

Вопросы к курсу мат.анализа за первый семестр 2014–2015 уч. г.

Высказывания, аксиомы, теоремы. Кванторы, постоянные и переменные. Исчисление высказываний и исчисление предикатов. Способы задания множеств. Принцип совпадения множеств.

Аксиоматика вещественной прямой. Модуль и знак числа, промежутки. Диаметр числового множества. Аксиома непрерывности (существование промежуточного числа между множествами $A \leq B$). Теорема о пересекающихся отрезках; принцип вложенных отрезков; "контрпримеры".

Доказательство существования верхней и нижней грани, их свойства. Теорема об извлечении квадратного корня.

Индуктивные множества. Натуральный ряд $[R]$. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли, биномиальные коэффициенты.

Аксиома Архимеда. Полная упорядоченность натурального ряда. Теорема о существовании минимального и максимального элемента у ограниченных подмножеств целых чисел. Лемма о "делении с остатком" и плотность множества рациональных чисел на вещественной прямой.

Понятие отображения. Область задания отображения; пространство значений; образы и прообразы точек и множеств; график отображения.

Сужение отображений. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры.

Композиция отображений; её свойства. Левое и правое обратное, их связь с инъективностью и сюръективностью. Обратное отображение: определение, критерий существования, контрпримеры (наличие правого обратного у отображения $f : X \rightarrow X$ недостаточно для существования обратного к f).

Конечные множества, счетные множества: свойства инъективных и биективных отображений $[R]$.

Операции над счетными множествами. Канторова таблица. Счетность множества целых, рациональных, алгебраических чисел. Теорема Кантора о несчетности континуума $[R]$.

Расширенная числовая прямая, отношение порядка, арифметические операции. Переформулировка аксиомы непрерывности и теоремы о существовании точной верхней и нижней граней для данного случая.

Окрестности точек расширенной числовой прямой; свойства системы окрестностей.

Числовые последовательности; топологическое определение предела.

Подпоследовательность. Теорема о пределе подпоследовательности.

Теорема о пределе монотонной последовательности.

Теорема Вейерштрасса о частичных пределах; верхний и нижний пределы.

Теоремы о пределе суммы последовательностей, произведения последовательностей. Лемма о зажатой последовательности. Теорема о неравенстве пределов.

Критерий Коши. Фундаментальные последовательности.

Сумма ряда. Суммируемые (сходящиеся) ряды; необходимое условие суммируемости.

Сумма геометрической прогрессии.

Телескопический признак сходимости ряда с монотонной последовательностью коэффициентов.

При каком условии $\sum 1/n^s < \infty$?

Оценка суммы ряда Лейбница.

Критерий Коши суммируемости ряда.

Принцип сравнения. Абсолютно суммируемые ряды.

Признаки Коши и Даламбера суммируемости ряда.

Теорема Мертенса о произведении рядов; "контрпример".

Экспонента; её область определения и свойства. Почему $\exp(x) = e^x$?

Оценка остатка экспоненциального ряда. Иррациональность числа e .

Трансцендентность числа Лиувилля $\sum 10^{-n!}$.

Предел функции по подмножеству. Единственность предела.

Пределы монотонных функций.
 Лемма о пределе промежуточной функции.
 Теорема о неравенстве пределов.
 Арифметический критерий сходимости.
 Теорема о сумме пределов.
 Лемма об умножении на бесконечно малую.
 Теорема о произведении пределов.
 Теорема об обратной величине предела.
 Теорема о пределе композиции.
 Критерий сходимости Гейне.
 Асимптотические отношения сравнения, связь с операцией предела.
 Непрерывность функции в точке. Топологический критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных отображений.
 Непрерывные функции. Операции над непрерывными функциями.
 Лемма о непрерывности промежуточной функции.
 Локальный характер свойства непрерывности.
 Теорема Вейерштрасса об экстремумах; "контрпримеры".
 Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях. Верна ли теорема в "рациональном мире"?
 Признак Больцано строгой монотонности.
 Теорема об обратной функции. Функция $\sqrt[n]{}$.
 Экспонента и натуральный логарифм; их непрерывность.
 Теорема-определение показательной функции. Логарифм.
 Дифференцируемые функции; производная; локальный характер этих понятий; кинематическая интерпретация производной.
 Вычисление производных экспоненты и других элементарных функций.
 Лемма о производной промежуточной функции.
 Геометрическая интерпретация производной; касательная к графику дифференцируемой функции.
 Односторонние производные.
 Теорема о лейбницево разложении; дифференциал. Непрерывность дифференцируемых функций.
 Правила дифференцирования суммы, произведения и дроби.
 Лемма об "о-малое". Правило дифференцирования композиции.
 Правило дифференцирования обратной функции.
 Лемма о знаке производной. Точки локального экстремума.
 Лемма Ферма (необходимое условие локального экстремума).
 Теоремы Ролля и Лагранжа о среднем.
 Теорема об оценке приращения.
 Дифференциальные признаки возрастания и убывания.
 Достаточные признаки локального экстремума.
 Выпуклые множества. Барицентрический критерий выпуклости. Выпуклые функции.
 Дифференциальный признак выпуклости функций.
 Всюду односторонняя дифференцируемость выпуклых функций. Монотонность односторонних производных.
 Теорема о монотонности непрерывной функции, дифференцируемой всюду за исключением не более чем счетного множества. Критерий выпуклости непрерывной функции через монотонность односторонних производных.
 Неравенство Иенсена. Неравенство Юнга.
 Неравенства Гельдера и Минковского.
 Правило Лопиталя.
 Высшие производные; многократная дифференцируемость.
 Правило многократного дифференцирования произведения.

Признак многократной дифференцируемости композиции.
 Признак многократной дифференцируемости обратного отображения.
 Лемма о степенной оценке приращения.
 Теорема о разложении Тейлора; ряд Тейлора.
 Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора.
 Порядок касания функций в точке. Исследование локального поведения функций посредством полиномиальных разложений; обобщённый признак локального экстремума.
 Разложения в степенные ряды функций $\cos$ и $\sin$.
 Метод Мэчина вычисления числа π .
 Ряд Тейлора функции $(1+x)^s$. Ряд Тейлора функции $\arcsin$.
 Формула Меркатора (разложение в ряд функции $\ln(1+x)$).
 Полиномиальное разложение композиции.
 Многократное обращение функции в ноль. Обобщённая теорема Ролля.
 Полином Лагранжа — Эрмита. Оценка дефекта интерполяции. Лагранжева оценка остатка тейлоровского разложения как частный случай этой оценки.
 Теорема об интерполяции Лагранжа — Эрмита (существование и единственность искомого полинома).
 Теорема Коши о среднем значении. Геометрическая интерпретация. Вывод тейлоровского разложения с остаточным членом в форме Лагранжа из теоремы Коши.
 Бесконечные произведения: определение сходимости, логарифмический и арифметический критерии сходимости. Дзета-функция Римана и формула Эйлера.
 Модифицированный мажорантный признак сходимости через оценки вида $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq (\leq) \frac{c_n}{c_{n+1}} + \beta_n$. Признаки Раабе, Гаусса, Бертрана.
 Приложения дифференциального исчисления: формула Циолковского, падение с парашютом, формула радиоактивного распада (критический радиус).
 Секториальная скорость. Уравнение эллипса в полярных координатах. Вывод закона всемирного тяготения из двух законов Кеплера.

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

- [Ph] ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М., Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. I и II.
 [R] РЕШЕТНЯК Ю. Г., Курс математического анализа. Новосибирск. Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 1, кн. 1-2.
 [Sh] ШВЕДОВ И. А., Компактный курс математического анализа. Ч. 1 и 2. Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2003.
 [D] ДЕМИДОВИЧ Б. П., Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1990.