симметричным отношением. Композиция $U \circ V$ отношений U и V определяется как множество всех пар (x, z), для которых при некотором y $(x, y) \in V$ и $(y, z) \in U$. Операция композиции ассоциативна, т. е. $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$; всегда $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$. Множество всех пар (x, x), где $x \in X$, называется тождественным отношением, или диагональю, и обозначается через $\Delta(X)$ или Δ. Для произвольного подмножества A из X множество $U[A]$ определяется как $\{y : (x, y) \in U$ *для некоторого* x *из* $A\}$; при этом, если x — точка множества X, то полагаем $U[x] = U[\{x\}]$. Для любых U, V и A выполняется равенство $U \circ V[A] = U[V[A]]$. Наконец, нам понадобится простая лемма.

1. Лемма. *Если отношение V симметрично*, то $V \circ U \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}$.

Доказательство. Имеем: $V \circ U \circ V$ — множество всех пар (u, v) таких, что $(u, x) \in V$, $(x, y) \in U$ и $(y, v) \in V$ для некоторых x и y. Так как V симметрично, то это — в точности множество тех (u, v), для которых $u \in V[x]$ и $v \in V[y]$ при некотором (x, y) из U. Но $u \in V[x]$ и

$v \in V[y]$ тогда и только тогда, когда $(u, v) \in V[x] \times V[y]$; следовательно, $V \circ U \circ V = \{(u, v) : (u, v) \in V[x] \times V[y]$ *для некоторого* (x, y) *из* $U\} = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}$.

Равномерность на множестве X — это непустое семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств множества $X \times X$, удовлетворяющее условиям:

(а) каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит диагональ Δ;

(б) если $U \in \mathfrak{U}$, то $U^{-1} \in \mathfrak{U}$;

(в) если $U \in \mathfrak{U}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого V из $\mathfrak{U}$;

(г) если U и V входят в $\mathfrak{U}$, то и $U \cap V \in \mathfrak{U}$;

(д) если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset V \subset X \times X$, то $V \in \mathfrak{U}$.

Пара $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерным пространством*.

Нетрудно угадать метрические прототипы выписанных выше условий. Первое возникло из требования $d(x, x) = 0$, второе обобщает условие симметрии $d(x, y) = d(y, x)$. Третье — разновидность условия треугольника; грубо говоря, оно отражает требование, чтобы для каждого r-шара нашелся шар вдвое меньшего радиуса. Четвертое и пятое условия сходны с аксиомами системы окрестностей точки; они помогут нам установить соответствующие свойства системы окрестностей в топологии, которую мы сейчас определим.

На множестве X могут существовать разные равномерности. Наибольшую из них образует семейство всех подмножеств множества $X \times X$, содержащих диагональ; наименьшую равномерность на X образует семейство, единственным элементом которого является $X \times X$. На множестве X вещественных чисел *обычная равномерность* определяется как семейство $\mathfrak{U}$ всех таких подмножеств U произведения $X \times X$, что $\{(x, y) : |x - y| < r\} \subset U$ для некоторого положительного числа r. Каждый элемент этого семейства $\mathfrak{U}$ является окрестностью диагонали Δ (прямой, уравнение которой $y = x$); но следует подчеркнуть, что не каждая окрестность диагонали принадлежит семейству $\mathfrak{U}$. Например, множество $\left\{(x, y) : |x - y| < \frac{1}{1 + |y|}\right\}$ является окрестностью диагонали Δ, но оно не входит в $\mathfrak{U}$.

Вообще говоря, объединение и пересечение двух равномерностей на X может не быть равномерностью. Однако объединение произвольного семейства равномерностей весьма естественным образом порождает некоторую равномерность. Подсемейство $\mathfrak{B}$ равномерности $\mathfrak{U}$ называется ее *базой* тогда и только тогда, когда каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ — база равномерности $\mathfrak{U}$, то последняя полностью определяется семейством $\mathfrak{B}$: подмножество U произведения $X\times X$ входит в $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда U содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$. Подсемейство $\mathfrak{S}$ называется *предбазой* равномерности $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда конечные пересечения элементов $\mathfrak{S}$ образуют базу $\mathfrak{U}$. Эти определения вполне аналогичны определениям базы и предбазы топологии.

2. Теорема. *Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств произведения $X\times X$ является базой некоторой равномерности на X в том и только в том случае, когда одновременно выполняются условия:*

(а) *каждый элемент семейства $\mathfrak{B}$ содержит диагональ Δ;*

(б) *если $U\in\mathfrak{B}$, то U^{-1} содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$;*

(в) *если $U\in\mathfrak{B}$, то $V\circ V\subset U$ для некоторого V из $\mathfrak{B}$;*

(г) *пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ содержит некоторый элемент этого семейства.*

Доказательство этого утверждения ввиду тривиальности опускается.

Семейства, являющиеся предбазами равномерностей, охарактеризовать труднее. Для наших целей достаточен следующий простой результат.

3. Теорема. *Для того чтобы семейство $\mathfrak{S}$ подмножеств множества $X\times X$ было предбазой некоторой равномерности на X, достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

(а) *каждый элемент семейства $\mathfrak{S}$ содержит диагональ Δ;*

(б) *для каждого $U\in\mathfrak{S}$ множество U^{-1} содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{S}$;*

(в) *для каждого* $U \in \mathfrak{S}$ *существует* $V \in \mathfrak{S}$ *такое, что* $V \circ V \subset U$.

В частности, объединение любого семейства равномерностей на X *является предбазой некоторой равномерности на* X.

Доказательство. Нужно показать, что семейство $\mathfrak{B}$ всевозможных конечных пересечений элементов семейства $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условиям утверждения 6.2. Это легко вытекает из следующего замечания: если $U_1, \ldots, U_n$ и $V_1, \ldots, V_n$ — подмножества множества $X \times X$, $U = \bigcap \{U_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ и $V = \bigcap \{V_i, i = 1, \ldots, n\}$, то $V \subset U^{-1}$ (соответственно, $V \circ V \subset U$), коль скоро $V_i \subset U_i^{-1}$ (соответственно, $V_i \circ V_i \subset U_i$) при каждом i.

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство; *топологией* $\mathfrak{J}$, *соответствующей равномерности* $\mathfrak{U}$, или *равномерной топологией*, называется семейство всех таких подмножеств T пространства X, что, какова бы ни была точка $x \in T$, существует $U \in \mathfrak{U}$, для которого $U[x] \subset T$. (Это точное обобщение определения топологии, порожденной метрикой: метрическая топология состоит из всех множеств, содержащих каждую свою точку вместе с некоторым шаром вокруг нее.) Следует проверить, что $\mathfrak{J}$ действительно является топологией. Это не представляет никакого труда: в силу определения объединение элементов $\mathfrak{J}$ непременно является элементом $\mathfrak{J}$. Если T и S входят в $\mathfrak{J}$ и $x \in T \cap S$, то существуют U и V в $\mathfrak{U}$ такие, что $U[x] \subset T$ и $V[x] \subset S$; тогда $(U \cap V)[x] \subset T \cap S$. Следовательно, $T \cap S \in \mathfrak{J}$, и $\mathfrak{J}$ является топологией.

Чтобы изучить взаимоотношения между равномерностью и соответствующей ей равномерной топологией, рассмотрим несколько теорем.

4. Теорема. *Внутренность подмножества* A *пространства* X, *наделенного равномерной топологией, состоит из всех точек* x *таких, что* $U[x] \subset A$ *для некоторого* U *из* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что множество $B = \{x : U[x] \subset A$ *для некоторого* U *из* $\mathfrak{U}\}$ открыто в равномерной топологии, ибо B, очевидно, содержит каждое открытое подмножество множества A. Пусть $x \in B$; тогда существует $U \in \mathfrak{U}$, для которого $U[x] \subset A$. В $\mathfrak{U}$ есть элемент V такой, что $V \circ V \subset U$. Если $y \in V[x]$, то $V[y] \subset V \circ V[x] \subset U[x] \subset A$, откуда следует, что $y \in B$. Значит, $V[x] \subset B$, т. е. B — открытое множество.

Из теоремы 4 немедленно следует, что $U[x]$ — окрестность точки x для любого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$. Следовательно, семейство всех множеств вида $U[x]$, где $U \in \mathfrak{U}$, является базой топологии в точке x. (Это семейство на самом деле совпадает с системой всех окрестностей точки x, но последнее не очень важно.) Теперь ясно следующее утверждение.

5. Теорема. *Если $\mathfrak{B}$ — база (или предбаза) некоторой равномерности $\mathfrak{U}$, то для каждой точки x семейство всех множеств $U[x]$, где $U \in \mathfrak{B}$, образует базу (соответственно предбазу) топологии в точке x.*

Равномерной топологии на множестве X соответствует топология произведения на $X \times X$. Как естественно было ожидать, элементы равномерности имеют специальное строение относительно этой топологии.

6. Теорема. *Если U — элемент равномерности $\mathfrak{U}$, то внутренность множества U тоже принадлежит $\mathfrak{U}$. Следовательно, семейство всех открытых симметричных элементов равномерности $\mathfrak{U}$ является ее базой.*

Доказательство. Внутренность подмножества M произведения $X \times X$ состоит из всех таких (x, y), что для некоторых U и V из $\mathfrak{U}$ будет $U[x] \times V[y] \subset M$. Так как $U \cap V \in \mathfrak{U}$, то внутренностью M является множество $\{(x, y) : V[x] \times V[y] \subset M$ *для некоторого* V *из* $\mathfrak{U}\}$. Для любого $U \in \mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ существует симметричный элемент V такой, что $V \circ V \circ V \subset U$. В соответствии с леммой 6.1 $V \circ V \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in V\}$. Значит, каждая точка множества V является внутренней точкой множества U; а раз V принадлежит внутренности множества U, то последняя сама входит в $\mathfrak{U}$.

В силу предшествующей теоремы каждый элемент равномерности является окрестностью диагонали. Следует подчеркнуть, что обратное к этому утверждению неверно. На X может существовать много разных равномерностей, порождающих одну и ту же топологию, — семейства окрестностей диагонали в этом случае совпадают.

7. Теорема. *Замыкание произвольного подмножества A пространства X в равномерной топологии есть*

$\cap\{U[A] : U \in \mathfrak{U}\}$. *Замыкание подмножества M произведения $X \times X$ есть* $\cap\{U \circ M \circ U : U \in \mathfrak{U}\}$.

Доказательство. Точка x принадлежит замыканию подмножества A пространства X тогда и только тогда, когда $U[x]$ пересекает A при каждом U из $\mathfrak{U}$. Но $U[x]$ пересекает A в том и лишь в том случае, когда $x \in U^{-1}[A]$; так как каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит некоторый симметричный элемент этого семейства, то $x \in A$ в том и лишь в том случае, когда $x \in U[A]$ при каждом U из $\mathfrak{U}$. Первое утверждение этим доказано. Аналогично, если U — симметричный элемент семейства $\mathfrak{U}$, то $U[x] \times U[y]$ пересекает подмножество M произведения $X \times X$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in U[u] \times \times U[v]$ для некоторого (u, v) из M, т. е. когда $(x, y) \in \in \cup\{U[u] \times U[v] : (u, v) \in M\}$. Так как в силу леммы 6.1 последнее множество совпадает с $U \circ M \circ U$, то отсюда следует, что условие $(x, y) \in M$ равносильно условию $(x, y) \in \cap\{U \circ M \circ U : U \in \mathfrak{U}\}$.

8. Теорема. *Семейство всех замкнутых симметричных элементов равномерности $\mathfrak{U}$ является ее базой.*

Доказательство. Если $U \in \mathfrak{U}$ и V — такой элемент семейства $\mathfrak{U}$, что $V \circ V \circ V \subset U$, то $V \circ V \circ V$ содержит замыкание множества V в силу предыдущей теоремы. Значит, U содержит замкнутый элемент W равномерности $\mathfrak{U}$; тогда $W \cap W^{-1}$ — искомый замкнутый симметричный элемент.

Вскоре мы покажем, что каждое равномерное пространство (точнее, каждое пространство с равномерной топологией) вполне регулярно. Пока же ясно, что каждое такое пространство регулярно, ибо произвольная окрестность точки x содержит некоторую окрестность вида $V[x]$, где V — замкнутый элемент семейства $\mathfrak{U}$; в этом случае множество $V[x]$ замкнуто. Следовательно, пространство с равномерной топологией хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждое его одноточечное подмножество замкнуто. Так как замыкание множества $\{x\}$ есть $\cap\{U[x] : U \in \mathfrak{U}\}$, то пространство с равномерной топологией хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество $\cap\{U : U \in \mathfrak{U}\}$ совпадает с диагональю Δ. Если последнее условие выполнено, то $(X, \mathfrak{U})$ называется *хаусдорфовым*, или *отделимым*, равномерным пространством.

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ; ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНОМЕРНОСТЕЙ

Пусть f — отображение равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Говорят, что f *равномерно непрерывно относительно* $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ множество $\{(x, y) : (f(x), f(y)) \in V\}$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Это условие можно перефразировать несколькими способами. Пусть для произвольного отображения f множества X в Y f_2 обозначает индуцированное им отображение произведения $X \times X$ в $Y \times Y$, определенное равенством $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$. Отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ существует U из $\mathfrak{U}$ такое, что $f_2[U] \subset V$. Еще одно утверждение: пусть $\mathfrak{S}$ — предбаза равномерности $\mathfrak{V}$; тогда f равномерно непрерывно в том и лишь в том случае, когда $f_2^{-1}[V] \in \mathfrak{U}$ для каждого V из $\mathfrak{S}$, ибо f_2^{-1} сохраняет объединения и пересечения. Если Y — множество вещественных чисел с обычной равномерностью $\mathfrak{V}$, то из наших определений следует, что отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа r существует $U \in \mathfrak{U}$ такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $(x, y) \in U$. Если и X — пространство вещественных чисел с обычной равномерностью, то f равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого положительного числа r найдется положительное число s такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $|x - y| < s$.

Очевидно, что если f — отображение множества X в множество Y и g — функция на множестве Y, то $(g \circ f)_2 = g_2 \circ f_2$, а отсюда следует, что композиция двух равномерно непрерывных отображений снова является равномерно непрерывным отображением. Если f — взаимно однозначное отображение X на Y и оба отображения f и f^{-1} равномерно непрерывны, то говорят, что f — *равномерный* *изоморфизм* *), а пространства X и Y называются при этом *равномерно эквивалентными*. Композиция двух равномерных изоморфизмов, обратное отображение к равномерному изоморфизму и тождественное отображение пространства на себя — все являются равномерными изоморфизмами. Следовательно, семейство всех равномерных пространств распадается на классы, состоящие из равномерно эквивалентных пространств. Если свойство таково, что, будучи присуще одному равномерному пространству, оно непременно принадлежит и любому пространству, равномерно изоморфному последнему, то это свойство называют *равномерным инвариантом*. За небольшими исключениями, все свойства, изучаемые в этой главе, являются равномерными инвариантами.

Как и следовало ожидать, из равномерной непрерывности отображения вытекает, что оно непрерывно относительно равномерной топологии.

9. Теорема. *Каждое равномерно непрерывное отображение непрерывно относительно равномерной топологии; следовательно, каждый равномерный изоморфизм является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть f — равномерно непрерывное отображение пространства $(X, \mathfrak{U})$ в $(Y, \mathfrak{V})$ и U — какая-нибудь окрестность точки $f(x)$. Тогда существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $V[f(x)] \subset U$; имеем $f^{-1}[V[f(x)]] = \{y : f(y) \in V[f(x)]\} = \{y : (f(x), f(y)) \in V\} = f_2^{-1}[V](x)$ **), а это — окрестность точки x. Следовательно, $f^{-1}[U]$ является окрестностью точки x, чем непрерывность отображения f доказана.

Вообще говоря, не для любого отображения f множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[V]$, где $V \in \mathfrak{V}$, является равномерностью на X. Дело в том, что в пространстве $X \times X$ может существовать подмножество, которое содержит

---

*) Или равномерный гомеоморфизм. (*Прим. перев.*)

**) Множество $f_2^{-1}[V](x)$ лежит в X и по определению состоит из тех точек $y \in X$, для которых $(x, y) \in f_2^{-1}[V]$. (*Прим. перев.*)

некоторое множество $f_2^{-1}[V]$, не являясь прообразом никакого подмножества пространства $Y\times Y$. Однако это затруднение несущественно: как мы сейчас проверим, семейство всех $f_2^{-1}[V]$ образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X. Ясно, что f_2^{-1} сохраняет включения, переход к обратному элементу $\left(\text{т. е. } f_2^{-1}[V^{-1}]=[f_2^{-1}[V]]^{-1}\right)$ и пересечения. Следовательно, надо показать только, что для каждого элемента U равномерности $\mathfrak{V}$ найдется такой элемент $V\in\mathfrak{V}$, что $f_2^{-1}[V]\circ f_2^{-1}[V]\subset f_2^{-1}[U]$. Но если $V\circ V\subset U$, а (x, y) и (y, z) входят в $f_2^{-1}[V]$, то $(f(x), f(y))$ и $(f(y), f(z))$ принадлежат множеству V и, значит, $(f(x), f(z))\in V\circ V$. Следовательно, семейство всех прообразов элементов семейства $\mathfrak{V}$ действительно образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X. Ясно, что отображение f равномерно непрерывно относительно $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$. В действительности $\mathfrak{U}$ является наименьшей среди всех равномерностей, относительно которых f равномерно непрерывно.

Если $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и Y — произвольное подмножество множества X, то в силу предшествующего рассуждения существует наименьшая равномерность $\mathfrak{V}$ на Y, относительно которой тождественное отображение Y в X равномерно непрерывно. Ясно, что $\mathfrak{V}$ состоит просто из пересечений элементов равномерности $\mathfrak{U}$ с множеством $Y\times Y$ (иногда говорят, что $\mathfrak{V}$ является следом семейства $\mathfrak{U}$ на множестве $Y\times Y$). Равномерность $\mathfrak{V}$ называется *относительной равномерностью* на множестве Y, соответствующей равномерности $\mathfrak{U}$; говорят также, что $\mathfrak{V}$ *индуцирована* равномерностью $\mathfrak{U}$. Пространство $(Y, \mathfrak{V})$ при этом называется равномерным подпространством пространства $(X, \mathfrak{U})$. Мы опускаем простую проверку того факта, что топология, соответствующая относительной равномерности $\mathfrak{V}$, индуцируется топологией, порожденной равномерностью $\mathfrak{U}$.

Мы видели, что всегда существует наименьшая равномерность, относительно которой заданное отображение множества в равномерное пространство становится равномерно непрерывным. Можно распространить это утверждение на случай семейства F отображений f множества X в равномерные пространства $(Y_f, \mathfrak{U}_f)$. Семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[U] = \{(x, y) : (f(x), f(y)) \in \in U\}$, где $f \in F$ и $U \in \mathfrak{U}_f$, образует предбазу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X, причем $\mathfrak{U}$ — наименьшая среди тех равномерностей на X, относительно которой все f равномерно непрерывны. (Теорема 6.3 показывает, что семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[U]$ является предбазой некоторой равномерности $\mathfrak{U}$; при этом ясно, что каждое отображение f равномерно непрерывно относительно $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ — наименьшая из всех равномерностей на X, обладающих этим свойством.) В точности этот путь приводит нас к определению произведения равномерностей. Пусть $(X_a, \mathfrak{U}_a)$ — равномерное пространство для каждого a из некоторого множества индексов A; тогда *равномерность произведения на* $\Pi\{X_a : a \in A\}$ есть наименьшая из тех равномерностей, относительно которых все проектирования на координатные пространства равномерно непрерывны. Семейство всех множеств вида $\{(x, y) : (x_a, y_a) \in U\}$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$, является предбазой равномерности произведения. Пусть x — любая точка произведения. Предбазу топологии (порожденной равномерностью) в x можно построить, в частности, отправляясь от выбранной предбазы равномерности произведения. Значит, семейство всех множеств вида $\{y : (x_a, y_a) \in U\}$ является предбазой рассматриваемой равномерной топологии в точке x. Отсюда следует, что базу топологии произведения равномерностей в точке x образует семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $\{y : y_a \in U[x_a]\}$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$. Но то же самое семейство множеств служит также базой топологии произведения в точке x. Таким образом, топология произведения и топология, соответствующая равномерности произведения, совпадают. Это утверждение составляет первую половину следующей теоремы.

10. Теорема. *Топология произведения равномерностей совпадает с топологией произведения.*

Отображение f равномерного пространства в произведение равномерных пространств равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда композиция f

с каждым проектированием на координатное пространство равномерно непрерывна.

Доказательство. Если f — равномерно непрерывное отображение со значениями в произведении $\Pi\{X_a : a \in A\}$, то каждое проектирование P_a равномерно непрерывно, и композиция $P_a \circ f$ тоже равномерно непрерывна. Если отображение $P_a \circ f$ равномерно непрерывно при каждом a из A и U — какой-либо элемент равномерности, заданной на X_a, то $\{(u, v) : (P_a \circ f(v)) \in U\}$ — элемент равномерности $\mathfrak{V}$, заданной на области определения f. Но последнее множество можно записать в виде $f_2^{-1}\left[\{(x, y) : (x_a, y_a) \in U\}\right]$. Значит, прообраз произвольного элемента предбазы равномерности произведения при f_2 принадлежит $\mathfrak{V}$; следовательно, отображение f равномерно непрерывно.

Следующим предложением мы начинаем изучение соотношений между равномерностями и псевдометриками на X.

11. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и d — некоторая псевдометрика на множестве X. Тогда функция d равномерно непрерывна на $X \times X$ относительно равномерности произведения в том и только в том случае, когда множество $\{(x, y) : d(x, y) < r\}$ входит в $\mathfrak{U}$ для каждого положительного числа r.*

Доказательство. Положим $V_{d,r} = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$. Мы должны показать, что $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$ при каждом r тогда и только тогда, когда функция d непрерывна относительно равномерности произведения на $X \times X$. Для любого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$ множества $\{((x, y), (u, v)) : (x, u) \in U\}$ и $\{((x, y), (u, v)) : (y, v) \in U\}$ принадлежат равномерности произведения; легко видеть, что семейство всех множеств вида $\{((x, y), (u, v)) : (x, u) \in U$ и $(y, v) \in U\}$ образует базу равномерности произведения. Следовательно, если функция d равномерно непрерывна, то для каждого положительного числа r существует такой элемент U в $\mathfrak{U}$, что если (x, u) и (y, v) принадлежат U, то $|d(x, y) - d(u, v)| < r$. В частности, полагая $(u, v) = (y, y)$, мы получаем, что если $(x, y) \in U$, то $d(x, y) < r$. Тогда $U \subset V_{d,r}$ и, следовательно, $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$. Докажем обратное утверждение. Заметим, что если (x, u) и (y, v) входят в $V_{d, r}$, то $|d(x, y) - d(u, v)| < 2r$, ибо $d(x, y) \leqslant \leqslant d(x, u) + d(u, v) + d(y, v)$ и $d(u, v) \leqslant d(x, u) + d(x, y) + + d(y, v)$. Отсюда следует, что если $V_{d, r} \in \mathfrak{U}$ при каждом положительном r, то функция d равномерно непрерывна.

МЕТРИЗАЦИЯ

Целью этого параграфа является сравнение равномерных пространств с псевдометризуемыми. То, как протекает это сравнение, является примером стандартной процедуры для проверки эффективности нового обобщения. Объект, полученный в результате обобщения, сравнивается с обобщаемым математическим объектом с целью установить, в какой мере сохранены основные концепции. В рассматриваемом случае (как и во многих других) сравнение приводит к представлению общего объекта через посредство его предшественника. С каждым семейством псевдометрик на множестве X будет связана некоторая равномерность. Главный результат этого параграфа заключается в том, что каждую равномерность можно получить таким способом из семейства всех псевдометрик, равномерно непрерывных относительно нее. Будет показано также, что равномерность описывается одной псевдометрикой в том и только в том случае, когда эта равномерность обладает счетной базой.

Каждая псевдометрика d, заданная на произвольном множестве X, порождает на нем некоторую равномерность по следующему правилу. Для каждого положительного числа r положим $V_{d, r} = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$. Ясно, что $(V_{d, r})^{-1} = V_{d, r}$, $V_{d, r} \cap V_{d, s} = V_{d, t}$, где $t = \min[r, s]$, и $V_{d, r} \circ V_{d, r} \subset V_{d, 2r}$. Отсюда следует, что семейство всех множеств вида $V_{d, r}$ образует базу некоторой равномерности на X. Эта равномерность называется *псевдометрической равномерностью*, или *равномерностью, порожденной псевдометрикой* d. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *псевдометризуемым* (*метризуемым*) в том и только в том случае, когда существует псевдометрика (соответственно метрика) d, порождающая равномерность $\mathfrak{U}$. Равномерность, порожденную псевдометрикой d, можно описать иначе. В соответствии с теоремой 6.11 псевдометрика d равномерно непрерывна относительно равномерности $\mathfrak{V}$ (точнее, относительно равномерности произведения) в том и только в том случае, когда $V_{d,r} \in \mathfrak{V}$ при каждом положительном r. Равномерность $\mathfrak{U}$, порожденная псевдометрикой d, характеризуется как наименьшая из тех равномерностей, относительно которых функция d равномерно непрерывна на $X \times X$. Стоит отметить, что псевдометрическая топология совпадает с равномерной топологией, соответствующей равномерности $\mathfrak{U}$. В самом деле, множество $V_{d,r}[x]$ является открытым r-шаром вокруг точки x, причем семейство всех множеств этого вида образует базу в x каждой из топологий, о которых идет речь.

Решающим шагом при построении метризационной теоремы для равномерных пространств является доказательство следующей леммы.

12. Метризационная лемма. *Пусть $\{U_n, n \in \omega\}$ — последовательность подмножеств произведения $X \times X$ такая, что $U_0 = X \times X$, каждое U_n содержит диагональ и $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ при любом n. Тогда существует неотрицательная вещественная функция d на $X \times X$, удовлетворяющая условиям:*

(а) *$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ при всех x, y и z;*

(б) *$U_n \subset \{(x, y) : d(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$ при каждом положительном целом n.*

Если каждое U_n — симметричное множество, то существует псевдометрика d, для которой выполняется условие (б).

Доказательство. Определим вещественную функцию f на множестве $X \times X$ следующим образом: $f(x, y) = 2^{-n}$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in U_n \setminus U_{n-1}$, и $f(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда (x, y) принадлежит каждому U_n. Искомая функция d строится на основе функции f, являющейся ее «первым приближением», в результате рассмотрения конечных цепочек точек. Для каждой пары точек x, y множества X обозначим через $d(x, y)$ нижнюю грань значений суммы $\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i = 0, \ldots, l\}$ по всем конечным последовательностям $x_0, x_1, \ldots, x_{l+1}$, в которых $x = x_0$ и

$y=x_{l+1}$. Ясно, что d удовлетворяет неравенству треугольника, и из $d(x, y) \leqslant f(x, y)$ следует, что $U_n \subset \subset \{(x, y) : d(x, y) < 2^{-n}\}$. Если каждое U_n — симметричное множество, то $f(x, y) = f(y, x)$ для любой пары (x, y). Значит, в этом случае d является псевдометрикой. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $f(x_0, x_{l+1}) \leqslant 2\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i=0, \ldots, l\}$, ибо отсюда следует, что если $d(x, y) < 2^{-n}$, то $f(x, y) < 2^{-n+1}$ и, значит, $(x, y) \in U$, т. е. $\{(x, y) : d(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$. Доказательство проведем индукцией по длине цепочки l. При $l=0$ неравенство ясно. Для удобства условимся называть величину $\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i=r, \ldots, s\}$ длиной цепочки от r до $s+1$, и пусть a — длина цепочки от 0 до $l+1$. Обозначим через k наибольшее целое число такое, что длина рассматриваемой цепочки от 0 до k не превосходит $\frac{a}{2}$. Заметим, что длина цепочки от $k+1$ до $l+1$ также не больше $\frac{a}{2}$. В силу предположения индукции каждое из чисел $f(x_0, x_k)$ и $f(x_{k+1}, x_{l+1})$ не превосходит $2\frac{a}{2}=a$; при этом, $f(x_k, x_{k+1})$ тоже не больше a. Если m — наименьшее целое число, для которого $2^{-m} \leqslant a$, то (x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}) и (x_{k+1}, x_{l+1}) принадлежат U_m и, значит, $(x_0, x_{l+1}) \in U_{m-1}$. Следовательно, $f(x_0, x_{l+1}) \leqslant 2^{-m+1} \leqslant 2a$; лемма доказана.

Если равномерность $\mathfrak{U}$ на X обладает счетной базой $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$, то можно построить по индукции семейство симметричных множеств $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$, где для любого целого положительного n $U_n \circ U_n \circ U_n \subset \subset U_{n-1}$ и $U_n \subset V_n$. Семейство множеств U_n образует тогда базу равномерности $\mathfrak{U}$. Применяя метризационную лемму, мы заключаем, что равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ псевдометризуемо. Итак, доказана

13. Метризационная теорема. *Равномерное пространство псевдометризуемо в том и только в том случае, когда его равномерность обладает счетной базой.*

Из этой теоремы, очевидно, вытекает, что равномерное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и его равномерность обладает счетной базой.

14. Замечания. Насколько мне известно, эта теорема впервые появилась в статье П. С. Александрова и Урысона [1]. Ее авторы искали решение топологической задачи метризации (см. 4.18); полученный ими результат звучит (приблизительно) так: хаусдорфово топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ метризуемо тогда и только тогда, когда существует равномерность со счетной базой, равномерная топология которой совпадает с $\mathfrak{J}$. Это — малоудовлетворительное *) решение топологической проблемы метризации. Однако если чуть усилить заключение, то получается в точности наша метризационная теорема для равномерных пространств. Читтенден [1] первым доказал теорему 6.13 в «равномерной» формулировке. Позднее его доказательство было сильно упрощено в работах Фринк [1] и Аронштайна [2]. Нами было приведено выше доказательство Фринк в обработке Бурбаки. Впервые теорема 6.13 в том виде, в каком она сформулирована выше, появилась в классической монографии Андре Вейля [1], в которой им было введено понятие равномерного пространства.

Отправляясь от семейства P псевдометрик на множестве X, можно следующим образом определить равномерность на X. Положим $V_{p,r}=\{(x, y): p(x, y)<r\}$. Семейство всех множеств вида $V_{p,r}$, где p — любой элемент P и r — произвольное положительное число, является предбазой некоторой равномерности $\mathfrak{V}$ на X. Эта равномерность $\mathfrak{V}$ и называется *равномерностью, порожденной семейством* P. Можно дать несколько полезных описаний построенной равномерности. Согласно теореме 6.11 псевдометрика p равномерно непрерывна на $X \times X$ относительно равномерности произведения, соответствующей $\mathfrak{V}$, тогда и только тогда, когда $V_{p,r} \in \mathfrak{V}$ при каждом положительном r. Следовательно, равномерность,

*) Здесь автор повторяет высказывание П. С. Александрова и Урысона более чем сорокалетней давности. Ныне не те времена: понятие паракомпактности позволило Бингу [1] и затем Пономареву [2] без труда изготовить из теоремы Александрова — Урысона безукоризненный топологический метризационный критерий: для метризуемости топологического пространства необходимо и достаточно, чтобы оно было паракомпактом (у Бинга — коллективно нормально) и обладало измельчающейся последовательностью покрытий. (*Прим. перев.*)

порожденная семейством P, — наименьшая равномерность, относительно которой равномерно непрерывна на $X \times X$ каждая функция $p \in P$. Другое описание: при фиксированном p из P семейство всех множеств $V_{p,r}$, где r — любое положительное число, является базой равномерности, порожденной псевдометрическим пространством (X, p). Если $\mathfrak{V}$ — какая-нибудь равномерность на X, то тождественное отображение пространства $(X, \mathfrak{V})$ в пространство (X, p) равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда $V_{p,r} \in \mathfrak{V}$ при каждом положительном r. Отсюда следует, что $\mathfrak{V}$ — наименьшая среди тех равномерностей на X, относительно которых при каждом p из P тождественное отображение X в (X, p) равномерно непрерывно. Этот факт приводит еще к одному описанию. Обозначим через Z произведение $\Pi\{X : p \in P\}$ (т. е. произведение стольких экземпляров множества X, сколько элементов в семействе P). Пусть f — отображение X в Z, определенное правилом: $f(x)_p = x$ при каждом x из X и p из P. Предположим теперь, что p-е координатное пространство рассматриваемого произведения наделено равномерностью, порожденной псевдометрикой p, и пусть Z имеет равномерность произведения. Проектирование пространства Z на p-е координатное пространство есть тождественное отображение множества X на псевдометрическое пространство (X, p). Из теоремы 6.10 следует, что равномерность, порожденная семейством P, — наименьшая среди всех, для которых определенное выше отображение f множества X в пространство Z равномерно непрерывно. Но f — взаимно однозначное отображение; значит, оно является равномерным изоморфизмом пространства X на подпространство произведения рассматриваемых псевдометрических пространств.

Понятно, что хорошо было бы знать, какие равномерности порождаются семействами псевдометрик, — эту задачу можно было бы назвать обобщенной метризационной проблемой для равномерных пространств. Решение ее получается непосредственным применением предшествующих результатов. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и P — семейство всех псевдометрик на X, равномерно непрерывных на $X \times X$. Порожденная P равномерность меньше $\mathfrak{U}$ в силу теоремы 6.11. Но метризационная лемма 6.12 показывает, что для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует псевдометрика $p \in P$ такая, что множество $\{(x, y) : p(x, y) < 1\}$ содержится в U; значит, равномерность $\mathfrak{U}$ меньше равномерности, порожденной семейством P.

Таким образом, имеет место

15. Теорема. *Каждая равномерность на X порождается некоторым семейством псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$.*

Эта теорема имеет интересное следствие. Уже отмечалось, что если равномерность $\mathfrak{U}$ на X порождается некоторым семейством P псевдометрик, то пространство $(X, \mathfrak{U})$ равномерно изоморфно некоторому подпространству произведения псевдометрических пространств. Заключение можно усилить, если $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово пространство. Как мы знаем, равномерность $\mathfrak{U}$ — наименьшая среди тех, относительно которых при каждом p из P равномерно непрерывно тождественное отображение пространства X на пространство (X, p). В силу теоремы 4.15 пространство (X, p) изометрично некоторому метрическому пространству (X_p, p^*) посредством некоторого отображения h_p. Следовательно, $\mathfrak{U}$ — наименьшая из равномерностей, при которых каждое из отображений h_p равномерно непрерывно. Определим отображение h множества X в $\Pi\{X_p : p \in P\}$ правилом $h(x)_p = h_p(x)$. Тогда в силу теоремы 6.10 $\mathfrak{U}$ — наименьшая из равномерностей, для которых отображение h равномерно непрерывно. Если пространство $(X, \mathfrak{U}$ хаусдорфово, то отображение h непременно взаимно однозначно; тогда h — равномерный изоморфизм. Из предыдущей теоремы вытекает поэтому такой результат (А. Вейль [1]).

16. Теорема. *Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств, и каждое равномерное хаусдорфово пространство изоморфно подпространству произведения метрических пространств.*

Эта теорема позволяет уяснить, когда топология порождается некоторой равномерностью, — ведь топологическое пространство вполне регулярно в том и только в том случае, когда оно гомеоморфно подпространству произведения псевдометризуемых пространств (4.M).

17. Следствие. *Топология $\mathfrak{J}$ на множестве X является равномерной топологией некоторой равномерности на X в том и только в том случае, когда топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ вполне регулярно.*

Остальная часть этого параграфа посвящена выяснению взаимоотношений между равномерностями и псевдометриками. Семейство P псевдометрик на множестве X называется *комплектом* тогда и только тогда, когда на X существует такая равномерность $\mathfrak{U}$, что P — семейство всех псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$ относительно равномерности произведения, соответствующей $\mathfrak{U}$. Семейство P называется комплектом равномерности $\mathfrak{U}$, и $\mathfrak{U}$ называется равномерностью комплекта P ($\mathfrak{U}$ порождается семейством P в силу теоремы 6.15). Каждое семейство псевдометрик порождает некоторую равномерность; мы будем говорить, что оно порождает и комплект псевдометрик этой равномерности. Можно дать прямое описание комплекта, порожденного семейством P псевдометрик. Семейство всех множеств вида $V_{p,r}$, где $p \in P$ и r — положительное число, является предбазой равномерности комплекта. Поэтому псевдометрика q равномерно непрерывна на произведении тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа s множество $V_{q,s}$ содержит пересечение некоторого конечного семейства множеств вида $V_{p,r}$, где $p \in P$. Этим замечанием установлена справедливость следующего утверждения.

18. Теорема. *Пусть P—некоторое семейство псевдометрик на множестве X и Q — комплект, порожденный P. Псевдометрика q принадлежит Q в том и только в том случае, когда для каждого положительного числа s найдутся положительное число r и конечное подсемейство $p_1, \ldots, p_n$ элементов P такие, что $\bigcap \{V_{p_i, r} : i = 1, \ldots, n\} \subset V_{q, s}$.*

Каждое понятие, основанное на понятии равномерности, можно описать в терминах комплекта, так как каждая равномерность вполне определяется своим комплектом. Следующая теорема представляет собой список наиболее распространенных описаний этого рода. Напомним, что p-dist $(x, A) = \inf\{p(x, y) : y \in A\}$ — p-расстояние от точки x до множества A.

19. Теорема. *Пусть* $(X, \mathfrak{U})$ — *равномерное пространство и* P — *комплект псевдометрик равномерности* $\mathfrak{U}$. *Тогда*:

(а) *Семейство всех множеств* $V_{p,r}$, *где* $p \in P$ *и* r — *положительное число, является базой равномерности* $\mathfrak{U}$.

(б) *Замыкание подмножества* A *пространства* X *в равномерной топологии состоит из всех тех* x, *для которых* p-dist $(x, A) = 0$ *при каждом* p *из* P.

(в) *Внутренность множества* A *состоит из всех тех точек* x, *для которых* $V_{p,r}[x] \subset A$ *при некотором выборе* p *из* P *и некотором* $r > 0$.

(г) *Пусть* P' — *подсемейство семейства* P, *порождающее* P. *Направленность* $\{S_n, n \in D\}$ *в* X *сходится к точке* s *в том и только в том случае, когда* $\{p(S_n, s), n \in D\}$ *сходится к нулю при каждом* p *из* P'.

(д) *Отображение* f *пространства* X *в равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{B})$ *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого элемента* q *комплекта* Q *равномерности* $\mathfrak{B}$ *будет* $q \cdot f_2 \in P$. (*Напоминаем, что* $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$.)

Эквивалентное утверждение: f *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого* q *из* Q *и каждого положительного числа* s *найдутся* p *в* P *и положительное число* r *такие, что из* $p(x, y) < r$ *вытекает неравенство* $q(f(x), f(y)) < s$.

(е) *Пусть* $(X_a, \mathfrak{U}_a)$ — *равномерное пространство при каждом* a *из множества индексов* A *и* P_a — *комплект равномерности* $\mathfrak{U}_a$. *Тогда комплект равномерности произведения на* $\Pi\{X_a : a \in A\}$ *порождается всеми псевдометриками вида* $q(x, y) = p_a(x_a, y_a)$, *где* $a \in A$ *и* $p_a \in P_a$.

Доказательство опускается. Оно заключается в прямом применении полученных раньше результатов.

ПОЛНОТА

В этом параграфе излагается ряд элементарных теорем, основанных на понятии направленности Коши. Равномерное пространство будет называться полным тогда и только тогда, когда в нем каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Два самых полезных результата этого параграфа заключаются в том, что произведение полных пространств полно и что каждое равномерно непрерывное отображение f в полное хаусдорфово пространство можно распространить на замыкание области определения f.

Всюду будет молчаливо предполагаться, что X — множество, $\mathfrak{U}$ — равномерность на X и P — ее комплект псевдометрик (т. е. P — семейство всех псевдометрик на X, равномерно непрерывных на $X \times X$). Определения будут даваться как в терминах $\mathfrak{U}$, так и в терминах P; в доказательстве используется каждый раз та формулировка, которая удобнее в рассматриваемом случае. Множество $\{(x, y) : p(x, y) < r\}$ будет обозначаться через $V_{p, r}$.

Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$ называется *направленностью Коши* тогда и только тогда, когда для каждого $U \in \mathfrak{U}$ существует элемент N в D такой, что $(S_m, S_n) \in U$ при любых m и n, следующих за N в заданном на D упорядочении. Можно перевести это определение на язык направленностей в $X \times X$. Именно, направленность $\{S_n, n \in D\}$ является направленностью Коши в том и лишь в том случае, когда направленность $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ лежит в произвольном элементе семейства $\mathfrak{U}$, начиная с некоторого момента. (Предполагается, что $D \times D$ наделено упорядочением произведения.) Семейство всех множеств вида $V_{p, r}$, где p принадлежит комплекту P и r — положительное число, является базой равномерности $\mathfrak{U}$. Отсюда следует, что $\{S_n, n \in D\}$ является направленностью Коши тогда и только тогда, когда направленность $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$, начиная с некоторого момента, находится в произвольном множестве вида $V_{p, r}$. Иными словами, $\{S_n, n \in D\}$ — направленность Коши в том и только в том случае, когда направленность $\{p(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ сходится к нулю при любом выборе псевдометрики p из комплекта P.

Следующая простая лемма о направленностях Коши применяется весьма часто.

20. Лемма. *Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$ является направленностью Коши в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь из следующих условий:*

(а) *направленность* $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ *лежит в произвольном элементе какой-либо предбазы равномерности* $\mathfrak{U}$, *начиная с некоторого момента*;

(б) *направленность* $\{p(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ *сходится к нулю при каждом* p *из некоторого семейства псевдометрик, порождающего комплект* P.

Доказательство. Если Q — семейство псевдометрик, порождающее комплект P, то семейство всех множеств вида $V_{p,r}$, где $p \in Q$ и r — любое положительное число, образует предбазу рассматриваемой равномерности, так что доказательство утверждения (б) сводится к доказательству утверждения (а). Для доказательства (а) заметим, что если какая-нибудь направленность (например, $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$) начиная с некоторого момента лежит в каждом элементе некоторого конечного семейства множеств, то она с некоторого момента находится и в их пересечении.

Следующее предложение выясняет соотношение между направленностями Коши и сходимостью относительно равномерной топологии.

21. Теорема. *Каждая направленность, сходящаяся относительно равномерной топологии, является направленностью Коши. Направленность Коши сходится к каждой из своих предельных точек.*

Доказательство. Если $\{S_n, n \in D\}$ сходится к точке s, то $\{d(S_n, s), n \in D\}$ сходится к нулю при любом выборе d из комплекта P. Так как $d(S_m, S_n) \leqslant d(S_m, s) + d(S_n, s)$, то отсюда следует, что $\{d(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ сходится к нулю и, значит, исходная направленность является направленностью Коши. Предположим теперь, что $\{S_n, n \in D\}$ — направленность Коши и s — ее предельная точка. Тогда при любом выборе d из P и $r > 0$ найдется N в D, для которого из $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ следует, что $d(S_m, S_n) < \frac{r}{2}$. Так как s — предельная точка, то существует $p \in D$, для которого $d(S_p, s) \leqslant \frac{r}{2}$ и $p \geqslant N$. Тогда $d(S_n, s) \leqslant d(S_n, S_p) + d(S_p, s) < r$ при $n \geqslant p$. Следовательно, рассматриваемая направленность сходится к s.

Равномерное пространство называется *полным* тогда и только тогда, когда в нем каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Очевидно, каждое замкнутое подпространство полного пространства $(X, \mathfrak{U})$ само полно. Если $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово пространство, $(Y, \mathfrak{V})$ — его полное подпространство, то Y замкнуто в X, ибо любая направленность в Y, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$, непременно является направленностью Коши, и x — ее единственная предельная точка. Этот очевидный результат — один из наиболее полезных фактов, касающихся понятия полноты.

22. Теорема. *Замкнутое подпространство полного пространства полно, и полное подпространство хаусдорфова равномерного пространства замкнуто.*

Прежде чем двигаться дальше, вероятно, полезно привести несколько примеров равномерных пространств. Пусть $\mathfrak{U}$ — наибольшая из всех равномерностей для X (она состоит из всех подмножеств произведения $X \times X$, содержащих диагональ); тогда $(X, \mathfrak{U})$ — полное пространство. Наименьшая равномерность на X также дает полное пространство. Если равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ бикомпактно в равномерной топологии, то оно и полное, ибо у каждой направленности в этом пространстве есть тогда предельная точка и, следовательно, в силу теоремы 6.21 каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Пространство вещественных чисел полно относительно обычной равномерности. В этом легко убедиться, заметив, что каждая направленность Коши с некоторого момента находится в ограниченном подмножестве A пространства вещественных чисел и, значит, с некоторого момента лежит в бикомпактном множестве $\bar{A}$.

Существует характеристика полноты, навеянная понятием бикомпактности. Напомним, что семейство множеств называется центрированным в том и лишь в том случае, когда пересечение любого конечного множества элементов этого семейства не пусто. Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда каждое центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение. При описании полноты на центрированные семейства налагается еще одно ограничение. Говорят, что семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ содержит *мелкие множества*, в том и только в том случае, когда для каждого U из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{A}$ найдется элемент A, содержащийся в качестве подмножества в $U[x]$ при некотором выборе точки x. Другая формулировка: для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует A в $\mathfrak{A}$ такое, что $A \times A \subset U$. В терминах комплекта P псевдометрик равномерного пространства семейства, содержащие мелкие множества, характеризуются тем, что при каждом положительном r и любом d из P найдется элемент A в $\mathfrak{A}$, d-диаметр которого меньше r. Мы опускаем доказательство равносильности этих трех утверждений.

23. Теорема*). *Равномерное пространство полно в том и только в том случае, когда каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств, содержащее мелкие множества, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство и $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств, содержащее мелкие множества. Рассмотрим семейство $\mathfrak{F}$ всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{A}$; оно направлено отношением включения $\subset$. Из каждого элемента F семейства $\mathfrak{F}$ можно выбрать по точке x_F. Направленность $\{x_F, F \in \mathfrak{F}\}$ является направленностью Коши, ибо если A и B следуют при упорядочении $\subset$ за элементом F из $\mathfrak{F}$ (т. е. если $A \subset F$ и $B \subset F$), то точки x_A и x_B входят в F, а $\mathfrak{F}$ содержит мелкие множества. Следовательно, направленность $\{x_F : F \in \mathfrak{F}\}$ сходится, а так как она с некоторого момента находится в любом наперед заданном элементе семейства $\mathfrak{F}$, то точка, к которой она сходится, должна принадлежать каждому элементу семейства $\mathfrak{F}$. Значит, пересечение $\bigcap\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ не пусто. Докажем обратное утверждение. Пусть $\{x_n, n \in D\}$ — некоторая направленность Коши и при каждом n из D A_n — множество всех точек x_m, для которых $m \geqslant n$.

*) Фильтр называется *фильтром Коши*, если он содержит мелкие множества. При этом соглашении нашу теорему можно сформулировать так: пространство полно в том и только в том случае, когда каждый фильтр Коши сходится к некоторой точке.

Семейство $\mathfrak{A}$ всех множеств вида A_n центрировано, а так как рассматриваемая направленность является направленностью Коши, то $\mathfrak{A}$ содержит мелкие множества. Следовательно, существует точка y, принадлежащая пересечению замыканий всех множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, т. е. множеству $\bigcap\{\bar{A}_n : n \in D\}$. В силу 2.7 точка y является предельной для направленности $\{x_n, n \in D\}$. Так как $\{x_n, n \in D\}$ — направленность Коши, то она сходится к y.

Кое-кто мог бы предположить, что равномерное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, будет полным, если каждая последовательность Коши в этом пространстве сходится к некоторой его точке. К сожалению, эта гипотеза не оправдывается; однако верен следующий более слабый результат.

24. Теорема. *Псевдометризуемое равномерное пространство полно в том и только в том случае, когда каждая последовательность Коши в этом пространстве сходится к некоторой его точке.*

Доказательство. Если равномерное пространство X полно, то каждая направленность Коши в X и, в частности, каждая последовательность Коши в X сходятся. Обратно, предположим, что (X, d) — псевдометрическое пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится, и пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство замкнутых в X множеств, содержащее мелкие множества. Для каждого целого неотрицательного числа n выберем в $\mathfrak{A}$ элемент A_n, диаметр которого меньше 2^{-n}, а в A_n выберем произвольную точку x_n. Если m и n велики, то $d(x_m, x_n)$ мало, ибо точки x_m и x_n принадлежат, соответственно, пересекающимся множествам B_m и B_n малого диаметра. Значит $\{x_n, n \in \omega\}$ — последовательность Коши, поэтому она сходится к некоторой точке y пространства X. Каков бы ни был элемент B семейства $\mathfrak{A}$, $\operatorname{dist}(x_n, B) < 2^{-n}$, ибо B пересекается с A_n. Отсюда следует, что точка y принадлежит замыканию множества B. Так как все элементы семейства $\mathfrak{A}$ — замкнутые множества, то y принадлежит им всем.

Обычный путь доказательства полноты заключается в обнаружении того, что рассматриваемое пространство равномерно изоморфно замкнутому подпространству произведения полных пространств, с последующей ссылкой на теорему, идущую ниже. В ее доказательстве мы пользуемся тем, что образ направленности Коши при равномерно непрерывном отображении является направленностью Коши, — фактом, с очевидностью вытекающим из определений.

25. Теорема. *Произведение равномерных пространств полно в том и только в том случае, когда каждое координатное пространство полно.*

Направленность в произведении является направленностью Коши в том и только в том случае, когда каждая ее проекция в кординатное пространство является направленностью Коши.

Доказательство. Пусть $(Y_a, \mathfrak{U}_a)$ — полное равномерное пространство при каждом a из некоторого множества индексов A. Проекция произвольной направленности Коши в пространство Y_a является направленностью Коши при любом a и, следовательно, сходится к некоторой точке, скажем, к точке y_a. Тогда направленность, рассматриваемая в произведении, сходится к точке y, a-й координатой которой служит y_a. Следовательно, произведение полно. Простое доказательство обратного утверждения опускается.

Если направленность $\{x_n, n \in D\}$ в произведении такова, что ее проекция в любое координатное пространство является направленностью Коши, то для каждого U из $\mathfrak{U}_a$ направленность $\{(x_m, x_n), (m, n) \in D \times D\}$ с некоторого момента находится в прообразе множества U относительно проектирования. Иными словами, $\{(x_m, x_n), (m, n) \in (D \times D)\}$ с некоторого момента находится в множестве $\{(x, z) : (x_a, z_a) \in U\}$. Так как семейство множеств этого вида образует предбазу равномерности произведения, то отсюда следует (лемма 6.20), что $\{x_n, n \in D\}$ является направленностью Коши.

Отображение f *равномерно непрерывно* на подмножестве A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ тогда и только тогда, когда его сужение на A, $f|A$, равномерно непрерывно по отношению к равномерности, индуцированной на A. Если пространство значений полно и хаусдорфово*), а отображение f равномерно непрерывно на своей области определения A, то его можно единственным способом продолжить до равномерно непрерывного отображения, определенного на замыкании множества A.

26. Теорема. *Пусть f — функция, областью определения которой служит подмножество A равномерного пространства* $(X, \mathfrak{U})$ *со значениями в полном хаусдорфовом равномерном пространстве* $(Y, \mathfrak{V})$. *Если f равномерно непрерывна на A, то существует и единственно равномерно непрерывное продолжение $\bar{f}$ функции f, областью определения которого служит замыкание множества A.*

Доказательство. Функция f — это подмножество произведения $X \times Y$ (мы отождествляем здесь функцию с ее графиком); искомое продолжение — это замыкание $\bar{f}$ множества f в $X \times Y$. (Пара (x, y) принадлежит $\bar{f}$ тогда и только тогда, когда в A существует направленность, сходящаяся к x, образ которой сходится к y.) Областью определения функции $\bar{f}$ является, очевидно, замыкание множества A. Мы покажем, что если W — элемент семейства $\mathfrak{V}$, то существует U в $\mathfrak{U}$, для которого из $(x, y) \in \bar{f}$, $(u, v) \in \bar{f}$ и $x \in U[u]$ следует, что $y \in W[v]$. Так как пространство Y хаусдорфово, то это будет означать, что $\bar{f}$ — функция, причем равномерно непрерывная. Выберем в $\mathfrak{V}$ замкнутый и симметричный элемент V, для которого $V \circ V \subset W$, и в $\mathfrak{U}$ выберем открытый и симметричный элемент U такой, что $f[U[x]] \subset V[f(x)]$ при каждом x из A. Пусть (x, y) и (u, v) входят в $\bar{f}$ и $x \in U[u]$. Пересечение множеств $U[x]$ и $U[u]$ открыто; следовательно, существует такая точка z в A, что и x, и u принадлежат множеству $U[z]$. Точки y и v принадлежат замыканию множества $f[U[z]]$ по определению $\bar{f}$; значит, как y, так и v входят в множество $V[f(z)]$. Следовательно, $(y, v) \in V \circ V \subset W$ и $y \in W[v]$.

ПОПОЛНЕНИЕ

Цель этого параграфа — показать, что каждое равномерное пространство равномерно изоморфно всюду

---

*) Чтобы продолжение существовало, не обязательно требовать хаусдорфовости, однако хаусдорфовость является необходимым условием единственности продолжения.

плотному подпространству полного равномерного пространства. Иными словами, можно присоединить к произвольному равномерному пространству «идеальные элементы» так, что получится полное равномерное пространство. Процедура этого присоединения напоминает процесс бикомпактного расширения из пятой главы *); но есть одно существенное отличие: пополнение равномерного пространства определено, по существу, однозначно.

Для любого метрического пространства X можно найти такое полное метрическое пространство X^*, что X *изометрично* (а не только равномерно изоморфно) некоторому всюду плотному подпространству пространства X^*. Общую конструкцию пополнения мы построим, отправляясь от этого предварительного результата.

27. Теорема. *Каждое метрическое (или псевдометрическое) пространство можно взаимно однозначно и изометрично отобразить на всюду плотное подмножество полного метрического (соответственно псевдометрического) пространства.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая псевдометрического пространства (X, d); соответствующий результат для метрических пространств будет следовать тогда из теоремы 4.15. Обозначим через X^* класс всех последовательностей Коши в X и для произвольных S и T из X^* определим $d^*(S, T)$ как предел числовой последовательности $d(S_m, T_m)$ при неограниченном росте m (формально речь идет о пределе направленности $\{d(S_m, T_m), m \in \omega\}$). Легко проверяется, что d^* является псевдометрикой на X^*. Обозначим через F отображение, переводящее произвольную точку x пространства X в постоянную последовательность со значением x. Таким образом, $F(x)_n = x$ при всех n. Очевидно, что F — взаимно однозначная изометрия; остается доказать только, что $F[X]$ всюду плотно в X^* и что пространство X^* полно. Первое из этих утверждений очевидно: если $S \in X^*$ и n достаточно велико, то точка $F(S_n)$ лежит вблизи от точки S. Покажем, что пространство X^* полно.

*) Она гораздо больше напоминает классическое построение пополнения метрического пространства! (*Прим. перев.*)

Достаточно в силу плотности подпространства $F[X]$ в пространстве X^* доказать, что каждая направленность Коши в $F[X]$ сходится к точке из X^*. Но каждая последовательность Коши в $F[X]$ имеет вид $F\circ S=\{F(S_n),\ n\in\omega\}$, где S — последовательность Коши в X; ясно, что последовательность $F\circ S$ сходится в X^* к точке S.

Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств; при этом каждое хаусдорфово равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения метрических пространств в силу теоремы 6.16. Предыдущая теорема означает, что произвольное метрическое или псевдометрическое пространство равномерно изоморфно подпространству полного пространства того же типа. Отсюда сразу вытекает

28. Теорема. *Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно всюду плотному подпространству некоторого полного равномерного пространства. Каждое хаусдорфово равномерное пространство равномерно изоморфно всюду плотному подпространству полного хаусдорфова равномерного пространства.*

Пополнением равномерного пространства $(X,\ \mathfrak{U})$ называется любая пара $(f,\ (X^*,\mathfrak{U}^*))$, где $(X^*,\ \mathfrak{U}^*)$ — полное равномерное пространство и f — равномерный изоморфизм пространства X на некоторое всюду плотное подпространство пространства X^*. Пополнение называют хаусдорфовым тогда и только тогда, когда $(X^*,\ \mathfrak{U}^*)$ — хаусдорфово равномерное пространство. Предыдущую теорему можно теперь переформулировать так: *каждое* (*хаусдорфово*) *равномерное пространство обладает* (*хаусдорфовым*) *пополнением.*

Для хаусдорфовых пополнений имеет место утверждение о единственности. Если f и g — равномерные изоморфизмы пространства X на всюду плотные подпространства полных хаусдорфовых равномерных пространств X^* и X^{**} соответственно, то каждое из отображений $g\circ f^{-1}$ и $f\circ g^{-1}$ обладает равномерно непрерывным продолжением на X^* (соответственно на X^{**}) в силу теоремы 6.26. Отсюда следует, что продолжение отображения $g\circ f^{-1}$ является равномерным изоморфизмом пространства X^* на пространство X^{**}. Говоря попросту, *хаусдорфово пополнение хаусдорфова равномерного пространства единственно с точностью до равномерного изоморфизма.*

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Каждая вполне регулярная топология $\mathfrak{J}$ на множестве X является равномерной топологией, соответствующей некоторой равномерности $\mathfrak{U}$; однако такая равномерность в большинстве случаев не единственна. Если же пространство $(X, \mathfrak{J})$ бикомпактно и регулярно, то, оказывается, существует в точности одна равномерность, порождающая топологию $\mathfrak{J}$. В этом случае топология определяет равномерность, топологические инварианты являются равномерными инвариантами и вся теория приобретает особенно простой вид. Этот параграф посвящен доказательству только что сформулированной теоремы о единственности и еще двух утверждений. Как и раньше, в зависимости от того, что удобнее, мы будем оперировать либо равномерностями, либо комплектами псевдометрик.

29. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — бикомпактное равномерное пространство. Тогда каждая окрестность диагонали Δ в произведении $X\times X$ принадлежит $\mathfrak{U}$ и каждая псевдометрика, непрерывная на $X\times X$, принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех замкнутых элементов семейства $\mathfrak{U}$, и пусть V — произвольная открытая окрестность диагонали Δ. Если $(x, y) \in \bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$, то, так как $\mathfrak{B}$ является базой равномерности $\mathfrak{U}$, точка y принадлежит произвольной окрестности точки x и, значит, (x, y) входит в каждую окрестность диагонали Δ. Следовательно, множество $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$ является подмножеством множества V. Так как каждый элемент U семейства $\mathfrak{B}$ бикомпактен, а V — открытое множество, то пересечение некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{B}$ тоже является подмножеством множества V; значит, $V \in \mathfrak{U}$.

Если псевдометрика d, заданная на X, непрерывна на $X\times X$, то множество $\{(x, y) : d(x, y) < r\}$ при каждом положительном r является окрестностью диагонали. Значит, функция d равномерно непрерывна; поэтому она принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$.

Каждое бикомпактное регулярное топологическое пространство вполне регулярно; его топология является, следовательно, равномерной топологией некоторой равномерности, — последняя только что была указана.

30. Следствие. *Если $(X, \mathfrak{T})$ — бикомпактное регулярное топологическое пространство, то семейство всех окрестностей диагонали Δ образует равномерность на X, равномерная топология которой совпадает с $\mathfrak{T}$.*

Вот другое следствие.

31. Теорема. *Каждое непрерывное отображение бикомпактного равномерного пространства в равномерное пространство равномерно непрерывно.*

Доказательство. Если f — непрерывное отображение X в Y, то f_2, где $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$, — непрерывное отображение пространства $X \times X$ в пространство $Y \times Y$. Следовательно, если d входит в комплект псевдометрик, отвечающий пространству Y, то композиция $d \circ f_2$ непрерывна на $X \times X$. Из теоремы 6.29 следует тогда, что $d \circ f_2$ принадлежит комплекту псевдометрик пространства X; значит, отображение f равномерно непрерывно.

Каждое бикомпактное равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ можно представить в виде объединения конечного семейства мелких множеств — точнее, для каждой псевдометрики d из комплекта равномерности $\mathfrak{U}$ и любого положительного числа r существует конечное покрытие пространства X множествами, d-диаметр каждого из которых меньше r. Это вытекает непосредственно из бикомпактности пространства X: его можно покрыть конечным числом $\frac{r}{3}$-шаров; диаметр каждого такого шара меньше r. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*) тогда и только тогда, когда X является объединением конечного семейства множеств d-диаметра, меньшего r, при любом выборе псевдометрики d из комплекта равномерности $\mathfrak{U}$ и положительного числа r. В терминах $\mathfrak{U}$ это условие можно сформулировать так: для каждого U из $\mathfrak{U}$ множество X представляется в виде объединения конечного числа таких множеств B, что $B \times B \subset U$, или, что эквивалентно, при каждом U из $\mathfrak{U}$ существует конечное подмножество F в X, для которого $U[F]=X$. Подмножество Y равномерного пространства называется *вполне ограниченным* тогда и только тогда, когда Y, наделенное индуцированной из $(X, \mathfrak{U})$ равномерностью, вполне ограничено.

Есть одно простое, но очень полезное соотношение между бикомпактностью и вполне ограниченностью.

32. Теорема. *Равномерное пространство* $(X, \mathfrak{U})$ *вполне ограничено в том и только в том случае, когда каждая направленность в* X *обладает поднаправленностью Коши.*

Следовательно, равномерное пространство бикомпактно в том и только в том случае, когда оно вполне ограничено и полно.

Доказательство. Пусть S — произвольная направленность во вполне ограниченном равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$. Существование в ней поднаправленности Коши, очевидно, вытекает из утверждения задачи 2.К. Однако мы дадим здесь набросок доказательства интересующего нас факта, не опирающегося на этот предшествующий результат. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех подмножеств A пространства X, в каждое из которых S попадает часто. Тогда $\{X\} \subset \mathfrak{A}$ и в силу принципа максимальности 0.25 существует максимальное центрированное подсемейство $\mathfrak{B}$ семейства $\mathfrak{A}$, содержащее $\{X\}$. Из максимальности $\mathfrak{B}$ следует, что если объединение конечного числа элементов $B_1, \ldots, B_n$ семейства $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{B}$, то $B_i \in B$ при некотором i (подробное рассуждение можно найти в 2.И). Так как пространство X вполне ограничено, его можно покрыть конечным семейством мелких множеств. Отсюда следует, что $\mathfrak{B}$ содержит (как угодно) мелкие множества. Наконец, из 2.5 вытекает, что в S существует поднаправленность, которая, начиная с некоторого момента, находится в произвольно выбранном элементе семейства $\mathfrak{B}$; очевидно, она является поднаправленностью Коши.

Если пространство $(X, \mathfrak{U})$ не вполне ограничено, то $U[F] \neq X$ для некоторого $U \in \mathfrak{U}$ и любого конечного подмножества $F \subset X$. Следовательно, по индукции можно построить последовательность $\{x_n, n \in \omega\}$ такую, что $x_n \notin U[x_p]$ при $p<n$. Ясно, что последовательность $\{x_n, n \in \omega\}$ не имеет поднаправленности Коши.

Наконец, если пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и вполне ограничено, то каждая направленность в X обладает поднаправленностью, сходящейся к некоторой точке множества X. Значит, пространство $(X, \mathfrak{U})$ бикомпактно. Ранее уже отмечалось, что каждое бикомпактное пространство полно.

Есть еще одна очень полезная лемма о бикомпактных пространствах. Она обобщает лемму Лебега о покрытии (5.26). Покрытие подмножества A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерным покрытием* тогда и только тогда, когда существует такой элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, что множество $U[x]$ является подмножеством некоторого элемента рассматриваемого покрытия для каждого x (т. е. семейство множеств $U[x]$ вписано в заданное покрытие). В терминах комплекта псевдометрик равномерности $\mathfrak{U}$ это условие звучит так: покрытие множества A равномерно в том и только в том случае, когда существует элемент p комплекта и положительное число r такие, что открытый шар d-радиуса r с центром в произвольной точке множества A содержится в некотором элементе этого покрытия.

33. Теорема. *Каждое открытое покрытие бикомпактного подмножества равномерного пространства является равномерным покрытием.*

В частности, каждая окрестность бикомпактного подмножества A содержит окрестность вида $U[A]$, где U — некоторый элемент равномерности.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — открытое покрытие бикомпактного подмножества A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$. Для каждого $x \in A$ найдется такой элемент $U \in \mathfrak{U}$, что $U[x]$ содержится в качестве подмножества в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Поэтому существует $V \in \mathfrak{U}$, для которого $V \circ V[x]$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{A}$. Выберем конечное семейство точек $x_1, \ldots, x_n$ множества A и конечное семейство элементов $V_1, \ldots, V_n$ равномерности $\mathfrak{U}$ так, чтобы множества $V_i[x_i]$ покрывали в совокупности множество A и при каждом i $V_i \circ V_i[x_i]$ было подмножеством некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Наконец, положим $W = \bigcap\{V_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда для каждой точки y множества A y принадлежит $V_i[x_i]$ при некотором i; значит, $W[y] \subset W \circ V_i[x_i] \subset V_i \circ V_i[x_i]$. Следовательно, $W[y]$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{A}$.

ТОЛЬКО ДЛЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Этот параграф посвящен двум утверждениям про полные метрические пространства. Эти утверждения следует отнести к числу наиболее полезных следствий полноты; к несчастью, обобщить их на полные равномерные пространства не представляется возможным. Первое из них — это классическая теорема Бэра о множествах второй категории. Эта теорема и один или два связанных с ней результата занимают бо́льшую часть параграфа. В последней теореме параграфа устанавливается, что образ полного метрического пространства при непрерывном равномерно открытом отображении является полным пространством в предположении, что пространство значений хаусдорфово. Доказательство этой теоремы основано на лемме, которую мы формулируем в значительно более общем виде, чем это необходимо для самой теоремы. Из этой леммы (по существу, формализующей рассуждение Банаха) непосредственно получаются и теорема о замкнутом графике, и теорема об открытом отображении из теории нормированных линейных пространств (см. задачу 6.Т).

34. Теорема (Бэр). *Пусть X — либо полное псевдометрическое пространство, либо локально бикомпактное регулярное пространство. Тогда пересечение счетного семейства открытых подмножеств, всюду плотных в X, само всюду плотно в X.*

Доказательство. Рассуждение ведется для случая локально бикомпактного регулярного пространства, а в скобках указывается, какие надо сделать изменения в случае полного псевдометрического пространства. Пусть $\{G_n, n \in \omega\}$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств пространства X и U — произвольное непустое множество, открытое в X. Надо показать, что $U \cap \bigcap\{G_n : n \in \omega\}$ не пусто. С этой целью начнем индуктивный процесс, выбрав такое открытое множество V_0, что $\overline{V}_0$ является бикомпактным подмножеством множества $U \cap G_0$ (что $\overline{V}_0$ содержится в $U \cap G_0$ и имеет диаметр, меньший единицы), и затем для каждого целого положительного n найдем V_n так, чтобы $\overline{V}_n$ было подмножеством множества $V_{n-1} \cap G_n$ (и чтобы диаметр V_n был меньше $\frac{1}{n}$). Возможность такого выбора следует из того, что все G_n — открытые всюду плотные множества. Семейства всех $\overline{V}_n$, где n — любое целое неотрицательное число, центрировано и состоит из замкнутых множеств; при этом $\overline{V}_0$ бикомпактно (семейство содержит мелкие множества). Следовательно, множество $\bigcap\{\overline{V}_n : n \in \omega\}$ не пусто. Так как $\overline{V}_{n+1} \subset U \cap G_n$, то отсюда следует, что $U \cap \bigcap\{G_n : n \in \omega\}$ не пусто.

Отметим, что теорема Бэра носит смешанный характер: топологическое заключение (пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно) выводится из нетопологических посылок (что пространство полное псевдометрическое). Есть чисто топологическое утверждение, эквивалентное теореме Бэра. Если $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство, полное относительно некоторой псевдометрики d, согласующейся с топологией $\mathfrak{J}$, то имеет место то же заключение. (Топологические пространства, на которых существует полная метрика, можно охарактеризовать и совсем по-другому — как указано в 6.Л.)

Для обсуждения вопросов, связанных с теоремой Бэра, выработана очень удобная терминология. Подмножество A топологического пространства X называется *нигде не плотным* в X тогда и только тогда, когда внутренность замыкания множества A пуста. Иными словами, A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда открытое множество $X \setminus \overline{A}$ всюду плотно в X. Очевидно, что объединение конечного семейства нигде не плотных множеств нигде не плотно. Подмножество A называется *худым* в X, или *первой категории* в X, в том и только в том случае, когда A можно представить в виде объединения счетного семейства множеств, нигде не плотных в X. Теорему Бэра можно теперь сформулировать так: дополнение к худому подмножеству полного метрического пространства всюду плотно в последнем. (Дополнение к худому множеству называют иногда *существенным* в X.)

Говорят, что множество A *нехудое* в X, или что оно *второй категории* в X, тогда и только тогда, когда оно не является худым в X. Следующий результат представляет собой разновидность локализационной теоремы. Из того, что множество A нехудое, мы выводим существование точки x, с любой окрестностью которой множество A пересекается по нехудому множеству. При этом иногда говорят, что A — второй категории в такой точке x.

35. Теорема. *Пусть A — какое-нибудь подмножество топологического пространства X и $M(A)$ — объединение всех открытых множеств V, для которых $V \cap A$ — худое множество в X. Тогда $A \cap \overline{M(A)}$ — худое множество в X.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство попарно непересекающихся открытых множеств, максимальное относительно следующего свойства: если $U \in \mathfrak{U}$, то $U \cap A$ — худое множество. Такое семейство $\mathfrak{U}$ существует в силу принципа максимальности 0.25. Положим $W = \bigcup\{U : U \in \mathfrak{U}\}$. Доказательство теоремы сводится к проверке того, что $W \cap A$ является худым множеством. В самом деле, если последнее верно, то $A \cap \overline{W}$ — худое множество, ибо множество $\overline{W} \setminus W$ нигде не плотно. Из максимальности семейства $\mathfrak{U}$ следует, что $\overline{W}$ содержит любое открытое множество V, пересекающееся с A по худому множеству. Чтобы доказать, что множество $W \cap A$ худое, представим множество $U \cap A$ для каждого U из $\mathfrak{U}$ в виде $\bigcup\{U_n : n \in \omega\}$, где каждое U_n — нигде не плотное множество. Из того, что множества семейства $\mathfrak{U}$ попарно не пересекаются, следует тогда, что множество $\bigcup\{U_n : U \in \mathfrak{U}\}$ нигде не плотно для каждого целого числа $n \geqslant 0$. Значит, $W \cap A$ — худое множество.

Важным следствием предшествующей теоремы является тот факт, что если A — нехудое подмножество топологического пространства, то существует непустое открытое множество V такое, что пересечение множества

A с произвольной окрестностью произвольной точки множества $\overline{V}$ является нехудым множеством.

Заключительная теорема этой главы показывает, что полнота сохраняется при отображениях определенного сорта. Отображение равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ называется *равномерно открытым* тогда и только тогда, когда для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует элемент V из $\mathfrak{V}$ такой, что $f[U[x]] \supset V[f(x)]$ при каждом $x \in X$. Не верно, что равномерно открытые отображения сохраняют полноту в классе произвольных равномерных пространств. Кёте [1] построил пример полного линейного топологического пространства и такого замкнутого подпространства в нем, что соответствующее фактор-пространство не полно. Теорема, которую мы собираемся установить, касается, подобно теореме Бэра, лишь псевдометрических пространств.

Доказательство ее, данное здесь, основано на лемме, у которой есть и другие глубокие следствия (см. 6.Т). Эта лемма касается некоторого отношения R между точками псевдометрического пространства (X, d) и равномерного пространства $(Y, \mathfrak{V})$ (таким образом, R является подмножеством произведения $X \times Y$). Положим $U_r = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$; при этом $U_r[x]$ — просто r-шар с центром в x.

36. Лемма. *Пусть R — замкнутое подмножество произведения полного псевдометрического пространства (X, d) на равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Предположим, что для каждого положительного r существует такой элемент $V \in \mathfrak{V}$, что $\overline{R[U_r[x]]} \supset V[y]$ при любом (x, y) из R. Тогда для любых $r > 0$ и $e > 0$ имеют место соотношения*

$$R[U_{r+e}[x]] \supset \overline{R[U_r[x]]} \supset V[y].$$

Доказательство. Основной факт, нужный для доказательства, таков: если $v \in \overline{R[A]}$, где A — подмножество множества X, то существует множество B сколь угодно малого диаметра такое, что $v \in \overline{R[B]}$ и $A \cap B$ не пусто. Это вытекает из следующих соображений. Если r — произвольное положительное число, V — симметричный элемент семейства $\mathfrak{V}$ такой, что $\overline{R[U_r[x]]} \supset V[y]$ для любого элемента (x, y) множества R, v' — такая точка множества $R[A]$, что $v' \in V[v]$ и точка u множества A удовлетворяет условию $(u, v') \in R$, то $v \in V[v'] \subset \overline{R[U_r[u]]}$, причем диаметр множества $U_r[u]$ не превосходит $2r$.

Обратимся теперь к доказательству леммы. Предположим, что $v \in \overline{R[U_r[x]]}$. Будет показано, что $v \in R[U_{r+e}[x]]$, на чем доказательство и закончится. Положим $A_0 = U_r[x]$ и построим по индукции для каждого целого $n > 0$ подмножество A_n множества X такое, что $v \in \overline{R[A_n]}$, $A_n \cap A_{n+1}$ не пусто и диаметр множества A_n меньше, чем $e \cdot 2^{-n}$. Так как пространство X полно, то в нем существует точка u, произвольная окрестность W которой содержит некоторое A_n (отсюда следует, что $v \in \overline{R[W]}$). Ясно, что $d(x, u) < r + e$. Каковы бы ни были окрестность W точки u и окрестность Z точки v, множество $R[W]$ пересекается с множеством Z. Следовательно, существует такой элемент $(u', v') \in R$, что $u' \in W$ и $v' \in Z$; заключение можно выразить иначе, сказав, что множество $R \cap (W \times Z)$ не пусто. Так как множество R замкнуто, то $(u, v) \in R$. Доказательство проведено полностью.

Пусть теперь f — равномерно открытое непрерывное отображение, X — полное псевдометризуемое пространство, Y — хаусдорфово равномерное пространство и Y^* — хаусдорфово пополнение пространства Y. Тогда f (график отображения f) является замкнутым подмножеством произведения $X \times Y^*$ в силу непрерывности f. Так как отображение f: $X \to Y$ равномерно открыто, то выполняется условие предыдущей леммы. Применяя ее, заключаем, что отображение $f: X \to Y^*$ равномерно открыто. Наконец, так как $f[X] \supset V[f[X]]$ для некоторого V из $\mathfrak{V}$, то множество $f[X]$ непременно должно быть замкнуто (и открыто) в пространстве Y^*. Значит, $f[X]$ — полное пространство.

37. Следствие. *Пусть f — непрерывное равномерно открытое отображение полного псевдометризуемого пространства в хаусдорфово равномерное пространство. Тогда значения отображения f образуют полное подпространство.*

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на замкнутые отношения

Пусть X и Y — топологические пространства, R — замкнутое подмножество произведения $X\times Y$. Если A — бикомпактное подмножество пространства X, то $R[A]$ — замкнутое подмножество пространства Y. (Если $y\notin R[A]$, то $A\times\{y\}$ содержится в открытом множестве $(X\times Y)\setminus R$. Теперь можно применить теорему 5.12.)

Б. Упражнение на произведение двух равномерных пространств

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства; для каждого U из $\mathfrak{U}$ и каждого V из $\mathfrak{V}$ положим $W(U, V)=\{((x, y), (u, v)) : (x, u)\in U$ *и* $(y, v)\in V\}$.

(а) Семейство всех множеств вида $W(U, V)$ образует базу равномерности произведения на $X\times Y$.

(б) Пусть R — любое подмножество произведения $X\times Y$. Тогда $W(U, V)[R]=V\circ R\circ U^{-1}=\bigcup\{U[x]\times V[y] : (x, y)\in R\}$.

(в) Замыкание подмножества R произведения $X\times Y$ есть $\bigcap\{V\circ R\circ U^{-1} : U\in\mathfrak{U}$ *и* $V\in\mathfrak{V}\}$.

В. Дискретное неметризуемое равномерное пространство

Следует иметь в виду, что равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ может быть не метризуемо, в то время как топология, порожденная $\mathfrak{U}$, метризуема. Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω. Для каждого $a\in\Omega_0$ положим $U_a=\{(x, y) : x=y$ *или* $x\leqslant a$ *и* $y\leqslant a\}$. Семейство всех множеств вида U_a является базой некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на) Ω_a (заметим, что $U_a=U_a\circ U_a=U_a^{-1}$). Этой равномерности соответствует дискретная, а значит, метризуемая топология, хотя равномерное пространство $(\Omega_0, \mathfrak{U})$ и не метризуемо.

Г. Упражнение: равномерные пространства с базой, образующей гнездо

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство. Предположим, что равномерность $\mathfrak{U}$ обладает базой, линейно упорядоченной отношением включения. Тогда либо пространство $(X, \mathfrak{U})$ метризуемо, либо пересечение каждого счетного семейства открытых в X множеств открыто.

Д. Пример: очень неполное пространство

Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω, и $\mathfrak{J}$ — порядковая топология на Ω_0. Существует только одна равномерность на Ω_0, индуцирующая топологию $\mathfrak{J}$, причем пространство Ω_0 не полно относительно этой равномерности. (Пользуясь приемами из задачи 4.Д, покажите, что если U — открытое в произведении $\Omega_0\times\Omega_0$ множество, содержащее диагональ, то существует такой элемент $x\in\Omega_0$, что $(y, z)\in U$ при $y>x$ и $z>x$. Покажите затем, что равномерность, порождающая топологию $\mathfrak{J}$, должна совпадать с равномерностью, индуцированной из бикомпактного пространства $\Omega' = \{x : x \leqslant \Omega\}$.)

Замечание. Указанное свойство было замечено Дьедонне [2]. Досс [1] охарактеризовал топологические пространства, которые, подобно Ω_0, имеют лишь одну равномерность.

Е. Теорема о предбазах для вполне ограниченных пространств

Аналог теоремы 5.6 Александера, характеризующей бикомпактные пространства в терминах предбаз, для равномерных пространств формулируется так. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство, причем для каждого элемента U некоторой предбазы равномерности $\mathfrak{U}$ существует такое конечное покрытие $A_1, \ldots, A_n$ пространства X, что $A_i \times A_i \subset U$ при каждом i. Тогда пространство $(X, \mathfrak{U})$ вполне ограничено.

Следовательно, произведение равномерных пространств вполне ограничено в том и только в том случае, когда каждое координатное пространство вполне ограничено.

Из предшествующего утверждения и теоремы 6.32 можно вывести теорему А. Н. Тихонова о произведении (5.13) для случая, когда все сомножители — вполне регулярные пространства.

Ж. Некоторые экстремальные равномерности

(а) Если $(X, \mathfrak{J})$ — тихоновское пространство, то равномерность, индуцированная на X равномерностью бикомпактного расширения Стоуна — Чеха пространства X, является наименьшей из всех равномерностей, относительно которых равномерно непрерывна каждая непрерывная на X ограниченная вещественная функция.

(б) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — вполне регулярное пространство. Тогда среди равномерностей на X, порождающих топологию $\mathfrak{J}$, существует наибольшая равномерность $\mathfrak{B}$. Эту равномерность можно описать иначе — как наименьшую из тех, которые делают равномерно непрерывным каждое непрерывное отображение пространства $(X, \mathfrak{J})$ в произвольное метрическое, или в произвольное равномерное, пространство. А именно, $V \in \mathfrak{B}$ в том и лишь в том случае, когда множество V является окрестностью диагонали в произведении $X \times X$ и существует такая последовательность $\{V_n, n \in \omega\}$ симметричных окрестностей диагонали, что $V_0 \subset V$ и $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$ прн каждом n из ω.

Замечание. Эти два построения иллюстрируют метод, уже применявшийся раньше. Пусть F — произвольное семейство определенных на множестве X отображений; элемент $f \in F$ отображает пространство X в равномерное пространство Y_f. Тогда существует наименьшая равномерность на X, относительно которой все эти отображения равномерно непрерывны (или, что эквивалентно, равномерно непрерывно естественное отображение пространства X в произведение $\prod \{Y_f : f \in F\}$).

Дальнейшие сведения об экстремальных равномерностях можно почерпнуть из работы Широта [1].

З. Равномерные системы окрестностей

В понятие *равномерной системы окрестностей* на множестве X входят соответствие V и упорядочение $\geqslant$, подчиненные следующим ограничениям:

1) множество $V_a(x)$ содержит точку x и само содержится в множестве X для каждого элемента a множества индексов A и любой точки x из X;

2) множество индексов A направлено отношением $\geqslant$;

3) если $a \geqslant b$, то $V_a(x) \subset V_b(x)$ для всех x;

4) для каждого элемента a множества A существует такой элемент $b \in A$, что $y \in V_a(x)$, если $x \in V_b(y)$;

5) для каждого элемента a множества A существует такой элемент $b \in A$, что $z \in V_a(x)$, если $y \in V_b(x)$ и $z \in V_b(y)$.

(а) Если $(V, \geqslant)$ — равномерная система окрестностей на X, то семейство всех множеств вида $\{(x, y) : y \in V_a(x)\}$, где a — любой элемент из A, образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на множестве X. Эта равномерность называется *равномерностью, соответствующей заданной равномерной системе окрестностей*. Она обладает следующим свойством: для каждого $a \in A$ найдется такое $U \in \mathfrak{U}$, что $U[x] \subset V_a(x)$ при всех $x \in X$, и для каждого U из $\mathfrak{U}$ найдется такой элемент $a \in A$, что $V_a(x) \subset U[x]$ при всех $x \in X$.

(б) Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая равномерность на X. Положим $V_U(x) = U[x]$ для каждого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$ и произвольной точки x множества X. Множество $\mathfrak{U}$ направлено отношением включения $\subset$. Тогда $(V, \subset)$ — равномерная система окрестностей на множестве X; соответствующая ей равномерность совпадает с $\mathfrak{U}$.

(в) Пусть P — комплект псевдометрик равномерности $\mathfrak{U}$, заданной на множестве X, и A — декартово произведение множества P и множества положительных вещественных чисел. Направим множество A, согласившись, что $(q, s) \geqslant (p, r)$ тогда и только тогда, когда $s \leqslant r$ и $q(x, y) \geqslant p(x, y)$ для всех точек x и y множества X. Положим $V_{p,r}(x) = \{y : p(x, y) < r\}$. Тогда $(V, \geqslant)$ — равномерная система окрестностей на X и $\mathfrak{U}$ — соответствующая ей равномерность.

Замечание. После всего сказанного выше очевидно, что в основу концепций равномерной топологии можно было бы положить «снабженные индексами» системы окрестностей; при этом получилась бы теория, эквивалентная теории равномерных пространств.

И. «Отклонения» и метрики

«Отклонением» на множестве X называется неотрицательная вещественная функция e, определенная на множестве $X \times X$ и удовлетворяющая условиям:

1) $e(x, y) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = y$, и

2) для каждого положительного числа s существует такое положительное число r, что если $e(x, y)$ и $e(y, z)$ меньше r, то $e(x, z) < s$.

Для любого отклонения e на X существует такая неотрицательная функция p на множестве $X \times X$, что выполняются условия:

1) $p(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $p(x, y) + p(y, z) \geqslant p(x, z)$ для всех x, y и z из X;

3) для каждого положительного числа s существует такое положительное число r, что если $e(x, y)<r$, то $p(x, y)<s$, и если $p(x, y)<r$, то $e(x, y)<s$.

Если $e(x, y)=e(y, x)$ для всех x и y, то от функции p можно потребовать, чтобы она была метрикой.

Замечание. По существу, это — метризационная теорема Читтендена (см. 6.14). «Метризация» топологических пространств посредством функций, удовлетворяющих всем аксиомам метрики, кроме аксиомы симметрии: «$d(x, y)=d(y, x)$», изучалась Рибейро [3] и Баланцатом [1].

Термин «отклонение» некоторыми авторами употреблялся для обозначения расстояния со значениями в более общих структурах, чем вещественные числа (например, в частично упорядоченном множестве). О подходе к равномерной топологии на этой основе можно узнать из работ Апперта [1], Гомеса [1], Калиша [1], Колме [1], Л. Коэна и Гофмана [1] и Ласаля [1].

К. Системы равномерных покрытий

Пусть Φ — семейство покрытий множества X такое, что:

1) для любых покрытий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из системы Φ найдется покрытие в Φ, вписанное и в $\mathfrak{A}$, и в $\mathfrak{B}$;

2) если $\mathfrak{A}\in\Phi$, то в Φ найдется покрытие, звездно вписанное в $\mathfrak{A}$;

3) если $\mathfrak{A}$ — покрытие множества X и некоторое вписанное в $\mathfrak{A}$ покрытие множества X принадлежит семейству Φ, то и $\mathfrak{A}$ входит в Φ.

Пусть $\mathfrak{A}$ — равномерность на X, базой которой служит семейство множеств вида $\bigcup\{A\times A: A\in\mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ пробегает все Φ. Тогда Φ — семейство всех равномерных покрытий равномерного пространства $(X, \mathfrak{A})$.

Замечание. Описание равномерности в терминах покрытий очень эффективно применялось Тьюки [1]*). Очень рано общая конструкция этого рода была создана П. С. Александровым и Урысоном [1].

Л. Топологически полные метризуемые пространства

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *метрически топологическим полным* тогда и только тогда, когда существует такая метрика d на множестве X, что (X, d) — полное метрическое пространство, топология которого совпадает с $\mathfrak{J}$. Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *абсолютной* G_δ в том и лишь в том случае, когда оно метризуемо и является множеством типа G_δ (пересечением счетного семейства открытых множеств) в каждом метрическом пространстве, в которое оно топологически вкладывается. Теорема П. С. Александрова [1]: топологическое пространство метрически топологически полно в том и только в том случае, когда оно является абсолютной G_δ.

---

*) Позднее широкое исследование равномерных пространств на языке семейств покрытий осуществил Ю. М. Смирнов [5], [6] и др. (*Прим. перев.*)

Доказательство распадается в ряд лемм.

(а) Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, U — его открытое подмножество. Для точек $x \in U$ положим $f(x) = \frac{1}{\operatorname{dist}(x, X \setminus U)}$, и пусть $d^*(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$. Тогда d^* — метрика, (U, d^*) — полное метрическое пространство, причем топологии, порожденные метриками d и d^* на множестве U, совпадают.

(б) Множество типа G_δ в полном метрическом пространстве само гомеоморфно некоторому полному метрическому пространству. (Пусть $U = \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$: рассмотрите естественное отображение пространства U в произведение полных метрических пространств (U_n, d_n^*), где d_n^* строится по d и U_n так, как указано в (а).)

(в) Если всюду плотное подпространство Y хаусдорфова пространства X можно гомеоморфно отобразить на некоторое полное метрическое пространство Z, то Y является множеством типа G_δ в X. (Обозначим через U_n для каждого целого числа $n > 0$ множество всех точек пространства X, обладающих окрестностью, диаметр образа которой меньше $\frac{1}{n}$. Заданный гомеоморфизм f можно непрерывно продолжить до некоторого непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства $\bigcap \{U_n : n \in \omega\}$ в пространство Z; при этом $f^{-1} \circ \bar{f}$ — непременно тождественное отображение.)

М. Топологически полные пространства; униформизуемые пространства

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *топологически полным* тогда и только тогда, когда на X существует такая равномерность $\mathfrak{U}$, что пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и его равномерная топология совпадает с $\mathfrak{J}$.

(а) Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — равномерности на множестве X, причем $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$. Если пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и равномерная топология, порожденная $\mathfrak{U}$, совпадает с равномерной топологией, порожденной $\mathfrak{V}$, то и пространство $(X, \mathfrak{V})$ полно. Следовательно, вполне регулярное пространство топологически полно тогда и только тогда, когда оно полно относительно наибольшей равномерности, совместимой с топологией $\mathfrak{J}$.

(б) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство, F — множество типа F_σ в нем (счетное объединение замкнутых множеств) и $x \in X \setminus F$. Тогда существует непрерывная вещественная функция на X, положительная на F и равная нулю в x. Следовательно, существуют открытое множество V и равномерность $\mathfrak{V}$ на V такие, что $V \supset F, x \notin V$, пространство $(V, \mathfrak{V})$ полно, и топология, порожденная равномерностью $\mathfrak{V}$, совпадает с топологией, индуцированной на V топологией равномерности $\mathfrak{U}$. (Напоминаем про прием, примененный в задаче 6. Л, (а).)

(в) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство и Y — его подмножество, являющееся пересечением некоторого семейства множеств типа F_σ. Тогда Y топологически полно в топологии, индуцированной равномерной топологией пространства $(X, \mathfrak{U})$ (см. 6. Л).

(г) Каждое паракомпактное пространство X топологически полно. (Рассмотрим равномерность, образованную всеми окрестностями диагонали. Пусть некоторая направленность Коши в X не сходится ни к какой точке пространства X. Тогда для каждой точки $x \in X$ она с некоторого момента должна находиться в дополнении к некоторой ее окрестности. Пользуясь тем, что произвольное открытое покрытие паракомпактного пространства однообразно, получаем противоречие.)

Замечание. Проблема топологической полноты изучалась Дьедонне [1]. Он показал, в частности, что каждое метризуемое пространство топологически полно (это следует как из (в), так и из (г) — утверждений, приведенных выше). Широта [2] доказал несколько интересных и глубоких теорем о топологической полноте, идущих в направлении работы Хьюитта [2]. См. также статью Умегаки [1]*).

Вполне регулярное пространство X может не быть паракомпактным и тем не менее удовлетворять следующим двум условиям:

1) семейство всех окрестностей диагонали является равномерностью;

2) X — топологически полное пространство **).

Непаракомпактное пространство, удовлетворяющее условию 1), описано в задаче 6.Д. Из свойства 1) вытекает нормальность. (Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества. Выберем симметричное множество U так, чтобы было $U \circ U \subset (X \setminus A) \times (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \times (X \setminus B)$, и рассмотрим множества $U[A]$ и $U[B]$. Похожим рассуждением можно доказать более сильное свойство нормальности, как показал Г. Коэн в [1].) В то же время произведение несчетного множества экземпляров пространства вещественных чисел полно и не нормально (А. Стоун [1]).

Сформулированное в пункте (в) F_σ-условие подсказано статьей Смирнова [4] о нормальных пространствах.

Н. Рассуждения, связанные с дискретными подпространствами; счетная компактность

(а) Если подмножество A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ не вполне ограничено, то существуют $U \in \mathfrak{U}$ и бесконечное подмножество B множества A такие, что $U[x]$ не пересекается с $U[y]$ для любых двух различных точек x и y множества B. Эквивалентное условие: в комплекте равномерности $\mathfrak{U}$ существует такая псевдометрика d, что $d(x, y) \geqslant 1$ для любых различных точек x и y множества B. (Множества, подобные B, можно было бы назвать равномерно дискретными.)

(б) Подмножество A топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$ называется *относительно счетно компактным* тогда и только тогда,

---

*) Существует иная концепция топологической полноты, развитая Чехом: тихоновское пространство полно, если оно является множеством типа G_δ в некотором содержащем его бикомпакте. Это — тоже обобщение метрической полноты. (*Прим. перев.*)

**) Это доказал Исаак Намиока.

когда каждая последовательность точек множества A обладает предельной точкой в X. Каждое относительно счетно компактное подмножество вполне регулярного пространства $(X, \mathfrak{J})$ вполне ограничено в наибольшей равномерности, совместимой с $\mathfrak{J}$. В топологически полном пространстве $(X, \mathfrak{J})$ подмножество относительно счетно компактно тогда и только тогда, когда его замыкание бикомпактно, а замкнутое подмножество бикомпактно в том и только в том случае, когда оно счетно компактно.

О. *Инвариантные метрики*

Псевдометрика p, заданная на множестве X, называется *инвариантной* относительно некоторого семейства F взаимно однозначных отображений множества X на себя, или просто *F-инвариантной*, тогда и только тогда, когда $p(x, y) = p(f(x), f(y))$ для всех x и y из X и всех f из F.

Элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, заданной на X, называется *F-инвариантным*, если $(x, y) \in U$ эквивалентно $(f(x), f(y)) \in U$, при всех f из F. Тогда семейство всех F-инвариантных псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$, порождает равномерность $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда семейство всех F-инвариантных элементов равномерности $\mathfrak{U}$ образует ее базу (см. 6.12).

З а м е ч а н и е. Это — непосредственное обобщение метризационной теоремы для топологических групп, формулируемой в следующем упражнении.

П. *Топологические группы: равномерности и метризация*

Пусть $(G, \mathfrak{J})$ — топологическая группа. Для каждой окрестности U единицы положим $U_L = \{(x, y) : x^{-1}y \in U\}$ и $U_R = \{(x, y) : xy^{-1} \in U\}$. Рассмотрим следующие равномерности на G: *левую равномерность* $\mathfrak{L}$ — ее базой служит семейство всех множеств U_L, где U — любая окрестность единицы, *правую равномерность* $\mathfrak{R}$, база которой состоит из всех U_R, и *двустороннюю равномерность* $\mathfrak{U}$, предбазой которой является семейство $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$.

(а) Топология $\mathfrak{J}$ порождается любой из равномерностей $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$.

(б) Равномерность $\mathfrak{L}$ (соответственно $\mathfrak{R}$) порождается семейством всех левоинвариантных (правоинвариантных) псевдометрик, непрерывных на $G \times G$ (см. 6. О).

(в) Пусть I — семейство всех окрестностей единицы группы G, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Семейство I является базой системы окрестностей элемента e тогда и только тогда, когда совокупность всех псевдометрик, лево- и правоинвариантных одновременно, а также непрерывных на $G \times G$, порождает равномерность, топология которой совпадает с $\mathfrak{J}$. (Если U — инвариантная окрестность единицы e, то множество $U_L = U_R$ инвариантно относительно левых и правых переносов одновременно. Если псевдометрика p лево- и правоинвариантна, то $p(e, y) = p(x^{-1}ex, x^{-1}yx)$.)

(г) Пусть G — множество всех вещественных функций вида $g(x) = ax + b$, где $a \neq 0$. Оно образует группу по отношению к операции композиции. Группу G можно топологизовать, согласившись, что g лежит близко к единице тогда и только тогда, когда a близко к единице, а $|b|$ близко к нулю. Для этой группы $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{R}$; для нее не существует двусторонне инвариантной метрики. (То, что $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{R}$, устанавливается непосредственным наблюдением определяющих баз. Чтобы убедиться, что не существует инвариантной метрики, покажите, что при каждом g и $a \neq 1$ существует $f \in G$, для которого свободный член функции $f^{-1} \circ g \circ f$ как угодно велик.)

Замечание. Пользуясь изложенными выше соображениями, можно доказать, что лево- и правоинвариантные метрики на G существуют в том и только в том случае, когда у системы окрестностей единицы e есть счетная база (Биркгоф [1] и Какутани [1]). Специальная теорема о двусторонне инвариантной метрике принадлежит Кли [1].

Следует отметить, что метризуемость топологической группы двусторонне инвариантной метрикой является очень сильным условием. В частности, на каждой локально бикомпактной группе с этим свойством существует мера Хаара, инвариантная относительно левых и правых переносов *).

Р. Почти открытые подмножества топологической группы

Говорят, что подмножество A топологического пространства X является *почти открытым* в X, или что оно удовлетворяет *условию Бэра*, тогда и только тогда, когда существует такое худое множество B, что симметрическая разность $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ открыта.

(а) Множество A почти открыто в X в том и лишь в том случае, когда существуют худые множества B и C, для которых множество $(A \setminus B) \cup C$ открыто. Счетные объединения почти открытых множеств и дополнения до почти открытых множеств почти открыты. Каждое борелевское множество почти открыто. (Семейство борелевских множеств является наименьшим семейством, содержащим все открытые множества и замкнутым относительно перехода к дополнениям и счетным объединениям **).)

(б) Теорема Банаха — Куратовского — Петтиса. Если множество A содержит нехудое почти открытое подмножество топологической группы X, то AA^{-1} — окрестность единичного элемента (Если множество A нехудое, то и все X нехудое. Так как X — топологическая группа, то каждое непустое открытое подмножество пространства X тоже является нехудым. Для каждого почти открытого подмножества B пространства X обозначим через B^* объединение всех открытых множеств U, для которых $U \cap (X \setminus B)$ — худое множество. Тогда $(xB)^* = xB^*$ и $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$, если C — тоже почти открытое множество. Значит, $xA^* \cap A^* = (xA \cap A)^*$ и,

---

*) М. И. Граевым (УМН 5, № 2 (36) (1950), 3—56) разобран простой пример локально бикомпактной группы со счетной базой, на которой нет двусторонне инвариантной непрерывной метрики. (*Прим. перев.*)

**) Последнее условие означает, что дополнение к множеству принадлежит семейству и объединение любого счетного множества элементов семейства снова является его элементом. (*Прим. перев.*)

если $xA^*\cap A^*$ не пусто, то и $xA\cap A$ не пусто. Тогда $A^*(A^*)^{-1}=\{x : xA^*\cap A^*$ *не пусто*$\}\subset\{x : xA\cap A$ *не пусто*$\}=AA^{-1}$.)

(в) Почти открытая подгруппа нехудой топологической группы X либо является худым множеством в X, либо открыта и замкнута в X.

(г) Требование почти открытости в формулировке утверждения (в) нельзя опустить. Существует подгруппа Y группы вещественных чисел X, для которой фактор-группа X/Y бесконечна и счетна. Так как для каждого $Z\in X/Y$ имеется гомеоморфизм пространства X на себя, отображающий множество Y на множество Z, то множество Y нехудое в X. (Пусть B — базис Гамеля пространства X относительно рациональных чисел, C — счетное бесконечное подмножество множества B и Y — множество всех конечных линейных комбинаций элементов из $B\setminus C$.)

Замечание. Историческую справку и ссылки, относящиеся к теореме (б), можно найти в статье Петтиса [1]. Конструкция, описанная в (г), проходит не только для вещественных чисел, но и в гораздо более широких предположениях. Основная идея принадлежит Хаусдорфу. Самые сильные результаты этого направления изложены в работе Петтиса [1]; в последней также сообщается история и даются дальнейшие ссылки.

C. Пополнение топологических групп

Пусть $(G;\mathfrak{J})$ — топологическая группа, $\mathfrak{L}$ — ее левая равномерность, $\mathfrak{R}$ — ее правая равномерность и $\mathfrak{U}$ — двусторонняя равномерность ($\mathfrak{U}$ — наименьшая равномерность, бóльшая и $\mathfrak{L}$, и $\mathfrak{R}$). Отмечалась, что $\mathfrak{J}$ является равномерной топологией каждой из равномерностей $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{U}$.

(а) Пространство $(G,\mathfrak{L})$ полно тогда и только тогда, когда полно пространство $(G,\mathfrak{R})$. Направленность в G является направленностью Коши относительно равномерности $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши и по отношению к $\mathfrak{R}$, и по отношению к $\mathfrak{L}$. Если $(G,\mathfrak{L})$ полно, то и $(G,\mathfrak{U})$ полно. Равномерное пространство $(G,\mathfrak{L})$ будет полным, если $(G,\mathfrak{U})$ полно и группа G обладает следующим свойством: коль скоро $\{x_n, n\in D\}$ является направленностью Коши по отношению к $\mathfrak{L}$, то и $\{(x_n)^{-1}, n\in D\}$ — тоже направленность Коши по отношению к $\mathfrak{L}$. (Последнее равносильно требованию, чтобы у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ были одни и те же направленности Коши.) Левый перенос на фиксированный элемент группы G $\mathfrak{L}$-равномерно непрерывен, правый перенос $\mathfrak{R}$-равномерно непрерывен, а инверсия (отображение x в x^{-1}) $\mathfrak{U}$-равномерно непрерывна. Умножение (пара (x,y) переходит в элемент xy), как правило, не бывает равномерно непрерывно.

(б) Теорема. *Пусть* $(G,\cdot,\mathfrak{J})$ — *хаусдорфова топологическая группа*, $(H,\mathfrak{V})$ — *хаусдорфово пополнение равномерного пространства* $(G,\mathfrak{U})$ *и* $\mathfrak{S}$ — *равномерная топология равномерности* $\mathfrak{V}$. *В этом случае групповую операцию можно единственным образом продолжить на H так, что* $(H,\cdot,\mathfrak{S})$ *станет топологической группой с двусторонней равномерностью* $\mathfrak{V}$.

(в) Описанная в предыдущей теореме топологическая группа H будет пополнением рассматриваемой группы по правой равномерности, если направленности Коши у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ одни и те же. Но в силу сказанного в пункте (а) последнее условие необходимо для существования «правого пополнения». Оно не всегда выполняется. Например, пусть G — группа всех гомеоморфизмов замкнутого единичного интервала $[0, 1]$ на себя с композицией в качестве групповой операции и с топологией (правоинвариантной) метрики: $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$. В G существует последовательность $\{f_n, n \in \omega\}$, равномерно сходящаяся к не взаимно однозначному отображению отрезка. Тогда последовательность $\{(f_n)^{-1}, n \in \omega\}$ не удовлетворяет условию Коши относительно левой равномерности. Группа G в двусторонней равномерности $\mathfrak{U}$ уже полна, ибо $\mathfrak{U}$ — равномерность, порожденная метрикой $d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$.

(г) Теорема. *Пусть $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — метризуемая топологическая группа, d — метризующая ее правоинвариантная метрика и $d^*(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. В этом случае двусторонняя равномерность $\mathfrak{U}$ совпадает с равномерностью, порожденной метрикой d^*. Равномерное пространство $(G, \mathfrak{U})$ полно тогда и только тогда, когда пространство G полно в какой-нибудь метрике, порождающей топологию $\mathfrak{J}$.* (Равносильное утверждение: тогда и только тогда, когда G является множеством типа G_δ в каждом топологически содержащем его метризуемом пространстве.) *Если у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ одни и те же последовательности Коши, и G полно в некоторой метрике, порождающей топологию $\mathfrak{J}$, то G полно относительно каждой правоинвариантной метрики, совместимой с $\mathfrak{J}$* (см. 6. Л и 6. Р).

Замечание. Есть два важных специальных случая, когда «правое пополнение» достижимо. Если у единичного элемента группы есть вполне ограниченная окрестность или если инверсия (отображение, переводящее x в x^{-1}) равномерно непрерывна на некоторой окрестности единицы, то каждая правая направленность Коши является также и левой направленностью Коши и двустороннее пополнение дает также и правое пополнение. Эти результаты доказываются без большого труда непосредственно; они есть в книгах Бурбаки [1] и Вейля [2]. Пример (в) принадлежит Дьедонне [5], а утверждение (г) принадлежит Кли [1].

Часть утверждения (г) — вывод о полноте на основании метрической топологической полноты — нельзя распространить на неметризуемые группы (см. 7. Н).

Т. Непрерывность и открытость гомоморфизмов; теорема о замкнутом графике

На всем протяжении этого упражнения G и H будут хаусдорфовыми топологическими группами, $\mathfrak{U}$ будет обозначать семейство всех окрестностей единицы в G, $\mathfrak{B}$ будет обозначать соответствующее семейство в H.

(а) Теорема о замкнутом графике. *Пусть G — топологическая группа, H — метризуемая топологическая группа, полная относительно правой равномерности, и f — такой гомоморфизм группы G в группу H, что:*

1) *график отображения f является множеством, замкнутым в $G \times H$, и*

2) *замыкание множества* $f^{-1}[V]$ *принадлежит семейству* $\mathfrak{U}$, *если* $V \in \mathfrak{V}$.

Тогда отображение f *непрерывно.*

Двойственное утверждение: гомоморфизм g группы H в группу G открыт, если:

1*) график отображения g является множеством, замкнутым в $H \times G$,

2*) замыкание множества $g[V]$ принадлежит $\mathfrak{U}$, если $V \in \mathfrak{V}$.

(Доказывается эта теорема применением леммы 6.36 к отношениям f^{-1} и g. Воспользуйтесь правоинвариантной метрикой на H. Пространство H полно относительно любой метризующей его правоинвариантной метрики.)

(б) Если в посылки предшествующей теоремы включить предположения о том, что H — линделёфово пространство (т. е. что каждое открытое покрытие пространства H содержит счетное подпокрытие) и что G — нехудое пространство, то условие 2) будет выполняться автоматически. Если, кроме того, $g[H] = G$, то условие 2*) тоже будет выполняться автоматически. Если G и H — линейные топологические пространства, f и g — линейные отображения, $g[H] = G$ и пространство G — нехудое, то непременно выполняются условия 2) и 2*). (Пусть $V \in \mathfrak{V}$, тогда $\overline{f[G]} \subset Vf[G]$ и, если H — линделёфово пространство, то $f[G]$ покрывается счетным семейством множеств, каждое из которых получается из V посредством переноса на некоторый элемент множества $f[G]$. Замыкания прообразов при f элементов этого семейства попарно гомеоморфны, и их внутренности непременно не пусты, если пространство G нехудое. Следовательно, в множестве $\overline{f^{-1}[V]}$ содержится открытое множество и $\overline{(f^{-1}[V^{-1}V])} \supset \overline{f^{-1}[V^{-1}]f^{-1}[V]} \supset \overline{f^{-1}[V^{-1}]} \cdot \overline{f^{-1}[V]} = (\overline{f^{-1}[V]})^{-1} \cdot \overline{(f^{-1}[V])}$. Отсюда вытекает, что $\overline{f^{-1}[V]} \in \mathfrak{U}$ для каждого V из $\mathfrak{V}$. Аналогичное рассуждение проходит для отображения g. В случае линейного топологического пространства вместо переносов элементов семейства $\mathfrak{V}$ можно прибегнуть к умножению их на числа.)

(в) Теорема о замкнутом графике верна и в случае, когда H — локально бикомпактная топологическая группа: из 1) и 2) вытекает непрерывность; справедливо и двойственное утверждение. (Этот результат проще изложенного выше. Его доказательство базируется на лемме 6. А.)

З а м е ч а н и е. Теорема о замкнутом графике для случая полных нормированных линейных пространств была доказана Б а н а х о м [1], стр. 41 Во всех известных вариантах этой теоремы посылки включают сильные ограничения на H типа счетности или компактности. Пример, опровергающий множество заманчивых гипотез, можно построить следующим образом. Пусть G — какое-нибудь бесконечномерное полное нормированное линейное пространство и H — это же линейное пространство G, наделенное топологией, базой которой в нуле служит семейство всех выпуклых множеств, содержащих отрезки каждого направления *). Тождествен-

*) В терминологии Бурбаки множества, удовлетворяющие последнему условию, называются поглощающими. (*Прим. перев.*)

ное отображение g пространства H на пространство G непрерывно и удовлетворяет условиям 1) и 2), сформулированным выше (см. 6.Х, (а)).

Пространство H обладает многими хорошими свойствами. Например, оно полно, и для него выполняется теорема 6.Х, (а) о равномерной ограниченности. Тем не менее отображение g, очевидно, не открыто.

У. Суммируемость

Пусть f — функция со значениями в полной абелевой хаусдорфовой топологической группе и A — некоторое подмножество ее области определения. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всевозможных конечных подмножеств множества A. Для $F\in\mathfrak{A}$ определим S_F как сумму элементов $f(a)$ по всем a из множества F. Семейство $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\supset$ и $\{S_F, F\in\mathfrak{A}, \supset\}$ — направленность в G. Если эта направленность сходится к некоторому элементу $s\in G$, то говорят, что функция f *суммируема* по A, а элемент s называют суммой f по A; при этом мы пишем $s=\sum\{f(a): a\in A\}=\sum_A f$.

(а) Критерий Коши для суммируемости. Функция f суммируема по A тогда и только тогда, когда для каждой окрестности U элемента 0 группы G существует такое конечное подмножество B множества A, что для любого конечного множества $C\subset A\setminus B$ имеет место $\sum_C f\in U$. Следовательно, функция, суммируемая по A, суммируема по каждому подмножеству множества A.

(б) Если f и g суммируемы по A, то $f+g$ (где $(f+g)(x)=$ $=f(x)+g(x)$) тоже суммируема по A, причем $\sum_A (f+g)=\sum_A f+$ $+\sum_A g$.

(в) Если f определена и суммируема на A и $\mathfrak{B}$ — любое семейство попарно непересекающихся подмножеств множества A, покрывающее A, то $\sum_A f=\sum\left\{\sum\{f(b): b\in B\}: B\in\mathfrak{B}\right\}$. Однако из существования повторной суммы еще нельзя заключить, что f суммируема по A. (См 2.Ж по поводу специального случая, в котором из существования повторной суммы следует суммируемость по A.)

Ф. Равномерно локально бикомпактные пространства

Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерно локально бикомпактным* тогда и только тогда, когда существует такой элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, что множество $U[x]$ бикомпактно для каждой точки x из X. В частности, каждая локально бикомпактная топологическая группа равномерно локально бикомпактна относительно ее левой и правой равномерностей.

(а) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство, U — элемент равномерности $\mathfrak{U}$, $U_0=U$ и $U_n=U\circ U_{n-1}$ при каждом положительном целом n. Тогда для каждого подмножества A пространства X множество $\bigcup\{U_n[A]: n\in\omega\}$ одновременно открыто и замкнуто.

(б) Пусть U — замкнутая окрестность диагонали в произведении $X\times X$, A — бикомпактное подмножество пространства X и множество $U\circ U[x]$ бикомпактно для каждого x из A. Тогда множество $U[A]$ бикомпактно. (Множество $U[A]$ замкнуто в силу 6.А.)

(в) Каждое связное равномерно локально бикомпактное пространство $(X, \mathfrak{U})$ σ-бикомпактно (т. е. X является объединением счетного семейства бикомпактных подмножеств).

(г) Каждое равномерно локально бикомпактное пространство является объединением семейства попарно непересекающихся открытых σ-бикомпактных подпространств. Значит, каждое такое пространство паракомпактно.

(д) Пусть $(X, \mathfrak{T})$ — топологическое пространство. Совместимая с топологией $\mathfrak{T}$ равномерность $\mathfrak{U}$, для которой пространство $(X, \mathfrak{U})$ равномерно локально бикомпактно, существует тогда и только тогда, когда пространство $(X, \mathfrak{T})$ локально бикомпактно и паракомпактно (см. 5.28).

З а м е ч а н и е. Утверждение (а) вытекает, по существу, из рассуждения о цепочках, содержащегося в 5. Ф. Можно отметить, что сформулированные в 5. Ф утверждения о компонентах и связных множествах не распространяются на равномерно локально бикомпактные пространства.

Х. Теорема о равномерной ограниченности

(а) Пусть X — вещественное линейное топологическое пространство, нехудое в себе, и K — некоторое замкнутое выпуклое подмножество пространства X, удовлетворяющее условию $K = -K$ и содержащее отрезок каждого направления (т. е. для каждого x из X существует такое положительное t, что $sx \in K$ при $0 \leqslant s \leqslant t$). Тогда K — окрестность нуля. (Покажите, что K — нехудое множество в X. В силу 6 Р отсюда следует, что $K - K$ является окрестностью нуля; пользуясь выпуклостью, заключаем, что $2K$ является окрестностью нуля.)

(б) Т е о р е м а. Пусть F — некоторое семейство непрерывных линейных отображений нехудого линейного топологического пространства X в нормированное линейное пространство Y. Предположим, что $\sup\{\|f(x)\| : f \in F\}$ конечен для каждой точки x из X. Тогда для некоторой окрестности U нуля в X имеем, что $\sup\{\|f(x)\| : x \in U$ *и* $f \in F\}$ конечен. (Воспользовавшись предыдущим утверждением, покажите, что если S — единичный шар около нуля в Y, то множество $\bigcap\{f^{-1}[S] : f \in F\}$ является окрестностью нуля в X.)

З а м е ч а н и е. Утверждение (б) — классическая теорема Банаха — Штейнгауза. (Б а н а х [1], стр. 80.) Приведенная формулировка, очевидно, может быть еще обобщена. Основную идею обобщения подсказывает утверждение (а). В терминологии следующей главы заключение теоремы (б) можно было бы сформулировать так: семейство F равностепенно непрерывно в нуле.

Ц. Булевы σ-кольца

Булево кольцо $(B, +, \cdot)$ называется *σ-кольцом* тогда и только тогда, когда каждое его счетное подмножество имеет наименьшую верхнюю грань в естественном упорядочении множества B (см. 2. Л). Вот естественные примеры булевых σ-колец:

1) Кольцо $(\mathfrak{L}, \Delta, \bigcap)$, где $\mathfrak{L}$ — семейство всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$, или то же кольцо $\mathfrak{L}$ по модулю семейства $\mathfrak{N}$ всех множеств меры нуль, является σ-кольцом. (Здесь

Δ — симметрическая разность. Семейство $\mathfrak{N}$ является в действительности σ-идеалом в очевидном смысле.)

2) Кольцо $(\mathfrak{A}/\mathfrak{M}, \Delta, \cap)$, где $\mathfrak{A}$ — семейство всех борелевских подмножеств отрезка н $\mathfrak{M}$ — его подсемейство, состоящее из худых борелевских множеств.

В этом упражнении мы хотим установить теорему о представлении типа 2) для произвольного булева σ-кольца. Через $\mathfrak{B}$ всюду будет обозначаться семейство всех бикомпактных открытых подмножеств некоторого локально бикомпактного булева пространства X. Мы ничего не потеряем в общности, если ограничимся кольцами типа $(\mathfrak{B}, \Delta, \cap)$. (См. теорему Стоуна о представлении, 5.У.)

(а) Если $(\mathfrak{B}, \Delta, \cap)$ — булево σ-кольцо, то замыкание объединения счетного множества элементов семейства $\mathfrak{B}$ снова является элементом $\mathfrak{B}$ (т. е. замыкание объединения счетного семейства открытых бикомпактных подмножеств пространства X бикомпактно и открыто).

(б) Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшее объемлющее $\mathfrak{B}$ семейство подмножеств пространства X, содержащее вместе с любым счетным набором своих элементов их объединение и вместе с любыми двумя элементами их симметрическую разность. Обозначим через $\mathfrak{M}$ семейство всех худых подмножеств пространства X. Тогда для каждого элемента A семейства $\mathfrak{A}$ существует единственный элемент B семейства $\mathfrak{B}$ такой, что $A \Delta B \in \mathfrak{M}$ (см. задачу 6. Р, (а)).

(в) Т е о р е м а. *Определенное выше σ-кольцо $\mathfrak{A}$ является прямой суммой кольца $\mathfrak{B}$ и σ-идеала $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ изоморфно булеву σ-кольцу $\mathfrak{A}$ по модулю σ-идеала $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}$.*

З а м е ч а н и е. Результаты этого упражнения принадлежат Л ю м и с у [1]. Пространства, в которых замыкание каждого открытого множества открыто (такие, как стоуновское пространство булева σ-кольца, удовлетворяющее условию Суслина — см. задачу 1.О), иногда называют экстремально несвязными *). Пространство всех вещественных ограниченных борелевских функций на бикомпактных пространствах этого типа разлагается по аналогии с фактом, изложенным в пункте (в), на пространство непрерывных функций и пространство функций, равных нулю вне худого множества. По поводу этого и других результатов см. статью М. С т о у н а [4], а также статью Д и к с м ь е [1].

---

*) Экстремально несвязные тихоновские пространства весьма замечательны. Онн являются проективными объектами в категории тихоновских топологических пространств и их совершенных неприводимых отображений. Если пространство отделимой бикомпактной группы экстремально несвязно, то оно конечно. В экстремально несвязных пространствах не существует нетривиальных сходящихся последовательностей. (Отображение $f: X \to Y$ совершенно и неприводимо, если оно непрерывно, замкнуто, прообразы всех точек бикомпактны и не существует замкнутого в X множества X', отличного от X, для которого $fX' = Y$.) Читайте прежде всего: Г л и с о н [1] и П о н о м а р е в [3], [6], [7]. (*Прим. перев.*)

Глава 7

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ)

Эта глава посвящена функциональным пространствам. Элементами функциональных пространств служат функции, определенные на фиксированном множестве X со значениями в фиксированном топологическом или равномерном пространстве Y. Почти всюду речь идет о функциях, непрерывных относительно некоторой топологии на X. Вкратце, наша цель состоит в том, чтобы определить топологии и равномерности на множествах непрерывных функций и выяснить свойства типа компактности, полноты и непрерывности получившихся пространств.

У большинства результатов этой главы есть прототипы в классической теории функций действительной переменной. Однако теоремы о совместной непрерывности и бикомпактно открытой топологии относятся к недавнему времени. Они по преимуществу принадлежат Фоксу [1]. Дальнейшие сведения о пространствах отображений можно найти в работах Аренса [1], Бурбаки [1], Майерса [1] и Тьюки [1].

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Один тип топологии функциональных пространств нами исследован уже довольно широко. Если F — семейство отображений множества X в топологическое пространство Y, то F содержится в произведении $Y^X = \Pi\{Y : x \in X\}$. Топология $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости (покоординатной сходимости, простой сходимости), или просто *поточечная топология* на F, — это топология, индуцированная топологией произведения. Направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к g тогда и только тогда, когда направленность $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом x из X (см. 3.4). Предбазу топологии $\mathfrak{P}$ образует семейство всех подмножеств вида $\{f : f(x) \in U\}$, где x — произвольная точка из X и U — любое множество, открытое в X. Для каждой точки $x \in X$ определено отображение e_x множества F, называемое вычислением в точке x (или проектированием в x-е координатное пространство), описываемое формулой $e_x(f) = f(x)$ при всех f из F. Вычисление в x непрерывно (и открыто, если $F = Y^*$) по отношению к $\mathfrak{P}$ (теорема 3.2), и $\mathfrak{P}$ — наименьшая топология на F, относительно которой каждое отображение вычисления непрерывно. Отображение g топологического пространства в множество F непрерывно относительно топологии $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда $e_x \circ g$ непрерывно для каждой точки x из X (теорема 3.3). Поточечная топология зависит только от рассматриваемого семейства отображений и от топологии, заданной на множестве Y. Топология на X, если она там и имеется, не влияет на определения и теоремы. Если Y — хаусдорфово или регулярное пространство, то пространство F обладает тем же свойством (3.5 и 4.А), но, вообще говоря, пространство Y может быть локально бикомпактным или удовлетворять первой, либо второй, аксиоме счетности без того, чтобы пространство F обладало теми же свойствами (3.6 и 5.19).

Описание функциональных пространств, бикомпактных в поточечной топологии, немедленно вытекает из теоремы Тихонова (5.13) о произведении бикомпактных пространств. Прежде чем сформулировать результат, в целях удобства согласимся называть семейство F отображений множества X в топологическое пространство Y *поточечно замкнутым* тогда и только тогда, когда F является замкнутым подмножеством пространства произведения Y^X. Если A — подмножество множества X, то $f[A]$ определяется как множество всех точек $f(x)$, где $x \in A$ и $f \in F$. В случае $x \in X$ запись $F[\{x\}]$ сокращается до $F[x]$. Если e_x — вычисление в x, то, очевидно, $e_x[F] = F[x]$.

1. Теорема. *Для того чтобы семейство F отображений множества X в топологическое пространство Y было бикомпактно относительно топологии поточечной сходимости, достаточно, чтобы выполнялись условия:*

(а) *семейство F поточечно замкнуто в Y^X;*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$.*

Если Y — хаусдорфово пространство, то условия (а) *и* (б) *также и необходимы.*

Доказательство. Семейство F содержится не только в Y^X, но и в $\Pi\{\overline{F[x]}: x \in X\}$. Если условие (б) выполняется, то последнее множество является бикомпактным подмножеством произведения Y^X в силу теоремы Тихонова о произведении. Если F поточечно замкнуто, то F бикомпактно. Достаточность условий (а) и (б) тем самым доказана. Если Y — хаусдорфово пространство и множество F бикомпактно в топологии поточечной сходимости, то F замкнуто в силу теоремы 5.7. Множество $F[x]$ бикомпактно и замкнуто, ибо вычисление в произвольной точке x является непрерывным отображением пространства F в хаусдорфово пространство Y.

Предшествующая теорема важнее, чем можно было бы думать на основании одних лишь ее применений к изучению топологии поточечной сходимости. Топология поточечной сходимости во многих отношениях неестественна. Например, пусть X — множество; для каждого его конечного подмножества A обозначим через C_A характеристическую функцию множества A (т. е. $C_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $C_A(x) = 0$ при $x \notin A$). Семейство $\mathfrak{A}$ всех конечных подмножеств множества X направлено отношением $\supset$, следовательно, $\{C_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — некоторая направленность отображений множества X в замкнутый единичный интервал. Эта направленность сходится к отображению e, тождественно равному единице, ибо $\{x\} \in \mathfrak{A}$ для каждой точки x, и если $A \supset \{x\}$, то $C_A(x) = 1$. Ясно, что топология, при которой характеристическая функция конечного множества оказывается лежащей «близко» к единичной характеристической функции, для многих целей неудобна. Интереснее топологии, сходимость относительно которых подчинена более сильным ограничениям, т. е. бо́льшие топологии. Но заметьте: если пространство $(F, \mathfrak{J})$ бикомпактно и топология $\mathfrak{J}$ больше, чем топология $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости, то тождественное отображение i пространства $(F, \mathfrak{J})$ на пространство

$(F, \mathfrak{P})$ непрерывно, и если $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство, то i — непременно гомеоморфизм. Следовательно, если $(F, \mathfrak{J})$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, причем $\mathfrak{J}$ больше, чем топология поточечной сходимости, то $\mathfrak{J}$ совпадает с последней. Это простое замечание указывает стандартный путь доказательства бикомпактности функционального пространства F относительно топологии $\mathfrak{J}$. Сначала показывают, что F бикомпактно относительно топологии поточечной сходимости, и доказывают затем, что из $\mathfrak{P}$-сходимости направленности в F следует ее $\mathfrak{J}$-сходимость. Если Y — хаусдорфово пространство, то мы ничего не потеряем в общности, если ограничимся проверкой этих двух условий, ибо если не выполняется хоть одно из них, то пространство F в топологии $\mathfrak{J}$ не бикомпактно.

Иногда оказывается удобным рассматривать поточечную сходимость на точках из некоторого подмножества области определения функций. Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в топологическое пространство Y и A — подмножество множества X. Существует естественное отображение R пространства F в пространство произведения Y^A, получающееся посредством сужения каждого $f \in F$ на множество A, т. е. $R(f) = f|A$ для каждого f из F. Наименьшая топология $\mathfrak{P}_A$ на множестве F, относительно которой отображение R непрерывно, состоит, очевидно, из прообразов открытых подмножеств пространства Y^A при R. Эта топология называется *топологией поточечной сходимости на* A. Предбазу топологии $\mathfrak{P}_A$ образует семейство всех множеств вида $\{f : f(x) \in U\}$, где $x \in A$ и U — множество, открытое в Y. Направленность $\{f_n, n \in D\}$ в F сходится к g относительно топологии $\mathfrak{P}_A$ тогда и только тогда, когда направленность $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом x из A. Отображение R взаимно однозначно в том и лишь в том случае, когда для любых различных элементов f и g семейства F существует такая точка $x \in A$, что $f(x) \neq g(x)$. Если подмножество A множества X удовлетворяет этому условию, то говорят, что оно *различает элементы семейства* F.

2. Теорема. *Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в хаусдорфово пространство Y*

и A — подмножество множества X. Семейство F, наделенное топологией $\mathfrak{P}_A$ поточечной сходимости на A, является хаусдорфовым пространством в том и только в том случае, когда A различает элементы семейства F. Если F бикомпактно в топологии поточечной сходимости на X, а множество A различает элементы семейства F, то топологии $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_A$ совпадают.

Доказательство. Пространство произведения Y^A хаусдорфово. Из определения топологии $\mathfrak{P}_A$ следует, что F хаусдорфово относительно нее в том и только в том случае, когда отображение сужения R взаимно однозначно. Последнее условие эквивалентно тому, что A различает элементы семейства F. Тождественное отображение i пространства $(F, \mathfrak{P})$ на пространство $(F, \mathfrak{P}_A)$ непрерывно всегда, ибо всегда $\mathfrak{P}_A \subset \mathfrak{P}$. Если $(F, \mathfrak{P})$ бикомпактно и $(F, \mathfrak{P}_A)$ — хаусдорфово пространство, то i — гомеоморфизм и $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_A$.

Если пространством значений служит равномерное пространство, то топология поточечной сходимости совпадает с топологией, порожденной равномерностью произведения.

Пусть F — семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Тогда F можно рассматривать как подмножество произведения $\Pi\{Y : x \in X\}$; равномерность, индуцированная на F равномерностью произведения, называется *равномерностью поточечной сходимости* (или равномерностью простой сходимости). Часто полное название будет заменяться термином «$\mathfrak{P}$-равномерность». Свойства этой равномерности нами уже изучены (см., например, теорему 6.25).

Если A — подмножество множества X, то равномерность поточечной сходимости на A, или просто $\mathfrak{P}_A$-равномерность, определяется как наименьшая равномерность, относительно которой отображение сужения R пространства F в семейство всех отображений множества A в пространство Y равномерно непрерывно. Ниже выписан без доказательства ряд простых фактов, связанных с $\mathfrak{P}_A$-равномерностью.

3. Теорема. *Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ и A — подмножество множества X. Тогда рав-*

номерность поточечной сходимости на A обладает следующими свойствами:

(а) *Семейство всех множеств вида* $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V\}$, *где* $V \in \mathfrak{V}$ *и* $x \in A$, *образует предбазу равномерности* $\mathfrak{P}_A$.

(б) *Топология* $\mathfrak{P}_A$*-равномерности совпадает с топологией поточечной сходимости на* A.

(в) *Направленность* $\{f_n, n \in D\}$ *является направленностью Коши в том и только в том случае, когда направленность* $\{f_n(x), n \in D\}$ *является направленностью Коши при каждом* $x \in A$.

(г) *Если пространство* $(Y, \mathfrak{V})$ *полно, а множество* $R[F]$ *замкнуто в* Y^A *относительно топологии поточечной сходимости на* A, *то множество* F, *наделенное* $\mathfrak{P}_A$*-равномерностью, полно.*

БИКОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ И СОВМЕСТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Если на семействе F отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y задана топология, то естественно возникает вопрос, непрерывно ли зависит элемент $f(x)$ от совокупности f и x. Чуть более формальная постановка вопроса такова: при каких топологиях на F будет непрерывным отображение множества $F \times X$, наделенного топологией произведения, в пространство Y, заключающееся в том, что точке (f, x) ставится в соответствие точка $f(x)$? Данный параграф посвящен краткому обсуждению этого вопроса. Оказывается, существует специальная топология на функциональном пространстве, тесно связанная со сформулированной задачей. Мы начнем с определения этой топологии и выяснения некоторых ее элементарных свойств. Весь параграф посвящен топологическим вопросам. Связи с некоторой равномерностью на функциональном пространстве будут установлены позднее. Всюду на протяжении параграфа F будет некоторым семейством отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y.

Удобно следующее обозначение: для каждого подмножества K пространства X и каждого подмножества U

пространства Y определим $W(K, U)$ как множество всех элементов семейства F, отображающих K в U. Таким образом, $W(K, U)=\{f: f[K]\subset U\}$. Семейство всех множеств $W(K, U)$, где K — любое бикомпактное подмножество пространства X и U — произвольное множество, открытое в Y, является предбазой *бикомпактно открытой* топологии $\mathfrak{C}$ на множестве F. Следовательно, семейство всевозможных пересечений конечного числа множеств вида $W(K, U)$, где K и U таковы, как выше, образует базу бикомпактно открытой топологии. Произвольный элемент этой базы имеет вид $\bigcap\{W(K_i, U_i): i=0, 1, \ldots \ldots, n\}$, где каждое K_i — бикомпактное подмножество пространства X, а каждое U_i — открытое подмножество пространства Y. Тот факт, что каждое одноточечное множество бикомпактно, позволяет очень просто сравнить бикомпактно открытую топологию с топологией поточечной сходимости.

4. Теорема. *Бикомпактно открытая топология $\mathfrak{C}$ содержит топологию $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости. Пространство $(F, \mathfrak{C})$ хаусдорфово, если пространство значений Y хаусдорфово, и $(F, \mathfrak{C})$ регулярно, если Y регулярно, а F состоит из непрерывных отображений.*

Доказательство. Для каждой точки $x\in X$ и каждого открытого подмножества U пространства Y множество $W(\{x\}, U)=\{f: f(x)\in U\}$ принадлежит семейству $\mathfrak{C}$, ибо $\{x\}$ — бикомпактное множество. Следовательно, $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{C}$, ибо семейство множеств вида $W(\{x\}, U)$ образует предбазу топологии поточечной сходимости $\mathfrak{P}$. Если Y — хаусдорфово пространство, то и $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство в силу теоремы 3.5; каждые непересекающиеся $\mathfrak{P}$-окрестности U и V элементов семейства F являются также и $\mathfrak{C}$-окрестностями. Следовательно, $(F, \mathfrak{C})$ — хаусдорфово пространство.

Наконец, предположим, что пространство Y регулярно. Следует показать, что каждая окрестность произвольного элемента f семейства F содержит некоторую его замкнутую окрестность. Достаточно доказать, что это выполняется для каждой окрестности, принадлежащей некоторой предбазе топологии $\mathfrak{C}$, ибо произвольная окрестность элемента f содержит пересечение некоторого конечного множества элементов предбазы. Предположим, что $f \in W(K, U)$, где K — бикомпактное множество, а U — открытое множество. Множество $f[K]$ бикомпактно, и так как пространство Y регулярно, то из теоремы 5.10 следует, что существует такая замкнутая окрестность V множества $f[K]$, что $V \subset U$. Конечно, $f \in W(K, V) \subset W(K, U)$. Ясно, что $W(K, V)$ — окрестность элемента f. Остается показать, что множество $W(K, V)$ замкнуто. Но $W(K, V)$ является пересечением множеств $W(\{x\}, V)$ по всем x из K, каждое из которых $\mathfrak{P}$-замкнуто и, значит, $\mathfrak{C}$-замкнуто.

Безнадежно пытаться показать, что если пространство Y нормально или удовлетворяет первой аксиоме счетности, то теми же свойствами обладает пространство $(F, \mathfrak{C})$. В самом деле, когда X — дискретное пространство, бикомпактны лишь конечные множества, и, значит, в этом случае $\mathfrak{C}$ совпадает с топологией поточечной сходимости. Произведение нормальных пространств, равно как и произведение пространств с первой аксиомой счетности, может не обладать названным свойством сомножителей. Значит, и семейство F, наделенное топологией $\mathfrak{C}$, может его не иметь.

Обозначим через P отображение множества $F \times X$ в пространство Y, состоящее в том, что точке (f, x) соответствует точка $f(x)$. Топологии на F соответствует топология произведения на $F \times X$; естественно спросить: когда отображение P непрерывно относительно этой топологии произведения? Топология, заданная на множестве F, называется *совместно непрерывной* тогда и только тогда, когда отображение P пространства $F \times X$ в пространство Y непрерывно. Очень легко сообразить, что топология поточечной сходимости обычно бывает не совместно непрерывной. Дискретная топология совместно непрерывна, ибо если U — открытое подмножество пространства Y, то $P^{-1}[U] = \{(f, x): f(x) \in U\} = \bigcup \{\{f\} \times f^{-1}[U]: f \in F\}$, где справа стоит объединение открытых множеств (мы предполагаем, что F состоит из непрерывных функций). Если некоторая топология на F совместно непрерывна, то и каждая бо́льшая ее топология тоже совместно непрерывна. Возникает естественная задача: найти наименьшую совместно непрерывную топологию, если таковая существует. Оказывается, что обычно наименьшей совместно непрерывной топологии не существует. Однако небольшое ослабление условия совместной непрерывности приводит в точности к бикомпактно открытой топологии. Топология, заданная на семействе F функций, называется *совместно непрерывной на множестве* A тогда и только тогда, когда отображение P, где $P(f, x) = f(x)$, непрерывно на пространстве $F \times A$. (Предостережение: это условие не означает, что отображение P непрерывно в точках множества $F \times A$; наложенное нами ограничение заключается в требовании непрерывности сужения $P | (F \times A)$.) Говорят, что заданная на семействе F топология *совместно непрерывна на бикомпактных множествах*, тогда и только тогда, когда она совместно непрерывна на каждом бикомпактном подмножестве области определения. Каждый элемент f такого семейства F непременно является функцией, непрерывной на каждом бикомпактном подмножестве K пространства X (т. е. $f | K$ непрерывна).

5. Теорема. *Каждая топология, совместно непрерывная на бикомпактных множествах, больше бикомпактно открытой топологии $\mathfrak{C}$. Если пространство X регулярно или хаусдорфово и F состоит из функций, непрерывных на бикомпактных подмножествах пространства X, то топология $\mathfrak{C}$ совместно непрерывна на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Пусть заданная на F топология $\mathfrak{J}$ совместно непрерывна на бикомпактных множествах, U — произвольное открытое подмножество пространства Y, K — бикомпактное подмножество пространства X и P — отображение, описываемое правилом: $P(f, x) = f(x)$. Следует показать, что подмножество $W(K, U)$, где $W(K, U) = \{f : f[K] \subset U\}$, $\mathfrak{J}$-открыто. Множество $V = (F \times K) \cap P^{-1}[U]$ открыто в произведении $F \times K$, ибо топология $\mathfrak{J}$ совместно непрерывна на бикомпактных множествах. Если $f \in W(K, U)$, то $\{f\} \times K \subset V$, и так как множество $\{f\} \times K$ бикомпактно, то существует такая $\mathfrak{J}$-окрестность N элемента f, что $N \times K \subset P^{-1}[U]$ в силу теоремы 5.12. Иными словами, каждый элемент $\mathfrak{J}$-окрестности N элемента f принадлежит множеству $W(K, U)$. Отсюда следует, что $W(K, U)$ $\mathfrak{J}$-открыто, и первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение Пусть K — бикомпактное подмножество пространства X, $x \in K$, U — множество, открытое в Y, и $(f, x) \in P^{-1}[U]$. Тогда, так как f непрерывна на K, то существует такое бикомпактное множество M, являющееся окрестностью точки x в пространстве K, что $f[M] \subset U$ (напоминаем, что пространство X либо хаусдорфово, либо регулярно). Тогда $W(M, U) \times M$ — окрестность элемента (f, x) в произведении $F \times K$, содержащаяся в множестве $P^{-1}[U]$. Совместная непрерывность на множестве K доказана.

Можно заметить, что если пространство X локально бикомпактно, то топология совместно непрерывна на бикомпактных множествах тогда и только тогда, когда она совместно непрерывна. Следовательно, если X — локально бикомпактное регулярное пространство, то бикомпактно открытая топология на семействе непрерывных отображений является наименьшей совместно непрерывной топологией*).

Если топология $\mathfrak{J}$ на семействе F совместно непрерывна на бикомпактных множествах, то $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{C}$ — бикомпактно открытая топология и $\mathfrak{P}$ — топология поточечной сходимости. Если пространство $(F, \mathfrak{J})$ бикомпактно, а пространство значений хаусдорфово, то $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство и, следовательно, $\mathfrak{J} = \mathfrak{C} = \mathfrak{P}$. Этим доказана необходимость одного из условий $\mathfrak{C}$-бикомпактности, сформулированных в следующей теореме. Весьма любопытна сама формулировка результата; она приспособлена для прямого применения при решении одной дальнейшей задачи.

6. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство, либо регулярное, либо хаусдорфово, Y — хаусдорфово пространство и C — семейство всех отображений X в Y, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве пространства X. Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}$ — соответственно бикомпактно открытая топология и топология поточечной сходимости. Тогда подсемейство F семейства C $\mathfrak{C}$-бикомпактно в том и только в том случае, когда:*

(a) *F является множеством, $\mathfrak{C}$-замкнутым в C;*

---

*) Это утверждение верно для произвольных хаусдорфовых k-пространств. (*Прим. перев.*)

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки x из X;*

(в) *топология $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{P}$-замыкании множества F в Y^X совместно непрерывна на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Предположим, что семейство F $\mathfrak{C}$-бикомпактно. Пространство $(C, \mathfrak{C})$ хаусдорфово, ибо пространство Y хаусдорфово; следовательно, F является множеством, $\mathfrak{C}$-замкнутым в C. Вычисление в точке x является $\mathfrak{P}$-непрерывной и тем более $\mathfrak{C}$-непрерывной функцией. Следовательно образ $F(x)$ множества F бикомпактен. Топологии $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}$ на F совпадают, ибо F $\mathfrak{C}$-бикомпактно и $\mathfrak{P}$-хаусдорфово. Следовательно, F $\mathfrak{P}$-замкнуто в Y^X; в силу теоремы 7.5 топология $\mathfrak{C}$ (а значит, и топология $\mathfrak{P}$) на F совместно непрерывна на бикомпактных подмножествах. Этим доказательство необходимости условий (а), (б) и (в) завершено.

Пусть условия (а), (б) и (в) выполняются. Обозначим через $\bar{F}$ $\mathfrak{P}$-замыкание множества F в Y^X. Условие (б) состоит в том, что множество $\overline{F[x]}$ бикомпактно для каждой точки x; так как $\bar{F}$ — замкнутое подмножество $\mathfrak{P}$-бикомпактного множества $\Pi\{\overline{F[x]} : x \in X\}$, то отсюда следует, что семейство $\bar{F}$ $\mathfrak{P}$-бикомпактно. В силу условия (в) топология $\mathfrak{P}$ на $\bar{F}$ совместно непрерывна на бикомпактных подпространствах. Следовательно, каждый элемент семейства $\bar{F}$ непрерывен на каждом бикомпактном множестве, т. е. $\bar{F} \subset C$. Из теоремы 7.5 вытекает, что топология $\mathfrak{P}$ на $\bar{F}$ больше топологии $\mathfrak{C}$; значит, на $\bar{F}$ эти две топологии совпадают. В силу условия (а) семейство F $\mathfrak{C}$-замкнуто в C. Тем более F будет $\mathfrak{C}$- (а значит, и $\mathfrak{P}$-)замкнутым в подпространстве $\bar{F}$ пространства C. Значит, $\bar{F} = F$, и множество F $\mathfrak{C}$-бикомпактно.

7. Замечания. Семейство C всех функций, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве, совпадает с семейством всех непрерывных функций, если пространство локально бикомпактно или удовлетворяет первой аксиоме счетности (см. теорему 7.13 и предшествующее ей обсуждение). Обычно представляет интерес именно семейство всех непрерывных функций. Однако появление класса C вызвано структурой математики (а не капризом автора). Этот класс встретится

также несколько позже при обсуждении вопроса полноты.

Взаимоотношения бикомпактно открытой топологии и совместной непрерывности первым изучал Фокс [1]. Он показал, что бикомпактно открытая топология на семействе непрерывных функций меньше каждой совместно непрерывной топологии и что она сама совместно непрерывна, если отображаемое пространство локально бикомпактно. Доказательство того, что в общем случае не существует наименьшей совместно непрерывной топологии, можно найти в статье Аренса [1].

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Этот параграф посвящен изучению одной равномерности на семействе F отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Она не зависит от топологии на множестве X. Однако один из важных результатов заключается в том, что семейство всех отображений, непрерывных относительно некоторой топологии на X, замкнуто в множестве всех отображений X в Y, наделенном топологией этой равномерности. Иными словами, предел непрерывных функций по равномерной топологии является непрерывной функцией.

Равномерность равномерной сходимости — наибольшая из тех, которые будут рассматриваться, а равномерность поточечной сходимости — наименьшая. Обе эти равномерности можно считать вариантами равномерности, соответствующей равномерной сходимости на элементах некоторого семейства $\mathfrak{A}$ множеств. Эта концепция исследуется вкратце: для каждого семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X строится некоторая равномерность и устанавливаются элементарные свойства последней.

Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Для каждого элемента V равномерности $\mathfrak{V}$ обозначим через $W(V)$ множество*) всех пар (f, g) таких, что

*) Множество $W[V]$ очень просто описывается в терминах обычных обозначений для отношений: $W(V) = \{(f, g) : g \circ f^{-1} \subset V\}$. Это — понятное утверждение: $g \circ f^{-1}$ — в точности множество всех пар $(f(x), g(x))$, где $x \in X$ Ясно также, что $W(V) = \{(f, g) : g \subset V \circ f\}$ и $W(V)[f] = \{g : g \subset V \circ f\} = \{g : g(x) \in V[f(x)]$ *для каждого* x *из* $X\}$.

$(f(x),\ g(x))\in V$ при каждом $x\in X$. Множество $W(V)[f]$ тогда состоит из всех g, для которых $g(x)\in V[f(x)]$ при каждом x из X. Легко видеть, что $W(V^{-1})=(W(V))^{-1}$, $W(U\cap V)=W(U)\cap W(V)$ и $W(U\circ V)\supset W(U)\circ W(V)$ для всех элементов U и V равномерности $\mathfrak{V}$. Следовательно, семейство всех множеств вида $W(V)$, где $V\in\mathfrak{V}$, образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на множестве F в силу теоремы 6.2. Это семейство $\mathfrak{U}$ называется *равномерностью равномерной сходимости*, или просто *р. с.-равномерностью*. Топология, порожденная $\mathfrak{U}$, называется *топологией равномерной сходимости*, или *р. с.-топологией*.

Ясно, что $\mathfrak{U}$ больше равномерности поточечной сходимости. В самом деле, пусть y — произвольная точка множества X и $V\in\mathfrak{V}$. Тогда $\{(f,\ g):\ (f(x),\ g(x))\in V$ *для всех* $x\in X\}\subset\{(f,g):(f(y),\ g(y))\in V\}$ и, значит, каждый элемент определяющей предбазы равномерности $\mathfrak{U}$ является подмножеством некоторого элемента определяющей предбазы поточечной равномерности. Отсюда вытекает, что р. с.-топология больше*) топологии поточечной сходимости. Легко усмотреть также, что из равномерной сходимости вытекает поточечная сходимость, ибо направленность $\{f_n,\ n\in D\}$ в F сходится к g относительно р. с.-топологии тогда и только тогда, когда она с некоторого момента находится в множестве $W(V)[g]$ для каждого V из $\mathfrak{V}$. А последнее условие эквивалентно существованию такого элемента $m\in D$, что при $n\geqslant m$ будет $f_n(x)\in V[g(x)]$ для всех x из X. В следующей теореме перечисляются другие элементарные свойства равномерности $\mathfrak{U}$.

8. Теорема. *Пусть F — семейство всех отображений множества X в равномерное пространство $(Y,\ \mathfrak{V})$ и $\mathfrak{U}$ — равномерность равномерной сходимости. Тогда:*

(a) *Равномерность $\mathfrak{U}$ порождается семейством всех псевдометрик вида $d^*(f,\ g)=\sup\{d(f(x),\ g(x)):\ x\in X\}$, где d — произвольная ограниченная псевдометрика из комплекта равномерного пространства $(Y,\mathfrak{V})$.*

---

*) Напоминаем, что термин «больше» в подобном контексте всегда следует понимать как «больше или совпадает». (*Прим. перев.*)

(б) *Направленность* $\{f_n, n \in D\}$ *в* F *сходится равномерно к* g *в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши относительно* $\mathfrak{U}$ *и* $\{f_n(x), n \in D\}$ *сходится к* $g(x)$ *при каждом* x *из* X.

(в) *Если равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{V})$ *полно, то полно и равномерное пространство* $(F, \mathfrak{U})$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) заметим, что семейство всех множеств вида $\{(y, z): d(y, z) \leqslant r\}$, где $r > 0$ и d — любая ограниченная псевдометрика из комплекта равномерности $\mathfrak{V}$, образует базу равномерности $\mathfrak{V}$. Это так, ибо если e — произвольная псевдометрика на Y, то псевдометрика $d = \min[1, e]$ ограничена и порождает ту же равномерность, что и e. Но $\{(f, g): d^*(f, g) \leqslant r\} = \{(f, g): d(f(x), g(x)) \leqslant r$ *при каждом* x *из* $X\} = W(\{(y, z): d(y, z) \leqslant r\})$, где W — соответствие, участвовавшее выше в определении р. с.-равномерности. Отсюда следует, что d^* принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$ и что псевдометрики вида d^* порождают этот комплект.

Половина утверждения (б) очевидна; надо только показать, что если направленность Коши $\{f_n, n \in D\}$ поточечно сходится к g, то она равномерно сходится к g. Пусть V — произвольный замкнутый симметричный элемент равномерности $\mathfrak{V}$. Выберем $m \in D$ так, чтобы при $n \geqslant m$ и $p \geqslant m$ было $f_p(x) \in V[f_n(x)]$ для каждой точки x пространства X. Такой выбор возможен, ибо предполагается, что рассматриваемая направленность является направленностью Коши относительно $\mathfrak{U}$. Так как множество $V[f_n(x)]$ замкнуто и направленность $f_p(x)$ сходится к $g(x)$, то $g(x) \in V[f_n(x)]$ и, значит, $f_n(x) \in V[g(x)]$ при каждом $n \geqslant m$ и любом x из X. Этим утверждение (б) доказано. Предложение (в) немедленно следует из (б) в силу того замечания, что произведение полных пространств полно.

Следующей теоремой выясняются принципиальные свойства равномерности $\mathfrak{U}$ в случае семейства непрерывных отображений.

9. Теорема. *Пусть* F — *семейство всех непрерывных отображений топологического пространства* X *в равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{V})$ *и* $\mathfrak{U}$ — *равномерность равномерной сходимости. Тогда:*

(а) *Семейство F замкнуто в пространстве всех отображений множества X в Y и, значит, если $(Y, \mathfrak{V})$ полно, то и $(F, \mathfrak{U})$ полно.*

(б) *Топология равномерной сходимости совместно непрерывна.*

Доказательство. Предложение (а) будет доказано, если мы установим, что множество всех разрывных отображений образует открытое множество в пространстве G всех отображений множества X в $(Y, \mathfrak{U})$. Если функция f разрывна в точке $x \in X$, то существует такой элемент $V \in \mathfrak{V}$, что множество $f^{-1}[V[f(x)]]$ не является окрестностью точки x. Возьмем такой симметричный элемент W равномерности $\mathfrak{V}$, что $W \circ W \circ W \subset V$. Мы докажем, что если функция g удовлетворяет условию $(g(y), f(y)) \in W$ при каждом y, то множество $g^{-1}[W[g(x)]]$ не является окрестностью точки x, и, значит, функция g в этом случае разрывна. Отсюда будет следовать, что множество $G \setminus F$ открыто в топологии равномерной сходимости. Если $(g(y), f(y)) \in W$ при каждом y, то $g \subset W \circ f$ и $g^{-1} \subset f^{-1} \circ W^{-1} = f^{-1} \circ W$ и, следовательно, $g^{-1} \circ W \circ g \subset f^{-1} \circ W \circ W \circ W \circ f \subset f^{-1} \circ V \circ f$. Значит, множество $g^{-1}[W[g(x)]]$ является подмножеством множества $f^{-1}[V[f(x)]]$, и потому не может быть окрестностью точки x.

Остается доказать утверждение (б). Для доказательства непрерывности в точке (f, x) естественного отображения P пространства $F \times X$ в Y нужно только для произвольного $V \in \mathfrak{V}$ проверить, что если $y \in f^{-1}[V[f(x)]]$ и $g(z) \in V[f(z)]$ при всех z, то $g(y) \in V[f(y)] \subset V \circ V[f(x)]$.

При рассмотрении равномерной сходимости на элементах того или иного семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств области определения возникает ряд полезных равномерностей. Точнее, пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ и $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь семейство подмножеств множества X. *Равномерность равномерной сходимости* на элементах семейства $\mathfrak{A}$, сокращенно $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$, имеет предбазой семейство всех множеств вида $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V$ *при всех x из A*$\}$, где $V \in \mathfrak{V}$ и $A \in \mathfrak{A}$. Можно описать эту равномерность иначе. Для каждого A из $\mathfrak{A}$ обозначим через R_A отображение, переводящее f в сужение f на множество A; таким образом, $R_A(f) = f|A$. Семейство F под действием отображения R_A переходит в некоторое семейство отображений множества A в пространство Y. Последнее семейство отображений можно наделить равномерностью равномерной сходимости. Теперь равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ можно описать как наименьшую среди тех, относительно которых все отображения R_A равномерно непрерывны.

Из доказанных выше утверждений о равномерной сходимости вытекают соответствующие результаты для равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. Простые доказательства их опускаются.

10. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство, $(Y, \mathfrak{V})$ — равномерное пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств множества X, покрывающее X, G — семейство всех отображений множества X в пространство Y и F — множество всех отображений, непрерывных на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Тогда:*

(а) *Равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$ больше равномерности поточечной сходимости и меньше равномерности равномерной сходимости на X.*

(б) *Направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к g относительно топологии $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши (по отношению к $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$) и сходится к g поточечно.*

(в) *Если пространство $(Y, \mathfrak{V})$ полно, то и множество G полно относительно равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$.*

(г) *Семейство F замкнуто в G относительно топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$; следовательно, если $(Y, \mathfrak{V})$ полно, то и $(F, \mathfrak{U}|\mathfrak{A})$ полно.*

(д) *Топология, порожденная на F равномерностью $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$, совместно непрерывна на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$.*

Следует подчеркнуть, что семейство всех непрерывных отображений может не быть полным в равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — семейство всех множеств $\{x\}$, где $x \in X$, то $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ — просто равномерность поточечной сходимости, а семейство всех непрерывных отображений обычно не полно по отношению к этой равномерности.

Если семейство $\mathfrak{A}$ таково, что из непрерывности отображения на каждом его элементе вытекает, что это отображение непрерывно на всем X, то из выписанного выше утверждения (г) следует, что семейство всех непрерывных отображений множества X в полное пространство полно относительно равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. В частности, таковой будет ситуация, когда у каждой точки есть окрестность, принадлежащая семейству $\mathfrak{A}$.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НА БИКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этом параграфе соединяются воедино два направления исследований. Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Равномерность *равномерной сходимости на бикомпактных множествах* — это равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — семейство всех бикомпактных подмножеств пространства X. Топологию равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ иногда называют *топологией бикомпактной сходимости*. Будет доказано, что эта топология совпадает с бикомпактно открытой топологией, построенной, исходя из топологии пространства X и топологии, порожденной равномерностью $\mathfrak{V}$. Таким образом, равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит от равномерности $\mathfrak{V}$, заданной на Y, но топология равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит только от топологии равномерности $\mathfrak{V}$. Равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ особенно полезна, когда пространство X обладает «богатым» набором бикомпактных подмножеств. В конце параграфа мы вкратце рассмотрим один такой класс пространств.

11. Теорема. *Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. На F топология равномерной сходимости на бикомпактных подмножествах совпадает с бикомпактно открытой топологией.*

Доказательство. Пусть K — бикомпактное подмножество пространства X, U — множество, открытое в Y, $f \in F$ и $f[K] \subset U$. Множество $f[K]$ бикомпактно; в силу теоремы 6.33 существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $V[f[K]] \subset U$. Ясно поэтому, что если функция g удовлетворяет условию $g(x) \in V[f(x)]$ для каждой точки x множества K, то $g[K] \subset U$. Следовательно, каждое множество вида $\{f : f[K] \subset U\}$ открыто в топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, т. е.

бикомпактно открытая топология меньше топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$.

Докажем обратное утверждение. Мы должны установить, что, каковы бы ни были бикомпактное подмножество K пространства X, элемент V равномерности $\mathfrak{V}$ и непрерывная функция f, найдутся бикомпактные подмножества $K_1, \ldots, K_n$ пространства X и открытые подмножества $U_1, \ldots, U_n$ пространства X такие, что $f[K_i] \subset U_i$, причем если $g[K_i] \subset U_i$ при каждом i, то $g(x) \in V[f(x)]$ при всех x из K. Выберем такой замкнутый симметричный элемент $W \in \mathfrak{V}$, что $W \circ W \circ W \subset V$. Найдем точки $x_1, \ldots, x_n$ в множестве K так, чтобы множества $W[f(x_i)]$ покрывали в совокупности $f[K]$. Положим $K_i = K \cap f^{-1}[W[f(x_i)]]$ и обозначим через U_i внутренность множества $W \circ W[f(x_i)]$. Если $g[K_i] \subset U_i$ при каждом i, то для каждого $x \in K$ существует такое i, что $x \in K_i$. Тогда для этих i и x $g(x) \in W \circ W[f(x_i)]$ и, так как $f(x) \in W[f(x_i)]$, то $(g(x), f(x)) \in W \circ W \circ W \subset V$.

Если равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ полно и $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств топологического пространства X, то семейство всех отображений X в Y, непрерывных на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$, образует в соответствии с теоремой 7.10 $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$- полное пространство. Поэтому для того, чтобы множество всех непрерывных функций было полно в равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$, достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяло следующему условию: функция непрерывна, если она непрерывна на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Пусть f обозначает произвольную функцию, отображающую X в Y, и B — произвольное подмножество Y. Сформулированное выше условие заведомо будет выполняться тогда, когда из замкнутости множества $A \cap f^{-1}[B]$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ вытекает, что замкнуто множество $f^{-1}[B]$. В частности, пространство всех непрерывных функций, отображающих X в Y, полно относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах, если каждое подмножество A пространства X, пересечение которого с любым замкнутым бикомпактным множеством замкнуто, само замкнуто в X. Топологические пространства, удовлетворяющие последнему условию, называются *k-пространствами*. Ясно, что семейство $\mathfrak{C}$ всех замкнутых бикомпактных подмножеств k-пространства полностью определяет его топологию: множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap C \in \mathfrak{C}$ для каждого $C \in \mathfrak{C}$. Переходя к дополнениям, заключаем, что подмножество U k-пространства открыто в том и лишь в том случае, когда $U \cap C$ открыто в C для каждого замкнутого бикомпактного множества C.

Следующая теорема с очевидностью вытекает из определения k-пространства и предшествующих замечаний.

12. Теорема. *Семейство всех непрерывных отображений k-пространства в полное равномерное пространство полно относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах.*

С двумя самыми важными классами пространств, охватываемыми классом k-пространств, знакомит нас

13. Теорема. *Если хаусдорфово пространство X локально бикомпактно или удовлетворяет первой аксиоме счетности, то оно является k-пространством* *).

Доказательство. В обоих случаях доказательство начинается с предположения, что B — не замкнутое подмножество пространства X, и заключается в отыскании замкнутого бикомпактного множества $C \subset X$, для которого $B \cap C$ не замкнуто. Пусть x — предельная точка для множества B, не принадлежащая ему. Если пространство X локально бикомпактно, то у точки x есть бикомпактная окрестность U. Пересечение $B \cap U$ не замкнуто, ибо x — предельная точка для множества $B \cap U$, не принадлежащая ему. Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то существует последовательность $\{y_n, n \in \omega\}$ в $B \setminus \{x\}$, сходящаяся к x. Объединение множества $\{x\}$ и множества всех точек y_n этой последовательности, очевидно, бикомпактно, но его пересечение с множеством B не замкнуто.

---

*) Теория k-пространств была в последнее время продвинута, см. Архангельский [4] В указанной работе доказано, что все пространства, полные в смысле Чеха, и даже все p-пространства (см. Архангельский [5]), являются k-пространствами. Любопытны результаты де Гроота, Нобла, Уоттела. (*Прим. перев.*)

БИКОМПАКТНОСТЬ И РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Это — первый из двух параграфов, посвященных отысканию условий бикомпактности семейства функций относительно бикомпактно открытой топологии. Желаемое заключение топологическое; самые сильные результаты получаются при чисто топологических посылках. Однако для равномерностей рассуждения проще; этот параграф касается отображений в равномерное пространство. В последнем параграфе главы рассматривается чисто топологическая задача.

Пусть F — некоторое семейство отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Семейство F называется *равностепенно непрерывным в точке* x в том и только в том случае, когда для каждого элемента V равномерности $\mathfrak{V}$ существует такая окрестность U точки x, что $f[U] \subset V[f(x)]$ при каждом $f \in F$. Эквивалентное условие: F равностепенно непрерывно в x тогда и только тогда, когда $\bigcap \{f^{-1}[V[f(x)]] : f \in F\}$ является окрестностью точки x при каждом $V \in \mathfrak{V}$. Попросту говоря, семейство F равностепенно непрерывно в точке x в том и лишь в том случае, когда у точки x существует окрестность, образ которой при любом отображении из семейства F мал.

14. Теорема. *Если семейство F равностепенно непрерывно в точке x, то замыкание F по топологии $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости тоже образует равностепенно непрерывное в x семейство.*

Доказательство. Пусть V — замкнутый элемент заданной на Y равномерности. Класс всех отображений f, удовлетворяющих условию $f[U] \subset V[f(x)]$, очевидно, замкнут в топологии $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости, ибо он совпадает с множеством $\bigcap \{\{f : (f(y), f(x)) \in V\} : y \in U\}$. Следовательно, замыкание множества F в топологии поточечной сходимости равностепенно непрерывно.

Семейство F функций называется *равностепенно непрерывным* тогда и только тогда, когда оно равностепенно непрерывно в каждой точке. В силу предшествующей теоремы замыкание равностепенно непрерывного семейства по топологии поточечной сходимости само образует равностепенно непрерывное семейство. Это означает, в частности, что все отображения, принадлежащие упомянутому замыканию, непрерывны. Топология поточечной сходимости по отношению к равностепенно непрерывным семействам обладает и другими достойными внимания свойствами.

15. Теорема. *На каждом равностепенно непрерывном семействе F топология поточечной сходимости совместно непрерывна; поэтому она совпадает на F с топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Докажем, что естественное отображение P пространства $F \times X$ в пространство Y непрерывно в (f, x). Пусть V — произвольный элемент равномерности, заданной на Y, и U — такая окрестность точки x, что $g[U] \subset V[g(x)]$ для всех g из F. Если g принадлежит $\mathfrak{P}$-окрестности $\{h : h(x) \in V[f(x)]\}$ функции f и $y \in U$, то $g(y) \in V[g(x)]$ и $g(x) \in V[f(x)]$. Следовательно, $g(y) \in V \circ V[f(x)]$, откуда и вытекает совместная непрерывность рассматриваемой топологии на F. Каждая совместно непрерывная топология в силу теоремы 7.5 больше бикомпактно открытой топологии, а по теореме 7.11 бикомпактно открытая топология совпадает с топологией, отвечающей равномерной сходимости на бикомпактных множествах.

Из предыдущей теоремы вытекает, что если равностепенно непрерывное семейство функций бикомпактно в топологии поточечной сходимости $\mathfrak{P}$, то оно бикомпактно и в топологии равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Напомним, что теорема Тихонова дает достаточные условия $\mathfrak{P}$-бикомпактности. Рассуждая таким образом, можно установить, что из равностепенной непрерывности семейства функций, подкрепленной некоторыми другими условиями, следует его бикомпактность. Утверждение, идущее в обратном направлении, дано ниже.

16. Теорема. *Если семейство F отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ бикомпактно относительно некоторой совместно непрерывной топологии, то F равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть x — некоторая фиксированная точка пространства X и V — симметричный элемент равномерности $\mathfrak{V}$. Теорема будет доказана, если мы установим, что существует такая окрестность U точки x, что $g[U] \subset V \circ V[g(x)]$ для всех $g \in F$. Поскольку топология, заданная на F, совместно непрерывна, существуют окрестность G произвольного элемента $f \in F$ и окрестность W точки x такие, что образ множества $G \times W$ содержится в множестве $V[f(x)]$. Если $g \in G$ и $w \in W$, то точки $g(x)$ и $g(w)$ принадлежат множеству $V[f(x)]$; значит, $g(w) \in V \circ V[g(x)]$. Это означает, что $g[W] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом g из G. В силу бикомпактности F существуют конечное семейство $G_1, \ldots, G_n$, покрывающее F, и семейство соответствующих окрестностей $W_1, \ldots, W_n$ точки x такие, что $g[W_i] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом g из G_i. Ясно, что если в качестве U взять пересечение окрестностей W_i, то будет $g[U] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом $g \in G$.

Теорема Асколи для локально бикомпактных пространств немедленно вытекает из предыдущих результатов. Она получается заменой в формулировке теоремы 7.6 условия «топология поточечной сходимости $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{P}$-замыкании множества F совместно непрерывна на бикомпактных множествах» на такое: «семейство F равностепенно непрерывно». Первое условие следует из второго (теоремы 7.14 и 7.15), а из бикомпактности в силу теоремы 7.16 вытекает равностепенная непрерывность. (Легко дать и доказательство теоремы Асколи, не зависящее от теоремы 7.6.)

17. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений регулярного локально бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово равномерное пространство, наделенное топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Тогда подсемейство F семейства C бикомпактно в том и только в том случае, когда*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$,*

(в) *семейство F равностепенно непрерывно.*

Есть вариант теоремы Асколи, касающийся отображений произвольного k-пространства (пространства, в котором множество замкнуто, если его пересечение с каждым бикомпактным замкнутым множеством замкнуто). В основе его лежит модификация понятия равностепенной непрерывности. Семейство F отображений называется *равностепенно непрерывным на множестве A* тогда и только тогда, когда семейство всех сужений элементов F на A равностепенно непрерывно. Семейство отображений, равностепенно непрерывное в каждой точке множества A, равностепенно непрерывно на A; однако обратное утверждение неверно. Но каждое равностепенно непрерывное на множестве A семейство отображений равностепенно непрерывно в каждой внутренней точке множества A.

Доказательство следующей теоремы опускается. Она сразу вытекает из теоремы 7.6, результатов этого параграфа и того факта *), что отображение k-пространства, непрерывное на каждом его бикомпактном подмножестве, непрерывно на всем пространстве **).

18. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений k-пространства X, либо хаусдорфова, либо регулярного, в хаусдорфово равномерное пространство Y и пусть C наделено топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Тогда подсемейство F семейства C бикомпактно в том и только в том случае, когда выполняются условия:*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F(x)$ бикомпактно при каждом $x \in X$,*

(в) *F равностепенно непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X.*

---

*) Очевидно, ограничение «X есть k-пространство» можно исключить из посылок теоремы, если семейство C всех непрерывных функций заменить семейством всех функций, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве. Впрочем, этот результат можно вывести из нашей теоремы, применив ее к множеству X с такой топологией $\mathfrak{J}$: множество A $\mathfrak{J}$-замкнуто тогда и только тогда, когда в исходной топологии $A \cap B$ замкнуто для каждого замкнутого бикомпактного множества B.

**) Последнее условие определяет f_k-пространства. Они могут не быть k-пространствами (см. стр. 316). (*Прим. перев.*)

ОДНООБРАЗНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Этот параграф посвящен доказательству разновидности теоремы Асколи для топологических пространств. Ход мысли тот же, что и в предыдущем параграфе, только равномерный вариант равностепенной непрерывности заменяет ее топологическая концепция. Соотношения между этими двумя понятиями кратко обсуждаются в конце параграфа.

Пусть F — некоторое семейство отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y. Концепция однообразной непрерывности интуитивно может быть выражена условием: для каждых $x \in X$, $y \in Y$ и $f \in F$, если $f(x)$ лежит близко к y, то точки, расположенные вблизи от x, переходят под действием f в точки, лежащие вблизи от y. Точная формулировка: семейство F называется *однообразно непрерывным* тогда и только тогда, когда, каковы бы ни были точка $x \in X$, точка $y \in Y$ и окрестность U точки y, найдутся окрестность V точки x и окрестность W точки y такие, что если $f(x) \in W$, то $f[V] \subset U$. Тесная связь введенного понятия с понятием совместной непрерывности подчеркивается следующей формулировкой: F однообразно непрерывно в том и только в том случае, когда для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ и окрестности U точки y существуют окрестность W точки y и окрестность V точки x такие, что образ множества $\{f : f \in F \text{ и } f(x) \in W\} \times V$ при естественном отображении содержится в U. Легко устанавливается главное свойство однообразно непрерывных семейств отображений.

19. Теорема. *Пусть F — некоторое однообразно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в регулярное пространство Y и $\mathfrak{P}$ — топология поточечной сходимости. Тогда $\mathfrak{P}$-замыкание $\bar{F}$ множества F однообразно непрерывно и топология $\mathfrak{P}$ совместно непрерывна на $\bar{F}$.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы с очевидностью вытекает из второй формулировки определения однообразной непрерывности, ибо, когда W открыто в V, множество $\{f : f \in F \text{ и } f(x) \in W\}$ $\mathfrak{P}$-открыто. Покажем, что $\mathfrak{P}$-замыкание множества F однообразно непрерывно. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и U — окрестность точки y. В силу регулярности пространства Y можно предположить, что множество U замкнуто. Выберем окрестность V точки x и открытую окрестность W точки y так, чтобы из $f \in F$ и $f(x) \in W$ следовало, что $f[V] \subset U$. Предположим теперь, что $\{g_n, n \in D\}$ — направленность в F, поточечно сходящаяся к некоторому отображению g, причем $g(x) \in W$. Направленность $\{g_n(x), n \in D\}$ с некоторого момента находится в множестве W. Следовательно, для каждого z из V направленность $\{g_n(z), n \in D\}$ с некоторого момента находится в множестве U и, значит, $g(z) \in U$. Этим доказано, что $g[V] \subset U$.

Достаточные условия бикомпактности однообразно непрерывного семейства отображений более или менее очевидны в силу предшествующего результата и теоремы 7.6. Следующим утверждением устанавливается необходимость условий, участвующих в теореме Асколи.

20. Теорема. *Если семейство F непрерывных отображений топологического пространства X в регулярное хаусдорфово пространство Y бикомпактно в некоторой совместно непрерывной топологии, то F — однообразно непрерывное семейство.*

Доказательство. Тождественное отображение заданного бикомпактного пространства F в множество F, взятое с топологией поточечной сходимости, непрерывно, а так как последняя топология хаусдорфова, то заданная топология совпадает с ней. Значит, на семействе F топология поточечной сходимости совместно непрерывна. Пусть теперь $x \in X$, $y \in Y$ и U — любая окрестность точки y. Обозначим через W какую-нибудь замкнутую окрестность точки y, содержащуюся в U, и заметим, что множество K всех таких $f \in F$, что $f(x) \in W$, замкнуто в топологии поточечной сходимости и потому бикомпактно. Пусть P — естественное отображение, описываемое формулой $P(f, x) = f(x)$. Бикомпактное множество $K \times \{x\}$ содержится в множестве $P^{-1}[U]$. Из непрерывности отображения P, применив теорему 5.12, мы выводим, что существует окрестность V точки x, для которой $K \times V \subset P^{-1}[U]$. Это означает, что если $v \in V$ и $f(x) \in W$, то $f(v) \in U$.

21. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений регулярного локально бикомпактного пространства X в регулярное хаусдорфово пространство Y. Предположим, что C наделено бикомпактно открытой топологией. Тогда подмножество F множества C бикомпактно в том и только в том случае, когда:*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$,*

(в) *семейство F однообразно непрерывно.*

Доказательство. Если множество F бикомпактно относительно бикомпактно открытой топологии, то утверждения (а), (б) и (в) вытекают из теорем 7.6 и 7.20. Если условия (а), (б) и (в) выполняются для F, то в силу теоремы 7.19 замыкание множества F в топологии поточечной сходимости является однообразно непрерывным семейством, на котором топология поточечной сходимости совместно непрерывна. Бикомпактность F следует теперь из теоремы 7.6.

Предшествующую теорему можно распространить на случай k-пространств таким же образом, как это было сделано для теоремы 7.17. Говорят, что семейство F функций *однообразно непрерывно на множестве A*, тогда и только тогда, когда семейство сужений всех элементов F на A однообразно непрерывно. Приняв это определение, мы можем доказать теорему Асколи (7.21) для произвольных k-пространств, заменив в ее формулировке условие (в) на такое: «F однообразно непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X». Прямое доказательство получающегося утверждения опускается.

В заключение данного параграфа мы приведем два предложения, поясняющих соотношение между однообразной непрерывностью и равностепенной непрерывностью.

22. Теорема. *Каждое равностепенно непрерывное семейство отображений топологического пространства в равномерное пространство однообразно непрерывно.*

Доказательство. Пусть F — некоторое равностепенно непрерывное семейство отображений X в Y,

$x \in X$, $y \in Y$, и U — окрестность точки y. Можно считать, что U — шар d-радиуса r с центром в точке y, где d — некоторая псевдометрика из комплекта пространства Y и $r>0$. Так как семейство F равностепенно непрерывно в точке x, у x есть такая окрестность V, что если $z \in V$, то $d(f(x), f(z)) < \frac{r}{2}$ при всех f из F. Следовательно, если $z \in V$ и $f(x)$ лежит в шаре с центром в y d-радиуса $\frac{r}{2}$, то $f(z) \in U$.

В определенном смысле можно сказать, что равностепенная непрерывность получается из однообразной непрерывности при подходящем задании равномерности на пространстве значений. Как можно было ожидать, равностепенная непрерывность вытекает из однообразной непрерывности в присутствии подходящего условия типа бикомпактности.

23. Теорема*). *Пусть F — однообразно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в равномерное пространство Y и для некоторой точки $x \in X$ замыкание множества $F[x]$ бикомпактно. Тогда F равностепенно непрерывно в x.*

Доказательство. Пусть d — некоторая псевдометрика из комплекта равномерного пространства Y и $r>0$. Для каждой точки $y \in \overline{F[x]}$ существуют ее окрестность W и окрестность V точки x такие, что если $f(x) \in W$, то $f[V]$ содержится в шаре d-радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в y. Так как множество $\overline{F[x]}$ бикомпактно, то существуют конечное семейство окрестностей W_i точек y_i множества $\overline{F[x]}$ и семейство соответствующих окрестностей V_i точки x, где $i=1, \ldots, n$, такие, что W_i в совокупности покрывают $\overline{F[x]}$, и если $f(x) \in W_i$, то $f[V_i]$ содержится в шаре d-радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в y_i. Следовательно, если $z \in T = \bigcap \{V_i : i=0, 1, \ldots, n\}$ и $f \in F$, то $f(x)$ лежит в некотором W_i, и так как $f(T)$ — подмножество некоторого

*) Теорема перестает быть верной, если условие «замыкание множества $F[x]$ бикомпактно» заменить на такое: «множество $F[x]$ вполне ограничено».

шара d-радиуса $\frac{r}{2}$, $d(f(x), f(y))<r$ при каждом $y\in T$. Значит, семейство F равностепенно непрерывно в точке x.

Замечания. Результаты этого параграфа принадлежат А. Р. Морсу и мне. В другой форме теорема Асколи для топологических пространств была получена Гейлом [1].

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на топологию поточечной сходимости

Множество всех непрерывных вещественных функций на тихоновском пространстве X плотно относительно топологии поточечной сходимости в множестве всех вещественных функций, определенных на X.

Б. Упражнение на сходимость функций

Пусть f — непрерывная вещественная функция на замкнутом единичном интервале $[0, 1]$, обращающаяся в нуль на концах его и не равная тождественно нулю. Положим, $g_n(x)=f(x^n)$ при каждом неотрицательном целом n. Последовательность $\{g_n, n\in\omega\}$ сходится поточечно (но не равномерно) к функции h, тождественно равной нулю. Объединение множества всех g_n с $\{h\}$ бикомпактно в топологии поточечной сходимости, но не бикомпактно в топологии равномерной сходимости.

В. Поточечная сходимость на всюду плотном подмножестве

Пусть F — равностепенно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в некоторое равномерное пространство и A — подмножество, плотное в X. Тогда равномерность поточечной сходимости на X совпадает с равномерностью поточечной сходимости на A.

Г. Диагональный процесс и секвенциальная компактность

До теоремы Тихонова о произведении стандартным средством доказательства бикомпактности того или иного семейства отображений служил диагональный процесс; ниже приводятся примеры основанных на нем рассуждений. Напомним, что топологическое пространство называется секвенциально компактным, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства.

(а) Произведение счетного семейства секвенциально компактных топологических пространств секвенциально компактно *). (Пусть

---

*) А. Стоун недавно доказал, что произведение $\aleph_1$ секвенциально компактных пространств счетно компактно (из любого счетного открытого покрытия последнего можно выбрать конечное покрытие), и поставил задачу: верно ли, что произведение любого множества секвенциально компактных пространств счетно компактно? П. Кендеров показал, что ответ положителен, когда произведение — нормальное пространство. (*Прим. перев.*)

$\{Y_m, m \in \omega\}$ — последовательность секвенциально компактных пространств и $\{f_n, n \in \omega\}$ — некоторая последовательность точек в произведении $\Pi\{Y_m : m \in \omega\}$. Выберем в ω бесконечное подмножество A_0 такое, что последовательность $\{f_n(0), n \in A_0\}$ сходится к некоторой точке пространства Y_0, и, рассуждая по индукции, найдем такое бесконечное подмножество A_{k+1} множества A_k, что последовательность $\{f_n(k+1), n \in A_{k+1}\}$ сходится к некоторой точке пространства Y_{k+1}. Пусть N_k — k-й элемент последовательности A_k; тогда $\{f_{N_k}, k \in \omega\}$ — искомая подпоследовательность.)

(б) Пусть Y — секвенциально компактное равномерное пространство, X — сепарабельное топологическое пространство и F — некоторое равностепенно непрерывное семейство отображений X в Y, замкнутое в Y^X относительно топологии поточечной сходимости. Тогда F секвенциально компактно относительно топологии поточечной сходимости (а также и относительно бикомпактно открытой топологии). (Примените 7. В; убедитесь, что у каждой последовательности Коши в Y есть предельная точка.)

Замечание. Несколько очень красивых результатов, касающихся счетной компактности функциональных пространств, получил недавно Гротендик [1]. Результаты Гротендика непосредственно применяются при решении ряда интересных задач о линейных топологических пространствах.

Д. Теорема Дини

Если монотонно возрастающая направленность $\{f_n, n \in D\}$ непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве X сходится поточечно к некоторой непрерывной функции f, то на бикомпактных множествах эта направленность сходится к f равномерно. (Это — типичное рассуждение про бикомпактные множества. Пусть C — какое-нибудь бикомпактное подмножество пространства X и $A_n = \{(x, y) : x \in C$ и $f_n(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Заметим, что пересечение множеств A_n по всем n из D есть попросту график функции $f|C$.)

Е. Непрерывность индуцированного отображения

Пусть X и Y — множества, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — соответственно семейства их подмножеств. Пусть, далее, F — семейство всех отображений множества X в равномерное пространство $(Z, \mathfrak{U})$ и G — семейство всех отображений множества Y в $(Z, \mathfrak{U})$. Пусть T — отображение X в Y; тогда *индуцированное отображение* T^* семейства G в семейство F определяется так. $T^*(g) = g \circ T$ для всех $g \in G$. Если для каждого элемента A семейства $\mathfrak{A}$ множество $T[A]$ содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{B}$, то отображение T^* равномерно непрерывно относительно равномерностей $\mathfrak{U} | \mathfrak{A}$ на F и $\mathfrak{U} | \mathfrak{B}$ на G (отвечающих равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$, соответственно, на элементах семейства $\mathfrak{B}$). В частности, T^* всегда равномерно непрерывно относительно равномерностей равномерной сходимости и T^* равномерно непрерывно по отношению к равномерности поточечной сходимости на F и равномерности $\mathfrak{A} | \mathfrak{B}$ на G, если семейство $\mathfrak{B}$ покрывает Y. Если X и Y — топологические пространства и отображение T непрерывно, то T^* — равномерно непрерывное отображение относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах *).

Замечание. Условия непрерывности других естественно индуцированных отображений изучались Аренсом и Дугунджи [2].

Ж. Равномерная равностепенная непрерывность

Семейство F отображений равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ называется *равномерно равностепенно непрерывным* тогда и только тогда, когда для каждого $V \in \mathfrak{V}$ существует $U \in \mathfrak{U}$ такое, что если $f \in F$ и $(x, y) \in U$, то $(f(x), f(y)) \in V$.

(а) Семейство F равномерно равностепенно непрерывно в том и лишь в том случае, когда оно равномерно совместно непрерывно в том смысле, что естественное отображение множества $F \times X$, наделенного равномерностью произведения, соответствующей равномерности равномерной сходимости на F и равномерности, заданной на X, в равномерное пространство Y равномерно непрерывно.

(б) Замыкание равномерно равностепенно непрерывного семейства в топологии поточечной сходимости равномерно равностепенно непрерывно.

(в) Если X бикомпактно и F равностепенно непрерывно, то F равномерно равностепенно непрерывно.

Замечание. Доказательства предшествующих утверждений не требуют применения никаких новых методов. Подробнее эта проблематика рассмотрена в статье Аренса [1] и в книге Бурбаки [1].

З. Упражнение, касающееся равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$

Пусть X — множество и $\mathfrak{A}$ — некоторое его покрытие, направленное отношением $\supset$ (последнее означает, что для любых A и B из $\mathfrak{A}$ найдется $C \in \mathfrak{A}$ такое, что $C \supset A \cup B$). Пусть, далее, $(Y, \mathfrak{V})$ — некоторое равномерное пространство и F — семейство всех отображений X в Y, наделенное равномерностью $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$ равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$. Наконец, предположим, что S — некоторая направленность в F, причем для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ задана ее поднаправленность $\{S \circ T_A(m), m \in E_A\}$, равномерно сходящаяся на множестве A к некоторому элементу s семейства F. Выпишите точную формулу поднаправленности направленности S, сходящуюся к s по топологии равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$.

И. Непрерывность отображения вычисления

Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в множество Y. Посредством вычисления X отображается в семейство G отображений множества F в множество Y. А именно, вычисление

*) Если отображение $T: X \to Y$ непрерывно и удовлетворяет условию: для каждого бикомпакта $\Phi \subset Y$ существует такой бикомпакт $F \subset X$, что $fF \supset \Phi$ (k-накрывающее отображение), а $(Z, \mathfrak{U})$ — числовая прямая, то T^* является гомеоморфизмом относительно бикомпактно открытых топологий при очень широких предположениях о X и Y. (См. Архангельский [8].) (*Прим. перев.*)

$E(x)$ в точке x множества X определяется правилом: $E(x)(f)=f(x)$ при всех $f\in F$. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства и множество G наделено равномерностью равномерной сходимости на элементах некоторого семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств множества F. Тогда отображение вычисления E множества X в G непрерывно, если каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является равностепенно непрерывным семейством отображений. Отображение вычисления равномерно непрерывно, если каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является равномерно равностепенно непрерывным множеством отображений.

К. Подпространства, произведения и фактор-пространства k-пространств

(а) Существуют тихоновские пространства, не являющиеся k-пространствами. Так как каждое тихоновское пространство можно вложить в некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство, то это означает, что не каждое подпространство k-пространства является k-пространством (см. задачу 2. Д).

(б) Произведение несчетного множества экземпляров вещественной прямой не является k-пространством. (Обозначим через A подмножество произведения, состоящее из всех таких x, что для некоторого целого неотрицательного числа n каждая координата элемента x, за исключением не более n из них, равна n, причем остальные координаты x равны нулю. Множество A не замкнуто, хотя $A\cap C$ бикомпактно для каждого бикомпактного множества C*).)

(в) Пусть X — k-пространство, R — отношение эквивалентности на X, и множество X/R наделено фактор-топологией. Если пространство X/R хаусдорфово, то оно будет k-пространством.

Л. k-расширение топологии

Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — хаусдорфово пространство; *k-расширение топологии* $\mathfrak{J}$ определяется как семейство $\mathfrak{J}_k$ всех таких подмножеств U пространства X, что $U\cap C$ открыто в C, каково бы ни было бикомпактное множество $C\subset X$ (эквивалентное условие: множество A $\mathfrak{J}_k$-замкнуто тогда и только тогда, когда $A\cap C$ $\mathfrak{J}$-бикомпактно для каждого бикомпактного множества $C\subset X$).

(а) Если C — $\mathfrak{J}$-бикомпактное подмножество пространства X, то сужение $\mathfrak{J}$ на C совпадает с сужением $\mathfrak{J}_k$ на C. Таким образом, множество $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда $\mathfrak{J}$-бикомпактно, когда оно $\mathfrak{J}_k$-бикомпактно.

(б) Пространство $(X,\mathfrak{J}_k)$ является k-пространством.

(в) Отображение множества X тогда и только тогда $\mathfrak{J}_k$-непрерывно, когда оно $\mathfrak{J}$-непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X.

(г) Топология $\mathfrak{J}_k$ — наибольшая из тех, которые согласуются с топологией $\mathfrak{J}$ на бикомпактных множествах.

М. Характеристика однообразной непрерывности

Семейство F отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y однообразно непрерывно в том и

---

*) Но наше пространство является f_k-пространством (стр. 308). (*Прим. перев.*)

только в том случае, когда из того, что направленность $\{(f_n, x_n), n \in D\}$ в $F \times X$ удовлетворяет условиям: $\{x_n, n \in D\}$ сходится к x и $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к y, следует, что направленность $\{f_n(x_n), n \in D\}$ сходится к y.

Н. Непрерывная сходимость

Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений пространства X в пространство Y. Говорят, что направленность $\{f_n, n \in D\}$ *непрерывно сходится* к элементу f семейства F, тогда и только тогда, когда для любой направленности $\{x_n, n \in D\}$ в X, сходящейся к x, направленность $\{f_n(x_n), n \in D\}$ сходится к $f(x)$.

(а) Топология $\mathfrak{J}$ на F тогда и только тогда совместно непрерывна, когда из того, что направленность в F $\mathfrak{J}$-сходится к f, непременно следует, что она сходится к f непрерывно.

(б) Если последовательность в F сходится к f относительно бикомпактно открытой топологии, то она сходится к f непрерывно.

(в) Предположим, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности и что в семействе F, наделенном бикомпактно открытой топологией $\mathfrak{C}$, тоже выполняется эта аксиома. Тогда топология $\mathfrak{C}$ совместно непрерывна и последовательность в F $\mathfrak{C}$-сходится к f тогда и только тогда, когда она сходится к f непрерывно.

О. Сопряженное к нормированному линейному пространству

Пусть X — вещественное нормированное линейное пространство и X^* — сопряженное к нему пространство всех непрерывных вещественных линейных функций на X. На X^* определяется норма (а по ней — *топология нормы*) следующим образом: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$. Топология поточечной сходимости на X^* называется w^*-топологией. Подмножество F множества X^* называется *w^*-ограниченным* в том и только в том случае, когда для каждой точки $x \in X$ множество всех $f(x)$, где $f \in F$, ограничено.

(а) Пространство X^* не полно относительно w^*-равномерности, если только не всякая линейная функция на X непрерывна. (См. 3.Ч. Предположите, что существует достаточно непрерывных линейных функционалов, чтобы различить точки пространства X; что это так, вытекает из теоремы Хана — Банаха, Б а н а х [1], стр. 27.)

(б) Т е о р е м а (Алаоглу). *Единичный шар в X^* бикомпактен относительно w^*-топологии. Следовательно, каждое ограниченное по норме w^*-замкнутое подмножество пространства X^* w^*-бикомпактно.* (Единичный шар замкнут в произведении $\Pi\{[-\|x\|, \|x\|] : x \in X\}$.)

(в) Пространство X^* в w^*-топологии паракомпактно и, значит, топологически полно (см 5.Щ и 6.М) *).

(г) Если подмножество F пространства X^* равностепенно непрерывно, то его w^*-замыкание тоже равностепенно непрерывно.

---

*) Любопытно, что X^* — не k-пространство и не полно в смысле Чеха (не типа G_δ в бикомпакте), даже когда X имеет счетную базу. Однако в последнем случае единичный шар в w^*-топологии метризуем. (*Прим. перев.*)

Если F равностепенно непрерывно, то его замыкание w^*-бикомпактно. Если w^*-замыкание множества F w^*-бикомпактно, то F w^*-ограничено. (Заметим, что F равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме.)

(д) Если пространство X нехудое*), в частности, если оно полно, то каждое w^*-ограниченное подмножество F пространства X^* равностепенно непрерывно. (Воспользуйтесь утверждением 6.X, (б) или примените 6.X, (а) к множеству $\{x : |f(x)| \leqslant 1$ *при каждом* $f \in F\}$.)

(е) Предположение «пространство X нехудое» нельзя исключить из посылок утверждения (д). (Рассмотрим пространство X всевозможных вещественных последовательностей, равных нулю всюду, за исключением конечного множества, с нормой $\|x\| = \sum\{|x_n| : n \in \omega\}$. Положим $f_n(x) = nx_n$; последовательность $\{f_n, n \in \omega\}$ сходится к нулю в w^*-топологии.)

Замечание. Главные результаты, изложенные в этой задаче, более или менее классические. Некоторые из них, очевидно, остаются верными при более широких предположениях. Однако эквивалентности, вытекающие из (г) и (д), не имеют места для произвольного полного линейного топологического пространства. В связи с (е) интересно отметить, что w^*-бикомпактное *выпуклое* подмножество сопряженного к произвольному нормированному линейному пространству X всегда равностепенно непрерывно. Доказательство этого факта не вполне тривиально.

П. Теорема Титце о продолжении **)

Пусть X — нормальное топологическое пространство, A — его замкнутое подмножество и f — непрерывное отображение A в замкнутый интервал $[-1, 1]$. Тогда у f есть непрерывное продолжение g, определенное на всем X, со значениями в $[-1, 1]$***). (*Воспроизводим схему доказательства Урысона* ****). Пусть $C = \{x : f(x) \leqslant -1/3\}$

*) Заметим, что пространство X^* непременно худое, если X бесконечномерно. (*Прим. перев.*)

**) История этой теоремы такова. Для плоскости X она была доказана Лебегом в начале текущего столетия, а для случая, когда X есть n-мерное евклидово пространство, — немного позже Брауэром. Титце обобщил теорему на случай любого метрического пространства. Урысон впервые доказал ее для любого нормального пространства, и это обобщение, очевидно, является окончательным (если теорема верна для пространства X, то X нормально). Теорему естественно называть теоремой Лебега — Урысона или Брауэра — Урысона, но никак не теоремой Титце. (*Прим. перев.*)

***) Эта теорема помещена именно здесь потому, что ее доказательство опирается на то обстоятельство, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений является непрерывным отображением. Честно говоря, следует признаться, что в предшествующих главах есть еще три задачи, в которых этим фактом надо пользоваться.

****) Выделенная курсивом фраза добавлена мной. (*Прим. перев.*)

и $D=\{x : f(x) \geqslant {}^1/_3\}$. В силу леммы Урысона существует непрерывное отображение f_1 пространства X в отрезок $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, равное $-\frac{1}{3}$ всюду на C и $+\frac{1}{3}$ всюду на D. Очевидно, $|f(x)-f_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}$ при всех x из A. Ясно, что проведенное рассуждение можно повторить для функции $f-f_1$.)

Замечание. Дугунджи [1], Даукер [3] и Ханнер [1] доказали интересные обобщения теоремы о продолжении.

P. Лемма о плотности для линейных подпространств пространства $C(X)$

Пусть X — топологическое пространство, $C(X)$ — пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на нем, наделенное топологией равномерной сходимости (она индуцируется следующей нормой на $C(X)$: $\|f\|=\sup\{|f(x)| : x \in X\}$). Говорят, что подмножество L пространства $C(X)$ имеет *свойство двух множеств*, тогда и только тогда, когда, каковы бы ни были замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X и замкнутый интервал $[a, b]$, существует отображение $f\in L$, переводящее X в $[a, b]$, множество A в точку a и множество B в точку b. Каждое линейное подпространство пространства $C(X)$, обладающее свойством двух множеств, плотно в $C(X)$. (Пусть g — любой элемент пространства $C(X)$. Предположим, что $\operatorname{dist}(g, L)>0$. Выберем h в L так, чтобы $\operatorname{dist}(g, L)$ приблизительно равнялось $\|g-h\|$. Положим $k=g-h$, тогда $\operatorname{dist}(k, L)=\operatorname{dist}(g, L)$, а последнее равно приблизительно $\|k\|$. Покажите, что существует такой элемент $f\in L$, что $\|k-f\|\leqslant\frac{2\|k\|}{3}$.)

C. Лемма о квадратном корне для банаховых алгебр)*

Вещественная (или комплексная) *банахова алгебра* — это алгебра A над вещественными (комплексными) числами вместе с нормой, относительно которой она является полным нормированным линейным пространством, причем предполагается, что умножение удовлетворяет условию $\|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$. Пользуясь понятием нормы оператора, банахову алгебру A можно описать как банахово пространство с ассоциативным умножением, удовлетворяющим условию: умножение слева на фиксированный элемент $x\in A$ является линейным оператором, норма которого не превосходит $\|x\|$. В дальнейшем всюду A обозначает некоторую фиксированную (вещественную или комплексную) банахову алгебру.

Отображение f множества D в некоторое нормированное линейное пространство называется *абсолютно суммируемым* тогда и только тогда, когда существует $\sum\{\|f(n)\| : n\in D\}$.

---

*) Эта задача подготавливает нас к теореме Вейерштрасса — Стоуна. Однако формулируемая лемма играет определенную роль и в более общих предположениях; поэтому она устанавливается для произвольных банаховых алгебр.

(а) Каждое абсолютно суммируемое отображение в A суммируемо. Если последовательности $\{x_n, n \in \omega\}$ и $\{y_m, m \in \omega\}$ абсолютно суммируемы, то и последовательность $\{x_n y_m, (m, n) \in \omega \times \omega\}$ абсолютно суммируема, причем $\sum \{x_n : n \in \omega\} \sum \{y_m : m \in \omega\} = \sum \{x_n y_m : (m, n) \in \omega \times \omega\}$. (Этот результат хорош тем, что последнюю сумму можно вычислять, группируя слагаемые более или менее произвольно. См. 6. У.)

(б) Пусть a_n — n-й коэффициент разложения в ряд Тейлора функции $(1-t)^{1/2}$ в точке 0. Тогда $a_0 = 1$, a_n отрицателен при положительных n, $\sum \{a_n : n \in \omega\} = 0$ и сумма $\sum \{a_n a_{p-n} : n \in \omega$ *и* $n \leqslant p\}$ равна 1, -1 и 0 при $p=0$, $p=1$ и $p>1$ соответственно. (Можно было бы определить коэффициенты a_n рекурсивно, потребовав, чтобы выполнялось последнее условие. Проверив, что $a_n < 0$ при положительных n, мы замечаем, что частичные суммы $\sum \{a_n t^n : n < p\}$ монотонно убывают с ростом n и ограничены снизу функцией $(1-t)^{1/2}$ при $0 \leqslant t < 1$, а значит, также и при $t=1$.)

(в) Если алгебра обладает единичным элементом u и $\|x-u\| \leqslant 1$, то в алгебре есть элемент y такой, что $y^2 = x$. А именно, в качестве y можно взять $\sum \{a_n (u-x)^n : n \in \omega\}$, где a_n — те же, что и в (б). Мы принимаем здесь, что $x^0 = u$. Элемент y можно представить также в виде $y = \sum \{a_n [(u-x)^n - u] : n \geqslant 1\}$. Итак, y — предел полиномов от x без свободных членов.

Замечание. Очевидно, пользуясь методами, примененными выше, можно получить еще много информации. (Например, если $\|x\| < 1$, то $\sum \{x^n : n \in \omega\}$ — элемент, обратный к $u - x$ *).)

Т. Теорема Вейерштрасса — Стоуна

(а) Пусть X — бикомпактное топологическое пространство и $C(X)$ — алгебра всех непрерывных вещественных функций на X, наделенная нормой: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$. Тогда если подалгебра R алгебры $C(X)$ *обладает свойством двух точек*: для любых различных элементов x и y пространства X и произвольной пары вещественных чисел a и b существует такая функция $f \in R$, что $f(x) = a$ и $f(y) = b$, то множество R плотно в $C(X)$.

В частности, подалгебра R плотна в $C(X)$, если ей принадлежат все постоянные функции и она различает точки (в том смысле, что если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$ для некоторого f из R)

Доказательство распадается в последовательность лемм.

1) Если $f \in R$, то $|f|$ принадлежит замыканию $\overline{R}$ подалгебры R где $|f|(x) = |f(x)|$. (Воспользовавшись утверждением 7. С, извлеките квадратный корень из f^2.)

---

*) В основном теория банаховых алгебр (нормированных колец) создана И. М. Гельфандом. Читайте о ней в книге: М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956. (*Прим. перев.*)

2) Если f и g принадлежат рассматриваемой подалгебре, то функции $\max[f, g]$ и $\min[f, g]$ тоже принадлежат ей. (Здесь $\max[f, g](x) = \max[(f(x), g(x)]$. Заметим, что $\max[a, b] = \frac{1}{2}[(a+b) + |a-b|]$ и $\min[a, b] = \frac{1}{2}[(a+b) - |a-b|]$.)

3) Если подалгебра R обладает свойством двух точек, $f \in C(X)$, $x \in X$ и $e > 0$, то существует такая функция $g \in \bar{R}$, что $g(x) = f(x)$ и $g(y) < f(y) + e$ при всех y из X. (Воспользовавшись бикомпактностью X, возьмите минимум подходящего конечного семейства функций.)

Завершает доказательство теоремы переход к максимуму некоторого конечного семейства функций, подобранных с помощью 3).

(б) Если X — топологическое пространство и семейство $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X наделено топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах, то каждая подалгебра алгебры $C(X)$, обладающая свойством двух точек, плотна в $C(X)$.

Замечание. Это, несомненно, самое полезное из известных свойств алгебры $C(X)$. Соответствующее утверждение о комплексно-значных функциях неверно (рассмотрите, например, функции, непрерывные на круге единичного радиуса, аналитические внутри него). См. статью М. Стоуна [5], в которой дано детальное обсуждение.

У. Строение $C(X)$

На всем протяжении этого упражнения X, Y и Z будут обозначать бикомпактные хаусдорфовы пространства, а $C(X)$, $C(Y)$ и $C(Z)$ будут алгебрами всех непрерывных вещественных функций над X, Y и Z соответственно. *Вещественным гомоморфизмом* алгебры называется любой ее гомоморфизм в алгебру вещественных чисел.

(а) Для каждого непрерывного отображения F пространства X в пространство Y обозначим через F^* индуцированное отображение алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$, описываемое правилом: $F^*(h) = h \circ F$ при всех h из $C(Y)$. Тогда:

1) F^* — гомоморфизм алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$;

2) F отображает X на Y тогда и только тогда, когда F^* является изоморфизмом алгебры $C(Y)$ на некоторую подалгебру алгебры $C(X)$, содержащую единицу;

3) F взаимно однозначно в том и только в том случае, когда F^* отображает $C(Y)$ на $C(X)$;

4) если G — непрерывное отображение пространства Y в Z, то $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$;

5) если F — топологическое отображение *) пространства X на пространство Y, то $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.

(б) *Топология банаховой алгебры $C(X)$ полностью определяется алгебраическими операциями.* Подробнее: $f \geqslant g$ тогда и только тогда, когда $f - g$ является квадратом некоторого элемента из $C(X)$

*) То есть F — гомеоморфизм. (*Прим. перев.*)

и $\|f\| = \inf\{k: -ku \leqslant f \leqslant ku\}$, где u — функция, тождественно равная единице. Для любого вещественного гомоморфизма φ алгебры $C(X)$ имеем $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$, и если φ не равен тождественно нулю, то $\varphi(u) = 1$.

(в) Пусть S — множество всех вещественных гомоморфизмов φ алгебры $C(X)$, для которых $\varphi(u) = 1$, наделенное топологией поточечной сходимости, и E — отображение вычисления X в S (т. е. $E(x)(f) = f(x)$). Тогда E — топологическое отображение пространства X на пространство S. (Покажите, что S бикомпактно, покажите с помощью теоремы Вейерштрасса — Стоуна, что отображение вычисления D пространства $C(X)$ в пространство $C(S)$ является изоморфизмом алгебры $C(X)$ на алгебру $C(S)$, проверьте, что $E^* = D^{-1}$ и воспользуйтесь утверждением (а).)

(г) Пространство X метризуемо в том и только в том случае, когда пространство $C(X)$ сепарабельно. (Этот результат не понадобится в оставшейся части задачи. Он приведен просто для тренировки на применение сказанного в (в).)

(д) Для любого гомоморфизма H алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$, переводящего единицу алгебры $C(Y)$ в единицу алгебры $C(X)$, существует и единственно непрерывное отображение F пространства X в пространство Y, для которого $H = F^*$. (Просто гомоморфизм H индуцирует отображение вещественных гомоморфизмов алгебры $C(X)$ в вещественные гомоморфизмы алгебры $C(Y)$.)

(е) Пусть R — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, причем $u \in R$, F — отображение пространства X в произведение $\Pi\{f[X] : f \in R\}$, определенное формулой $F(x)_f = f(x)$, и Y — пространство значений отображения F. Тогда R является множеством значений индуцированного изоморфизма F^* алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$.

(ж) Пусть I — замкнутый идеал в $C(X)$ и $Z = \{x : f(x) = 0$ *при всех* f *из* $I\}$. Тогда I состоит из всех элементов алгебры $C(X)$, тождественно равных нулю на Z. (Если множество Z пусто, то в I существует элемент, не обращающийся в нуль ни в одной точке пространства X; у этого элемента есть обратный. Рассмотрим подалгебру $C + I$, где C — множество постоянных функций. Из непустоты Z вытекает, что множество $C + I$ замкнуто, теперь можно применить (е).)

Замечания. О строении $C(X)$ известно совсем немного. Дальнейшие сведения и ссылки можно найти в обзоре, написанном на эту тему Майерсом [2]. См. также работу Хьюитта [2] *).

Ф. Бикомпактные расширения групп; почти периодические функции

Естественно пытаться отобразить произвольную топологическую группу в бикомпактную топологическую группу так, чтобы образ был всюду плотен в последней, — на манер вложения тихоновского пространства в его бикомпактное расширение Стоуна — Чеха. Топологического вложения обычно не существует — полная группа замкнута в каждой хаусдорфовой группе, топологически и изоморфно ее

---

*) См. также Гилман и Джерисон [1]. (*Прим. перев.*)

содержащей. Однако можно получить ряд интересных результатов; следующие ниже предложения надо рассматривать как вступление к ним. Развитие темы мотивировано таким наблюдением: если φ — непрерывный гомоморфизм топологической группы G в бикомпактную группу H и g — непрерывная вещественная функция на H, то множество всех левых сдвигов функции $g \circ \varphi$ вполне ограничено (относительно равномерности равномерной сходимости).

Всюду в этой задаче предполагается, что G — некоторая фиксированная топологическая группа. Для каждой ограниченной вещественной функции f на группе G и каждого $x \in G$ определим *левый сдвиг* $L_x(f)$ функции f на элемент x правилом: $L_x(f)(y) = f(x^{-1}y)$. Пространство всех ограниченных вещественных функций метризуется: $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$. *Левая орбита* X_f функции f определяется как замыкание множества всех левых сдвигов функции f в метрической топологии. Функция f называется *почти периодической* слева тогда и только тогда, когда множество X_f бикомпактно.

Обозначим через A множество всех непрерывных почти периодических слева функций на G Тогда для каждого $x \in G$ левый сдвиг L_x отображает A в A. Наделим множество всех отображений пространства A в себя топологией поточечной сходимости и обозначим через $\alpha[G]$ замыкание множества всех левых сдвигов относительно этой топологии.

(а) Лемма. *Пусть (X, d) — бикомпактное метрическое пространство и K — группа (по отношению к операции композиции) всех изометрий пространства (X, d) в себя. Топология (на K) равномерной сходимости на X совпадает с топологией метрики $d^*(R, S) = \sup\{d(R(x), S(x)) : x \in X\}$, а последняя совпадает с топологией поточечной сходимости на X. Группа K в этой топологии является бикомпактной топологической группой.*

(б) Пространство $\alpha[G]$ бикомпактно (заметим, что $\alpha[G] \subset \Pi\{X_f : f \in A\}$).

(в) Каждый элемент из $\alpha[G]$ представляет собой некоторую изометрию, отображающую каждую левую орбиту саму на себя. Естественное отображение топологического пространства группы $\alpha[G]$ в пространство произведения $\Pi\{K_f : f \in A\}$, где K_f — группа всех изометрий пространства X_f, является топологическим изоморфизмом. Следовательно, $\alpha[G]$ — топологическая группа.

(г) Если A наделить топологией поточечной сходимости на G и на $\alpha[G]$ (являющемся подмножеством множества A^A) взять топологию, индуцированную топологией произведения, то получится та же топология, что и выше. Значит, $R_n \to R$ в $\alpha[G]$ тогда и только тогда, когда $R_n(f)(x) \to R(f)(x)$ при всех f из A и всех x из G.

(д) Отображение L группы G в группу $\alpha[G]$, переводящее $x \in G$ в L_x, является непрерывным гомоморфизмом. Наименьшая топология на G, относительно которой L непрерывно, совпадает с наименьшей топологией, относительно которой непрерывны все $f \in A$. ($\alpha[G]$ можно описать также как пополнение группы G, взятой по модулю подгруппы, образованной теми ее элементами, которые не отделяются функциями из A от единицы группы, относительно наименьшей равномерности, при которой все $f \in A$ равномерно непрерывны.)

(е) Пусть g — непрерывная вещественная функция на $\alpha[G]$. Тогда $g \circ L \in A$. Если $f \in A$ и g — функция на $\alpha[G]$, определенная правилом $g(R) = R^{-1}(f)(e)$, то $f = g \circ L$, причем функция g непрерывна. Семейство всех непрерывных вещественных функций на $\alpha[G]$ изометрично (и изоморфно) A.

(ж) Для любого непрерывного гомоморфизма φ группы G в бикомпактную топологическую группу H существует такой непрерывный гомоморфизм θ группы $\alpha[G]$ в H, что $\varphi = \theta \circ L$. (Более общий факт: в случае любой группы H гомоморфизм φ индуцирует естественный гомоморфизм θ группы $\alpha[G]$ в группу $\alpha[H]$ такой, что $\theta \circ L = L \circ \varphi$. См. определение α.)

Из предшествующего с очевидностью вытекает ряд следствий. Например, функция почти периодична слева тогда и только тогда, когда она почти периодична справа (и обратно); класс A является банаховой алгеброй, изоморфной алгебре всех непрерывных функций на бикомпактной группе $\alpha[G]$.

(з) Название «почти периодическая» возникло на основе другого описания класса A. Элемент $x \in G$ называется *левым e-периодом* вещественной функции f в том и лишь в том случае, когда $|f(x^{-1}y) - f(y)| < e$ при всех $y \in G$. Обозначим через A_e множество всех левых e-периодов непрерывной функции f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует гомоморфизм φ группы G в некоторую бикомпактную группу H и непрерывная вещественная функция h на H такие, что $f = h \circ \varphi$.

2) Множество всех левых сдвигов функции f вполне ограничено относительно равномерности равномерной сходимости.

3) Для каждого положительного числа e существует конечное подмножество B множества G такое, что $G = BA_e$.

(Связь между условиями 2) и 3) проясняет такое наблюдение: $|L_x(f)(z) - L_y(f)(z)| < e$ при всех z тогда и только тогда, когда $y^{-1}x$ является левым e-периодом.)

Замечания. Приведенные выше результаты принадлежат в первую очередь А. Вейлю [2]. Эквивалентность утверждений 2) и 3) из (з) — это классическая теорема Бохнера. Люмис в [2] исследует почти периодические функции, показывая сначала, что множество всех почти периодических слева функций на группе удовлетворяет условиям, характеризующим банахову алгебру функций, и затем определяя $\alpha[G]$ как множество всех вещественных гомоморфизмов этой банаховой алгебры.

Предложение (а) подсказывает общую задачу построения на группе гомеоморфизмов топологии, относительно которой эта группа была бы топологической. Результаты, идущие в этом направлении, и ссылки можно найти в работах Аренса [2] и Дьедонне [5].

Д о б а в л е н и е

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Это добавление посвящено элементарной теории множеств. Здесь строятся порядковые и кардинальные числа и доказываются наиболее часто применяемые теоремы. Затем определяются неотрицательные целые числа и как теоремы доказываются постулаты Пеано.

Предполагается, что читатель обладает практическим знанием элементарной логики, но знакомство с формальной логикой для нас несущественно. Однако понимание природы математических систем (в техническом смысле) будет способствовать прояснению и мотивировке всего обсуждения. В замечательной книге Т а р с к о г о [1] такие системы описываются очень прозрачно; книга Тарского особенно рекомендуется в качестве общей основы.

Изложение теории множеств ведется таким образом, чтобы его можно было без труда перевести на полностью формализованный язык *). Чтобы облегчить как формальное, так и неформальное восприятие, вводный материал разбит на два параграфа, второй из них представляет собой, по существу, точную переработку части первого. Его можно опустить, не разорвав изложения.

Принятая система аксиом является разновидностью системы аксиом Сколема и А. Морса; многое в ней исходит от системы аксиом Гильберта — Бернайса — фон

*) То есть чтобы теоремы можно было записать в терминах логических констант, логических переменных и констант системы, а их доказательства получить в терминах правил вывода из аксиом. Конечно, для подобного изложения понадобилась бы некоторая база в формальной логике. Когда мне привелось осуществлять такого рода редакцию данного ниже материала для курса лекций, я пользовался (в основном) метааксиомами логики в изложении **К у а й н а** [1].

Неймана в формулировке Гёделя. Выбор формального подхода, данного ниже, определялся желанием быстро и естественно построить фундамент математики, свободной от наиболее очевидных парадоксов. По этой причине в основу положена не конечная система аксиом, а восемь аксиом и одна схема аксиом *) (последнее означает, что все утверждения некоторого определенного типа принимаются за аксиомы).

Оказалось удобным назвать теоремами многие утверждения предварительного характера. Это привело к переполнению списка теорем, но позволило в то же время опустить многие доказательства и сократить другие. Используемые соглашения в большинстве своем более или менее ясны из вида определений и теорем.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ СХЕМА АКСИОМ

Равенство всегда понимается как логическое тождество: «$1+1=2$» следует воспринимать как утверждение о том, что «$1+1$» и «2» — названия одного и того же объекта. Кроме обычных аксиом равенства, предполагается выполненным без каких-либо ограничений правило подстановки; в частности, заменяя в теореме объект равным ему, мы снова получаем теорему.

Кроме «$=$» и других логических констант, есть две первоначальные (неопределяемые) константы. Первая из них — это «$\in$». Ее следует читать, как «является элементом (чего-то)» или «принадлежит (чему-то)». Вторая константа обозначается довольно странно: «$\{\ldots:\ldots\}$» и читается как «класс всех ... таких, что ...». Это *классификатор*. Замечание об употреблении термина «класс» может прояснить дело. Этот термин не встречается ни в одной аксиоме, ни в одном определении и ни в одной

*) В действительности без точной формулировки принимается также некоторая схема аксиом для определения. Именно, утверждения определенного вида, включающие одну новую константу и являющиеся либо эквивалентностью, либо тождеством, принимаются в качестве определений; с ними затем обращаются как с теоремами. Эта схема аксиом для определения удачна, ибо допускает проверку: определения, согласующиеся с предписанными правилами, не могут привести ни к новым противоречиям, ни к по-настоящему новым результатам, как показано Лесневским.

теореме. Он возникает при основной интерпретации *) наших положений как утверждений о классах (совокупностях, семействах). Таким образом, назначением термина «класс» в предстоящем обсуждении является подсказывать эту интерпретацию.

Маленькие латинские буквы обозначают (логические) переменные. Разница между константой и переменной целиком заключена в правилах подстановки. Например, результат замены переменной в теореме другой переменной, в этой теореме не встречающейся, снова будет теоремой. Для констант это далеко не так.

I. Аксиома объемности **). *Для каждых x и y $x=y$ в том и только в том случае, когда для каждого z $z \in x$ тогда и только тогда, когда $z \in y$.*

Таким образом, два класса совпадают тогда и только тогда, когда каждый элемент любого из них является элементом другого. Часто в формулировках теорем и определений мы будем опускать выражения «для каждого x» или «для каждого y». Если, например, переменной «x» в формулировке не предшествуют выражения «для каждого» или «для некоторого», надо читать это место теоремы или определения как «для каждого x».

Следующим определением дается специальное наименование тем классам, которые сами являются элементами классов. Причины, которыми вызвано это разделение классов на два сорта, объясняются немного позже.

1. Определение. *x является множеством в том и только в том случае, когда для некоторого y будет $x \in y$.*

Следующая задача — описать, как пользоваться классификатором. Первый пропуск в классификаторе надлежит заполнить переменной, а второй — формулой; например, так: $\{x : x \in y\}$. Мы принимаем за аксиому утверждение: $u \in \{x : x \in y\}$ в том и лишь в том случае,

---

*) Допускается, что возможны и другие интерпретации.

**) Можно было бы принять это за определение, покончив тем самым с одной аксиомой и всеми логическими предложениями о равенстве. Это было бы совершенно законно. Однако, поскольку не было бы никакого неограниченного правила подстановки для равенства, мы должны были бы принять такую аксиому: если $x \in z$ и $y=x$, то $y \in z$.

когда u — множество и $u \in y$ *). Более общо, каждое утверждение следующего вида полагается аксиомой: $u \in \{x: \ldots x \ldots\}$ тогда и только тогда, когда u — множество и $\ldots u \ldots$ Здесь предполагается, что «$\ldots x \ldots$» — некоторая формула, и «$\ldots u \ldots$» — формула, получающаяся из последней, если в ней всюду «x» заменить на «u». Таким образом, $u \in \{x: x \in y \text{ и } z \in x\}$ тогда и только тогда, когда u — множество, $u \in y$ и $z \in u$.

Эта схема аксиом точно отражает обычный интуитивно ясный способ построения классов, за исключением требования: «u есть множество». Совершенно очевидно, что это — очень неестественное и интуитивно абсолютно нежелательное требование. Однако если от него отказаться, то можно построить противоречие, отправляясь от одной аксиомы объемности (см. теорему 39 и предшествующее ей обсуждение). Это усложнение, ведущее в свою очередь к большой технической работе, касающейся существования множеств, — плата за избежание очевидных несуразностей. Очень возможно, что менее очевидные несуразности при этом остаются.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ СХЕМА АКСИОМ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Для точной формулировки классификационной схемы аксиом следует условиться, что такое формула. Принято считать, что **):

---

*) Эта и следующая фраза могут внести некоторую путаницу: в первой условие «u есть множество» можно отбросить, ибо в силу определения 1 оно вытекает из второго условия «$u \in y$». Однако этого нельзя сказать про второе утверждение, ибо из «$\ldots u \ldots$» еще не следует, вообще говоря, что u — множество. Именно ко второй фразе следует отнести все комментарии автора. (*Прим. перев.*)

**) Этот напоминающий круг способ выражаться, к сожалению, неизбежен. Согласимся имена писать в кавычках: например, «Бостон» — название Бостона. Тогда если $\mathfrak{A}$ — формула и $\mathfrak{B}$ — формула, то «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» — не формула. Например, если $\mathfrak{A}$ есть «$x=y$» и $\mathfrak{B}$ есть «$y=z$», то «„$x=y$“ $\to$ „$y=z$“» не есть формула. Формула (например, «$x=y$») не должна содержать внутри себя кавычек. Вместо «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» мы желаем рассматривать результат замены «α» на $\mathfrak{A}$ и «β» на $\mathfrak{B}$ в «$\alpha \to \beta$». Всех этих околичностей можно было бы избежать, воспользовавшись соглашением об употреблении «уголков» Куайна.

(а) Результат замены «α» и «β» переменными в любом из следующих соотношений есть формула

$$\alpha=\beta, \quad \alpha\in\beta.$$

(б) Результат замены «α» и «β» переменными, а «A» и «B» — формулами в любом из следующих соотношений есть формула:

если A, то B $\quad A\longleftrightarrow B$ $\quad$ не верно, что A

A и B $\quad$ A или B

для каждого α, A $\quad$ при некотором α, A

$$\beta\in\{\alpha:A\} \quad \{\alpha:A\}\in\beta \quad \{\alpha:A\}\in\{\beta:B\}.$$

Формулы строятся рекурсивно, начиная с первоначальных формул (а) путем применения конструкций, разрешенных (б).

II. Классификационная схема аксиом. *Мы получаем аксиому, если в выписанной в конце формулировке заменить «α» и «β» переменными, «A» — некоторой формулой $\mathfrak{A}$ и «B» — формулой, возникающей из $\mathfrak{A}$, если заменить каждую переменную, подставленную вместо α, переменной, подставленной вместо β:*

Для каждого β $\beta\in\{\alpha:A\}$ в том и только в том случае, когда β — множество и имеет место B.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА КЛАССОВ

Сформулированные до сих пор аксиомы позволяют вывести ряд теорем прямо из логических результатов.

2. Определение. $x\cup y=\{z:z\in x$ *или* $z\in x\}$.

3. Определение. $x\cap y=\{z:z\in x$ *и* $z\in y\}$.

Класс $x\cup y$ называется *объединением классов* x и y, а $x\cap y$ называется *пересечением* x и y.

4. Теорема. *$z\in x\cup y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ или $z\in y$, и $z\in x\cap y$ в том и только в том случае, когда $z\in x$ и $z\in y$.*

Доказательство. В силу классификационной аксиомы $z\in x\cup y$ тогда и только тогда, когда $z\in x$ или $z\in y$ и z — множество. Но в силу определения множества (определение 1) $z \in x$ или $z \in y$ и z — множество тогда и только тогда, когда $z \in x$ или $z \in y$. Аналогично доказывается утверждение о пересечениях.

5. Теорема. $x \cup x = x$ *и* $x \cap x = x$.

6. Теорема. $x \cup y = y \cup x$ *и* $x \cap y = y \cap x$.

7. Теорема*). $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ *и* $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

Этими теоремами утверждается, что операции объединения и пересечения коммутативны и ассоциативны в обычном смысле. Законы дистрибутивности выписаны ниже.

8. Теорема. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ *и* $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

9. Определение. *$x \notin y$ в том и только в том случае, когда не верно, что $x \in y$.*

10. Определение. $\setminus x = \{y : y \notin x\}$.

Класс $\setminus x$ называется *дополнением* (класса) x.

11. Теорема. $\setminus(\setminus x) = x$.

12. Теорема (де Морган). $\setminus(x \cup y) = (\setminus x) \cap (\setminus y)$ *и* $\setminus(x \cap y) = (\setminus x) \cup (\setminus y)$.

Доказательство. Будет доказано только первое из этих двух утверждений. Для каждого z $z \in \setminus(x \cup y)$ тогда и только тогда, когда z — множество и не верно, что $z \in x \cup y$, в силу классификационной аксиомы и определения 10. В силу теоремы 4 формула $z \in x \cup y$ эквивалентна формуле: $z \in x$ или $z \in y$. Следовательно, $z \in \setminus(x \cup y)$ в том и лишь в том случае, когда z — множество, $z \notin x$ и $z \notin y$, т. е. когда $z \in \setminus x$ и $z \in \setminus y$. Снова применив теорему 4, заключаем, что $z \in \setminus(x \cup y)$ эквивалентно $z \in (\setminus x) \cap (\setminus y)$. Значит, $\setminus(x \cup y) = (\setminus x) \cap (\setminus y)$ в силу аксиомы объемности.

13. Определение. $x \setminus y = x \cap (\setminus y)$.

Класс $x \setminus y$ называется *разностью* (классов) x *и* y, или *дополнением y относительно x.*

---

*) Скобок не понадобилось бы, если бы в определении 2 константа «$\cup$» стояла на первом месте, т. е. вместо «$x \cup y$» было бы написано «$\cup xy$». В этом случае первая часть теоремы выглядела бы так: $\cup \cup xyz = \cup x \cup yz$. [Эта идея лежит в основе так называемой бесскобочной системы обозначений, предложенной польским логиком Лукасевичем. (*Прим ред.*)]

14. Теорема. $x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus z$.

Предложение «$x \cup (y \setminus z) = (x \cup y) \setminus z$» кажется подозрительным, но на данной стадии противоречащего примера построить нельзя. Точнее, с помощью принятых до сих пор аксиом отрицание этого предложения невозможно доказать: существует модель, в которой выполняется эта начальная группа аксиом и такая, что $x \notin y$ при любых x и y (нет множеств). Доказать отрицание нашего предложения можно будет после аксиом, которые мы вскоре сформулируем.

15. Определение. $0 = \{x : x \neq x\}$.

Класс 0 называется *пустым классом*, или *нулем*.

16. Теорема. $x \notin 0$.

17. Теорема. $0 \cup x = x$ *и* $0 \cap x = 0$.

18. Определение. $\mathfrak{U} = \{x : x = x\}$.

Класс $\mathfrak{U}$ называется *универсумом*.

19. Теорема. $x \in \mathfrak{U}$ *в том и только в том случае, когда* x — *множество*.

20. Теорема. $x \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ *и* $x \cap \mathfrak{U} = x$.

21. Теорема. $\setminus 0 = \mathfrak{U}$ *и* $\setminus \mathfrak{U} = 0$.

22. Определение*). $\bigcap x = \{z$: *для каждого* y, *если* $y \in x$, то $z \in y\}$.

23. Определение. $\bigcup x = \{z$: *для некоторого* y $z \in y$ *и* $y \in x\}$.

Класс $\bigcap x$ называется *пересечением* элементов класса x. Заметим, что элементами класса $\bigcap x$ служат элементы элементов класса x; они могут как принадлежать, так и не принадлежать классу x. Класс $\bigcup x$ называется *объединением* элементов класса x. Заметим, что множество z принадлежит $\bigcap x$ (или $\bigcup x$) тогда и только тогда, когда z принадлежит каждому (соответственно некоторому) элементу класса x.

24. Теорема. $\bigcap 0 = \mathfrak{U}$ *и* $\bigcup 0 = 0$.

Доказательство. $z \in \bigcap 0$ эквивалентно тому, что z — множество, и z принадлежит каждому элементу класса 0. Так как (теорема 16) элементов класса 0 не

*) Обозначение для пересечения элементов семейства в терминах связанной переменной в этом Добавлении не нужно. Здесь принято более простое обозначение, чем то, которым мы пользовались в остальной части книги.

существует, $z \in \bigcap 0$ эквивалентно тому, что z — множество. Отсюда в силу теоремы 19 и аксиомы объемности следует, что $\bigcap 0 = \mathfrak{U}$. Второе утверждение тоже доказывается легко.

25. Определение. *$x \subset y$ тогда и только тогда, когда для каждого z, если $z \in x$, то $z \in y$.*

Класс x является *подклассом класса* y, или *содержится в классе* y, в том и лишь в том случае, когда $x \subset y$. Чрезвычайно существенно не путать «$\subset$» с «$\in$». Например, $0 \subset 0$, однако не верно, что $0 \in 0$.

26. Теорема. $0 \subset x$ *и* $x \subset \mathfrak{U}$.

27. Теорема. $(x = y)$ *эквивалентно* $(x \subset y$ *и* $y \subset x)$.

28. Теорема. *Если $x \subset y$ и $y \subset z$, то $x \subset z$.*

29. Теорема. $(x \subset y)$ *эквивалентно* $(x \cup y = y)$.

30. Теорема. $(x \subset y)$ *эквивалентно* $(x \cap y = x)$.

31. Теорема. *Если $x \subset y$, то $\bigcup x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset \bigcap x$.*

32. Теорема. *Если $x \in y$, то $x \subset \bigcup y$ и $\bigcap y \subset x$.*

Предшествующие определения и теоремы применяются очень часто, — нередко без точного на то указания.

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОЖЕСТВ

Этот параграф посвящен вопросам существования множеств и первым шагом в построении отображений и других первоначальных отношений теории множеств.

III. Аксиома подмножеств. *Если x — множество, то существует такое множество y, что при каждом z, если $z \subset x$, то $z \in y$.*

33. Теорема *Если x — множество и $z \subset x$, то z — множество.*

Доказательство. В соответствии с аксиомой подмножеств для любого множества x существует такое y, что если $z \subset x$, то $z \in y$. Значит, в силу определения 1 z является множеством. (Заметим, что в этом доказательстве аксиома подмножеств используется не в полную силу — нам не понадобился тот факт, что y — множество.)

34. Теорема. $0 = \bigcap \mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{U}$.

Доказательство. Если $x \in \bigcap \mathfrak{U}$, то x является множеством, и так как $0 \subset x$, то в силу теоремы 33 0 будет множеством. Значит, $0 \in \mathfrak{U}$, и каждый элемент класса $\bigcap \mathfrak{U}$ принадлежит классу 0. Следовательно, в $\bigcap \mathfrak{U}$ нет элементов. Ясно (если иметь в виду теорему 26), что $\bigcup \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$. Если $x \in \mathfrak{U}$, то x — множество и в силу аксиомы подмножеств существует такое множество y, что если $z \subset x$, то $z \in y$. В частности, $x \in y$, и, так как $y \in \mathfrak{U}$, получаем, что $x \in \bigcup \mathfrak{U}$. Следовательно, $\mathfrak{U} \subset \bigcup \mathfrak{U}$; отсюда следует искомое равенство.

35. Теорема. *Если $x \neq 0$, то $\bigcap x$ является множеством.*

Доказательство. Если $x \neq 0$, то для некоторого y $y \in x$. Но y — множество, и так как в силу теоремы 32 $\bigcap x \subset y$, то из теоремы 33 вытекает, что $\bigcap x$ будет множеством.

36. Определение. $2^x = \{y : y \subset x\}$

37. Теорема. $\mathfrak{U} = 2^{\mathfrak{U}}$.

Доказательство. Каждый элемент класса $2^{\mathfrak{U}}$ является множеством и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{U}$. Каждый элемент класса $\mathfrak{U}$ является множеством и содержится (теорема 26) в $\mathfrak{U}$, а значит, принадлежит классу $2^{\mathfrak{U}}$.

38. Теорема. *Если x — множество, то 2^x — множество и для каждого y $y \subset x$ эквивалентно $y \in 2^x$.*

Интересно отметить, что на базе до сих пор провозглашенных аксиом еще нельзя доказать существования множеств, но уже можно доказать, что существует класс, не являющийся множеством. Положим $R = \{x : x \notin x\}$. В силу классификационной аксиомы, $R \in R$ тогда и только тогда, когда $R \notin R$ и R является множеством. Отсюда вытекает, что R не является множеством. Заметьте, что если бы в классификационной аксиоме отсутствовали слова «. . .является множеством», то возникло бы явное противоречие: $R \in R$ эквивалентно $R \notin R$. Это — парадокс Рассела. Из этого рассуждения следует, что $\mathfrak{U}$ не будет множеством, ибо $R \subset \mathfrak{U}$ и можно применить теорему 33. (Из аксиомы регулярности будет следовать, что $R = \mathfrak{U}$. Эта аксиома позволит также по-другому доказать, что $\mathfrak{U}$ не является множеством.)

39. Теорема. *$\mathfrak{U}$ не является множеством.*

40. Определение. $\{x\} = \{z$: *если* $x \in \mathfrak{U}$, *то* $z = x\}$.

Одночленный класс элемента x — это $\{x\}$.

Данное определение служит примером очень удобного технического соглашения. Если x — множество, то $\{x\}$ — класс, единственным элементом которого является x. Однако если x — не множество, то $\{x\}=\mathfrak{U}$ (это утверждается в теоремах 41 и 43). В действительности наиболее интересен случай, когда x — множество; здесь тот же результат достигается более естественным определением: за $\{x\}$ принимается $\{z : z=x\}$. Однако формулировки результатов существенно упрощаются, если вычисления построены таким образом, что при их применении за пределами естественной области действия получается $\mathfrak{U}$.

41. Теорема. *Если x — множество, то при каждом y $y \in \{x\}$ эквивалентно $y=x$.*

42. Теорема. *Если x — множество, то и $\{x\}$ — множество.*

Доказательство. Если x — множество, то $\{x\} \subset 2^x$, причем 2^x — множество.

43. Теорема. $\{x\}=\mathfrak{U}$ *в том и только в том случае, когда x не является множеством.*

Доказательство. Если x — множество, то $\{x\}$ — множество; поэтому $\{x\}$ не равно $\mathfrak{U}$. Если x не является множеством, то $x \notin \mathfrak{U}$ и $\{x\}=\mathfrak{U}$ по определению.

44. Теорема. *Если x — множество, то $\bigcap\{x\}=x$ и $\bigcup\{x\}=x$. Если x не является множеством, то $\bigcap\{x\}=0$ и $\bigcup\{x\}=\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Примените теоремы 34 и 41.

IV. Аксиома объединения. *Если x — множество и y — множество, то и $x \cup y$ — множество.*

45. Определение. $\{xy\}=\{x\} \cup \{y\}$.

Класс $\{xy\}$ называется *неупорядоченной парой*.

46. Теорема. *Если x — множество и y — множество, то $\{xy\}$ — множество и $z \in \{xy\}$ тогда и только тогда, когда $z=x$ или $z=y$; $\{xy\}=\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда x или y не является множеством.*

47. Теорема. *Если x и y — множества, то $\bigcap\{xy\}=x \cap y$ и $\bigcup\{xy\}=x \cup y$. Если либо x, либо y не является множеством, то $\bigcap\{xy\}=0$ и $\bigcup\{xy\}=\mathfrak{U}$.*

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПАРЫ; ОТНОШЕНИЯ

Этот параграф посвящен свойствам упорядоченных пар и отношений. Характерное свойство упорядоченных пар обнаруживает теорема 55: если x и y — множества, то $(x, y) = (u, v)$ тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

48. Определение. $(x, y) = \{\{x\}\{xy\}\}$.

Класс (x, y) называется *упорядоченной парой.*

49. Теорема. *(x, y) является множеством в том и только в том случае, когда x — множество и y — множество; если (x, y) не является множеством, то $(x, y) = \mathfrak{U}$.*

50. Теорема. *Если x и y — множества, то $\bigcup(x, y) = \{xy\}$, $\bigcap(x, y) = \{x\}$, $\bigcup\bigcap(x, y) = x$, $\bigcap\bigcap(x, y) = x$, $\bigcup\bigcup(x, y) = x \cup y$ и $\bigcap\bigcup(x, y) = x \cap y$.*

Если либо x, либо y не является множеством, то

$\bigcup\bigcap(x, y) = 0$, $\bigcap\bigcap(x, y) = \mathfrak{U}$, $\bigcup\bigcup(x, y) = \mathfrak{U}$ *и* $\bigcap\bigcup(x, y) = 0$.

51. Определение. 1-*я коорд.* $z = \bigcap\bigcap z$.

52. Определение. 2-*я коорд.* $z = (\bigcap\bigcup z) \cup ((\bigcup\bigcup z) \setminus \bigcup\bigcap z)$.

Этими определениями мы будем пользоваться только тогда, когда z — упорядоченная пара, за одним лишь исключением. *Первая координата* класса z есть 1-я коорд. z и *вторая координата* класса z есть 2-я коорд. z.

53. Теорема. 2-*я коорд.* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$.

54. Теорема. *Если x и y — множества, то 1-я коорд. $(x, y) = x$ и 2-я коорд. $(x, y) = y$. Если либо x, либо y не является множеством, то 1-я коорд. $(x, y) = \mathfrak{U}$ и 2-я коорд. $(x, y) = \mathfrak{U}$.*

Доказательство. Если x и y — множества, то искомое равенство для 1-*й коорд.* немедленно вытекает из 50 и 51. Искомое равенство для 2-*й коорд.* сводится в силу 50 и 52 к доказательству того, что $y = (x \cap y) \cup ((x \cup y) \setminus x)$. Непосредственно видно, что $(x \cup y) \setminus x = y \setminus x$, а в силу закона дистрибутивности $(y \cap x) \cup (y \cap \setminus x)$ есть $y \cap (x \cup \setminus x) = y \cap \mathfrak{U} = y$. Если хотя бы один из классов x и y не является множеством, то 1-*я корд.* (x, y) и 2-*я коорд.* (x, y) легко вычисляются с помощью теоремы 50.

55. Теорема. *Если x и y — множества и $(x, y) = (u, v)$, то $x=u$ и $y=v$.*

56. Определение. *r является отношением в том и только в том случае, когда для каждого элемента z класса r существуют такие x и y, что $z=(x, y)$.*

Отношение — это класс, элементами которого являются упорядоченные пары.

57. Определение. $r \circ s = \{u$: *для некоторого x, некоторого y и некоторого z будет $u=(x, z)$, $(x, y) \in s$ и $(y, z) \in r$*$\}$.

Класс $r \circ s$ называется *композицией* классов r и s. Чтобы избежать излишних обозначений, условимся отождествлять $\{(x, z): \ldots\}$ с $\{u$: *для некоторого x, некоторого z имеет место $u=(x, z)$ и* $\ldots\}$. Таким образом, $r \circ s = \{(x, z)$: *при некотором y $(x, y) \in s$ и $(y, z) \in r$*$\}$.

58. Теорема. $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$.

59. Теорема $r \circ (s \cup t) = (r \circ s) \cup (r \circ t)$ *и* $r \circ (s \cap t) \subset \subset (r \circ s) \cap (r \circ t)$.

60. Определение. $r^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in r\}$.

Если r — отношение, то r^{-1} называется *отношением, обратным* к r.

61. Теорема. $(r^{-1})^{-1} = r$.

62. Теорема. $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

ФУНКЦИИ

Интуитивно функция отождествляется с классом упорядоченных пар, образующих ее график. Здесь рассматриваются только однозначные функции; следовательно, любые две различные упорядоченные пары, принадлежащие некоторой функции, должны отличаться первыми координатами.

63. Определение. *f является функцией в том и только в том случае, когда f представляет собой отношение и для каждого x, каждого y и каждого z, если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$, то $y=z$.*

64. Теорема. *Если f — функция и g — функция, то и $f \circ g$ — функция.*

65. Определение. (*Область определения* f) $= \{x$: *для некоторого y $(x, y) \in f$*$\}$.

66. Определение. (*Область значений* f) $= \{y$: *для некоторого x $(x, y) \in f$*$\}$.

67. Теорема. (*Область определения* $\mathfrak{U}$) $=\mathfrak{U}$ *и* (*область значений* $\mathfrak{U}$) $=\mathfrak{U}$.

Доказательство. Если $x\in\mathfrak{U}$, то $(x,0)$ и $(0,x)$ принадлежат $\mathfrak{U}$ и, значит, x принадлежит как области определения $\mathfrak{U}$, так и области значений $\mathfrak{U}$.

68. Определение. $f(x)=\bigcap\{y:(x,y)\in f\}$.

Значит, $z\in f(x)$, если z принадлежит второй координате каждого элемента из f, первой координатой которого служит x.

Класс $f(x)$ называется *значением* f в x, или *образом* x при f. Следует обратить внимание на то, что если x — подмножество области определения f, то $f(x)$ — это вовсе не $\{y$: *при некотором* z $z\in x$ *и* $y=f(z)\}$.

69. Теорема. *Если* $x\notin$ (*область определения* f), *то* $f(x)=\mathfrak{U}$; *если* $x\in$ (*область определения* f), *то* $f(x)\in\mathfrak{U}$.

Доказательство. Если $x\notin$ (*область определения* f), то $\{y:(x,y)\in f\}=0$ и $f(x)=\mathfrak{U}$ (теорема 24). Если $x\in$ (*область определения* f), то $\{y:(x,y)\in f\}\neq 0$ и (теорема 35) $f(x)$ является множеством.

В предшествующей теореме не предполагается, что f — функция.

70. Теорема. *Если* f — *функция, то* $f=\{(x,y):y=f(x)\}$.

71. Теорема*). *Если* f *и* g — *функции, то* $f=g$ *в том и только в том случае, когда* $f(x)=g(x)$ *для каждого* x.

Следующие две аксиомы **) придают новые черты классу всех множеств.

---

*) Эта теорема не была бы верна, если бы мы определили $f(x)$ как объединение вторых координат тех элементов из f, первая координата которых есть x. Ибо тогда, если $y\in\mathfrak{U}$ и $y\notin$ (*область определения* f), то $f(y)=0$ и, если $g=f\cup\{(y,0)\}$, то $g(x)=f(x)$ для каждого x, хотя f не равно g.

**) Эти две аксиомы можно заменить одной: если f — функция и область определения f представляет собой множество, то $\bigcup$ (*область значений* f) тоже является множеством. (В прежних обозначениях это предложение формулируется весьма естественно: если d — множество, $x(a)$ — множество для каждого a из d, то $\bigcup\{x(a):a\in d\}$ — множество.) Чтобы вывести отсюда V и VI, можно поступить в общих чертах так. Доказываем V. По заданному f строим новую функцию, элементы которой имеют вид $(x,\{f(x)\})$. Доказываем VI. Для заданного x рассмотрим функцию, элементы которой имеют вид (u,u), где $u\in x$.

V. Аксиома подстановки. *Если f — функция и область определения f — множество, то и область значений f тоже является множеством.*

VI. Аксиома соединения. *Если x — множество, то и $\bigcup x$ — множество.*

72. Определение. $x \times y = \{(u, v) : u \in x$ и $v \in y\}$.

Класс $x \times y$ называется *декартовым произведением* классов x и y.

73. Теорема. *Если u и y — множества, то и $\{u\} \times y$ — множество.*

Доказательство. Ясно, что можно построить функцию (а именно, $\{(w, z) : w \in y$ и $z = (u, w)\}$), область определения которой есть y, а областью значений является $\{u\} \times y$. Затем примените аксиому подстановки.

74. Теорема. *Если x и y — множества, то и $x \times y$ — множество.*

Доказательство. Пусть f — функция (*область определения* f) $= x$ и $f(u) = \{u\} \times y$ при u из x (есть только одна такая функция, а именно, $f = \{(u, z) : u \in x$ и $z = \{u\} \times y\}$). В силу аксиомы подстановки область значений f является множеством. Прямое вычисление показывает, что (*область значений* f) $= \{z$: *для некоторого* u $u \in x$ и $z = \{u\} \times y\}$. Следовательно, $\bigcup$ (*область значений* f) — класс, который в силу аксиомы соединения является множеством, — есть $x \times y$.

75. Теорема. *Если f — функция и область определения f является множеством, то f — множество.*

Доказательство. В самом деле, $f \subset$ (*область определения* f) $\times$ (*область значений* f).

76. Определение. $y^x = \{f : f$ — *функция* (*область определения* f) $= x$ и (*область значений* f) $\subset y\}$.

77. Теорема. *Если x и y — множества, то и y^x — множество.*

Доказательство. Если $f \in y^x$, то $f \subset x \times y$, причем справа стоит множество; следовательно, $f \in 2^{x \times y}$ (теорема 38) и $2^{x \times y}$ — множество. Так как $y^x \subset 2^{x \times y}$, то из аксиомы подмножеств следует, что y^x — множество.

Для большего удобства дадим еще три определения.

78. Определение. *f задана на x в том и только в том случае, когда f — функция и $x =$ (область определения f).*

79. Определение. *f является функцией в y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $\subset y$.*

80. Определение. *f является функцией на y в том и только в том случае, когда f — функция и (область значений f) $= y$.*

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ

Многие результаты этого параграфа не понадобятся при последующем построении целых, порядковых и кардинальных чисел. Мы их включили, ибо они интересны и сами по себе; кроме того, в их доказательствах применяются упрощенные варианты тех конструкций, которые понадобятся в дальнейшем.

Так как основные конструктивные результаты уже доказаны, можно двигаться дальше несколько быстрее.

81. Определение. *xry в том и только в том случае, когда $(x, y) \in r$.*

Если xry, то говорят, что x *находится в отношении* r к y или что x *r-предшествует* y.

82. Определение. *r связывает x в том и только в том случае, когда из того, что u и v принадлежат x, следует, что либо urv, либо vru.*

83. Определение. *r транзитивно в x в том и только в том случае, когда из того, что u, v и w — элементы класса x и имеют место urv и vrw, следует, что urw.*

Если r транзитивно в x, то говорят, что r *упорядочивает* x. Выражение «u r-предшествует v» особенно удачно, когда u и v принадлежат x и r упорядочивает x.

84. Определение. *r асимметрично в x в том и только в том случае, когда из того, что u и v — элементы класса x и верно urv, следует, что vru неверно.*

Иначе говоря, если $u \in x$, $v \in x$ и u r-предшествует v, то v не r-предшествует u.

85. Определение. *$x \neq y$ в том и только в том случае, когда неверно, что $x = y$.*

86. Определение. *z есть r-первый элемент класса x в том и только в том случае, когда $z \in x$ и из $y \in x$ при $z \neq y$ вытекает, что yrz ложно.*

87. Определение. *r вполне упорядочивает x в том и только в том случае, когда r связывает x и из того, что $y \subset x$ и $y \neq 0$, следует, что в классе y есть r-первый элемент.*

88. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x, то r транзитивно в x и r асимметрично в x.*

Доказательство. Если $u \in x$, $v \in x$, urv и vru, то $\{uv\} \subset x$ и, следовательно, в $\{uv\}$ существует r-первый элемент z. Верно либо $z=u$, либо $z=v$, и, следовательно, либо ложно, что vru, либо ложно, что urv. Это противоречие показывает, что r асимметрично в x. Если r не транзитивно в x, то для некоторых элементов u, v и w класса x будет urv, vrw и wru, так как r связывает x. Но тогда в множестве $\{u\} \cup \{v\} \cup \{w\}$ нет r-первого элемента.

89. Определение. *y есть r-секция класса x в том и только в том случае, когда $y \subset x$, r вполне упорядочивает x и из того, что $u \in x$, $v \in y$ и urv, следует, что $u \in y$.*

Следовательно, подмножество y класса x называется его r-секцией в том и лишь в том случае, когда r вполне упорядочивает x и никакой элемент из $x \setminus y$ не r-предшествует никакому элементу класса y.

90. Теорема. *Если $n \neq 0$ и каждый элемент класса n является r-секцией класса x, то $\bigcup n$ и $\bigcap n$ — r-секции класса x.*

91. Теорема. *Если y — r-секция класса x и $y \neq x$, то $y = \{u : u \in x$ и $urv\}$ для некоторого v из x.*

Доказательство. Если y — r-секция класса x и $y \neq x$, то в $x \setminus y$ есть r-первый элемент v. Если $u \in x$ и urv, то, так как v — r-первый элемент класса $x \setminus y$, имеет место $u \notin x \setminus y$ и, значит, $u \in y$. Следовательно, $\{u : u \in x$ и $urv\} \subset y$. С другой стороны, если $u \in y$, то, так как $v \notin y$ и y — r-секция, vru ложно; значит, имеет место urv. Отсюда вытекает доказываемое равенство.

92. Теорема. *Если x и y — r-секции класса z, то $x \subset y$ или $y \subset x$.*

93. Определение*). *f r — s-сохраняет порядок в том и только в том случае, когда f — функция, r впол-*

---

*) В этом Добавлении нет необходимости рассматривать сохраняющие порядок функции с не вполне упорядоченными областью определения и областью значений (как мы делали в главе 0). Ради простоты прежняя терминология модифицирована.

не упорядочивает область определения f, s вполне упорядочивает область значений f и для любых элементов u и v области определения f, удовлетворяющих условию urv, имеет место $f(u)sf(v)$.

94. Теорема. *Если $x \subset y$ и f является r — r-сохраняющей порядок функцией в y, заданной на x, то для каждого u из x ложно, что $f(u)ru$.*

Доказательство. Следует показать, что класс $\{u : u \in x$ и $f(u)ru\}$ пуст. Если бы это было не так, то в этом классе нашелся бы r-первый элемент v. Тогда $f(v)rv$ и, если urv, то $urf(u)$ или $u=f(u)$. Так как $f(v)rv$, то $f(v)rf(f(v))$ или $f(v)=f(f(v))$, но раз f r — r-сохраняет порядок, то $f(f(v))rf(v)$, что приводит к противоречию.

Таким образом, r — r-сохраняющая порядок функция не может перевести никакой элемент ее области определения в r-предшествующий ему.

Доказательства, которые подобно теореме 94 основываются на рассмотрении r-первого элемента, для которого нарушается утверждение теоремы, называются *доказательствами по индукции.*

95. Определение. *f является 1 — 1-функцией в том и только в том случае, когда и f и f^{-1} — функции.*

Это эквивалентно требованию, чтобы f было функцией и для любых двух различных элементов x и y ее области определения имело место $f(x) \neq f(y)$.

96. Теорема. *Если f r — s-сохраняет порядок, то f является 1 — 1-функцией, причем f^{-1} s — r-сохраняет порядок.*

Доказательство. Если $f(u)=f(v)$, то невозможно, чтобы было urv или vru, ибо тогда было бы $f(u)sf(v)$ или $f(v)sf(u)$. Значит, $u=v$ и f является 1 — 1-функцией. Пусть $f(u)sf(v)$; тогда $u \neq v$ и, если vru, то $f(v)sf(u)$, что приводит к противоречию. Значит, f^{-1} s — r-сохраняет порядок.

97. Теорема. *Если f и g r — s-сохраняют порядок, область определения f и область определения g являются r-секциями класса x, а область значений f и область значений g являются s-секциями класса y, то $f \subset g$ или $g \subset f$.*

Доказательство. В силу теоремы 92 либо (*область определения* f) $\subset$ (*область определения* g), либо (*область определения* g) $\subset$ (*область определения* f). Теорема будет доказана, если мы установим, что $f(u)=g(u)$ для всех u, принадлежащих и области определения f, и области определения g. Если класс $\{z: z\in$ (*область определения* f) $\cap$ (*область определения* g) *и* $g(z)\neq f(z)\}$ не пуст, то в нем существует r-первый элемент u. Тогда $f(u)\neq g(u)$, и можно предположить, что $f(u)sg(u)$. Так как область значений g является s-секцией, то $g(v)=f(u)$ для некоторого v из x, причем верно vru, поскольку g^{-1} сохраняет порядок. Но u — r-первая точка среди тех, в которых функции отличаются, значит, $f(v)=g(v)=f(u)$, что приводит к противоречию.

98. Определение. *f r — s-сохраняет порядок в x и y в том и только в том случае, когда r вполне упорядочивает x, s вполне упорядочивает y, f r — s-сохраняет порядок, область определения f является r-секцией класса x и область значений f является s-секцией класса y.*

Согласно теореме 97, если f и g r — s-сохраняют порядок в x и y, то $f\subset g$ или $g\subset f$.

99. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x и s вполне упорядочивает y, то существует такая функция f, r — s-сохраняющая порядок в x и y, что либо (область определения f) $=x$, либо (область значений f) $=y$.*

Доказательство. Положим $f=\{(u, v): u\in x$ *и для некоторой функции* g, *которая* r — s-*сохраняет порядок в* x *и* y, *и* $\in$ (*область определения* g) *и* $(u, v)\in g\}$. В силу предыдущей теоремы f — функция, причем легко видеть, что ее область определения является r-секцией класса x, а область значений является s-секцией класса y. Значит, f r — s-сохраняет порядок в x и y; остается показать, что либо (*область определения* f) $=x$, либо (*область значений* f) $=y$. Пусть ни одно из этих условий не выполняется. Тогда существует r-первый элемент u в классе $x\setminus$ (*область определения* f) и s-первый элемент v в классе $y\setminus$ (*область значений* f). Легко видеть, что функция $f\cup\{(u,v)\}$ r — s-сохраняет порядок в x и y. Тогда $(u, v)\in f$ в силу определения f и, значит, $u\in$ (*область определения* f). В этом заключено противоречие.

Можно в одном случае точно установить, какая из альтернатив, указанных в заключении предшествующей теоремы, выполняется: если x — множество, а y не является множеством, то в силу аксиомы подстановки равенство «(*область значений* f) $=y$» невозможно.

100. Теорема. *Если r вполне упорядочивает x, s вполне упорядочивает y, x — множество и y не является множеством, то существует единственная r — s-сохраняющая порядок в x и y функция, областью определения которой является x.*

ПОРЯДКОВЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе определяются порядковые числа и устанавливаются их основные свойства. До обсуждения порядковых чисел принимается еще одна аксиома.

Может à priori случиться, что класс x является единственным элементом класса y, а класс y является единственным элементом класса x. Вообще говоря, возможен класс z, каждый элемент которого содержит элементы класса z и только элементы этого класса. Следующая аксиома как раз и исключает эту возможность: накладывается требование, чтобы в каждом непустом классе z существовал элемент, никакой элемент которого не принадлежит классу z.

VII. Аксиома регулярности. *Если $x \neq 0$, то в классе x есть такой элемент y, что $x \cap y = 0$.*

101. Теорема. $x \notin x$.

Доказательство. Если $x \in x$, то x — непустое множество, причем x является единственным элементом класса $\{x\}$. В силу аксиомы регулярности существует $y \in \{x\}$, для которого $y \cap \{x\} = 0$; непременно $y = x$. Но тогда $y \in y \cap \{x\}$, откуда следует противоречие.

102. Теорема. *Ложно, что $x \in y$ и $y \in x$.*

Доказательство. Если $x \in y$ и $y \in x$, то x и y — множества, причем они являются единственными элементами класса $\{x : z = x$ *или* $z = y\}$. Применив аксиому регулярности к последнему классу, получаем противоречие так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Можно, конечно, обобщить последнюю теорему на случай более чем двух множеств. В действительности из аксиомы регулярности вытекает следующий сильный результат (интуитивное описание): не существует такой последовательности, что $x_{n+1} \in x_n$ при каждом n. Точную формулировку этого результата приходится отложить.

103. Определение. $E = \{(x, y) : x \in y\}$.

Класс E называется $\in$-*отношением*. Заметьте, что если $x \in y$ и y не является множеством, то $(x, y) = \mathfrak{U}$ в силу теоремы 54 и $(x, y) \notin E$.

104. Теорема. *E не является множеством.*

Доказательство. Если $E \in \mathfrak{U}$, то $\{E\} \in \mathfrak{U}$ и $(E, \{E\}) \in E$. Напоминаем, что $(x, y) = \{\{x\}\{xy\}\}$ и, если (x, y) — множество, то $z \in (x, y)$ тогда и только тогда, когда $z = \{x\}$ или $z = \{xy\}$. Следовательно, $E \in \{E\} \in \in \{\{E\}\{E\{E\}\}\} \in E$. Итак, имеем $a \in b \in c \in a$; применив аксиому регулярности к классу $\{x : x = a$, *или* $x = b$, *или* $x = c\}$, мы получаем противоречие.

Неформальное обсуждение строения нескольких первых порядковых чисел может прояснить соответствующие общие концепции*). Первым порядковым числом будет 0, следующим $1 = 0 \cup \{0\}$, следующим $2 = 1 \cup \{1\}$ и еще следующим $3 = 2 \cup \{2\}$. Заметьте, что 0 — единственный элемент класса 1, 0 и 1 — единственные элементы класса 2 и 0, 1, 2 — единственные элементы класса 3. Каждое порядковое число, предшествующее 3, является не только элементом, но и подмножеством класса 3. Порядковые числа определяются так, что этот весьма специальный тип строения сохраняется.

105. Определение**). *Класс x наполнен тогда и только тогда, когда каждый элемент класса x является его подмножеством.*

Иными словами, x наполнен в том и лишь в том случае, когда каждый элемент произвольного элемента класса x является элементом класса x. Другое эквива-

---

*) Наше обсуждение не совсем аккуратно — не доказано еще, что 0 является множеством. В действительности, это и нельзя вывести из имеющихся в нашем распоряжении аксиом. Существование множеств (и тот факт, что 0 является множеством) вытекает из аксиомы бесконечности, формулируемой в начале следующего параграфа.

**) Обычно говорят «полон», а не «наполнен», но термин «полон» раньше уже употреблялся в другом смысле.

лентное утверждение: x наполнен тогда и только тогда, когда E транзитивно в x.

Следующее определение принадлежит Р. Робинсону.

106. Определение. *x является ординалом в том и только в том случае, когда E связывает x и класс x наполнен.*

Это означает, что из любых двух элементов класса x один является элементом другого и каждый элемент произвольного элемента класса x принадлежит x.

107. Теорема. *Если x — ординал, то E вполне упорядочивает x.*

Доказательство. Если u и v — элементы класса x и uEv, то (теорема 102) ложно, что vEu; следовательно, E асимметрично в x. Пусть y — непустое подмножество класса x. Существует такой элемент $u \in y$, что $u \cap y = 0$. Тогда ни один элемент класса y не принадлежит u и u является E-первым элементом класса y.

108. Теорема. *Если x — ординал, $y \subset x$, $y \neq x$ и класс y наполнен, то $y \in x$.*

Доказательство. Если uEv и vEy, то uEy, ибо класс y наполнен. Значит, y — E-секция класса x. Следовательно, по теореме 91 в x существует такой элемент v, что $y = \{u : u \in x \text{ и } uEv\}$. Так как каждый элемент класса v является элементом класса x, то $y = \{u : u \in v\}$ и $y = v$.

109. Теорема. *Если x — ординал и y — ординал, то $x \subset y$ или $y \subset x$.*

Доказательство. Класс $x \cap y$ наполнен; в силу предшествующей теоремы либо $x \cap y = x$, либо $x \cap y \in x$. В первом случае $x \subset y$. Если $x \cap y \in x$, то $x \cap y \notin y$, так как в противном случае было бы $x \cap y \in x \cap y$. Так как $x \cap y \notin y$, то из предшествующей теоремы вытекает, что $x \cap y = y$. Значит, $y \subset x$.

110. Теорема. *Если x — ординал и y — ординал, то либо $x \in y$, либо $y \in x$, либо $x = y$.*

111. Теорема. *Если x — ординал и $y \in x$, то y — ординал.*

Доказательство. Ясно, что E связывает y, — ведь x наполнен, а E связывает x. Отношение E транзитивно на y, ибо E вполне упорядочивает x, а $y \subset x$.

Следовательно, если uEv и vEy, то uEy и, значит, класс y наполнен.

112. Определение. $R=\{x : x$ — *ординал*$\}$

113. Теорема*). *R — ординал и R не является множеством.*

Доказательство. Из двух последних теорем следует, что E связывает R и что класс R наполнен. Значит, R—ординал Если R—множество, то $R \in R$, что невозможно.

В силу теоремы 110 R — единственный ординал, не являющийся множеством.

114. Теорема. *Каждая E-секция класса R является ординалом.*

Доказательство. Если E-секция x класса R не равна R, то в силу теоремы 91 существует такой элемент $v \in R$, что $x=\{u : u \in R$ и $u \in v\}$. Так как каждый элемент класса v является ординалом, то $x=\{u : u \in v\}=v$.

115. Определение. *x — порядковое число в том и только в том случае, когда $x \in R$.*

116. Определение. *$x<y$ в том и только в том случае, когда $x \in y$.*

117. Определение. *$x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x \in y$ или $x=y$.*

118. Теорема. *Если x и y — ординалы, то $x \leqslant y$ в том и только в том случае, когда $x \subset y$.*

119. Теорема. *Если x — ординал, то $x=\{y : y \in R$ и $y<x\}$.*

120. Теорема. *Если $x \subset R$, то $\bigcup x$ — ординал.*

Доказательство. E связывает $\bigcup x$ в силу теорем 110 и 111. Класс $\bigcup x$ наполнен, так как наполнены элементы класса x.

Нетрудно усмотреть, что если x — подмножество класса R, то $\bigcup x$ — первый ординал, больший каждого не равного ему элемента класса x, и что $\bigcup x$ будет множеством тогда и только тогда, когда x является множеством. Впрочем, эти результаты нам не понадобятся.

121. Теорема. *Если $x \subset R$ и $x \neq 0$, то $\bigcap x \in x$.*

В действительности, в этой ситуации $\bigcap x$ является E-первым элементом класса x.

---

*) Эта теорема составляет, по существу, содержание парадокса Бурали-Форти — исторически первого парадокса наивной теории множеств.

122. Определение. $x+1=x\cup\{x\}$.

123. Теорема. *Если $x\in R$, то $x+1$ — E-первый элемент класса $\{y: y\in R$ и $x<y\}$.*

Доказательство. Легко проверяется, что E связывает $x+1$ и что класс $x+1$ наполнен и, значит, является ординалом. Если существует такой класс u, что $x<u$ и $u<x+1$, то, так как x — множество и $u\in x\cup\{x\}$, либо $u\in x$ и $x\in u$, либо $u=x$ и $x\in u$. Однако ни одно из этих заключений выполняться не может (теоремы 101 и 102). Теорема доказана.

124. Теорема. *Если $x\in R$, то $\bigcup(x+1)=x$.*

125. Определение. $f|x=f\cap(x\times\mathfrak{U})$.

Мы будем пользоваться этим определением только тогда, когда f — отношение. В этом случае $f|x$ — тоже отношение; оно называется *сужением* f на x.

126. Теорема. *Если f — функция, то $f|x$ — функция, областью определения которой служит $x\cap$ (область определения f), причем $(f|x)(y)=f(y)$ для каждого y из области определения $f|x$.*

Заключительной теоремой параграфа об ординалах утверждается, что (интуитивно) можно задать функцию на ординале посредством правила, указывающего ее значение на каждом элементе области определения по ее значениям на предшествующих элементах. Несколько точнее, для произвольно заданной функции g существует единственная функция f, заданная на ординалах, такая, что $f(x)=g(f|x)$ для каждого порядкового числа x. Значение $f(x)$ вполне определено, таким образом, функцией g и значениями функции f на порядковых числах, предшествующих x.

Применение этой теоремы называется *определением функции по трансфинитной индукции.*

Доказательство выписанного выше утверждения похоже на доказательство теоремы 99; ту же роль играет предварительная лемма.

127. Теорема. *Пусть f — функция, областью определения которой является некоторый ординал, причем $f(u)=g(f|u)$, когда $u\in$ (область определения f). Если h — тоже такая функция, что область определения h есть некоторый ординал и $h(u)=g(h|u)$, когда $u\in$ (область определения h), то $h\subset f$ или $f\subset h$.*

Доказательство. Так как и область определения f, и область определения h являются ординалами, то можно предположить, что (*область определения* f) $\subset$ (*область определения* h) (иначе имеет место противоположное включение в силу теоремы 109). Остается доказать, что $f(u)=h(u)$, когда $u \in$ (*область определения* f). Предположим противное, и пусть u — E-первый элемент из области определения f, для которого $f(u) \neq h(u)$. Тогда $f(v)=h(v)$ для каждого ординала v, предшествующего u. Следовательно, $f|u=h|u$. Тогда $f(u)=g(f|u)=h(u)$, что ведет к противоречию.

128. Теорема. *Для каждого g существует единственная функция f такая, что область определения f есть ординал и $f(x)=g(f|x)$ для каждого порядкового числа x.*

Доказательство. Пусть $f=\{(u, v): u \in R$ *и существует такая функция h, что область определения h есть ординал, $h(z)=g(h|z)$, когда $z \in$ (область определения h), и $(u, v) \in h\}$*. Из предыдущей теоремы вытекает, что f — функция. Очевидно, область определения f является E-секцией класса R и, значит, есть ординал. Далее, если h — функция, заданная на некотором ординале, для которой $h(z)=g(h|z)$, когда $z \in$ (*область определения* h), то $h \subset f$ и, если $z \in$ (*область определения* f), то $f(z)=g(f|z)$.

Наконец, предположим, что $x \in R \setminus$ (*область определения* f). Тогда $f(x)=\mathfrak{U}$ по теореме 69 и, так как область определения f является множеством, то f — множество (теорема 75). Если $g(f|x)=g(f)=\mathfrak{U}$, то выполняется равенство $f(x)=g(f|x)$. В противном случае, $g(f)$ будет множеством (снова теорема 69). Тогда, если y — E-первый элемент класса $R \setminus$ (*область определения* f) и $h=f \cup \{(y, g(f))\}$, то область определения h является ординалом и $h(z)=g(h|z)$, когда $z \in$ (*область определения* h). Следовательно, $h \subset f$ и $y \in$ (*область определения* f), откуда получается противоречие. Следовательно, $g(f)=\mathfrak{U}$, и теорема доказана.

Механика этой теоремы заслуживает комментария. Если область определения f не есть R, то $g(f)=\mathfrak{U}$ и $f(x)=\mathfrak{U}$ для каждого порядкового числа x такого, что (*область определения* f) $\leqslant x$. Если $g(0)=\mathfrak{U}$, то $f=0$.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА *)

В этом параграфе определяются целые числа и в виде теорем доказываются постулаты Пеано. Исходя из этих постулатов, можно на основе целых чисел построить вещественные числа (см. Ландау [1]). При этом мы опираемся на два факта:

1) класс целых чисел является множеством (теорема 138),

2) законно определение функции на целых числах по индукции (теорема 0.13; последний факт можно представить также как следствие из теоремы 128).

Нужна еще одна аксиома.

VIII. Аксиома бесконечности. *Для некоторого y верно, что y — множество, $0 \in y$ и $x \cup \{x\} \in y$ всегда, когда $x \in y$.*

В частности, 0 является множеством, так как 0 содержится в множестве.

129. Определение. *x является целым числом в том и только в том случае, когда x — ординал, и E^{-1} вполне упорядочивает x.*

130. Определение. *x является E-последним элементом класса y в том и только в том случае, когда x является E^{-1}-первым элементом класса y.*

131. Определение. $\omega = \{x : x$ *— целое число*$\}$.

132. Теорема. *Произвольный элемент целого числа является целым числом.*

Доказательство. Каждый элемент целого числа x является ординалом и подмножеством класса x, причем E^{-1} вполне упорядочивает x.

133. Теорема. *Если $y \in R$ и x — E-последний элемент класса y, то $y = x + 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 123 $x+1$ является E-первым элементом класса $\{z : z \in R$ и $x < z\}$. Отсюда $x + 1 \leqslant y$, ибо $y \in R$ и $x < y$. Так как x является E-последним элементом класса y и $x < x + 1$, то ложно, что $x + 1 < y$.

134. Теорема. *Если $x \in \omega$, то $x + 1 \in \omega$.*

---

*) Имеются в виду неотрицательные целые числа.

135. Теорема. $0 \in \omega$, *и если* $x \in \omega$, *то* $0 \neq x+1$.

Иными словами, 0 не является преемником никакого целого числа.

136. Теорема. *Если* x *и* y — *элементы класса* ω *и* $x+1=y+1$, то $x=y$.

Доказательство. В силу теоремы 124, если $x \in R$, то $\bigcup(x+1)=x$.

Следующая теорема представляет собой *принцип математической индукции.*

137. Теорема. *Если* $x \subset \omega$, $0 \in x$ *и* $u+1 \in x$ *всегда, когда* $u \in x$, *то* $x=\omega$.

Доказательство. Пусть $x \neq \omega$. Обозначим через y E-первый элемент класса $\omega \setminus x$ и заметим, что $y \neq 0$. Так как $y \subset y+1$ и $y+1$ — целое число, то в y существует E-последний элемент u; ясно, что $u \in x$. Тогда в силу теоремы 123 $y=u+1$; значит, $y \in x$. Получили противоречие.

Теоремы 134, 135, 136 и 137 представляют собой аксиомы Пеано для целых чисел. Следующая теорема означает, в частности, что ω — множество.

138. Теорема. $\omega \in R$.

Доказательство. В силу аксиомы бесконечности существует такое множество y, что $0 \in y$, и если $x \in y$, то $x+1 \in y$. По принципу математической индукции (т. е. по предыдущей теореме) $\omega \cap y=\omega$. Значит, ω — множество, ибо $\omega \subset y$. Так как класс ω состоит из порядковых чисел, то E связывает ω; класс ω наполнен, поскольку каждый элемент целого числа является целым числом.

АКСИОМА ВЫБОРА

Мы сформулируем теперь последнюю аксиому и выведем два сильных следствия.

139. Определение. *c является функцией выбора в том и только в том случае, когда c — функция и $c(x) \in x$ для каждого элемента x из области определения c.*

Интуитивно, функция выбора реализует выбор по элементу из каждого множества, принадлежащего области определения c.

Следующее условие — постулат Цермело в сильной формулировке, или аксиома выбора.

IX. Аксиома выбора. *Существует функция выбора c, областью определения которой является* $\mathfrak{U} \setminus \{0\}$.

Функция c выбирает по элементу из каждого непустого множества.

140. Теорема. *Для любого множества x существует взаимно однозначная функция, областью значений которой служит x, а областью определения является некоторое порядковое число.*

Доказательство. Доказательство состоит в построении искомой функции по трансфинитной индукции. Обозначим через g функцию, для которой $g(h) = c$ $(x \setminus (\text{*область значений* } h))$, где h — любое множество, а c — функция выбора, описанная в аксиоме выбора. В силу теоремы 128 существует такая функция f, что область определения f есть некоторый ординал и $f(u) = g(f|u)$ для каждого порядкового числа u. Тогда $f(u) = c$ $(x \setminus (\text{*область значений* } (f|u)))$, и если $u \in (\text{*область определения* } f)$, то $f(u) \in x \setminus (\text{*область значений* } (f|u))$. Но f является взаимно однозначной функцией, ибо если $f(v) = f(u)$ и $u < v$, то $f(v) \in (\text{*область значений* } (f|v))$, а это противоречит тому, что $f(v) \in x \setminus (\text{*область значений* } (f|v))$. Так как f — взаимно однозначная функция, то равенство «$(\text{*область определения* } f) = R$» невозможно. В самом деле, f^{-1} — функция, область определения которой является подклассом класса x, а значит, множеством. Отсюда следует, что область значений f^{-1} является множеством в силу аксиомы подстановки, а R не является множеством. Следовательно, $(\text{*область определения* } f) \in R$. Так как $(\text{*область определения* } f) \notin (\text{*область определения* } f)$, то $f(\text{*область определения* } f) = \mathfrak{U}$ *) и, значит, $c(x \setminus (\text{*область значений* } f)) = \mathfrak{U}$. Так как область определения c есть $\mathfrak{U} \setminus \{0\}$, то $x \setminus (\text{*область значений* } f) = 0$. Отсюда сразу следует, что функция f искомая.

141. Определение. *n является гнездом в том и только в том случае, когда из того, что x и y являются элементами класса n, следует, что $x \subset y$ или $y \subset x$.*

Следующий результат понадобится в доказательстве теоремы 143.

---

*) См. определение 68 и теорему 69. (*Прим. перев.*)

142. Теорема. *Если n — гнездо и каждый элемент класса n является гнездом, то $\bigcup n$ — гнездо.*

Доказательство. Если $x \in m$, $m \in n$, $y \in p$ и $p \in n$, то либо $m \subset p$, либо $p \subset m$, ибо n — гнездо. Предположим, что $m \subset p$. Тогда $x \in p$ и $y \in p$ и, так как p — гнездо, то либо $x \subset y$, либо $y \subset x$.

Следующая теорема — *принцип максимальности Хаусдорфа*. Утверждается существование максимального гнезда в любом множестве. Доказательство ее тесно связано с доказательством теоремы 140.

143. Теорема. *Для любого множества x существует такое гнездо n, что $n \subset x$, и если m — гнездо, $m \subset x$ и $n \subset m$, то $m = n$.*

Доказательство. Доказательство будем вести по трансфинитной индукции. Интуитивное его описание: мы берем какое-нибудь гнездо, затем большее гнездо и продолжаем действовать таким образом в уверенности, что, поскольку R не является множеством, множество всех гнезд, содержащихся в x, истощится раньше, чем класс R ординалов. Для каждого h положим $g(h) = c(\{m : m$ *— гнездо*, $m \subset x$ *и для* p *из области значений* h $p \subset m$ *и* $p \neq m\})$, где c — функция выбора, удовлетворяющая аксиоме выбора. (Интуитивно, в качестве $g(h)$ возьмем какое-нибудь гнездо в x, содержащее в качестве собственной части любое ранее выбранное гнездо.) В силу теоремы 128 существует такая функция f, что область определения f представляет собой некоторый ординал и $f(u) = g(f \mid u)$ для каждого порядкового числа u. Из определения g вытекает, что если $u \in$ (*область определения* f), то $f(u) \subset x$ и $f(u)$ — гнездо, причем если u и v — такие элементы области определения f, что $u < v$, то $f(u) \subset f(v)$ и $f(u) \neq f(v)$. Следовательно, f — взаимно однозначная функция, f^{-1} — функция, и так как x — множество, то (*область определения* f) $\in R$. Раз f(*область определения* f) $= \mathfrak{U}$, то $g(f) = \mathfrak{U}$. Следовательно, не существует гнезда m, содержащегося в x и строго содержащего каждый элемент области значений f. Наконец, $\bigcup$ (*область значений* f) — гнездо, которое содержит каждый элемент области значений f. Следовательно, не существует гнезда m, содержащегося в x и строго содержащего $\bigcup$ (*область значений* f).

КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе определяются кардинальные числа и доказываются их наиболее часто применяемые свойства. Доказательства очень тесно связаны с предшествующими результатами.

144. Определение. *$x \approx y$ в том и только в том случае, когда существует взаимно однозначная функция f, для которой (область определения f) $= x$ и (область значений f) $= y$.*

Если $x \approx y$, то говорят, что (класс) *x эквивалентен* (классу) y или что x и *y равномощны.*

145. Теорема. $x \approx x$.

146. Теорема. *Если $x \approx y$, то $y \approx x$.*

147. Теорема. *Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$.*

148. Определение. *x является кардинальным числом в том и только в том случае, когда x — порядковое число и из того, что $y \in R$ и $y < x$, следует, что $x \approx y$ ложно.*

Таким образом, кардинальное число — это такое порядковое число, которое не эквивалентно никакому меньшему порядковому числу.

149. Определение. $C = \{x : x$*—кардинальное число*$\}$.

150. Теорема. *E вполне упорядочивает C.*

151. Определение. $P = \{(x, y) : x \approx y$ *и* $y \in C\}$.

Класс P состоит из всех пар (x, y), где x — множество и y — кардинальное число, эквивалентное x. Кардинальное число $P(x)$, где x — любое множество, называется *мощностью* множества x, или *кардиналом* этого множества.

Основные факты, лежащие в основе следующего ряда утверждений, уже сообщены нами.

152. Теорема. *P является функцией, (область определения P) $= \mathcal{U}$ и (область значений P) $= C$.*

Доказательство. Решающую роль в доказательстве играет теорема 140.

153. Теорема. *Если x — множество, то $P(x) \approx x$.*

154. Теорема. *Если x и y — множества, то $x \approx y$ в том и только в том случае, когда $P(x) = P(y)$.*

155. Теорема. $P(P(x)) = P(x)$.

Доказательство. Если x не является множеством, то $P(x)=\mathcal{U}$ в силу теоремы 69 и $P(\mathcal{U})=\mathcal{U}$.

156. Теорема. *$x\in C$ в том и только в том случае, когда x — множество и $P(x)=x$.*

157. Теорема. *Если $y\in R$ и $x\subset y$, то $P(x)\leqslant y$.*

Доказательство. В силу теоремы 99 существует взаимно однозначная функция f, которая E—E-сохраняет порядок в x и R и такая, что либо (*область определения* $f)=x$, либо (*область значений* $f)=R$. Так как x — множество, а R не является множеством, то (*область определения* $f)=x$. В силу теоремы 94 $f(u)\leqslant u$, когда $u\in x$; следовательно, x эквивалентно некоторому порядковому числу, меньшему y или равному y.

158. Теорема. *Если y — множество и $x\subset y$, то $P(x)\leqslant P(y)$.*

Следующее утверждение — теорема Шредера — Бернштейна *). Ее можно доказать прямо, не пользуясь аксиомой выбора (теорема 0.20).

159. Теорема. *Если x и y — множества, $u\subset x$, $v\subset y$, $x\approx v$ и $y\approx u$, то $x\approx y$.*

Доказательство. В силу теоремы 157 $P(x)=P(v)\leqslant P(y)=P(u)\leqslant P(x)$.

160. Теорема. *Пусть f — функция, причем f — множество; тогда P(область значений $f)\leqslant P$(область определения f).*

Доказательство. Пусть функция f отображает x на y и c — функция выбора, удовлетворяющая аксиоме выбора. Тогда существует такая функция g, что (*область определения* $g)=y$ и $g(v)=c(\{u : v=f(u)\})$ для $v\in y$. Следовательно, y эквивалентно подмножеству множества x.

Ниже излагается классическая теорема Кантора.

161. Теорема. *Для любого множества x имеет место $P(x)<P(2^x)$.*

Доказательство. Функция, область определения которой есть x, а значение на произвольном элементе u класса x равно $\{u\}$, является взаимно однозначной функцией. Следовательно, x эквивалентно некоторому

*) Эта теорема чаще называется теоремой Кантора — Бернштейна. (*Прим. перев.*)

подмножеству множества 2^x и $P(x) \leqslant P(2^x)$. Если $P(x) = P(2^x)$, то существует взаимно однозначная функция f с областью определения x и областью значений 2^x. Найдется такой элемент u класса x, что $f(u) = \{v : v \in x$ *и* $v \notin f(v)\}$. Но тогда $u \in f(u)$ тогда и только тогда, когда $u \notin f(u)$, в чем заключается противоречие.

Предшествующее рассуждение похоже по построению на парадокс Рассела.

162. Теорема. *C не является множеством.*

Доказательство. Если C — множество, то $\bigcup C$ — множество, $P(2^{\bigcup C}) \in C$ и, следовательно, $P(2^{\bigcup C}) \subset \bigcup C$. Значит, $P(2^{\bigcup C}) \leqslant P(\bigcup C)$, что ведет к противоречию.

После некоторых приготовлений мы разобьем кардинальные числа на два класса: конечные кардинальные числа и бесконечные кардинальные числа — и докажем для каждого класса несколько специальных свойств.

163. *Если $x \in \omega$, $y \in \omega$ и $x+1 \approx y+1$, то $x \approx y$.*

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая $x+1$ на $y+1$; тогда существует взаимно однозначная функция g, отображающая $x+1$ на $y+1$ и такая, что $g(x) = y$; в качестве g годится, например, $(f \setminus (\{(x, f(x))\} \cup \{(f^{-1}(y), y)\})) \cup \cup \{(f^{-1}(y), f(x))\} \cup \{(x, y)\}$. Тогда $g|x$ — взаимно однозначная функция, заданная на x, с y в качестве множества значений.

164. Теорема. $\omega \subset C$.

Доказательство. Доказательство ведется по индукции. Применим предыдущую теорему к первому целому числу, эквивалентному меньшему целому числу, и получим противоречие. Это означает, что каждое целое число является кардинальным числом.

165. Теорема. $\omega \in C$.

Доказательство. Если $\omega \approx x$ и $x \in \omega$, то $x \subset x+1 \subset \omega$ и, значит, $P(x+1) = P(x)$. Это противоречит предыдущей теореме, в которой утверждается, что каждое целое число является кардинальным числом.

166. Определение. *Класс x конечен в том и только в том случае, когда $P(x) \in \omega$.*

167. Теорема. *Класс x конечен в том и только в том случае, когда существует такое r, что как r, так и r^{-1} вполне упорядочивает x.*

Доказательство. Если $P(x) \in \omega$, то и E и E^{-1} вполне упорядочивают $P(x)$, а так как $x \approx P(x)$, то не составляет труда найти такое r, что r и r^{-1} вполне упорядочивают x. Обратно, если r и r^{-1} вполне упорядочивают x, то в силу теоремы 99 существует взаимно однозначная функция f, которая r — E-сохраняет порядок в x и R и такая, что либо (*область определения* $f) = x$, либо (*область значений* $f) = R$. Если $\omega \subset$ (*область значений* f), то r^{-1} не вполне упорядочивает x, ибо в ω нет E-последнего элемента. Следовательно, (*область значений* $f) \in \omega$, (*область определения* $f) = x$, откуда и вытекает наша теорема.

Каждую из следующего ряда теорем о конечных множествах можно доказать по индукции относительно мощности множества или построением подходящего вполне упорядочения с последующей ссылкой на теорему 167. Будут даны примеры доказательств каждого из этих типов.

168. Теорема. *Если x и y конечны, то $x \cup y$ конечно.*

Доказательство. Пусть r и r^{-1} вполне упорядочивают x, а s и s^{-1} вполне упорядочивают y. Беря r на точках из x, s на точках из $y \setminus x$ и полагая, что каждый элемент класса $y \setminus x$ следует за каждым элементом класса x, можно построить подходящее упорядочение на $x \cup y$.

169. Теорема. Если *x конечен и каждый элемент класса x конечен, то и класс $\bigcup x$ конечен.*

Доказательство. Можно провести рассуждение по индукции относительно $P(x)$. А именно, рассмотрим множество s всех таких целых чисел u, что если $P(x) = u$ и каждый элемент класса x конечен, то и класс $\bigcup x$ конечен. Ясно, что 0 принадлежит множеству s. Если $u \in s$, $P(x) = u + 1$ и каждый элемент класса x конечен, то можно разбить x на два множества, одно из которых имеет мощность u, а другое содержит лишь один элемент. Из предположения индукции в силу предшествующей теоремы следует, что класс $\bigcup x$ конечен. Значит, $s = \omega$.

170. Теорема. *Если x и y конечны, то и класс $x \times y$ конечен.*

Доказательство. Класс $x \times y$ является объединением элементов некоторого конечного класса; эти элементы имеют вид $\{v\} \times y$, где $v \in x$.

171. Теорема. *Если класс x конечен, то и класс 2^x конечен.*

Доказательство. Пусть y — целое число. Тогда подмножества множества $y+1$ можно разбить на два класса: те, которые являются подмножествами множества y, и те, которые являются объединением некоторого подмножества множества y и $\{y\}$. Это дает необходимую основу для индуктивного доказательства теоремы.

172. Теорема. *Если класс x конечен, $y \subset x$ и $P(y) = P(x)$, то $x = y$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда x — целое число. Предположим, что $y \subset x$, $y \neq x$, $P(y) = x$ и $x \in \omega$. Тогда $x \neq 0$ и, значит, $x = u+1$ для некоторого целого числа u. Так как $y \neq x$, то найдется подмножество класса u, эквивалентное y; значит, $P(y) \leqslant u$. Но $P(y) = x = u+1$, а это противоречит тому, что каждое целое число является кардинальным.

Обнаруженный теоремой 172 факт неэквивалентности конечного множества никакому его собственному подмножеству в действительности характеризует конечные множества.

173. Теорема. *Если x — множество, причем не конечное, то существует такое подмножество y множества x, что $y \neq x$ и $x \approx y$.*

Доказательство. Так как x — множество, причем не конечное, то $\omega \subset P(x)$. Существует функция f, заданная на $P(x)$, такая, что $f(u) = u+1$ при $u \in \omega$ и $f(u) = u$ при $u \in P(x) \setminus \omega$. Это взаимно однозначная функция, причем (*область значений* f) $= P(x) \setminus \{0\}$. Так как $P(x) \approx x$, то утверждение теоремы ясно.

174. Теорема. *Если $x \in R \setminus \omega$, то $P(x+1) = P(x)$.*

Доказательство. Ясно, что $P(x) \leqslant P(x+1)$. Так как множество x не конечно, то в нем найдется такое подмножество u, что $u \neq x$ и $u \approx x$. Следовательно, существует взаимно однозначная функция f на $x+1$ такая, что $f(y) \in u$ при $y \in x$ и $f(x) \in x \setminus u$. Значит, $P(x+1) \leqslant \leqslant P(x)$.

Главная из оставшихся нам теорем связана с порядком, который предстоит задать на декартовом произведении $R \times R$. Может оказаться полезным интуитивное описание этого порядка. Это вполне упорядочение с тем свойством на $\omega \times \omega$, что класс всех предшественников произвольного элемента (x, y) из $\omega \times \omega$ конечен (некоторое обобщение этого факта представляет собой ключ к объяснению ценности предлагаемого порядка). Изобразим $\omega \times \omega$ как подмножество евклидовой плоскости и разобьем его на классы: пары (x, y) и (u, v) относятся к одному классу, если максимум x и y совпадает с максимумом u и v. Тогда каждый класс представляется двумя сторонами квадрата; упорядочение устроено так, что точки меньших квадратов предшествуют точкам больших. На точках, принадлежащих сторонам одного квадрата, упорядочение соответствует движению по верхнему краю вплоть до угловой точки, но исключая ее, с последующим перемещением снизу вверх по второй стороне до угловой точки включительно.

Когда x и y — ординалы, наибольшим из них является $x \cup y$. Этим мотивируется следующее определение.

175. Определение. $\max[x, y] = x \cup y$.

176. Определение. $\ll = \{z$: *для некоторого* $(u, v) \in \in R \times R$ *и некоторого* $(x, y) \in R \times R$ $z = ((u, v), (x, y))$ *и* $\max[u, v] < \max[x, y]$, *или* $\max[u, v] = \max[x, y]$ *и* $u < x$, *или* $\max[u, v] = \max[x, y]$ *и* $u = x$ *и* $v < y\}$.

177. Теорема. $\ll$ *вполне упорядочивает* $R \times R$.

Доказательство заключается в прямом, но громоздком применении определения и того факта, что $<$ вполне упорядочивает R.

178. Теорема. *Если* $(u, v) \ll (x, y)$, *то* $(u, v) \in \in (\max[x, y]+1) \times (\max[x, y]+1)$.

Доказательство. Ясно, что $\max[u, v] \leqslant \leqslant \max[x, y]$; значит, $\max[u, v] \subset \max[x, y]$. Ординалы u и v являются подмножествами класса $\max[x, y]$, поэтому они являются элементами класса $\max[x, y]+1$.

179. Теорема. *Если* $x \in C \setminus \omega$, то $P(x \times x) = x$.

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. Пусть x — первый элемент класса $C \setminus \omega$, для которого теорема неверна. В силу теоремы 99 существует функция f, которая $\ll$—E-сохраняет порядок в $x \times x$ и R и такая, что либо (*область определения* $f) = x \times x$, либо (*область значений* $f) = R$. Так как $x \times x$ — множество, а R множеством не является, то (*область определения* $f) = x \times x$. Мы покажем, что если $(u, v) \in x \times x$, то $f((u, v)) < x$, откуда и будет следовать теорема. В силу предыдущей теоремы класс всех элементов, предшествующих (u, v), является подмножеством класса $(\max[u, v] + 1) \times (\max[u, v] + 1)$. Если $x = \omega$, то u и v конечны, ибо $\max[u, v] < x$ в силу теоремы 170. Множество $(\max[u, v] + 1) \times (\max[u, v] + 1)$ конечно; следовательно, у $f((u, v))$ есть только конечное число предшественников и $f((u, v)) < x$. Если $x \neq \omega$ и $\max[u, v]$ не конечен, то $P(\max[u, v] + 1) = P(\max[u, v]) < x$ в силу теоремы 174. Значит, $P(f((u, v))) < x$ и $f((u, v)) < x$.

180. Теорема. *Пусть хотя бы один из элементов x и y класса C не принадлежит ω. Тогда $P(x \times y) = \max[P(x), P(y)]$.*

Элементы класса $C \setminus \omega$ называются *бесконечными*, или *трансфинитными*, кардинальными числами.

Кардинальные числа являются объектом многих важных и полезных теорем, не нашедших места в этой книге. Дальнейшие сведения и ссылки можно найти, например, в книге Френкеля [1]. Наше обсуждение завершается краткой постановкой одной из классических нерешенных проблем теории множеств.

181. Теорема. *Существует единственная $<$—$<$-сохраняющая порядок функция с областью определения R и областью значений $C \setminus \omega$.*

Доказательство. В силу теоремы 99 существует единственная функция f, $<$—$<$-сохраняющая порядок в R и $C \setminus \omega$, такая, что либо (*область определения* $f) = R$, либо (*область значений* $f) = C \setminus \omega$. Так как каждая E-секция класса R и каждая E-секция класса $C \setminus \omega$ является множеством и ни R, ни $C \setminus \omega$ не являются множествами, то невозможно, чтобы было (*область определения* $f) \neq R$ или (*область значений* $f) \neq C \setminus \omega$.

Однозначно определенная $<$—$<$-сохраняющая порядок функция, существование которой гарантирует предыдущая теорема, обычно обозначается через $\aleph$. Таким образом, $\aleph(0)$ (или $\aleph_0$) есть ω. Следующее кардинальное число $\aleph_1$ часто обозначается через Ω: это первое несчетное порядковое число. Так как $P(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, то отсюда следует, что $P(2^{\aleph_0}) \geqslant \aleph_1$. Равенство последних двух кардинальных чисел — чрезвычайно привлекательная гипотеза. Она называется *гипотезой континуума. Обобщенная гипотеза континуума* состоит в следующем: если x — порядковое число, то $P(2^{\aleph_x}) = \aleph_{x+1}$. Ни одна из этих гипотез не доказана и не опровергнута. Однако Гёдель [1] доказал прекрасную математическую теорему: если, отправляясь от континуум-гипотезы, можно прийти к противоречию, то можно построить противоречие и не прибегая к континуум-гипотезе Таково же в основном положение с обобщенной гипотезой континуума и аксиомой выбора *).

*) Недавно (1963 г.) П. Коэн [1] доказал независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора в системе аксиом Цермело — Френкеля теории множеств. (*Прим. перев.*)

БИБЛИОГРАФИЯ

Александров А. Д.

[1] О расширении хаусдорфова пространства до H-замкнутого, ДАН СССР **37**, № 4 (1942), 138—141.

Александров П. С.

[1] Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **178** (1924), 185—187.

[2] Über die Metrisation der im kleinen kompakten Räume, Math. Ann. **92** (1924), 294—301.

[3] Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann **96** (1927), 555—571

[4] О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб. **5** (**47**) (1939), 403—424.

[5] О понятии пространства в топологии, Успехи матем. наук **2**, № 1 (1947), 5—57.

[6] Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

[7] О метризации топологических пространств, Бюлл. Польской акад. наук **8** (1960), 127—135.

[8] О некоторых результатах в теории топологических пространств за последние 25 лет, Успехи матем. наук **15**, № 2 (1960), 25—95.

[9] О некоторых основных направлениях в общей топологии, Успехи матем. наук **19**, № 6 (1964), 3—46.

Александров П. С. и Пономарев В. И.

[1] О бикомпактных расширениях топологических пространств, ДАН СССР **121** (1958), 575—578.

[2] О бикомпактных расширениях топологических пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5 (1959) 93—108.

Александров П. С. и Урысон П. С.

[1] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D), Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **177** (1923), 1274—1276.

[2] Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verh. kon. Acad. Wetensch. Amsterdam **14** (1929), 1—96. [Русский перевод: О компактных топологических пространствах. в кн. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, Гостехиздат, 1951.]

Александров П. С. и Хопф (Hopf H.)

[1] Topologie I, Berlin, 1935.

Антоновский М. Я., Болтянский В. Г. и Сарымсаков Т. А.

[1] Метрические пространства над полуполями, Тр. Ташк. ун-та, **191** (1961).

[2] Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963.

Апперт (Appert A.)

[1] Ecart partielement ordonné et uniformité, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **224** (1947), 442—444.

Апперт (Appert A.) и Ки Фан (Ky Fan)

[1] Espaces topologiques intermédiares. Problème de la distanciation, Actualités Sci. Ind. **1121**, Paris, 1951.

Аренс (Arens R.)

[1] A topology for spaces of transformations, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 480—495.

[2] Topologies for homeomorphism groups, Amer. J. Math. **68** (1946), 593—610.

[3] Note on convergence in topology, Math. Mag. **23** (1950), 229—234.

Аренс (Arens R.) и Дугунджи (Dugundji J.)

[1] Remark on the concept of compactness, Portugaliae Math. **9** (1950), 141—143.

[2] Topologies for function spaces, Pacific J. Math. **1** (1951), 5—31.

Аронштайн (Aronszajn N.)

[1] Über ein Urbildproblem, Fund. Math. **17** (1931), 92—121.

[2] Quelques remarques sur les relations entre les notions d'écart regulier et de distance, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 653—657.

Архангельский А. В.

[1] О метризации топологических пространств, Бюлл. Польской акад. наук, сер. матем. **8**, № 9 (1960), 589—595.

[2] Новые критерии паракомпактности и метризуемости произвольного T_1-пространства, ДАН СССР **141**, № 1 (1961), 13—15.

[3] Некоторые метризационные теоремы, Успехи матем. наук **18**, № 5 (1963), 139—145.

[4] Бикомпактные множества и топология пространств, Труды Моск. матем. о-ва **13** (1965), 3—55.

[5] Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства, Матем. сб. **67** **(109)**, № 1 (1965), 55—85.

[6] Замкнутый образ метрического пространства уплотняется на метрическое, ДАН СССР **170**, № 1 (1966), 9—13.

[7] О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова, Матем. сб. **69** **(111)**, № 1 (1966), 13—34.

[8] Отображения и пространства, Успехи матем. наук **21**, № 4 (1966), 132—184.

[9] Отображения открытые и близкие к открытым, Труды Моск. матем. о-ва **15** (1966), 181—223.

Баланцат (Balanzat M.)

[1] On the metrization of quasi-metric spaces, Gaz. Mat., Lisboa **12**, № 50 (1951), 91—94.

Банах (Banach S.)

[1] Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932.

Бегль (Begle E. G.)

[1] A note on *S* spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 577—579.

Бессага (Bessaga C.)

[1] On topological classification of complete linear metric spaces, Fund. Math. **56**, № 3 (1965), 250—288.

Бинг (Bing R. H.)

[1] Metrization of topological spaces, Canad. J. Math. **3** (1951), 175—186.

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1] A note on topological groups, Compositio Math. **3** (1936), 427—430.

[2] Moore-Smith convergence in general topology, Ann. of Math. (2), **38** (1937), 39—56.

[3] Lattice Theory (Revised Ed.), A. M. S. Colloquium Publ. XXV, New York, 1948. [Русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.]

Бурбаки (Bourbaki N.)

[1] Topologie générale, Actualités Sci. Ind., Paris **858** (1940), **916** (1942), **1029** (1947), **1045** (1948), **1084** (1949). [Русский перевод части этих изданий см. Бурбаки Н., Общая топология, Физматгиз, 1958.]

[2] Intégration. Actualités Sci. Ind., Paris **1175** (1952) [Русский перевод. Бурбаки Н., Интегрирование, «Наука», 1967.]
[3] Espaces vectoriels topologiques, Actualités Sci. Ind., Paris **1189** (1953). [Русский перевод: Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.]

Бурбаки (Bourbaki N) и Дьедонне (Dieudonne J.)
[1] Note de tératopologie, II. Revue Scientifique **77** (1939), 180—181.

Вайдьянатасвами (Vaidyanathaswamy R.)
[1] Treatise on set topology, I, Madras, 1947.

Вайнштейн И. А.
[1] О замкнутых отображениях, Учен. зап. МГУ **155** (1952), 3—53.

ван Эст (van Est W T.) и Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1] Trennung durch stetige functionen in topologische Räumen, Indagationes Math. **13** (1951), 359—368.

Вейль (Weil A.)
[1] Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités Sci. Ind., Paris **551** (1937).
[2] L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités Sci. Ind., Paris **869** (1940). [Русский перевод: Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, 1950.]

Гейл (Gale D.)
[1] Compact sets of functions and function rings, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 303—308.

Гёдель (Gödel K.)
[1] The consistency of the continuum hypothesis, Ann. of Math. Studies **3** (1940).

Гилман (Gillman R.) и Джерисон (Jerison M.)
[1] Rings of continuous functions, Princeton, 1960.

Глисон (Gleason A. M.)
[1] Projective topological spaces, Illinois Math. J. **2**, № 4a (1958), 482—489.

Гомес (Gomes A. P.)
[1] Topologie induite par un pseudodiamètre, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **227** (1948), 107—109.

Грейвз (Graves L. M.)
[1] The theory of functions of real variables, N. Y., 1946.

Гротендик (Grothendieck A.)
[1] Critères de compacité dans les espaces fonctionells généraux, Amer. J. Math **74** (1952), 168—186
Гуревич (Hurewicz W.) и Уолмен (Wallman H.)
[1] Dimension theory, Princeton, 1941. [Русский перевод: Гуревич У. и Уолмен Г., Теория размерности, ИЛ, 1948.]
Густин (Gustin W.)
[1] Countable connected spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946).
Даукер (Dowker C. H.)
[1] An embedding theorem for paracompact metric spaces, Duke Math. J. **14** (1947), 639—645.
[2] On countably paracompact spaces, Canad. J. Math. **3** (1951).
[3] On a theorem of Hanner, Ark. Mat. **2** (1952), 307—313.
Дей (Day M. M.)
[1] Convergence, closure and neighborhoods, Duke Math. J. **11** (1944), 181—199.
Джонс (Jones F. B.)
[1] R L. Moore's Axiom 1′ and metrisation, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 487.
Диксмье (Dixmier J.)
[1] Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasil. Math. **2** (1951), 151—182.
Досс (Doss R.)
[1] On uniform spaces with a unique structure, Amer. J. Math **71** (1949), 19—23.
Дугунджи (Dugundji J.).
[1] An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math. **1** (1951), 353—367.
Дьедонне (Dieudonné J.)
[1] Sur les espaces uniformes complêts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **56** (1939), 227—291.
[2] Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complêt, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **209** (1939), 145—147.
[3] Sur la complétion des groupes topologiques, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **218** (1944). 774—776.
[4] Une généralization des espaces compacts, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 65—76.
[5] On topological groups of homeomorphisms, Amer. J. Math. **70** (1948), 659—680.

[6] Sur un espace localement compact non metrisable, Anais do Acad Bras. Ci. **19** (1947), 67—69.

Ефимов Б. А.

[1] Диадические бикомпакты, Труды Моск. матем. о-ва **14** (1965), 211—247.

Зайцев В.

[1] Проекционные спектры и бикомпактные расширения, ДАН СССР **171**, № 3 (1966).

Зарелуа А. В.

[1] О теореме Гуревича, Матем. сб. **60** (**102**), № 1 (1963), 17—28.

Зоргенфрей (Sorgenfrey R. H.)

[1] On the topological product of paracompact spaces, Bull. Amer. Math. Soc **53** (1947), 631—632.

Илиадис С. и Фомин С. В.

[1] Метод центрированных систем в теории топологических пространств, Успехи матем. наук **21**, № 4 (1966), 47—76.

Исеки (Iseki K.)

[1] On definitions of topological space, J. Osaka Inst. Sci. Tech. **1** (1949), 97—98.

Кадец М. И.

[1] Топологическая эквивалентность всех сепарабельных пространств Банаха, ДАН СССР **167**, № 1 (1966), 23—25.

Какутани (Kakutani S.)

[1] Über die Metrization der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan **12** (1936), 82—84.

Калиш (Kalisch G. K.)

[1] On uniform spaces and topological algebra, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 936—939.

Кантор (Cantor G.)

[1] Учение о множествах, перевод с немецкого, СПб., 1914.

Катетов (Katětov M. G.)

[1] On *H*-closed extensions of topological spaces, Časopis Pést. Mat. Fys. **72** (1947), 17—32.

Келдыш Л. В.

[1] Монотонные отображения куба на куб большей размерности, Матем. сб. **41** (**83**) (1957), 129—158.

[2] Нульмерные открытые отображения, Изв. АН СССР **23** (1959), 165—184.

Келли (Kelley J. L.)

[1] Convergence in topology, Duke Math. J. **17** (1950), 277—283.

[2] The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math. **37** (1950), 75—76.

Кёте (Köthe G.)

[1] Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Räumes, Math. Z **51** (1947), 17—35.

Кли (Klee V. L.)

[1] Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach), Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1953), 484—487.

Кнастер (Knaster B.) и Куратовский (Kuratowski C.)

[1] Sur les ensembles connexes, Fund. Math. **2** (1921), 206—255.

Колме (Colmez J.)

[1] Espaces à écart généralisé regulier, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **224** (1947), 372—373.

Колмогоров А. Н.

[1] Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Räumes, Studia Math. **5** (1934), 29—33.

Коэн Г. (Cohen H. J.)

[1] Sur un problème de M. Dieudonné, Compt. Rend. Acad. Sci., Paris **234** (1952), 290—292.

Коэн Л. (Cohen L. W.)

[1] On topological completeness, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 706—710.

Коэн Л. (Cohen L. W.) и Гофман (Goffman C.)

[1] On the metrization of uniform space, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 750—753.

Коэн П. (Cohen P. J.)

[1] The independence of the continuum hypothesis, I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50**, № 6 (1963), 1143—1148; **51**, № 1 (1964), 105.

Кришна Мурти (Krishna Murti S. B.)

[1] A set of axioms for topological algebra, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **4** (1940), 116—119.

Куайн (Quine W. V. O.)

[1] Mathematical logic, Cambridge (USA), 1947.

Куратовский (Kuratowski C.)

[1] Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnement mathematiques, Fund. Math. **3** (1922), 76—108.

[2] Topologie. I (2nd. Ed.), Warsaw, 1948. [Русский перевод: Куратовский К., Топология, т. 1, «Мир», 1966.]

[3] Topologie. II, Warsaw, 1950.

Ландау (Landau E.)
[1] Grundlagen der Analysis, Amer. Ed., N. Y., 1946.
Ласаль (Lasalle J. P.)
[1] Topology, based upon the concept of pseudo-norm., Proc. Nat. Acad. Sci. USA **27** (1941), 448—451.
Лашнев Н. С.
[1] О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств, ДАН СССР **165**, № 4 (1965), 756—758.
Лефшец (Lefschetz S.)
[1] Algebraic topology, AMS Colloquium Publ. XXVII, N. Y., 1942.
Лифанов И. К.
[1] О двух задачах Мардешича, ДАН СССР **162**, № 5 (1965), 997—1000.
Локуциевский О. В.
[1] Пример открытого отображения одномерного компакта на гильбертов параллелепипед, Учен. зап. МГУ **165**, № 7 (1954), 118—130.
[2] Одна теорема о неподвижной точке, Успехи матем. наук **12**, № 3 (1957), 171—172.
[3] Об одной проблеме П. С. Урысона, ДАН СССР **151**, № 4 (1963), 775—777.
[4] Пространство относительной топологии, ДАН СССР **157**, № 5 (1964), 1035—1038.
[5] К топологии континуумов, ДАН СССР **164**, № 6 (1965), 1235—1238.
Люмис (Loomis L. H.)
[1] On the representation of σ-complete Boolean algebras, Bull. Amer. Math Soc. **53** (1947), 757—760.
[2] Abstract harmonic analysis, N. Y., 1953. [Русский перевод: Л. Люмис, Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, 1956.]
Майерс (Myers S. B.)
[1] Equicontinuous sets of mappings, Ann. Math. (2) **47** (1946), 496—502.
[2] Normed linear spaces of continuons functions, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 233—241.
[3] Functional uniformities, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 153—158.
Майкл (Michael E.)
[1] Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 151—182.

[2] A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc **4** (1953), 831—838.

[3] Another note on paracompact spaces. Proc. Amer. Math Soc. **8** (1957), 822—828.

[4] A theorem on semi-continuous set-valued functions, Duke Math. J **26**, № 4 (1959), 647—656.

[5] Yet another note on paracompact spaces, Proc. Amer Math Soc. **10**, № 2 (1959), 309—324.

[6] The product of a normal space and a metric space need not be normal, Bull. Amer. Math. Soc **69**, № 3 (1963), 375—376.

Мак Шейн (McShane E. J.)

[1] Integration, Princeton, 1944.

[2] Partial orderings and Moore-Smith limits, Amer. Math. Monthly **59** (1952), 1—11.

[3] Order-preserving maps and integration processes, Ann. of Math. Studies **31**, Princeton 1953

Мардешич (Mardešič S.) и Папич (Papič P.)

[1] Диадические бикомпакты и непрерывные отображения упорядоченных бикомпактов, ДАН СССР **143** (1962), 529—531.

Мищенко А. С.

[1] О бикомпактах с точечно счетной базой, ДАН СССР **144**, № 5 (1962), 985—987.

Монтейро (Monteiro A.)

[1] Caractérisation des espaces de Hausdorff au moyen de l'opération de dérivation, Portugaliae Math. **1** (1940), 333—339.

[2] Caractérisation de l'opération de fermeture par une seul axiome, Portugaliae Math. **4** (1945), 158—160.

Мор Р. (Moore R. L.)

[1] Foundations of point set theory, AMS Colloquium Publ. XIII, N. Y. 1932.

Мор Э. (Moore E.)

[1] Definition of limit in general integral analysis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **1** (1915), 628.

[2] General analysis I, Pt. II, Philadelphia, 1939.

Мор Э. (Moore E. H.) и Смит (Smith H. L.)

[1] A general theory of limits, Amer. J. Math. **44** (1922), 102—121.

Морита (Morita K.)

[1] Star-finite coverings and the star-finite property, Math. Jap. **1** (1948), 60—68.

Морита (Morita K.) и Ханаи (Hanai S.)
[1] Closed mappings and metric spaces, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 10—14.
Мышкис А. Д.
[1] К понятию границы, Матем. сб., н. с. **25**, № 3 (1949), 387—414.
[2] Введение границы при помощи непрерывных отображений, Матем. сб., н. с. **26**, № 2 (1950), 225—227.
[3] Об эквивалентности некоторых способов введения границы, Матем. сб., н. с. **26**, № 2 (1950), 228—236.
Нагата (Nagata J.)
[1] On a necessary and sufficient condition of metrizability, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. **1** (1950), 93—100.
[2] On the uniform topology of bicompactifications, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. **1** (1950), 28—39.
Накано (Nakano H.)
[1] Topology and linear topological spaces, Tokyo, 1951.
Нахбин (Nachbin L.)
[1] Topological vector spases, Rio de Janeiro, 1948.
Нейман (von Neumann J.)
[1] On complete topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 1—20.
Новак (Novak J.)
[1] Regular space on which every continuous function is constant, Časopis Pést. Mat. Fys. **73** (1948), 58—68.
Ньюмен (Neuman M. H. A)
[1] Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge, 1939.
Пархоменко А. С.
[1] О взаимно однозначных и непрерывных отображениях, Матем. сб. **5** (1939), 197—210.
Пасынков Б. А.
[1] О почти метризуемых группах, ДАН СССР **161**, № 2 (1965), 281.
[2] Частичные топологические произведения, Труды Моск. матем. о-ва **13** (1965), 136—245.
Петтис (Pettis B. J.)
[1] On continuity and openess of homomorphisms in topological groups, Ann. of Math. (2) **51** (1950), 293—308.
[2] A note on everywhere dense subgroups, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 322—326.

П о н о м а р е в В. И.

[1] Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Матем. сб., н. с. **48** (1959), 211—232.

[2] Аксиомы счетности и непрерывные отображения, Бюлл. Польской акад. наук **8**, № 3 (1960), 127—134.

[3] Нормальные пространства как образы нульмерных, ДАН СССР **132** (1960), 1269—1272.

[4] О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных непрерывных отображениях, Матем. сб., н. с. **51**, № 4 (1960), 515—536.

[5] О продолжении многозначных отображений топологических пространств на бикомпактные расширения, Матем. сб., н. с. **52**, № 3 (1960), 847—862.

[6] Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения, Матем. сб., н. с. **60** (1963), 89—119.

[7] О пространствах, соабсолютных с метрическими, Успехи матем. наук **21**, № 4 (1966), 101—132.

П о н т р я г и н Л. С.

[1] Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.

П р о и з в о л о в В. В.

[1] О взаимно однозначных непрерывных отображениях топологических пространств, Матем. сб., н. с. **68**, № 3 (1965), 417—431.

[2] О конечнократных открытых отображениях, ДАН СССР **166**, № 1 (1966), 38—40.

Р а м а н а т а н (R a m a n a t h a n A.)

[1] Maximal Hausdorff spaces, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. **A 26** (1947), 31—42.

Р и б е й р о (R i b e i r o H.)

[1] Caractérisations des espaces réguliers normaux et complétement normaux au moyen de l'opération de derivation, Portugaliae Math. **2** (1940), 1—7.

[2] Une extension de la notion de convergence, Portugaliae Math. **2** (1941), 153—161.

[3] Sur les espaces à métrique faible, Portugaliae Math. **4** (1943), 21—40, 65—68.

С а м ю э л ь (S a m u e l P.)

[1] Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans. Amer. Math Soc. **64** (1948), 100—132.

С е р п и н с к и й (S i e r p i n s k i W.)

[1] General topology (2nd. Ed.), Toronto, 1952.

[2] Sur les ensembles complets d'un espace (*D*), Fund. Math. **11** (1928), 203—205.

Скляренко Е. Г.

[1] Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений, Изв. АН СССР, сер. матем. **26** (1962), 427—452.

[2] О топологическом строении локально бикомпактных групп и их фактор пространств, Матем. сб. **60** (1963), 63—88.

[3] О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии, Успехи матем. наук **19**, № 6 (1964), 47—70.

Смирнов Ю. М.

[1] К теории вполне регулярных пространств, ДАН СССР **62** (1948), 749—752.

[2] Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства, ДАН СССР **77** (1951), 197—200.

[3] О метризации топологических пространств, Успехи матем. наук **6**, № 6 (1951), 100—111.

[4] О нормально расположенных множествах нормальных пространств, Матем. сб. **29** (**71**) (1951), 173—176

[5] О пространствах близости, Матем. сб. **31** (1952), 543—574.

[6] О полноте пространств близости. I, Труды Моск. матем. о-ва **3** (1954), 271—308.

[7] О полноте пространств близости. II, Труды Моск. матем. о-ва **4** (1955), 421—438.

[8] О метризации бикомпактов, разлагаемых в сумму множеств со счетной базой, Fund. Math. **43** (1956), 387—393.

[9] О сильно паракомпактных пространствах, Изв. АН СССР **20** (1956), 253—274.

Стоун А. (Stone A. H.)

[1] Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977—982.

[2] Metrizability of decomposition spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 690—700.

[3] Sequences of coverings, Pacific J. Math. **10**, № 2 (1960), 689—691.

[4] Non-separable Borel sets, Panstwowe wydamnictwo naukowe, Warszawa, 1962.

[5] On σ-discreteness and Borel isomorphism, Amer. J. Math. **85**, № 4 (1963), 655—666.

Стоун М. (Stone M. H.)

[1] The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37—111.

[2] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math Soc. **41** (1937), 375—481.

[3] Topological representations of distributive lattices and Browerian logics, Časopis Pěst Mat. Fys. **67** (1937), 1—27.

[4] Boundedness properties in function lattices, Canad. J. Math **1** (1946), 176—186.

[5] The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag. **21** (1948), 167—184.

[6] Notes on integration I, II, III, IV, Proc. Nat Acad Sci. USA **34** (1948), 336—342, 447—455, 483—490; **35** (1949), 50—58

Стофер (Stopher E. C., Jr.)

[1] Point set operators and their interrelations, Bull Amer. Math. Soc. **45** (1939), 758—762.

Тарский (Tarski A.)

[1] Introduction to modern logic (2nd Amer. Ed.), N. Y., 1946.

Тихонов А. Н.

[1] Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1929), 544—561.

[2] Über einen Funktionenräum, Math. Ann. **111** (1935), 762—766.

Тонг (Tong H.)

[1] On some problems of Čech, Ann. of Math. (2) **50** (1949), 154—157.

Тьюки (Tukey J. W.)

[1] Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math Studies **2** (1940).

Уайбёрн (Whyburn G. T.)

[1] Analytic topology, A. M. S. Colloquium Publ XXVIII, N Y., 1942.

[2] Open and closed mappings, Duke Math. J. **17** (1950), 69—74.

Уайлдер (Wilder R. L.)

[1] Topology of manifolds, AMS Colloquium Publ. XXXII, N. Y., 1949.

Умегаки (Umegaki H.)

[1] On the uniform space, Tohoku Math. J. (2) **2** (1950), 57—63.

Уоллес (Wallace A. D.)

[1] Separation spaces, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 687—697.

[2] Extensional invariance, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 97—102.

Уолмен (Wallman H.)

[1] Lattices and topological spaces, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 687—697.

Урсел (Ursell H. D.) и Янг (Young L. C.)

[1] Remarks oh the theory of prime ends, Memoirs Amer. Math. Soc. 3 (1951).

Урысон П. С.

[1] Über die Machtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. **94** (1925), 262—295.

[2] Труды по топологии и другим областям математики, тт. I и II, Гостехиздат, 1951.

Федорчук В. В.

[1] Об упорядоченных пространствах, ДАН СССР **169**, № 4 (1966), 777—780.

Филиппов В. В.

[1] О совершенном образе перистого паракомпакта, ДАН СССР **176**, № 3 (1967), 777—780.

Фокс (Fox R. H.)

[1] On topologies for function spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 429—432.

Фомин С. В.

[1] К теории расширений топологических пространств, Матем. сб. **8** (**50**) (1940), 285—294.

[2] Extensions of topological spaces, Ann. of Math. **44** (1943), 471—480. (См. также Илиадис и Фомин.)

Форт (Fort M. K., Jr.)

[1] A note on pointwise convergence, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951).

Френкель (Fraenkel A.)

[1] Einleitung in die Mengenlehre (Amer. Ed.), N. Y., 1946.

Фреше (Fréchet M.)

[1] Sur quelques points du Calcul Fonctionnel (These), Rendiconti di Palermo **22** (1906), 1—74.

[2] Les espaces abstractes, Paris, 1926.

Фрёйденталь (Freudenthal H.)

[1] Neuaufbay der Endentheorie, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 261—279.

Фринк (Frink A. H.)

[1] Distance functions and the metrization problem, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 133—142.

Фролик (Frolik Z.)

[1] On the topological product of paracompact spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. **8**, № 11—12 (1960), 747—750.

Халмош (Halmos P. R.)

[1] Measure theory, N. Y., 1950. [Русский перевод: Халмош П., Теория меры, ИЛ, 1953.]

Ханнер (Hanner O.)
[1] Retraction und extension of mappings of metric and non-metric spaces, Ark. Math. **2** (1952), 315—360.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
[1] Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. [Русский перевод: Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.]
[2] Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen, Fund. Math. **6** (1924), 146—148.
[3] Über innere Abbildungen, Fund. Math. **23** (1934), 279—291.
Хенриксен (Henriksen M.) и Исбелл (Isbell J. R.)
[1] Some properties of compactifications, Duke Math. J. **25** (1958), 83—106.
Хилле (Hille E.)
[1] Functional analysis and semi-groups. AMS Colloquium Publ. XXI, N. Y., 1948. [Русский перевод: Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.]
Ху (Hu S. T.)
[1] Archimedean uniform spaces and their natural boundedness, Portugaliae Math. **6** (1947), 49—56.
Хьюитт (Hewitt E.)
[1] On two problems of Urysohn, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 503—509.
[2] Rings of real-valued continuons functions, I, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 45—99.
Хьюитт (Hewitt E.) и Росс (Ross K. A.)
[1] Abstract harmonic analysis, vol. 1, Berlin, Springer-Verlag, 1963.
Цермело (Zermelo E.)
[1] Neuer Beweis für die Wohlordnung, Math. Ann. **65** (1908), 107—128.
Чернавский А. В.
[1] Конечнократные открытые отображения многообразий, Матем. сб. **65** (1964), 357—369; дополнение, там же **66** (1965), 471—472.
Чех (Čech E.)
[1] On bicompact spaces, Ann. of Math. (2) **38** (1937), 823—844.
Читтенден (Chittenden E. W.)
[1] On the metrization problem and related problems in the theory of abstract sets, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1927), 13—34.
Чобан М. М.
[1] О поведении метризуемости при факторных S-отображениях, ДАН СССР **166**, № 3 (1966), 562—565.

[2] Поведение метризуемости при факторных монотонных отображениях. ДАН СССР **168**, № 3 (1966), 535—538.

Шевалле (Chevalley C.)

[1] Theory of Lie Groups. I, Princeton, 1946. [Русский перевод: Шевалле К., Теория групп Ли, I, ИЛ, 1948.]

Шиманский (Szymanski P.)

[1] La notion des ensembles separé comme terme primitif de la topologie, Mathematica Timişoara **17** (1941), 65—84.

Широта (Shirota T.)

[1] On systems of structures of a completely regular space, Osaka Math. J. **2** (1950), 131—143.

[2] A class of topological spaces, Osaka Math. J. **4** (1952), 23—40.

Шпильрайн (Szpilrain E.)

[1] Заметка о декартовых произведениях топологических пространств, ДАН СССР, н. с. **31**, № 6 (1941), 525—527.

Эйленберг (Eilenberg S.)

[1] Sur le théorème de décomposition de la théorie de la dimension, Fund. Math. **26** (1936), 146—149.

Энгелькинг (Engelking R.)

[1] Cartesian products and dyadic spaces, Fund. Math. **57**, № 3 (1965), 287—304.

Энгелькинг (Engelking R.) и Ефимов Б. А.

[1] Remarks on dyadic spaces. II, Colloq. Math. **13**, № 2 (1965), 181—197.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ