Задачи к курсу
ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ
доцент К.В.Сторожук, осенний семестр 2005 г.

Основная часть задач взята из книг:

1. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.:Наука, 1974.

2. Дж. Келли. Общая топология. М.:Наука, 1968.

3. Р. Энгелькинг. Общая топология. М.Мир, 1986.

Топологическое пространство X — множество X, на котором задана топология, т.е. семейство подмножеств, называемых *открытыми* (пишем $U \overset{\circ}{\subset} X$). При этом открытость сохраняется объединениями, конечными пересечениями; пустое множество и само X тоже открыты. Дополнения к открытым множествам называют *замкнутыми* множествами (пишем $U \overset{\text{з}}{\subset} X$).

Множество $A \subset X$ называют *окрестностью* точки x, если найдется $U \overset{\circ}{\subset} X$, для которого $x \in U \subset A$; в этом случае точка x называется внутренней точкой множества A. Множество всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначается $\operatorname{int} A$; $\operatorname{int} A \overset{\circ}{\subset} X$.

Точка $x \in X$ принадлежит замыканию множества A, если любая ее окрестность пересекается с A. Замыкание обозначается $Cl(A)$ или $\overline{A}$; $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.

Множество $A \subset X$ называют *плотным* в X, если $\overline{A} = X$.

Множество $A \subset X$ называют *нигде не плотным* в X, если $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Граница $\partial A = Fr(A)$ множества A — это множество $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

1. Пусть $U, V \overset{\circ}{\subset} X$. Доказать: если $U \cap V = \emptyset$, то $\operatorname{int} \overline{U} \cap \operatorname{int} \overline{V} = \emptyset$.

2. Пусть $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Тогда $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

3. Если A плотно в X, то для всех открытых U выполнено $\overline{U} = \overline{(U \cap A)}$.

4. Пусть $X \setminus F$ всюду плотно. Верно ли, что F нигде не плотно? Если F замкнуто?

5. Граница открытого множества нигде не плотна.

6. Придумать в $\mathbb{R}^2$ бесконечно много открытых непересекающихся множеств с общей границей.

Точка $x \in X$ называется *точкой накопления (предельной точкой)* множества $A \subset X$, если $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Множество всех точек накопления обозначим A^d (*производное множество)*. Элементы $A \setminus A^d$ называются *изолированными точками* A.

Множество $A \subset X$ называют *плотным в себе*, если $A \subset A^d$, т.е. если A не содержит изолированных в A точек.

7. X плотно в X это еще не то же самое, что X плотно в себе! (формулировка вычитана у Дж.Литтлвуда)

8. Точка x изолирована в X тогда и только тогда, когда $\{x\} \overset{\circ}{\subset} X$.

9. Если X плотно в себе, то любое его открытое подмножество плотно в себе.

10. Построить множество $A \subset \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялись строгие включения $A^d \supset (A^d)^d \supset ((A^d)^d)^d$.

10a. Придумать такое $A \subset \mathbb{R}$, что строгих включений бесконечно много.

11. Точка $x \in X$ называется *точкой конденсации* множества $A \subset X$ (обозначают $x \in A^0$), если любая окрестность x содержит несчетное множество точек из A.

Показать, что $A^0 \subset A^d$, A^0 замкнуто в X, $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$.

12. Если X — T_1-пространство, то для любого $A \subset X$ множество A^d замкнуто.

12a. Придумать T_0-пример, показывающий существенность условия T_1.

13. В конечном T_0-пространстве существуют замкнутые точки.

13a. Придумать T_0-пространство, в котором нет замкнутых точек.

14. X — T_0-пространство тогда и только тогда, когда $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, если $x \neq y$.

15. Конечное T_1-пространство дискретно.

16. X — T_1-пространство $\Leftrightarrow$ точки суть пересечения своих окрестностей.

17. X хаусдорфово $\Leftrightarrow$ точки суть пересечения своих замкнутых окрестностей.

18. Пусть f и $g : X \to Y$ — непрерывные отображения. Доказать: если Y хаусдорфово, то множество $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X.

19. Ретракты хаусдорфова пространства замкнуты. (Непрерывное отображение $r : X \to X$ называется *ретракцией,* если $r \circ r = r$; *ретракт* — образ ретракции).

20. Пусть $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетное дискретное подпространство регулярного пространства X. Доказать, что в X существует семейство попарно непересекающихся окрестностей точек множества A.

21. Пусть X — T_1-пространство, $A, B \subset_{\text{з}} X$ и найдутся счетные наборы множеств $U_i \subset_{\text{о}} X$ и $V_i \subset_{\text{о}} X$, такие, что $A \subset \bigcup U_i$, $B \subset \bigcup V_i$ и для всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено $U_i \cap B = V_i \cap A = \emptyset$. Построить непересекающиеся окрестности множеств A и B.

21a. Если пространство регулярно и счетно, то оно нормально.

21b. Если пространство регулярно и имеет счетную базу, то оно нормально.

(*База* пространства X — семейство $\mathcal{B}(X)$ открытых множеств, объединяя которые, можно получить каждое открытое множество из X.)

Предбаза — система открытых подмножеств, конечные пересечения которых образуют базу.

22. Если X имеет счетную базу, то любая база X содержит счетную базу.

23. Объединение семейства топологий может не быть топологией (топология с такой *предбазой* называется топологическим объединением топологий), но объединение *линейно упорядоченного* семейства топологий — топология.

24 abc. Что за топология на $\mathbb{R}^2$ получится, если взять в качестве предбазы множество всевозможных прямых? Всевозможных прямых, параллельных осям координат? Внутренностей всевозможных эллипсов?

25. Полосы $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \frac{y}{\sqrt{2}} \in (a, b)\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ образуют базу некоторой топологии плоскости. Является ли она T_0?

26. Полосы $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x + \frac{y}{\sqrt{2}} \in (a, b)\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ образуют базу некоторой топологии рациональной плоскости. Является ли она T_0? T_1? T_2? T_3?

27. Пусть пространство X имеет счетную базу. Тогда для каждого A множество $A \backslash A^0$ счетно и $(A^0)^0 = A^0$.

27a (теорема Кантора — Бендиксона). Если X имеет счетную базу, то, убрав из него, если надо, счетное множество точек, можно получить замкнутое плотное в себе (т.н. *совершенное*) множество.

28. Сепарабельное метрическое пространство наследственно сепарабельно (т.е. любое его подпространство сепарабельно).

29. Прямая Зоргенфрея наследственно сепарабельна.

30. Если сепарабельное пространство нормально, то у любого подмножества мощности c есть предельные точки.

31. Полуплоскость Немыцкого сепарабельна, но содержит подпространство мощности c, не имеющее предельных точек в X (следовательно, дискретное в индуцированной топологии).

32. Пусть $B \subset A \subset X$, топология на A индуцирована вложением в X и топология на B индуцирована вложением в A. Показать, что полученная топология на B совпадает с топологией, индуцированой вложением $B \subset X$.

33. Пусть M — подпространство X и $A \subset M$. Доказать: $\mathrm{int}_M(A) = M \backslash \overline{M \backslash A}$; $\partial_M A = M \cap \overline{A} \cap \overline{M \backslash A}$ (замыкание берется в X).

34abca. Множество $A \subset X$ называется локально замкнутым, если каждая точка $x \in A$ обладает окрестностью $U \subset X$ такой, что $A \cap U$ замкнуто в X. Показать, что A локально замкнуто $\Leftrightarrow$ $\overline{A} \backslash A$ замкнуто $\Leftrightarrow$ A есть разность двух замкнутых множеств.

35. Теорема Титце-Урысона разрешает продлять функции, принимающие значение в $[a, b]$. Доказать: можно продлять и функции, принимающие значение в $\mathbb{R}$.

36. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — незамкнутое подмножество. Доказать, что существует непрерывная функция $f : A \to \mathbb{R}$, не продолжающаяся на все $\mathbb{R}^n$.

36a. То же для функции $f : A \to [0, 1]$.

37. Дать явное выражение для продолжения функции $f : A \to [0, 1]$, если A — замкнутое подмножество метрического пространства.

****

38. Дан фильтр в X. Построить какую-нибудь направленность в X, из которой данный фильтр получается, как в задаче 38^{-1}.

38^{-1}. Пусть $\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — направленность в множестве X.

Определим семейство $\mathcal{F}$ подмножеств X: $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow$ существует $\gamma \in \Gamma$ такое, что $x_\mu \in A$ при $\gamma \leq \mu$.

Показать, что $\mathcal{F}$ — фильтр в X. Если X — топологическое пространство, то пределы направленности = пределы соответствующего фильтра.

39. Доказать, что множество точек накопления направленности $\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ совпадает с множеством

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{\{x_\mu \mid \gamma \leq \mu\}}.$$

40. Пусть X — бесконечное множество, база топологии которого состоит из подмножеств, дополнения к которым конечны. Пусть x_n — последовательность в X. Доказать, что возможны лишь три случая: 0) предела нет, 1) предел единствен, ∞) каждая точка в X — предел последовательности x_n. Привести примеры.

40a. Пусть X — несчетное множество, топология которого состоит из подмножеств, дополнения к которым счетны. Пусть x_n — последовательность в X. Тогда x_n имеет не более одного предела. Когда предел существует?

41. Пусть X — топологическое пространство. Доказать: X хаусдорфово $\Leftrightarrow$ любая направленность имеет не более одного предела.

41a. Пусть X — топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Доказать: X хаусдорфово $\Leftrightarrow$ любая последовательность имеет не более одного предела.

41b. Пусть X_p — пространство Фреше-Урысона, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности, описанное на лекции

(множество X_p — это $\mathbb{R} \backslash Z \cup \{p\}$; окрестности добавленной точки p таковы: сама точка p и множество $\cup_i U_i$, где U_i имеют вид $\{x \mid 0 < |x - i| < \varepsilon_i\}, i = 1, \ldots, \infty$).

Добавив к пространству X_p еще одну точку и описав ее окрестности, получить нехаусдорфово пространство Фреше-Урысона, в котором любая последовательность имеет не более одного предела (подсказка: новая точка должна быть "на бесконечности").

42. Пусть X — пространство Фреше-Урысона и x — точка прикосновения последовательности x_n. Тогда найдется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к x.

42a. Пусть X — секвенциальное пространство, не являющееся пространством Фреше-Урысона, описанное на лекции

(множество X — подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из нуля и точек вида $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$, $(\frac{1}{n}, 0)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Окрестности точки 0 таковы: разрешается выкинуть конечное множество столбиков, а из каждого оставшегося столбика разрешается выкинуть конечное число точек с ненулевой ординатой; у остальных точек окрестности обычные).

Описать последовательности X, имеющие точки прикосновения, не являющиеся пределами никакой подпоследовательности.

43. Определим отношение эквивалентности на топологическом пространстве X: $x \sim y$, если $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Доказать, что фактор-пространство удовлетворяет T_0.

44. На обычной прямой $\mathbb{R}$ отождествим все целые числа. Доказать, что фактор-пространство гомеоморфно пространству X_p задачи 41b.

45ab. Отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X можно рассматривать, как подмножество $X \times X$, $\sim = \{(a, b) \in X \times X \mid a \sim b\}$. Доказать, что если $\sim \overset{\circ}{\subset} X \times X$, то факторпространство дискретно. Доказать, что если факторпространство хаусдорфово, то $\sim \overset{\text{з}}{\subset} X \times X$.

46. Доказать, что если Y хаусдорфово, то график непрерывного отображения $f : X \to Y$ замкнут в $X \times Y$. Привести контрпример для T_1-пространства Y.

47. Множество $\triangle(X) = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X^2$ называется диагональю пространства X^2. Показать, что диагональ X^2 гомеоморфна X, а диагональное отображение $\triangle$ — гомеоморфное вложение. То же для любой степени X^ω.

48abc. Доказать:

X T_1 — пространство $\Leftrightarrow$ диагональ в X^2 — пересечение семейства открытых подмножеств;

X T_2 — пространство $\Leftrightarrow$ диагональ в X^2 замкнута;

X дискретно $\Leftrightarrow$ диагональ в X^2 открыта.

49abc. Канторово множество гомеоморфно канторовому кубу (счетной степени дискретного двоеточия). Канторово множество гомеоморфно счетной степени дискретного троеточия. И вообще, произведение счетного числа конечных дискретных пространств гомеоморфно канторову множеству.

50 Если произведение — T_i, то и сомножители тоже (для всех известных i).

51. Счетное произведение метризуемых пространств метризуемо.

52ab. Пусть $X = \prod_\alpha X_\alpha$. Доказать, что сходимость направленности эквивалентна ее покоординатной сходимости. Доказать аналогичное утверждение для фильтров.

53 Доказать, что рациональная плоскость с топологией, описанной в задаче 26, гомеоморфна подпространству обычной прямой.

54. Доказать, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.

****

55. В бесконечном компакте есть счетное незамкнутое подмножество.

56. В счетном компакте есть изолированная точка.

57. Если в компакте нет изолированных точек, то его мощность не меньше $\mathfrak{c}$.

58. Пусть X — метрическое пространство, $K \subset X$ — компактное подмножество. Доказать, что диаметр $d(K) := \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in K\}$ конечен и что существуют точки $x, y \in K$, такие, что $\rho(x, y) = d(K)$.

59. Привести пример замкнутого ограниченного подмножества метрического пространства, для которого диаметр не достигается ни на какой паре точек.

60.(Лемма Лебега о покрытии). Пусть K — метрический компакт и $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ — его открытое покрытие. Показать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x \in X$ ε-окрестность точки x целиком попадает в одно из множеств U_α.

61. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что X компактно $\Leftrightarrow$ X полно и вполне ограничено. (Полнота - это когда любая последовательность Коши имеет предел. Полная ограниченность - это когда для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть, т.е. конечное множество $A \subset X$ такое, что для любого $x \in X$ в ее ε-окрестность попадает по крайней мере одна точка из A.)

62. (Теорема Дини.) Пусть X — компакт и $f_i : X \to \mathbb{R}$ — последовательность непрерывных функций такая, что $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots$. Если f_n поточечно сходится к непрерывной функции, то эта сходимость равномерна.

63. Пусть X, Y — компакты, $f : X \to Y$ — отображение. Доказать, что f непрерывно тогда и только тогда, когда график отображения f замкнут в $X \times Y$.

64. Каждое компактное подмножество прямой Зоргенфрея счетно.

65. Пусть X — тихоновское пространство, K — компактное подмножество в X, $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Доказать, что f можно продлить на все X.

66. Пусть $\{X_\alpha \alpha \in \mathcal{A}\}$ — семейство компактов, быть может, несчетное и функция $f : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to \mathbb{R}$ непрерывна. Показать, что f зависит лишь от счетного числа координат (т.е. существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$ и непрерывная функция $g : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_{\alpha_n} \to \mathbb{R}$ так, что $f = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \pi \xrightarrow{\pi} \prod_{n\in\mathbb{N}} X_{\alpha_n} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$).

67. Пространство $C(I)$ непрерывных функций на отрезке сепарабельно.

68. Пусть X — тихоновское пространство, удовлетворяющее условиям теоремы Стоуна — Вейерштрасса. Тогда X компактно.

69. Каждое локально компактное хаусдорфово пространство — тихоновское.

70. Пространство $\mathbb{R}^n$ локально компактно.

71. Единичный шар в бесконечномерном нормированном векторном пространстве не компактен.

72. Пространство задачи 44 не локально компактно.

73. Пусть X — тихоновское пространство, имеющее компактификацию с одноточечным наростом. Тогда X локально компактно.

74 abc. Пусть X — бесконечное множество, $x_0 \in X$. Объявим замкнутыми в X все подмножества, содержащие точку x_0 и все конечные подмножества. Доказать: полученное топологическое пространство $A(\mathfrak{m})$ зависит лишь от мощности $\mathfrak{m}$ множества X. Доказать, что $A(\mathfrak{m})$ — компакт. При каких $\mathfrak{m}$ он сепарабелен?

75. Непрерывно отобразить двойную окружность на $A(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}$ — мощность континуума. Этот пример показывает, что свойство удовлетворять первой аксиоме счетности не сохраняется в сторону образа.

Регулярное пространство называется *линделёфовым*, если из каждого его открытого покрытия можно извлечь счетное подпокрытие.

Пространство называется *счетно компактным*, если из каждого счетного открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Тихоновское пространство X называется *псевдокомпактным*, если каждая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена.

Пространство X называется *секвенциально компактным*, если каждая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность.

76. регулярное пространство со счетной базой линделёфово.

77. Линделёфово пространство нормально.

78. Замкнутое подмножество линделёфово пространства линделёфово.

79abc. Полуплоскость Немыцкого — сепарабельное не линделёфово пространство. Прямая Зоргенфрея — линделёфово пространство без счетной базы. Произведение двух линделёфовых пространств не всегда линделёфово.

80. Если X линделёфово, а K — компакт, то $X \times K$ линделёфово.

81abc. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение.

82. Если X счетно компактно, то Y счетно компактно.

83. Если X секвенциально компактно, то Y секвенциально компактно.

84. Если X псевдокомпактно, а Y *тихоновское*, то Y псевдокомпактно.

85. Почему если X псевдокомпактно, то любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает наибольшее и наименьшее значения?

86ab. Каждое счетно компактное тихоновское пространство псевдокомпактно. Каждое нормальное псевдокомпактное пространство счетно компактно.

87. Компактное пространство W всех ординалов до первого несчетного включительно секвенциально компактно, но оно не является секвенциальным.

88. Пространство W_0 всех счетных ординалов счетно компактно, но не компактно

89ab. Доказать, что для каждого $\alpha \in W_0$ подпространство $[\emptyset, \alpha]$ можно вложить в $\mathbb{R}$ с сохранением порядка. Показать, что W_0 не вложимо в $\mathbb{R}$.

90. Каждое секвенциально компактное пространство счетно компактно.

91. Образ секвенциально компактного пространства при непрерывном отображении секвенциально компактен.

92. Произведение счетного семейства секвенциально компактных пространств секвенциально компактно.

93abcd. В классе метрических пространств понятия компактности, счетной компактности, секвенциальной компактности и псевдокомпактности совпадают.

****

94. (Пополнение метрического пространства.)

Пусть M — метрическое пространство. Рассмотрим множество S всех последовательностей Коши в M. Назовем две последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ эквивалентными, если $\rho(x_i, y_i) \to 0$. Положим $\tilde{M}$ — множество классов эквивалентности S.

Определить расстояние между точками $\tilde{M}$. Показать, что $\tilde{M}$ — полное метрическое пространство. Описать вложение $i_M : M \to \tilde{M}$. Показать, что образ этого вложения плотен и что если M уже было полным, то i_M — изометрия.

95 ab. Пусть $X = [0, 1)$. Придумать непрерывную функцию $f : [0, 1) \to [0, 1]$, которая не продолжается на одноточечную компактификацию X. Придумать идеал I непрерывных функций на X, такой, что $\forall x \in X\ \exists f \in I$ такая, что $f(x) \neq 0$.

96. Пусть S — счетное множество. Рассмотрим булево кольцо B конечных и коконечных (т.е. дополнение к которым конечно) подмножеств S. Привести пример компакта $K \subset \mathbb{R}$, кольцо открыто-замкнутых подмножеств которого изоморфно B.

97. (Пример топологической группы с малыми подгруппами). Пусть Z — группа целых чисел, p — простое. Положим $U_k = \{$ числа, делящиеся на $p^k\}$. Рассмотрим на Z топологию с базой $\{z + U_k \mid z \in Z,\ k = 1, 2, \dots\}$. Доказать: Z с этой *p-адической* топологией — топологическая группа; в любой окрестности нуля есть подгруппа.

98ab. Пусть M — метрическое пространство. M связно $\Rightarrow$ для каждой пары точек x, y и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$ такой, что $\rho(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. Если M компактно, то верна и обратная импликация.

99. Привести пример замкнутого подмножества прямой, в котором нет изолированных точек, но все компоненты связности суть точки.

100.(Веер Кнастера-Куратовского).

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — стандартное канторово множество (из отрезка $I_0 = [0, 1]$. выбрасывается средняя (открытая) треть, затем так же поступается с оставшимися двумя отрезками I_{00} и I_{01}, затем — с получившимися отрезками I_{000}, I_{001}, I_{010}, I_{011} и т. д. Пусть $Q \subset K$ — подмножество, состоящее из концов отрезков вида I_α, а $Ir := K \backslash Q$.

Пусть (r, θ) — полярная система координат. В секторе $(r, \theta), r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 1]$ единичного круга рассмотрим множество

$$V = \{(r, \theta) \mid (\theta \in Q \text{ и } r \text{ рационально}) \text{ или } (\theta \in Ir \ \text{ и } r \text{ иррационально})\}.$$

Доказать, что V связно, но в множестве $V \backslash \{0\}$ все связные подмножества одноточечны.

101. Пространство называется локально (линейно) связным, если у каждой его точки есть (линейно) связная окрестность. Доказать: польский отрезок, т.е. замы-

кание в плоскости графика функции $y = sin\frac{1}{x}, x \in (0,1]$, хоть и связен, не является локально связным.

102. Пусть X — тихоновское пространство. $\operatorname{ind} X = 0 \Leftrightarrow$ точки суть компоненты связности.

103. Если M — метрическое пространство и $A \subset M$, то $\dim M_1 \leq \dim M$.

104. Пусть мы знаем, что $\dim \mathbb{R}^n = n$ и пусть X — бесконечномерное нормированное пространство. Чему равно $\dim X$?

105. Сколько компонент связности у группы $O(n)$? $(O(n) \subset M(n) \subset \mathbb{R}^{n^2})$.

106. $\dim O(n) =?$

107ab. $\dim \mathbb{Q}^2 = 0, \dim \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2 = 1$. В частности, не обязательно $\dim(A \cup B) \geq \dim A + \dim B$, даже если $A \cap B = \emptyset$.

108. Привести пример $M_1 \subset M$, M_1 плотно в M, $\dim M_1 = 0$, $\dim M = \infty$.

109. Пусть F — функтор из категории $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$. Доказать: если h — изоморфизм между объектами A и B категории $\mathcal{K}_1$, то $F(h)$ — изоморфизм между объектами $F(A)$ и $F(B)$ категории $\mathcal{K}_2$.

110. Описать, опираясь на теорему Гельфанда—Колмогорова, функтор из категории компактов в категорию алгебр.

111. Показать, что компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда алгебры непрерывных функций $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны.