

Вопросы по топологическим пространствам (1-ой семестр 2016/17)

(при ответе требуется рассказывать теорему с доказательством, если не оговорено противное)

1. Критерий полноты решетки. Обобщенные последовательности и их сходимость.
2. Фильтры: определение, база и свойство индуктивности.
3. Ультрафильтры: определение, свойство дополняемости. Критерий максимальности.
4. Образ фильтра. Образ ультрафильтра.
5. Определение предтопологии. Полнота решетки предтопологий.
6. Открытые множества и топологии. Свойства отображения $t(\tau)$.
7. Полнота решетки множества всех топологий.
8. Внутренность и замыкание множеств: определение и критерий принадлежности.
9. Первая и вторая аксиома счетности. Примеры и контрпримеры. Пространство Зоргенфрея.
10. Сходимость фильтра и обобщенных последовательностей к точке. Теорема Биркгофа и критерий сходимости в sup -топологии.
11. Определение непрерывности и ее критерии. Лемма о непрерывности тождественного отображения.
12. Теорема о прообразе топологии.
13. Задание топологии условием непрерывности семейства функций. Критерий сходимости фильтра в образованной топологии.
14. Индуцированная топология подпространства.
15. Тихоновское произведение пространств. Критерий сходимости фильтров и последовательностей ("поточечная сходимость").
16. Аксиомы отделимости. Типы топологических пространств. Примеры и контрпримеры.
17. Свойства нормальных топологических пространств: "Большая Лемма Урысона", критерий нормальности Урысона, и теорема Титце–Урысона

о продолжении.

18. Лемма о множестве точек прикосновения фильтра.
19. Компактность: определение и критерии.
20. Компактность и замкнутость. Компактность при непрерывных отображениях.
21. Теорема о компактности тихоновского произведения.
22. Свойство минимальности компактных топологий. Нормальность компактных хаусдорфовых пространств.
23. Теорема о вложении компактных пространств в тихоновские кубы.
24. Векторные топологии: определение, критерий существования, теорема о полноте решетки векторных топологий.
25. Локально-выпуклые топологии: определение, критерий существования, теорема о полноте решетки.
26. Локально-выпуклые топологии (LCT) и мультинормированные пространства.
27. Сохранение точных верхних границ при "штрих-отображении" из $LCT(X)$.
28. Двойственность векторных пространств: определение, бра- и кет-функционалы, дуализации. Теорема об изоморфизме слабо-сопряженных пространств.
29. Топологии, согласованные с двойственностью. Топология Макки. Теорема Макки.
30. Теорема Макки–Аренса об ограниченных множествах. Теорема о топологии Макки в нормированном пространстве.
31. Теорема о строгой отделимости (без доказательства). Теорема Мазура о выпуклых замкнутых множествах в локально-выпуклых пространствах.
32. Поляры: определение, свойства, примеры, критерий Акилова.
33. Теоремы о биполяре и об абсолютной биполяре.
34. Слабо компактные выпуклые множества: теорема о компактности

субдифференциала, теорема Крейна–Мильмана о крайних точках, теорема Алаоглу–Бурбаки. Примеры и контрпримеры (пространства ℓ_p и L_p с $p \in [1, \infty]$).

35. Рефлексивные пространства: определение, критерий Какутани и его следствия. Примеры и контрпримеры (пространства ℓ_p и L_p с $p \in [1, \infty]$).

36. Теорема Петтиса (с доказательством) и теорема Джеймса (без доказательства).

37. Мера и измеримые множества. Борелевские меры, меры Радона и критерий Каратеодори (без доказательства).

38. Измеримые множества и определение интеграла.

39. Теорема Рисса о представлении (без доказательства).

40. Пространство $K(\Omega)$ непрерывных функций с компактным носителем в Ω . Двойственность с пространством (знакопеременных) мер Радона. Топология Макки в $K(\Omega)$: совпадение с топологией индуктивного предела.

41. Ограниченность множеств и сходимость последовательностей в $K(\Omega)$.

42. Пространство основных $\mathcal{D}(\Omega)$ и обобщенных $\mathcal{D}'(\Omega)$ функций. Двойственность. Топология Макки в $\mathcal{D}(\Omega)$: совпадение с топологией индуктивного предела.

43. Бочечность пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Теорема Шварца о "поточечной"сходимости ряда в $\mathcal{D}'(\Omega)$.

44. Ограниченность множеств и сходимость последовательностей в $\mathcal{D}(\Omega)$. Примеры: δ -функция как производная функции Хевисайда.

45. Теорема о представлении обобщенной функции в виде суммы производных мер Радона (интегрируемых функций).

46. Пространство $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ быстроубывающих функций и пространство $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ умеренно-растущих распределений. Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ гладких функций и пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ распределений с компактным носителем. Сравнение топологии $\tau_{\mathcal{D}}, \tau_{\mathcal{D}'}, \tau_{\mathcal{E}}$. Какие из указанных пространств $\mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{E}$ являются счетно-нормированными (=пространствами Фреше)?

47. Преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ быстроубывающих функций. Связь дифференцирования и умножения на моном. Теорема об изоморфизме.
48. Преобразование Фурье и свертка. Тождество Парсеваля.
49. Теорема Планшереля об изометрическом изоморфизме пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$. Приложение: вывод соотношения неопределенностей Гейзенберга.
50. Преобразование Фурье от обобщенных функций (умеренных распределений). Теорема об изоморфизме. Связь с операциями дифференцирования и умножения на моном. Пример: преобразование Фурье от δ -функции и от функции Хевисайда.
51. Композиция преобразований Фурье с операциями сдвига и растяжения.
52. Применение преобразования Фурье в теории уравнений с частными производными. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение.
53. Формула Пуассона.
54. Формула Котельникова
55. Преобразование Фурье от гладких функций на единичной окружности Γ . Ряд Фурье для обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$ и его всегдашняя сходимость. Ряд Фурье для δ -функции.
56. Сумма ряда $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$ в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$ и его преобразование Фурье. Вывод формулы Пуассона и θ -формулы.