

Вопросы по математическому анализу (2-ой семестр 2014-15)

1. Метод Ньютона вычисления площадей криволинейных трапеций. Геометрическая интерпретация интеграла.
2. Первообразная (неопределённый интеграл); лемма о первообразных; формула интегрирования по частям.
3. Первообразная (неопределённый интеграл); правило замены переменной.
3. Разложение рациональной функции на простые дроби.
4. Интегрирование простых дробей.
5. Обобщённая первообразная. Интеграл; его простейшие свойства.
6. Свойства интеграла как функции верхнего предела.
7. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.
8. Основное свойство гамма-функции Эйлера.
9. Формула замены переменной для определённого интеграла.
10. Интегральное представление остатка разложения Тейлора.
11. Ньютоново разложение бинома.
12. Иррациональность числа π .
13. Иррациональность чисел вида e^r , $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
14. Формула прямоугольников; определение интеграла Римана.
15. Формула Кеплера – Симпсона.
16. В основном непрерывные функции. Интегрируемые мажоранты. Принцип сравнения; его главное следствие.
17. Признак существования обобщённой первообразной (на незамкнутом промежутке). Понятие несобственного интеграла.
18. Критерий Коши сходимости интеграла.
19. Асимптотический признак интегрируемости Вейерштрасса.
- Первая теорема о среднем
- Вторая теорема о среднем
20. Неравенство Абеля; признак интегрируемости Абеля – Дирихле; типичный пример.
21. Теорема о приращениях для вектор-функций (оценка через производную)
22. Длина пути.
23. Аддитивные функции отрезка, их дифференцирование. Формулы для площади криволинейного сектора. Секториальная скорость.
24. Объем тела вращения. Площадь поверхности вращения.

25. Неравенство Абеля для рядов. Признаки сходимости Абеля и Дирихле для рядов, типичные примеры.
Теорема Римана о перестановках условно сходящегося ряда.
26. Расстояния. Метрические пространства; подпространства. Произведение метрических пространств.
27. Норма; примеры; неравенства Гёльдера и Минковского.
28. Нормированные векторные пространства. Расстояние, индуцированное нормой. Произведение нормированных пространств.
29. Предел последовательности. Координатный признак сходимости в $\mathbb{R}^n$, теорема Вейерштрасса о возможности выделить из ограниченной последовательности сходящуюся подпоследовательность.
30. Окрестности точек; свойства систем окрестностей. Открытые множества; свойства системы открытых множеств.
31. Точки прикосновения множества; замкнутые множества; топологический критерий замкнутости; свойства системы замкнутых множеств.
32. Относительная открытость (замкнутость). Лемма об открытых (замкнутых) частях подпространства.
33. Секвенциальный критерий замкнутости.
34. Внутренность, замыкание и граница множеств.
35. Последовательности Коши; полные метрические пространства. Замкнутость полного подпространства метрического пространства. Критерий полноты подпространства полного метрического пространства.
36. Банаховы пространства. Полнота евклидовых пространств.
37. Предел функции в точке. Топологический, метрический и координатный критерии непрерывности.
38. Критерий сходимости Гейне для метрических пространств.
Операции над непрерывными функциями.
39. Теорема о непрерывности композиции.
40. Лемма о непрерывности промежуточной функции.
41. Метрический критерий непрерывности. Непрерывность проекций.
42. Критерий глобальной непрерывности.
43. Множества, определяемые системами строгих неравенств.
44. Множества, определяемые системами уравнений и нестрогих неравенств.
45. Связность, линейная связность. Компоненты линейной связности.
46. Компоненты линейной связности группы $GL(n)$; критерий ориентируемости базисов.
47. Топологические изоморфизмы (гомеоморфизмы); примеры. Почему

отрезок, интервал, полуинтервал и окружность негомеоморфны друг другу?

48. Равномерно непрерывные отображения.

49. Липшицевы отображения. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения; пример отображения числовой прямой в себя, уменьшающего расстояния, но не имеющего неподвижной точки.

50. Теорема Бореля – Лебега; компактные пространства.

51. Теорема Вейерштрасса об экстремумах.

52. Взаимосвязь свойств компактности, ограниченности и замкнутости.

53. Непрерывные образы компактов. Теорема о непрерывной биекции компакта; "контрпример".

54. Секвенциальный критерий компактности. Компактность и вполне ограниченность множеств (существование ε -сетей).

55. Компактные множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

56. Вывод основной теоремы алгебры из теоремы Вейерштрасса об экстремумах.

57. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$.

58. Липшицевость линейного отображения из $\mathbb{R}^n$ в произвольное нормированное пространство. Норма линейного отображения.

59. Теорема Гейне – Кантора о равномерной непрерывности.

60. Производная по вектору; частные производные; принцип фиксации переменных; матрица Якоби.

61. Лемма Ферма (необходимое условие локального экстремума).

62. Лемма о степенной оценке приращения.

63. Дифференцируемые функции; дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции.

64. Пример разрывной функции, дифференцируемой по каждому вектору.

65. Пример недифференцируемой функции, имеющей ограниченные частные производные.

66. Формула для производной по вектору. Координатное представление дифференциала.

67. Достаточный признак дифференцируемости.

68. Правило дифференцирования произведения.

69. Правило дифференцирования композиции.

70. Правило дифференцирования обратного отображения.

71. Градиент вещественной функции; его геометрические свойства (связь с множествами уровня, направление наибольшего роста).

72. Потенциальное векторное поле, вычисление его работы. Потенциал.
73. Многократная дифференцируемость. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка; "контрпример".
74. Мультииндексный формализм. Аналог формулы бинома Ньютона для многомерного случая.
75. Линейные дифференциальные операторы; композиционное правило для операторов с постоянными коэффициентами. Высшие дифференциалы; их координатное представление.
76. Разложение Тейлора: существование и единственность, асимптотика остатка (остаточное слагаемое в форме Пеано).
77. Разложение Тейлора: интегральная и лагранжева формы остатка.
78. Действия с полиномиальными разложениями. Полиномиальное разложение для композиции.
79. Гессиан вещественной функции; достаточные условия локального экстремума.
80. Гладкие отображения. Отображения класса C^r подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Гладкие изоморфизмы и гладкие вложения.
81. Лемма о липшицевом вложении области.
82. Теорема о локальной обратимости (об обратной функции).
83. Криволинейные системы координат (карты). Необходимое условие зависимости системы функций.
84. Теорема о неявной функции.
85. Формула Эйлера для однородных функций.
86. Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение и примеры. Внутренние и крайние точки многообразия. Теорема о крае многообразия.
87. Многообразия в $\mathbb{R}^n$: строение множества регулярных решений.
88. Многообразия в $\mathbb{R}^n$: лемма о локальном вложении.
89. Касательные векторы. Определение. Кинематическая и геометрическая интерпретации. Касательное пространство и контингенция, их свойства.
90. Действие гладкого отображения на касательные векторы. Строение касательного пространства гладкого многообразия (при наличии или отсутствии края).
91. Теорема о градиентах. Составление уравнений касательной и нормали. Метод Лагранжа поиска условного экстремума.