

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Конспект лекций

Новосибирск
2014

Оглавление

1	Пространства L_p	2
§1.1	Предельные теоремы теории интеграла и нормально сходящиеся ряды	2
§1.2	Неравенства Гельдера и Минковского	3
§1.3	Пространства L_p	6
2	Мера и интегрирование на многообразиях	10
§2.1	Предварительные сведения	10
§2.2	k -мерная мера множеств в $\mathbb{R}^n$	11
§2.2.1	Распространение k -меры на произвольные подмножества данного k -многообразия	13
§2.3	Формула коплощади	14
§2.4	Эйлеровы интегралы	17
§2.4.1	Определения; выражение B -функции через Γ -функцию	17
§2.4.2	Асимптотические свойства эйлеровых интегралов. Формула Валлиса.	18
§2.4.3	Метод Лапласа получения асимптотики интегралов. Формула Стирлинга.	20
3	Исчисление дифференциальных форм	23
§3.1	Дифференциальные формы первой степени	23
§3.1.1	Координатное представление 1-форм	25
§3.1.2	Операция переноса	26
§3.1.3	Интегрирование 1-форм вдоль путей	27
§3.1.4	Дифференцирование интеграла с переменным отрезком интегрирования	30
§3.1.5	Интегрирование 1-форм вдоль ориентированных кривых	30
§3.2	Дифференциальные формы произвольных степеней.	35
§3.2.1	Внешний дифференциал k -формы	41
§3.2.2	Векторный анализ в трехмерном пространстве.	42

§3.2.3 Векторные операции в триортогональной системе координат	44
§3.2.4 Операция переноса	47
§3.2.5 Формула гомотопии	48
§3.2.6 Теорема Пуанкаре	49
§3.3 Интегрирование дифференциальных форм на ориентированных многообразиях	51
§3.3.1 Ориентация на многообразиях	51
§3.3.2 Индуцированная ориентация края	54
§3.4 Интеграл от k -формы по ориентированному k -многообразию	55
§3.4.1 Приложения формулы Стокса	61
§3.5 Интегралы первого и второго рода	66
§3.6 Некоторые приложения	70
§3.6.1 Уравнение теплопроводности	70
§3.6.2 Уравнение неразрывности	72
§3.6.3 Уравнения Эйлера	73
4 Свертка и усреднения функций	74
5 Преобразование Фурье	79
§5.1 Определение и основные свойства	79
§5.2 Примеры и приложения	86
§5.3 Обобщенные функции умеренного роста	95
§5.3.1 Ряды Фурье и обобщенные функции умеренного роста	96
§5.3.2 Преобразование Фурье и обобщенные функции умеренного роста	97
§5.4 Преобразование Фурье и фундаментальные решения дифференциальных операторов	98
6 Потенциал сферических слоев	102
ЛИТЕРАТУРА	105

Напомним некоторые обозначения. Если (X, ρ) — метрическое пространство, и $E \subset X$, то символом $\text{Int}_X E$ обозначается внутренность (множество внутренних точек) E относительно X , т.е.

$$\text{Int}_X E = \{x \in E : \exists r > 0 \ B_r(x, X) \subset E\},$$

здесь $B_r(x, X) = \{y \in X : |x - y| < r\}$ — открытый шар с центром в x и радиуса r . Когда из контекста понятно, о каком объемлющем пространстве X идет речь, то его символ опускается, и пишут просто $\text{Int } E$, $B_r(x)$ и т.п.

Далее, *замыкание* $\text{Cl } E = \text{Cl}_X E$ множества E в X определяется как множество всех точек прикосновения E , т.е.

$$\text{Cl } E = \{x \in X : E \cap B_r(x) \neq \emptyset \ \forall r > 0\}. \quad (1)$$

Можно дать следующее эквивалентное определение:

$$\text{Cl } E = \{x \in X : \text{найдется последовательность } x_n \in E \text{ такая, что } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}. \quad (2)$$

Наконец, *граница* $\text{fr } E = \text{fr}_X E$ множества E в пространстве X определяется как

$$\text{fr } E = (\text{Cl } E) \setminus \text{Int } E. \quad (3)$$

Глава 1

Пространства L_p

Напомним, что символом $\overline{\mathbb{R}}$ обозначается расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

§1.1 Предельные теоремы теории интеграла и нормально сходящиеся ряды

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Ниже в этой главе для удобства будет иногда использоваться обозначение $\int f d\mu$ вместо $\int f d\mu$. Напомним несколько базовых теорем о предельном переходе под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА 1.1.1 (Теорема Фату). Пусть имеется последовательность неотрицательных измеримых функций $h_m : X \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда

$$\int \liminf_{m \rightarrow \infty} h_m(x) d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) d\mu. \quad (1.1)$$

ТЕОРЕМА 1.1.2 (теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть имеется последовательность измеримых функций $h_m : X \rightarrow \mathbb{R}$, причем эта последовательность поточечно сходится почти всюду, т.е. для μ -почти всех $x \in X$ существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x)$. Предположим, далее, что найдется суммируемая функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$|h_m(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X. \quad (1.2)$$

Тогда

$$\int \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) d\mu. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 1.1.3 (теорема Леви для рядов). Пусть имеется последовательность неотрицательных измеримых функций $f_j : X \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (1.4)$$

Отсюда вытекает нужная для дальнейшего

ТЕОРЕМА 1.1.4 (теорема о нормально сходящихся рядах). Пусть имеется последовательность измеримых функций $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| d\mu < \infty. \quad (1.5)$$

Тогда функциональный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ поточечно сходится для μ -почти всех $x \in X$, причем

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (1.6)$$

Ряды из измеримых функций, удовлетворяющих условию (1.5), называются *нормально сходящимися*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Рассмотрим функции $|f_j(x)|$. Они являются неотрицательными и также μ -измеримыми (см. материал прошлого семестра). Применяя к ним Теорему 1.1.3, получаем

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j(x)| d\mu. \quad (1.7)$$

Вследствие предположения (1.5) правая часть данного равенства конечна. Значит, конечна и левая часть:

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| d\mu < \infty. \quad (1.8)$$

Это означает, что μ -измеримая функция $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ суммируема, в частности, она

конечна μ -почти всюду. Поэтому последовательность частичных сумм $h_m(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)$ сходится μ -почти всюду, более того, по построению, $|h_m(x)| \leq g(x)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\int \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) d\mu, \quad (1.9)$$

другими словами, т.к. h_m обозначает частичные суммы и в силу линейности интеграла,

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (1.10)$$

Теорема полностью доказана. $\square$

§1.2 Неравенства Гельдера и Минковского

ТЕОРЕМА 1.2.1 (Неравенство Гельдера). Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Тогда для любой пары измеримых функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ и произвольного параметра $p \in (1, +\infty)$ справедлива оценка

$$\int_X |f g| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.11)$$

где показатель q находится из условия

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1.12)$$

т.е. $q = \frac{p}{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать, что $f \geq 0$ и $g \geq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда f и g суть *простые функции*, т.е. когда они измеримы и принимают не более чем счетное множество значений. Тогда для функции f справедливо представление,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x), \quad (1.13)$$

где A_k суть измеримые множества, причем $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (такие семейства попарно непересекающихся множеств называются *дизъюнктными*). Напомним, что символом χ_A обозначается характеристическая функция множества A , т.е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Аналогично,

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \chi_{B_m}(x), \quad (1.14)$$

где B_m представляет собой дизъюнктную последовательность измеримых множеств (объединение которых совпадает со всем X).

Если хотя бы одна из функций f или g равна нулю почти всюду, то обе части неравенства в (1.11) зануляются, и доказывать нечего. Напомним, далее, что согласно сделанному предположению о неотрицательности функций, $t_k \geq 0$ и $s_m \geq 0$. Более того, можно предположить, не меняя общности, что все значения t_k и s_m конечны. В самом деле, если хотя бы одна из функций f или g принимает значение $+\infty$ на множестве положительной меры, то правая часть в (1.11) равна бесконечности, и опять-таки доказывать нечего. Итак, ниже будем предполагать, что $t_k, s_m \in [0, +\infty)$ для всех k, m . Тогда

$$\int_X f g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_k s_m \mu(A_k \cap B_m). \quad (1.15)$$

Напомним, что согласно доказанному в прошлом семестре классическому неравенству Гельдера для произвольных числовых последовательностей $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.16)$$

В качестве $\alpha_i = \alpha_{km}$ возьмем $t_k \mu(A_k \cap B_m)^{\frac{1}{p}}$, а в качестве $\beta_i = \beta_{km}$ возьмем $s_m \mu(A_k \cap B_m)^{\frac{1}{q}}$. Тогда из (1.15)–(1.16) и очевидного тождества $\mu(A_k \cap B_m) = \mu(A_k \cap B_m)^{\frac{1}{p}} \mu(A_k \cap B_m)^{\frac{1}{q}}$ получаем

$$\int_X f g d\mu \leq \left(\sum_{k,m=1}^{\infty} t_k^p \mu(A_k \cap B_m) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k,m=1}^{\infty} s_m^q \mu(A_k \cap B_m) \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.17)$$

В силу предположения о том, что B_m представляет собой дизъюнктивную последовательность измеримых множеств со свойством

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = X,$$

имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B_m) = \mu(A_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B_m) = \mu(B_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому неравенство (1.17) можно переписать в виде

$$\int_X f g d\mu = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k^p \mu(A_k) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m^q \mu(B_m) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.18)$$

Таким образом, неравенство Гельдера для случая простых (т.е. измеримых и с не более чем счетным набором значений) функций полностью доказано.

Если же теперь f, g представляют собой пару произвольных измеримых неотрицательных функций на X , то по определению интеграла (см. лекции за предыдущий семестр) их можно аппроксимировать простыми функциями $f_n \geq 0, g_n \geq 0$ такими, что $f_n \geq f, g_n \geq g$, и

$$\int_X f_n^p d\mu \rightarrow \int_X f^p d\mu, \quad \int_X g_n^q d\mu \rightarrow \int_X g^q d\mu$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда имеем

$$\int_X f g d\mu \leq \int_X f_n g_n d\mu \stackrel{\text{Нер-во Гельдера для простых ф-й}}{\leq} \left(\int_X f_n^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g_n^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.19)$$

Теорема полностью доказана. $\square$

В качестве следствия доказанного неравенства Гельдера получаем классическое

ТЕОРЕМА 1.2.2 (Неравенство Минковского). Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Тогда для любой пары измеримых функций $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и произвольного параметра $p \in [1, +\infty)$ справедлива оценка

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можно считать, что $f \geq 0$ и $g \geq 0$. Тогда имеем

$$\int_X (f+g)^p d\mu = \int_X f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \stackrel{\text{Нер-во Гельдера}}{\leq} \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left[\left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \cdot \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Из полученных оценок, деля обе части на $\left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}$, и получается искомое неравенство Минковского. $\square$

§1.3 Пространства L_p

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Тогда для $p \in [1, +\infty)$ полагают

$$L_p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \text{функция } f \text{ } \mu\text{-измерима и } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}. \quad (1.21)$$

Далее, на пространстве $L_p(X)$ задается норма

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Иногда вместо $\|f\|_{L_p(X)}$ для краткости и удобства пишут просто $\|f\|_{L_p}$ или даже $\|f\|_p$ (когда из контекста понятно, о каком пространстве X идет речь).

Теперь неравенства Гельдера и Минковского можно записать гораздо короче

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1.22)$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1.23)$$

(еще раз подчеркнем, что все эти неравенства верны в предположении $p \geq 1$).

Напомним, что для векторного пространства Y над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) функция $\|\cdot\|$ называется нормой, если для нее выполняются следующие аксиомы:

- (i) $\|y\| \geq 0$ для всех $y \in Y$, кроме того, $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
- (ii) $\|\alpha y\| = |\alpha| \cdot \|y\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall y \in Y$ (положительная однородность);
- (iii) $\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\| \quad \forall y, z \in Y$ (неравенство треугольника).

Очевидно, что для $\|\cdot\|_p$ выполнена вторая аксиома. Выполнение неравенства треугольника при $p \geq 1$ мгновенно следует из неравенства Минковского (1.23). А вот по поводу первой, самой простой аксиомы (i) требуется некое уточнение.

Ясно, что напрямую эта аксиома не выполняется. В самом деле, если $f(x) = 0$ для μ -почти всех $x \in X$, то $\|f\|_p = 0$, хотя при этом $f(x)$ может принимать ненулевые значения в некоторых точках. Таким образом, приходят к естественному соглашению: элементами пространства $L_p(X)$ называются не сами функции, удовлетворяющие условиям в (1.21), а классы эквивалентностей этих функций по отношению

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in X.$$

Легко видеть, что при этом соглашении $L_p(X)$ образует векторное пространство, и $\|\cdot\|_p$ является нормой в этом пространстве. Более того, справедлива классическая

ТЕОРЕМА 1.3.1 (Теорема Рисса-Фишера). *Пространство $L_p(X)$ с нормой $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, является полным.*

Таким образом, $L_p(X)$ образует представляет собой банахово пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Докажем эту теорему сначала для $p = 1$. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность функций из $L_1(X)$, фундаментальная с точки зрения L_1 -нормы, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \int_X |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N. \quad (1.24)$$

Требуется доказать, что эта последовательность является сходящейся в L_1 . Достаточно доказать, что *хотя бы одна подпоследовательность* является сходящейся к некоторой функции из L_1 (тогда и вся последовательность в силу условия фундаментальности и неравенства треугольника будет сходиться к тому же самому пределу). Ясно, что с помощью условия (1.24) из последовательности f_n можно извлечь подпоследовательность f_{n_k} такую, что

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| d\mu \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, l > k. \quad (1.25)$$

В силу сказанного выше мы можем отождествить эту подпоследовательность с исходной последовательностью, т.е. предполагать, не умаляя общности, что

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n. \quad (1.26)$$

Положим $f_0(x) \equiv 0$. Тогда из оценки (1.26) и суммируемости функции f_1 вытекает, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ является нормально сходящимся, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x) - f_{n-1}(x)| < \infty$. Тогда по Теореме 1.1.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ поточечно сходится для μ -почти всех $x \in X$. Нетрудно убедиться, что частичные суммы этого ряда $\sum_{n=1}^m (f_n(x) - f_{n-1}(x))$, вследствие условия $f_0 \equiv 0$, совпадают с $f_m(x)$. Следовательно, последовательность функций $f_m(x)$ сходится поточечно к некоторой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ для μ -почти всех $x \in X$. Зафиксируем теперь $n \in \mathbb{N}$. Для $m \geq n$ положим $h_m(x) = |f_m(x) - f_n(x)|$. Тогда из условия (1.26) получаем, что

$$\int h_m(x) d\mu \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall m > n. \quad (1.27)$$

По построению, $h_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)|$ для μ п.в. $x \in X$. Тогда по теореме Фату 1.1.1 получаем, что

$$\int |f(x) - f_n(x)| d\mu = \int \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) d\mu \stackrel{(1.27)}{\leq} \frac{1}{2^n}. \quad (1.28)$$

Это в точности означает, что $\|f_n - f\|_{L_1(X)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, фундаментальная последовательность функций $f_n(x)$ является сходящейся в пространстве $L_1(X)$. Теорема Рисса-Фишера для случая $p = 1$ доказана.

ШАГ 2. Рассмотрим теперь случай $p > 1$ и предположим сначала, что

$$\mu(X) < \infty. \quad (1.29)$$

Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность функций из $L_p(X)$, фундаментальная с точки зрения L_p -нормы, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon \quad \int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p d\mu \leq \varepsilon^p \quad \forall n, m \geq N. \quad (1.30)$$

Тогда в силу неравенства Гельдера

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leq \left(\int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X 1 d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \varepsilon [\mu(X)]^{\frac{p-1}{p}} \quad (1.31)$$

при $n, m \geq N_\varepsilon$. Тем самым данная последовательность является фундаментальной в L_1 , поэтому (см. выше) из нее можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся поточечно к некоторой функции $f(x)$ для μ -почти всех $x \in X$. Далее можно повторить почти дословно окончание рассуждений на Шаге 1. Именно, зафиксируем теперь $n \geq N_\varepsilon$. Для $m \geq n$ положим $h_m(x) = |f_m(x) - f_n(x)|^p$. Тогда из условия (1.30) получаем, что

$$\int h_m(x) d\mu \leq \varepsilon^p \quad \forall m > n. \quad (1.32)$$

По построению, $h_m(x) \rightarrow |f(x) - f_n(x)|^p$ для μ -п.в. $x \in X$. Тогда по теореме Фату 1.1.1 имеем

$$\int |f(x) - f_n(x)|^p d\mu = \int \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) d\mu \stackrel{(1.32)}{\leq} \varepsilon^p. \quad (1.33)$$

Это в точности означает, что $\|f_n - f\|_{L_p(X)} \leq \varepsilon$ при $n \geq N_\varepsilon$. Таким образом, фундаментальная последовательность функций $f_n(x)$ является сходящейся в пространстве $L_p(X)$. Теорема Рисса–Фишера для случая $p \in [1, +\infty)$ в предположении (1.29) также доказана.

ШАГ 3. Рассмотрим теперь общий случай $p \in [1, +\infty)$, когда условие (1.29) может нарушаться. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность функций из $L_p(X)$, фундаментальная с точки зрения L_p -нормы. В частности,

$$\int |f_n(x)|^p d\mu < \infty. \quad (1.34)$$

Отсюда и из теорем прошлого семестра вытекает, что множество $\{x \in X : |f_n(x)| > 0\}$ является σ -конечным, т.е. его можно представить в виде объединения не более чем счетного семейства множеств конечной меры. Таким образом, найдется расширяющаяся последовательность измеримых множеств $X_k \subset X_{k+1} \subset X$ таких, что $\mu(X_k) < \infty$ и для их объединения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ справедливо утверждение

$$f_n(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus E \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.35)$$

Для множества X_1 , следуя рассуждениям предыдущих шагов, можно подобрать подпоследовательность f_{n_m} , которая будет поточечно сходиться для μ -почти всех $x \in X_1$. Из

этой подпоследовательности можно в свою очередь выбрать другую подпоследовательность, которая будет сходиться для μ -почти всех $x \in X_2$ и т.д. Применяя диагональный метод Кантора, можно в итоге построить подпоследовательность функций $f_{n_l}(x)$, которая будет сходиться для μ -почти всех $x \in E$. Но тогда в силу условия (1.35) данная подпоследовательность будет поточечно сходиться для μ -почти всех $x \in X$ к некоторой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Окончание доказательства ничем не отличается от шагов 1–2, поэтому мы его опускаем. $\square$

Глава 2

Мера и интегрирование на многообразиях

§2.1 Предварительные сведения

ТЕОРЕМА 2.1.1 (Формула замены переменной (без доказательства)). Пусть U, V — открытые множества пространства $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — C^1 -гладкий изоморфизм. Тогда для любой интегрируемой (по Лебегу) функции $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место формула

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx, \quad (2.1)$$

где символом dx обозначается n -мерная мера Лебега на пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\varphi'(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ — $n \times n$ -матрица Якоби отображения φ в точке x .

Ниже в данном разделе предполагается, что $k \leq n$. Тогда для $n \times k$ -матрицы $a \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ее *обобщенный якобиан* определяется по формуле $J(a) = \sqrt{\det(a^*a)}$. Отметим, что сопряженная матрица a^* является $k \times n$ матрицей, поэтому a^*a представляет собой квадратную $k \times k$ -матрицу, и у нее в самом деле можно посчитать детерминант (эту матрицу обычно называют *матрицей Грама*, а ее детерминант — соответственно, *детерминант Грама*). Можно доказать (это обычно делается в курсе аналитической геометрии), что $J(a)$ представляет собой объем k -мерного параллелепипеда

$$P = \{t_1 a_1 + \dots + t_k a_k : t_i \in [0, 1], i = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^n,$$

натянутого на вектора a_j — столбцы матрицы $a = (a_1 | a_2 | \dots | a_k)$. Имеет место следующее красивое соотношение, которое можно рассматривать как теорему Пифагора для k -мерных объемов.

ТЕОРЕМА 2.1.2 (Формула Бине–Коши — без доказательства). Для произвольной $n \times k$ -матрицы $a \in \mathbb{R}^{n \times k}$ справедливо тождество

$$J(a) = \sqrt{\det(a^*a)} = \sqrt{\sum_{M \in \mathcal{M}^k(a)} [\det M]^2}, \quad (2.2)$$

где символом $\mathcal{M}^k(a)$ обозначена совокупность всех $k \times k$ -миноров матрицы a .

Формула Бине–Коши имеет простой геометрический смысл: *квадрат объема k -мерного параллелепипеда в пространстве $\mathbb{R}^n$ равен сумме квадратов объемов его проекций на все возможные k -мерные подпространства, натянутые на k координатных векторов из $\mathbb{R}^n$.*

Отметим, что в частном случае, если $k = n$, то $J(a) = |\det a|$, и формулу (2.1) можно переписать в виде

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) J(\varphi'(x)) dx. \quad (2.3)$$

§2.2 k -мерная мера множеств в $\mathbb{R}^n$

Определение 2.2.1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k -мерным лоскутком*, если найдется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^k$, измеримое (относительно k -меры Лебега) множество $X \subset U$ и C^1 -гладкое вложение¹ $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\varphi(X) = S$. Далее, k -мерой лоскутка S в этом случае называется величина

$$\mu_k(S) = \int_X J(\varphi'(x)) dx. \quad (2.4)$$

ТЕОРЕМА 2.2.2 (корректность определения). Для произвольного k -мерного лоскутка $S \subset \mathbb{R}^n$ величина $\mu_k(S)$ не зависит от выбора допустимой параметризации φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть у одного и того же k -мерного лоскутка S имеются две параметризации $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ со свойствами: U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^k$, $\varphi(X) = \psi(Y) = S$, где $X \subset U$, $Y \subset V$ — измеримые множества, причем $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ — C^1 -гладкие изоморфизмы. Не умаляя общности², можно считать, что $\varphi(U) = \psi(V)$, тогда отображение $\gamma : U \rightarrow V$, задаваемое формулой, $\gamma(x) = \psi^{-1}(\varphi(x))$, представляет собой C^1 -гладкий изоморфизм открытых множеств U, V пространства $\mathbb{R}^k$. По формуле (2.3) для замены переменной $y = \gamma(x)$ имеем

$$\int_Y J(\psi'(y)) dy = \int_X J(\psi'(\gamma(x))) J(\gamma'(x)) dx. \quad (2.5)$$

Обозначим $a = \varphi'(x)$, $b = \psi'(\gamma(x))$, $c = \gamma'(x)$. Так как по построению $\psi(\gamma(x)) \equiv \varphi(x)$, то по правилу дифференцирования композиции получаем $bc = a$. Тогда в силу определения $J(a)$ имеем

$$J(a) = \sqrt{\det(a^*a)} = \sqrt{\det(c^*b^*bc)} = \sqrt{\det(c^*) \det(b^*b) \det(c)} = J(c)J(b).$$

Теперь формулу (2.5) можно переписать в виде

$$\int_Y J(\psi'(y)) dy = \int_X J(\varphi'(x)) dx. \quad (2.6)$$

Теорема доказана. □

¹Напомним, что отображение $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *C^r -вложением*, если оно представляет собой C^r -гладкий изоморфизм U на $\varphi(U)$.

²В самом деле, если $\varphi(U) \neq \psi(V)$, то можно взять пару отображений (сужений) $\varphi : U_0 \rightarrow W$ и $\psi : V_0 \rightarrow W$, где $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$ и $U_0 = \varphi^{-1}(W)$, $V_0 = \psi^{-1}(W)$.

Пример 2.2.3 (площадь графика функции). Пусть имеется гладкое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через S график этой функции: $S = \{(x, f(x)) : x \in U\}$. Данная поверхность S может быть параметризована функцией³ $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ с матрицей Якоби $\varphi'(x) = \begin{pmatrix} E_k \\ f'(x) \end{pmatrix}$, где E_k есть единичная $k \times k$ -матрица, и $f'(x)$ представляет собой $m \times k$ -матрицу. С помощью теоремы Бине-Коши и элементарных фактов линейной алгебры нетрудно проверить, что

$$J(\varphi'(x)) = \sqrt{1 + \sum_{M \in \mathcal{M}(f'(x))} [\det M]^2}, \quad (2.7)$$

где символом $\mathcal{M}(a)$ обозначена совокупность **всех** миноров матрицы a , т.е. $\mathcal{M}(a) = \bigcup_{j=1}^{\min(k,m)} \mathcal{M}_j(a)$. Тогда k -мерная площадь графика функции f вычисляется по формуле

$$\mu_k(S) = \int_U \sqrt{1 + \sum_{M \in \mathcal{M}(f'(x))} [\det M]^2} dx. \quad (2.8)$$

В частном случае, когда $m = 1$, т.е. f представляет собой скалярную функцию, $f'(x) = \nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k})$ будет вектор-строкой размерности $1 \times k$, поэтому имеем $J(\varphi'(x)) = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}$, т.е.

$$\mu_k(S) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx. \quad (2.9)$$

Пример 2.2.4 (Объем k -мерного многообразия в терминах первой квадратичной формы). Пусть имеется C^1 -гладкое вложение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через S соответствующее k -мерное многообразие $S = f(U)$. Для $x \in U$ положим $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \rangle$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение соответствующих векторов из $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что $k \times k$ -матрица $g(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,k}$ совпадает с матрицей $[f'(x)]^* f'(x)$. Эту квадратную матрицу иногда называют *матрицей Грама-Шмидта* или *матрицей первой квадратичной формы* многообразия S . Поэтому $J(f'(x)) = \sqrt{\det g(x)}$ и

$$\mu_k(S) = \int_U \sqrt{\det g(x)} dx. \quad (2.10)$$

Пример 2.2.5 (Площадь двумерной поверхности). Пусть имеется C^1 -гладкое вложение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим через S соответствующую двумерную поверхность $S = f(U)$ и пусть $f = f(u, v)$. Положим $E = E(u, v) = |\frac{\partial f}{\partial u}|^2$, далее, $F = |\frac{\partial f}{\partial v}|^2$, $G = \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle$. Тогда по формуле (2.10) получаем

$$\mu_2(S) = \int_U \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix}} du dv = \int_U \sqrt{EF - G^2} du dv. \quad (2.11)$$

³Для ясности мы задаем эту функцию как вектор-столбец.

Пример 2.2.6 (Площадь двумерной поверхности вращения в трехмерном пространстве). Пусть имеется C^1 -гладкая функция $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим ее график $\Gamma = \{(x, y) : y = h(x)\}$. Обозначим через S поверхность, полученную вращением этого графика в трехмерном пространстве вокруг оси O_x . Тогда поверхность может быть параметризована функцией двух переменных $f(x, \varphi) = (x, h(x) \cos \varphi, h(x) \sin \varphi)$, где $x \in [a, b]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ — угол поворота вокруг оси O_x . Применим полученную ранее формулу (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (1, h'(x) \cos \varphi, h'(x) \sin \varphi), & \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= (0, -h(x) \sin \varphi, h(x) \cos \varphi); \\ E &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 = 1 + |h'(x)|^2, & F &= \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|^2 = h(x)^2, & G &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\mu_2(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} |h(x)| \sqrt{1 + |h'(x)|^2} d\varphi dx = 2\pi \int_a^b |h(x)| \sqrt{1 + |h'(x)|^2} dx. \quad (2.12)$$

Если же вращать график функции h относительно оси O_y (в этом случае будем предполагать, что $a, b > 0$, и в качестве S взять образованную этим вращением поверхность, то допустимая параметризация этой поверхности будет задаваться функциями $f(x, \varphi) = (x \cos \varphi, h(x), x \sin \varphi)$, где $x \in [a, b]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ — угол поворота вокруг оси O_y . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (\cos \varphi, h'(x), \sin \varphi), & \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= (-x \sin \varphi, 0, x \cos \varphi); \\ E &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 = 1 + |h'(x)|^2, & F &= \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|^2 = x^2, & G &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\mu_2(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} x \sqrt{1 + |h'(x)|^2} d\varphi dx = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + |h'(x)|^2} dx. \quad (2.13)$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с формулой (2.4) для каждой интегрируемой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ справедливы формулы

$$\int_X J(\varphi'(x)) f(x) dx \stackrel{\text{замена } v = \varphi(x)}{=} \int_S f(\varphi^{-1}(v)) d\mu_k(v), \quad (2.14)$$

в частности,

$$\int_X f(x) dx \stackrel{\text{замена } v = \varphi(x)}{=} \int_S f(\varphi^{-1}(v)) \frac{1}{J(\varphi'(\varphi^{-1}(v)))} d\mu_k(v). \quad (2.15)$$

§2.2.1 Распространение k -меры на произвольные подмножества данного k -многообразия

Пусть имеется некоторое k -мерное многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что множество $A \subset M$ называлось k -мерным лоскутком в M , если имелся гладкий изоморфизм $\varphi : U \rightarrow M$,

где $U \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество, и $\varphi(U) = A$. В этом случае полагают

$$\mu_k(A) = \int_U J(\varphi'(x)) dx, \quad (2.16)$$

(см. Определение 2.2.1). Было показано, что величина (2.16) не зависит от выбора параметризации φ (см. Теорему 2.2.2).

Если задана мера лоскутков, то ее можно распространить на все подмножества M по стандартной схеме:

$$\forall E \subset M \quad \mu_k(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k(A_i) : A_i \text{ — лоскутки в } M \text{ такие, что } \bigcup_i A_i \supset E \right\}. \quad (2.17)$$

Из стандартных фактов теории меры Лебега вытекает, что значение $\mu_k(A)$, посчитанное для лоскутков $A \subset M$ по формулам (2.16) и (2.17), одно и то же, и множество $E \subset M$ будет μ_k — измеримым, если $\forall x \in E$ найдется открытая окрестность W точки x такая, что $W \cap M$ является лоскутком M . Отсюда легко выводится, что каждое μ_k измеримое подмножество M представимо в виде счетного объединения непересекающихся лоскутков. И для каждого лоскутка $A = \varphi(U) \subset M$ имеем

$$\int_A f(y) d\mu_k(y) = \int_U f(\varphi(x)) J(\varphi'(x)) dx. \quad (2.18)$$

В частном случае, когда суммируемая по мере μ_k функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет компактный носитель, найдется конечная совокупность распрямляемых открытых частей A_i многообразия M (в частности, все A_i — лоскутки), и суммируемых функций f_i таких, что $f_i(x) \equiv 0$ для $x \notin A_i$ (это будет доказано в следующей главе, см. Теорему о разбиении единицы 3.4.5). Следовательно, в этом случае справедливо равенство

$$\int_M f(y) d\mu_k(y) = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f_i(y) d\mu_k(y). \quad (2.19)$$

Интеграл от функций по мере μ_k называется *интегралом первого рода*, в отличие от интеграла k -формы по ориентированному k -многообразию, который называется *интегралом второго рода*, и будет изучаться в следующей главе.

§2.3 Формула коплощади

Для $m \times n$ матрицы $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ при $m \leq n$ (это условие предполагается выполненным на протяжении всего данного параграфа) полагают $J(a) = \sqrt{\det(aa^*)}$. Отметим, что aa^* является квадратной $m \times m$ матрицей, так что детерминант у нее посчитать в самом деле возможно. Отметим также, что данное определение согласовано с предыдущим: $J(a) = J(a^*)$, где последняя величина $J(a^*)$ вычисляется по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

Пусть имеется C^1 -гладкое отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\text{rank } \varphi'(x) \equiv m$ для всех $x \in \Omega$, — данное условие равносильно соотношению

$$J(\varphi'(x)) > 0 \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (2.20)$$

Тогда для всякого $t \in \varphi(\Omega)$ прообраз $\Gamma_t = \varphi^{-1}(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) = t\}$ является k -мерным многообразием с $k = n - m$, и на нем можно рассмотреть соответствующую меру μ_k . Имеет место следующая красивая формула, которую можно считать криволинейным аналогом теоремы Фубини.

ТЕОРЕМА 2.3.1 (Формула коплощади). Пусть имеется C^1 -гладкое отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем выполнено условие (2.20). Тогда для произвольного измеримого множества $X \subset \Omega$ справедлива формула

$$\int_X J(\varphi'(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_{n-m}(X \cap \varphi^{-1}(t)) dt. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мера и интеграл суть σ -аддитивные функции множеств, то достаточно установить локальное утверждение данной теоремы (т.е. что для любой точки $p \in \Omega$ найдется ее открытая окрестность Ω_p такая, что (2.21) выполнено для произвольного измеримого множества $X \subset \Omega_p$).

Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что область Ω представима в виде $\Omega = U \times V$, где U и V — открытые множества в $\mathbb{R}^{n-m}$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Более того, предполагаем, также не умаляя общности, что в этих окрестностях выполнено утверждение теоремы об обратной функции, т.е. отображение $h(y, z) = (y, \varphi(y, z))$ (определенное для $y \in U, z \in V$), является диффеоморфизмом, а потому для него определено обратное отображение $g : h(\Omega) \rightarrow \Omega$, также класса гладкости C^1 . По построению,

$$\forall t \in \varphi(\Omega) \quad \forall (y, z) \in \Omega \quad \left[\varphi(y, z) = t \Leftrightarrow (y, z) = g(y, t) \right]. \quad (2.22)$$

В частности, при каждом фиксированном $t \in \varphi(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{отображение } [h(\Omega)]_t \ni y \mapsto g(y, t) \in \Gamma_t \text{ является допустимой параметризацией} \\ \text{многообразия уровня } \Gamma_t := \{x \in \Omega : \varphi(x) = t\}. \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

Здесь через $[h(\Omega)]_t$ обозначена соответствующая проекция $[h(\Omega)]_t = \{y \in U : \exists z \in V \varphi(y, z) = t\}$.

Теперь в результате последовательных вычислений с формулами замены переменной, получаем

$$\begin{aligned} \int_X J(\varphi'(x)) dx &\stackrel{\text{замена } x = g(y, t)}{=} \int_{h(X)} J(\varphi') \cdot J(g') dt dy \stackrel{\text{теорема Фубини, повторный интеграл}}{=} \int_{\varphi(X)} dt \left[\int_{[h(X)]_t} J(\varphi') \cdot J(g') dy \right] \\ &\stackrel{\text{замена } v = g(y, t), \text{ см. (2.15), (2.23)}}{=} \int_{\varphi(X)} dt \left[\int_{X \cap \Gamma_t} J(\varphi') \cdot J(g') \cdot \frac{1}{J\left(\frac{\partial g(y, t)}{\partial y}\right)} d\mu_{n-m}(v) \right]. \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства, для окончания доказательства формулы коплощади достаточно проверить алгебраическое равенство

$$J(\varphi'(x)) \cdot J(g'(y, t)) \cdot \frac{1}{J\left(\frac{\partial g(y, t)}{\partial y}\right)} = 1 \quad (2.24)$$

где $x = g(y, t)$, и (y, t) — произвольная точка из $h(\Omega)$.

Для проверки (2.24), запишем $m \times n$ матрицу $\varphi'(x)$ в виде

$$\varphi'(x) = (B|C), \quad (2.25)$$

где $B \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ и $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, т.е. C есть квадратная $m \times m$ матрица. Тогда по построению

$$h'(x) = \begin{pmatrix} E_{n-m} & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где E_{n-m} — единичная квадратная $(n-m) \times (n-m)$ матрица. Так как отображение g обратное к h , то $g'(y, t) = [h'(x)]^{-1}$, тогда нетрудно проверить (используя правило умножения блочных матриц), что

$$g'(y, t) = \begin{pmatrix} E_{n-m} & 0 \\ -C^{-1}B & C^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Отсюда, так как по определению $g'(y, t) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial t}\right)$, получаем

$$\frac{\partial g(y, t)}{\partial y} = \begin{pmatrix} E_{n-m} \\ -C^{-1}B \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Оставшаяся часть доказательства представляет собой чисто алгебраическое (не лишенное элегантности) вычисление. Легче всего считается

$$J(g'(y, t)) = \det(C^{-1}) = \frac{1}{\det C}. \quad (2.29)$$

Далее, представим матрицу $\varphi'(x)$ в виде

$$\varphi'(x) = C(C^{-1}B|E_m). \quad (2.30)$$

Тогда получаем, что

$$J(\varphi'(x)) = J(C) \cdot J[(C^{-1}B|E_m)] = \det C \cdot J[(C^{-1}B|E_m)] \stackrel{\text{формула Бине-Коши}}{=} \det C \cdot \sqrt{1 + \sum_{M \in \mathcal{M}(C^{-1}B)} [\det M]^2}. \quad (2.31)$$

где символом $\mathcal{M}(a)$ обозначена совокупность **всех** миноров матрицы a (ср. с (2.7)). Аналогично,

$$J\left(\frac{\partial g(y, t)}{\partial y}\right) \stackrel{(2.28) \text{ и формула Бине-Коши}}{=} \sqrt{1 + \sum_{M \in \mathcal{M}(C^{-1}B)} [\det M]^2}. \quad (2.32)$$

Формулы (2.29), (2.31)–(2.32) означают справедливость искомого равенства (2.24). Формула коплощади полностью доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. Пусть имеется C^1 -гладкое отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем выполнено условие (2.20). Тогда для произвольного измеримого множества $X \subset \Omega$ и для любой интегрируемой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\int_X J(\varphi'(x)) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} dt \left[\int_{X \cap \varphi^{-1}(t)} f(x) d\mu_{n-m} \right]. \quad (2.33)$$

Пример 2.3.3 (Интегрирование по сферическим слоям). В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = |x|$. Легко видеть, что $J(\varphi'(x)) \equiv |\nabla \varphi(x)| \equiv 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Поэтому формула коплощади (2.33) принимает вид: для произвольного измеримого множества $X \subset \Omega$ и для любой интегрируемой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\int_X f(x) dx = \int_0^\infty dr \left[\int_{X \cap S_r} f(x) d\mu_{n-1} \right], \quad (2.34)$$

где через S_r обозначена $(n-1)$ -мерная сфера $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Поскольку имеет место очевидное равенство $\mu_{n-1}(X \cap S_r) = r^{n-1} \mu_{n-1}(S_1 \cap \frac{X}{r})$, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\int_X f(x) dx = \int_0^\infty r^{n-1} dr \left[\int_{v \in S_1, rv \in X} f(rv) d\mu_{n-1}(v) \right], \quad (2.35)$$

Следствие 2.3.4. Обозначим через B^n единичный шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, а через S^{n-1} — единичную сферу $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ в том же пространстве. Тогда справедливо соотношение

$$\mu_n(B^n) = \frac{1}{n} \mu_{n-1}(S^{n-1}). \quad (2.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить формулу (2.35) для случая $f \equiv 1$. $\square$

§2.4 Эйлеровы интегралы

§2.4.1 Определения; выражение B -функции через Γ -функцию

Напомним, что по определению Γ -функции полагают

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \stackrel{\text{замена } x = \xi^2}{=} 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi. \quad (2.37)$$

Легко видеть, что

$$\forall z > 0 \quad z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \Gamma(1) = 1, \quad (2.38)$$

поэтому

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.39)$$

Положим

$$B(z_1, \dots, z_k) = \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_k)}{\Gamma(z_1 + \dots + z_k)}. \quad (2.40)$$

ТЕОРЕМА 2.4.1. Справедлива формула

$$B(z_1, \dots, z_k) = 2^{k-1} \int_{S \cap \mathbb{R}_+^k} \prod_{j=1}^k s_j^{2z_j-1} d\mu_{k-1}(s), \quad (2.41)$$

где символом S обозначена единичная сфера $S = \{s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k : |s| = 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_k) &= 2^k \int_0^\infty e^{-\xi_1^2} \xi_1^{2z_1-1} d\xi_1 \dots \int_0^\infty e^{-\xi_k^2} \xi_k^{2z_k-1} d\xi_k = 2^k \int_{\mathbb{R}_+^k} e^{-\sum_{j=1}^k \xi_j^2} \prod_{j=1}^k \xi_j^{2z_j-1} d\xi_1 \dots d\xi_k = \\
 &= 2^k \int_0^\infty e^{-r^2} dr \int_{S_r \cap \mathbb{R}_+^k} \prod_{j=1}^k \xi_j^{2z_j-1} d\mu_{k-1} \stackrel{\text{замена } \xi = rs}{=} 2^k \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2 \sum_{j=1}^k z_j - k} r^{k-1} dr \int_{S_1 \cap \mathbb{R}_+^k} \prod_{j=1}^k s_j^{2z_j-1} d\mu_{k-1} \\
 &= 2^{k-1} \Gamma(z_1 + \dots + z_k) \int_{S_1 \cap \mathbb{R}_+^k} \prod_{j=1}^k s_j^{2z_j-1} d\mu_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

□

Полученная формула носит фундаментальный характер в теории специальных функций и имеет многочисленные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.2. *Справедливы следующие соотношения:*

- (i) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi = \Gamma(\frac{1}{2})^2$, т.е. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;
- (ii) $B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du$;
- (iii) $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$;
- (iv) $\mu_{k-1}(S^{k-1}) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})}$, где, напомним, S^{k-1} означает единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^k$. Поскольку в силу формулы (2.36) $\mu_{k-1}(S^{k-1}) = k\mu_k(B^k)$, то, с учетом равенства $\frac{k}{2}\Gamma(\frac{k}{2}) = \Gamma(\frac{k}{2} + 1)$, справедлива формула

$$\mu_k(B^k) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}. \tag{2.43}$$

Отсюда получаем красивую рекуррентную формулу

$$\mu_k(B^k) = \frac{2\pi}{k} \mu_{k-2}(B^{k-2}). \tag{2.44}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Из утверждения Следствия 2.4.2 (iii) получаем еще одно соотношение "факториального типа", служащее важным дополнением к формуле (2.39).

СЛЕДСТВИЕ 2.4.3. *Справедлива формула*

$$B(x, n+1) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \tag{2.45}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

§2.4.2 Асимптотические свойства эйлеровых интегралов. Формула Валлиса.

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, & t \in [0, n]; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.46}$$

Поскольку $\ln(1 + \alpha) \leq \alpha$ для всех $\alpha \in (-1, +\infty)$, имеем

$$0 \leq \varepsilon_n(t) \leq e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.47)$$

более того, справедливо предельное соотношение

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varepsilon_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t}. \quad (2.48)$$

Для фиксированного значения $x > 0$ рассмотрим последовательность функций

$$t^{x-1} \varepsilon_n(t), \quad (2.49)$$

заданных на положительной полуоси $t \in (0, +\infty)$. Тогда из выписанных выше формул (2.47)–(2.48) и из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\int_0^\infty t^{x-1} \varepsilon_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) \quad (2.50)$$

(здесь роль интегрируемой мажоранты играет функция $t^{x-1}e^{-t}$). Займемся теперь вычислением интеграла

$$\int_0^\infty t^{x-1} \varepsilon_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t = un$, $u \in (0, 1)$. Тогда

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = n^x B(x, n+1) \stackrel{(2.45)}{=} n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Отсюда и из формулы (2.50) получаем важное асимптотическое соотношение

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad (2.51)$$

Применим полученную формулу для частного случая $x = \frac{1}{2}$. Тогда имеем

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n!}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \dots (\frac{1}{2}+n)} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{4^{n+1}(n!)^2}{[1(1+2) \dots (1+2n)]^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{4[(2n)!!]^2}{[(1+2n)!!]^2}. \quad (2.52)$$

Поскольку $[(1+2n)!!]^2 = (2n+1) \cdot (1+2n)!! \cdot (2n-1)!!$, тождество (2.52) можно переписать в виде

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!! \cdot (2n-1)!!}. \quad (2.53)$$

В итоге получаем

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!! \cdot (2n-1)!!}{[(2n)!!]^2}. \quad (2.54)$$

Полученная формула вошла в историю математики как *формула Валлиса*. Ее можно переписать в более компактном виде. Имеем $(2n+1)!! = \prod_{k=1}^n (2k+1)$, $(2n-1)!! = \prod_{k=1}^n (2k-1)$, и, т.к. $(2k+1)(2k-1) = 4k^2 - 1$, получаем $(2n+1)!! \cdot (2n-1)!! = \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$. Аналогично, $[(2n)!!]^2 = \prod_{k=1}^n 4k^2$, поэтому формулу Валлиса можно переписать в виде

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right). \quad (2.55)$$

§2.4.3 Метод Лапласа получения асимптотики интегралов. Формула Стирлинга.

ТЕОРЕМА 2.4.4 (Теорема Лапласа). Пусть φ и h есть функции, определенные на промежутке (a, b) . Для $x \in \mathbb{R}$ положим

$$F(x) = \int_a^b \varphi(t) e^{xh(t)} dt. \quad (2.56)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) существует число $p \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \geq p$ функция $t \mapsto \varphi(t) e^{xh(t)}$ интегрируема по Лебегу на промежутке (a, b) ;

(ii) функция h принимает в промежутке (a, b) свое максимальное значение в некоторой точке $\tau \in (a, b)$. При этом для любого отрезка $[c, d] \subset (a, b)$, не содержащего точки τ , точная верхняя граница функции h на этом отрезке меньше $h(\tau)$;

(iii) существует $\delta > 0$ такое, что $a < \tau - \delta < \tau + \delta < b$, причем $h \in C^2((\tau - \delta, \tau + \delta))$ и $h''(\tau) \neq 0$.

(iv) функция φ непрерывна в точке τ , причем $\varphi(\tau) \neq 0$.

Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$F(x) = \varphi(\tau) e^{xh(\tau)} \sqrt{-\frac{2\pi}{xh''(\tau)}} (1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия теоремы. Для упрощения ситуации, вынесем из под знака интеграла (2.56) величину $\varphi(\tau) e^{xh(\tau)}$. Тогда получим

$$F(x) = \varphi(\tau) e^{xh(\tau)} F_0(x), \quad (2.58)$$

где обозначено

$$F_0(x) = \int_a^b \theta(t) e^{xg(t)} dt, \quad (2.59)$$

и $\theta(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)}$, $g(t) = h(t) - h(\tau)$. Тем самым мы свели дело к ситуации, когда максимальное значение функции g , достигаемое в точке τ — нулевое (причем речь идет о строгом максимуме!), и $\theta(\tau) = 1$. Делая сдвиг по переменной t (т.е. производя замену переменной $\tilde{t} = t - \tau$), можно считать, не умаляя общности, что

$$\tau = 0. \quad (2.60)$$

По формуле Тэйлора, с учетом равенств $g'(\tau) = h'(\tau) = 0$, $g''(\tau) = h''(\tau)$, справедливы разложения

$$g(t) = \frac{h''(\tau)}{2} t^2 + o(t^2) = -k^2 t^2 + \alpha(t) t^2, \quad (2.61)$$

где мы обозначили $k = \sqrt{-\frac{1}{2}h''(\tau)}$ и функция $\alpha(t)$ такова, что $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Нам нужно доказать, фактически, что главный вклад в асимптотику интеграла F_0 из (2.59) вносит квадратичная часть функции g в окрестности $\tau = 0$, а все остальное пренебрежимо мало.

С этой целью, выберем параметр $\delta > 0$ таким образом, что

$$g(t) \leq -\frac{1}{2}k^2t^2 \quad \text{и} \quad \theta(t) < 2 \quad \text{для всех } t \in (-\delta, \delta). \quad (2.62)$$

По условию теоремы, найдется число $\gamma > 0$ такое, что

$$g(t) \leq -\gamma \quad \forall t \in (a, -\delta) \cup (\delta, b). \quad (2.63)$$

В частности,

$$|\theta(t)e^{xg(t)}| = |\theta(t)e^{pg(t)+(x-p)g(t)}| \leq e^{(p-x)\gamma} \cdot |\theta(t)e^{pg(t)}| \quad \forall t \in (a, -\delta) \cup (\delta, b), \quad (2.64)$$

где, напомним, по условию доказываемой теоремы,

$$\text{функция } t \mapsto |\theta(t)e^{pg(t)}| \text{ интегрируема по Лебегу на интервале } (a, b). \quad (2.65)$$

Теперь все готово для оценки интеграла F_0 из (2.59). Представим его в виде.

$$F_0(x) = L(x) + M(x) + R(x), \quad (2.66)$$

где

$$L(x) = \int_a^{-\delta} \theta(t)e^{xg(t)} dt, \quad M(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \theta(t)e^{xg(t)} dt, \quad R(x) = \int_{\delta}^b \theta(t)e^{xg(t)} dt. \quad (2.67)$$

Оценим эти интегралы по-отдельности. Проще всего оценить крайние из них. А именно, из формул (2.64)-(2.65) немедленно получаем, что

$$L(x) + R(x) \leq e^{(p-x)\gamma} \left[\int_a^{-\delta} |\theta(t)e^{pg(t)}| dt + \int_{\delta}^b |\theta(t)e^{pg(t)}| dt \right] \leq C e^{(p-x)\gamma}, \quad (2.68)$$

где $C = \int_a^b |\theta(t)e^{pg(t)}| dt$ — некоторая константа, не зависящая от x .

Приступим теперь к главной задаче — оценке среднего интеграла

$$M(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \theta(t)e^x \left[-k^2t^2 + \alpha(t)t^2 \right] dt$$

(см. (2.61)). Благодаря проделанной подготовительной работе, она также не составит большого труда. Сделаем в интеграле для $M(x)$ замену переменной $u = \sqrt{x}kt$, тогда $t = \frac{u}{\sqrt{x}k}$. Имеем

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{x}k} \int_{-\delta k\sqrt{x}}^{\delta k\sqrt{x}} \theta\left(\frac{u}{\sqrt{x}k}\right) e^{-u^2 \left[1 - \frac{1}{k^2}\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{x}k}\right)\right]} du. \quad (2.69)$$

Обозначим

$$V(x) = \int_{-\delta k\sqrt{x}}^{\delta k\sqrt{x}} \theta\left(\frac{u}{\sqrt{x}k}\right) e^{-u^2 \left[1 - \frac{1}{k^2}\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{x}k}\right)\right]} du.$$

Ясно, что при $x \rightarrow \infty$ подинтегральная функция поточечно стремится к $\theta(0)e^{-u^2} = e^{-u^2}$. Более того, вследствие оценок (2.62) справедливы неравенства

$$\theta\left(\frac{u}{\sqrt{xk}}\right)e^{-u^2\left[1-\frac{1}{k^2}\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{xk}}\right)\right]} \leq 2e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

для всех $u \in [-\delta k\sqrt{x}, \delta k\sqrt{x}]$, т.е. у последовательности интегралов $V(x)$ имеется интегрируема мажоранта (не зависящая от x). Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$V(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Тогда из формулы (2.69) получаем, что

$$M(x) = \sqrt{\frac{\pi}{xk^2}} \cdot [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.70)$$

Из оценок (2.68) немедленно вытекает, что интегралы $L(x) + R(x)$ пренебрежимо малы по сравнению с $M(x)$. Окончательно получаем

$$F_0(x) = L(x) + M(x) + R(x) = \sqrt{\frac{\pi}{xk^2}} \cdot [1 + o(1)] = \sqrt{-\frac{2\pi}{xh''(\tau)}} \cdot [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.71)$$

□

Применим доказанную теорему к задаче об асимптотике гамма-функции $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$. Для этого нужно проделать небольшую подготовительную работу, чтобы представить ее как функцию $F(x)$ из формулы (2.56). Имеем $t^x e^{-t} = e^{-t+x \ln t}$. Очевидно, функция $t \mapsto -t + x \ln t$ достигает своего максимума (на положительной полуоси) при $t = x$. Произведем замену переменной, чтобы точка максимума $t = x$ перешла в точку 0. Положим $u = \frac{t}{x} - 1$, тогда $t = (u+1)x$. В результате этой замены в интеграле для $\Gamma(x)$ получим

$$\Gamma(x+1) = x^x \int_{-1}^{\infty} (u+1)^x e^{-(u+1)x} d(u+1)x = x \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-1}^{\infty} (u+1)^x e^{-ux} du = x \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-1}^{\infty} e^{x[-u+\ln(u+1)]} du.$$

Ясно, что функция $(-1, \infty) \ni u \mapsto -u + \ln(u+1)$ достигает своего (нулевого) максимума при $u = 0$. Более того, ее вторая производная в точке 0 равна $(\ln(u+1))''|_{u=0} = -1$. Налицо выполнение всех условий теоремы 2.4.4. Поэтому

$$\int_{-1}^{\infty} e^{x[-u+\ln(u+1)]} du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cdot [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

следовательно,

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2.72)$$

Это и есть знаменитая *формула Стирлинга*. В частности, при $x = n \in \mathbb{N}$ получаем

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + o(1)] \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.73)$$

Глава 3

Исчисление дифференциальных форм

Чтобы не отвлекать читателя на технические детали, в этой главе все функции предполагаются достаточно гладкими и т.д.

§3.1 Дифференциальные формы первой степени

Говорят, что на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задана $\mathbb{R}^m$ -значная *дифференциальная форма первой степени* (или просто *1-форма*), если каждой точке $x \in U$ и каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ сопоставляется некоторый вектор $\omega(x)\langle v \rangle$ пространства $\mathbb{R}^m$, причем функция $\omega(x)\langle v \rangle$ линейна по аргументу v .

Это определение часто интерпретируют следующим образом: дифференциальная форма сопоставляет каждой точке $x \in U$ некоторое линейное отображение $\omega(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, действующее по правилу $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \omega(x)\langle v \rangle$. Поэтому и соответствующий аргумент — вектор v — заключается в особые скобки.

Хорошей иллюстрацией введенного понятия служат следующие четыре классических примера дифференциальных 1-форм.

Пример 3.1.1 (Дифференциал отображения). Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда ее дифференциал $df(x)\langle \cdot \rangle$ является дифференциальной формой. (Исторически из этого примера и выросло само понятие "дифференциальной формы".)

В связи с этим возникает важная задача о восстановлении функции по ее дифференциалу. Зафиксируем точку $p \in U$, возьмем произвольную другую точку $x \in U$ и рассмотрим произвольную гладкую функцию $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, такую, что $\varphi(a) = p$ и $\varphi(b) = x$. Такого рода функция называется *путем*, соединяющим точки p и x . Ясно, что функция $t \mapsto f(\varphi(t))$ будет гладкой на отрезке $[a, b]$ (как композиция гладких функций), и ее производная вычисляется по обычному правилу $[f(\varphi(t))]'_t = df(\varphi(t))\langle \varphi'(t) \rangle$. Значит, по формуле Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(p) + \int_a^b df(\varphi(t))\langle \varphi'(t) \rangle dt. \quad (3.1)$$

Пример 3.1.2 (1-форма, порожденная векторным полем. Физическая интерпретация: работа силы). Пусть на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда на U можно определить 1-форму α_w по правилу:

$$\alpha_w(x)\langle v \rangle := \langle w(x), v \rangle. \quad (3.2)$$

Здесь в правой части последнего равенства символом $\langle w(x), v \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $w(x)$ и v . Данная 1-форма имеет важную физическую интерпретацию. А именно, предположим, что на U задано силовое поле, т.е. вектор $w(x)$ — это сила, приложенная в точке x . Предположим, далее, что физическое тело проходит путь, заданный функцией $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, так что $\varphi(t)$ — это положение тела в момент времени t . Как известно из школьного курса физики, "работа силы = величина силы на пройденное расстояние". За "бесконечно малый" промежуток времени dt тело проходит расстояние $\varphi'(t)dt$, поэтому работы силы за этот временной промежуток равна $\langle w(x), \varphi'(t)dt \rangle = \langle w(x), \varphi'(t) \rangle dt$. Тогда суммарная работа этой силы за весь пройденный путь составит

$$A_w(\varphi) = \int_a^b \langle w(x), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \alpha_w(\varphi(x)) \langle \varphi'(t) \rangle dt \quad (3.3)$$

Пример 3.1.3 (Площадь сектора). Определим 1-форму σ площади сектора на плоскости $\mathbb{R}^2$ по правилу:

$$\sigma(x) \langle v \rangle := \frac{1}{2} \det(x, v). \quad (3.4)$$

Здесь в правой части последнего равенства символом (x, v) обозначена 2×2 матрица со столбцами x, v . Данное этой форме название оправдывается тем обстоятельством, что при движении точки по пути $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ с положительной угловой скоростью площадь сектора $\nabla = \bigcup_{t \in [a, b]} [0, z(t)]$ вычисляется по формуле

$$\mu_2 \nabla := \int_a^b \frac{1}{2} \det(z(t), z'(t)) dt = \int_a^b \sigma(z(t)) \langle z'(t) \rangle dt. \quad (3.5)$$

Таким образом, величина $\sigma(z(t)) \langle z'(t) \rangle$ совпадает с секториальной скоростью.

Пример 3.1.4 (Форма Гаусса). Названная в честь одного из величайших западноевропейских математиков форма $d\Theta$ (элемент угла поворота) определяется на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ следующим образом:

$$d\Theta(z) \langle v \rangle := \frac{1}{|z|^2} \det(z, v). \quad (3.6)$$

Для уяснения геометрического смысла этой формы, рассмотрим движение точки по пути $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, при этом предполагается, что данный путь не проходит через начало координат. Символом $\Theta_z(t)$ обозначим угол, на который поворачивается радиус-вектор $z(t)$ при изменении параметра от a до t . Рассмотрим соответствующую вектор-функцию $u(t) = \frac{z(t)}{|z(t)|}$. Эта функция, как видно, "путешествует" по единичной окружности, причем проходит за время своего пути тот же самый угол, что и исходная функция z . Причем этот угол Θ_u равен удвоенной площади сектора, "замеченного" вектором $u(t)$ (т.к. дело происходит на окружности). Но ведь для площади сектора у нас есть уже формула из предыдущего примера, т.е.

$$\Theta_u = \int_a^b \det(u(t), u'(t)) dt. \quad (3.7)$$

Прямым вычислением убеждаемся, что $(|z(t)|)'_t = \frac{\langle z(t), z'(t) \rangle}{|z|}$ (здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение), поэтому

$$u'(t) = \frac{z'(t)}{|z(t)|} - \frac{z(t) \langle z(t), z'(t) \rangle}{|z|^3},$$

и, подставляя последнее равенство в (3.7) и учитывая свойство определителя $\det(z(t), z(t)) = 0$, получаем

$$\Theta_z = \Theta_u = \int_a^b \det\left(\frac{z(t)}{|z(t)|}, \frac{z'(t)}{|z(t)|}\right) dt = \int_a^b \frac{1}{|z(t)|^2} \det(z(t), z'(t)) dt = \int_a^b d\Theta(z(t)) \langle z'(t) \rangle dt. \quad (3.8)$$

Для множества $X \subset \mathbb{R}^n$ символом $\mathcal{F}^1(X)$ будем обозначать множество всех 1-форм, заданных на множестве X , а символом $\mathcal{F}^0(X)$ — множество всех функций (т.е. "0-форм") на X .

Для 1-форм α, β естественным образом можно определить 1-форму их суммы $\omega = \alpha + \beta$ по правилу $\omega(x)\langle v \rangle = \alpha(x)\langle v \rangle + \beta(x)\langle v \rangle$. Далее, для 1-формы α и функции f соответствующая 1-форма их произведения $\omega = f\alpha$ задается по формуле $\omega(x)\langle v \rangle = f(x) \cdot \alpha(x)\langle v \rangle$.

§3.1.1 Координатное представление 1-форм

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — обычные координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $e_1, \dots, e_n$ — его стандартный базис.

ТЕОРЕМА 3.1.5. Каждую 1-форму $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x) dx_j, \quad (3.9)$$

где $c_j \in \mathcal{F}^0(X)$. Функции $c_j(x)$ называются координатами формы ω (относительно стандартной системы координат). При этом имеют место равенства

$$c_j(x) = \omega(x)\langle e_j \rangle. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.6. Для каждой вещественной 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ имеется ровно одно векторное поле $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого справедливо равенство $\omega = \alpha_w$.

Упражнение 3.1.7. Найти координатные представления упомянутых выше 1-форм $df(x)$, $\alpha_w(x)$, $\sigma(x)$, $d\Theta(x)$, а также $\mathbb{R}^3$ -значной формы $\mathbf{M}(x)\langle v \rangle = x \times mv$, которая называется в физике *моментом количества движения*, здесь, как обычно, m обозначает массу тела, а v — его скорость.

Далее будем говорить, что форма ω принадлежит классу C^r , если все ее коэффициенты принадлежат классу C^r . Модулем формы $\omega = \sum_{j=1}^n c_j dx_j$ называется величина $|\omega(x)| =$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2}.$$

§3.1.2 Операция переноса

Следующая операция играет важнейшую роль в теории дифференциальных форм. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Для $k = 0, 1$ каждой k -форме ω на множестве Y сопоставим k -форму $\varphi^*\omega$ на множестве X по правилу:

- если $k = 0$, то $\varphi^*\omega(x) := \omega(\varphi(x))$;
- если $k = 1$, то $\varphi^*\omega(x)\langle v \rangle := \omega(\varphi(x))\langle d\varphi(x)v \rangle$.

По построению, операция переноса линейна: $\varphi^*[\omega_1 + \omega_2] = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(X)$, $k = 0, 1$; кроме того, эта операция мультипликативна: для каждой функции $f \in \mathcal{F}^0(X)$ и 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ справедлива формула $\varphi^*[f \cdot \omega] = \varphi^*f \cdot \varphi^*\omega$. Два других важных свойства данной операции содержатся в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.1.8 (Свойства операции переноса). (i) *Линейность:* $\varphi^*[\omega_1 + \omega_2] = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(Y)$, $k = 0, 1$;

(ii) *Мультипликативность:* для каждой функции $f \in \mathcal{F}^0(Y)$ и 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(Y)$ справедлива формула $\varphi^*[f \cdot \omega] = \varphi^*f \cdot \varphi^*\omega$.

(iii) *Перестановочность с дифференциалом:* для каждой функции $f \in C^1(Y)$ справедлива формула $\varphi^*[df] = d[\varphi^*f]$.

(iv) *Формула композиции:* если $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ — гладкие отображения, то $\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$, т.е.

$$\varphi^*[\psi^*\omega] = (\psi \circ \varphi)^*\omega \quad (3.11)$$

для каждой формы $\omega \in \mathcal{F}^k(Z)$, $k = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Данную теорему можно кратко резюмировать следующим образом: операция переноса хорошо гармонирует с операциями суммы, умножения и композиции. Но этим дело не ограничивается: оказывается, данная операция хорошо гармонирует также и с координатным представлением (3.9).

ТЕОРЕМА 3.1.9 (Координатная инвариантность). Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества, и $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Тогда для каждой формы $\omega \in \mathcal{F}^1(Y)$, записанной в координатном виде как

$$\omega(y) = \sum_{j=1}^m c_j(y) dy_j, \quad (3.12)$$

справедливо равенство

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^m c_j(\varphi(x)) d\varphi_j. \quad (3.13)$$

Таким образом, "перенесенная" форма $\varphi^*\omega$ вычисляется очень просто: нужно в стандартном координатном представлении (3.12) вместо y_j подставить формально φ_j — и получится правильная формула, несмотря на все формальности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Пример 3.1.10. Рассмотрим простейший одномерный случай, когда $X \subset \mathbb{R}$. Тогда всякая 1-форма ω на X записывается в координатном виде как $\omega(x) = f(x) dx$. Если теперь $\varphi : T \rightarrow X$ — гладкое отображение, $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, то по формуле (3.13) получаем

$$\varphi^*\omega = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (3.14)$$

Тогда известную формулу замены переменной в интеграле можно записать в виде

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \omega = \int_a^b \varphi^* \omega. \quad (3.15)$$

Пример 3.1.11. Пусть $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, и $\varphi : T \rightarrow X$ — гладкое отображение. Тогда для всякой 1-формы ω на X по формуле (3.13) справедливо равенство

$$\varphi^* \omega = \omega(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt. \quad (3.16)$$

Последнюю форму можно и проинтегрировать по отрезку $[a, b]$. Если проделать данную операцию для 1-форм, введенных вначале данной главы Примерах 3.1.1–3.1.4. Тогда получим следующий набор равенств:

$$f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = \int_a^b \varphi^* df, \quad (3.17)$$

$$A_w(\varphi) = \int_a^b \varphi^* \alpha_w, \quad (3.18)$$

$$\mu_2 \nabla = \int_a^b z^* \sigma, \quad (3.19)$$

$$\Theta_z|_a^b = \int_a^b z^* (d\Theta) \quad (3.20)$$

(ср. с (3.1)–(3.8)).

Данный пример служит прологом к важному понятию — интегрирование 1-форм вдоль путей.

§3.1.3 Интегрирование 1-форм вдоль путей

Пусть T — промежуток числовой прямой с концами a, b . Будем говорить, что 1-форма $\omega(t) = f(t)dt$ интегрируема на промежутке T , если на этом промежутке функция f суммируема по Лебегу. Тогда полагают $\int_T \omega = \int_T f(t) dt$ и

$$\int_a^b \omega = \text{sign}(b - a) \int_T f(t) dt. \quad (3.21)$$

Пусть теперь ω — 1-форма на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и $\gamma : T \rightarrow X$ — кусочно-гладкая функция на промежутке $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (напомним, что функция γ называется *кусочно-гладкой*, если она непрерывна и найдутся точки $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ такие, что сужение $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ является гладкой функцией для всех $j = 1, \dots, k - 1$). Такие функции будем

называть в дальнейшем *путем*, соединяющим точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. *Интеграл от 1-формы ω по пути γ* определяется по формуле

$$\int_{\gamma} \omega := \int_T \gamma^* \omega. \quad (3.22)$$

Форма ω называется *интегрируемой по пути γ* , если последний интеграл имеет смысл (т.е. если коэффициент формы $\gamma^* \omega$ суммируем по Лебегу на промежутке T).

Свойства интеграла по пути.

- (i) Критерий интегрируемости: если все коэффициенты 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ непрерывны на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то эта форма интегрируема вдоль любого (кусочно-гладкого) пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$;
- (ii) Линейность: $\int_{\gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\gamma} \omega_2$ для любой пары чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и произвольных интегрируемых вдоль γ форм ω_1, ω_2 ;
- (iii) Ограниченность: если $|\omega(x)| \leq C$ для всех $x \in X$, то

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt = C \ell(\gamma), \quad (3.23)$$

где через $\ell(\gamma)$ обозначена длина кусочно-гладкого пути $\gamma : T \rightarrow X$.

◁ Для формы $\omega = \sum_{j=1}^n c_j(x) dx_j$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \omega \right| &= \left| \int_T \sum_{j=1}^n c_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right| \stackrel{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \int_T \sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2(\gamma(t))} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2} dt = \\ &= \int_T |\omega(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt = C \ell(\gamma). \quad \triangleright \end{aligned} \quad (3.24)$$

- (iv) Формула Ньютона–Лейбница: если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ представляет собой гладкую функцию, заданную на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то для каждого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ справедливо равенство

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (3.25)$$

◁ Имеем

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b df(\gamma(t)) \langle \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b [f(\gamma(t))]'_t dt \stackrel{\text{одномерная ф-ла Н.-Л.}}{=} f(\gamma(t)) \Big|_a^b. \quad \triangleright \quad (3.26)$$

Из последнего утверждения следует, в частности, что если путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ замкнутый (т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$), то

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad (3.27)$$

для любой 1-формы ω на X , представимой в виде $\omega = df$ с некоторой гладкой функцией $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Отметим, пока без доказательства, что верен и обратный факт.

Замечание 3.1.12. Пусть X — открытое множество на $\mathbb{R}^n$, и $\omega = \sum_{j=1}^n c_j(x) dx_j$ — 1-форма с гладкими коэффициентами c_j , определенными на X . Тогда, если выполнено равенство

$$\omega = df \quad (3.28)$$

для некоторой гладкой функции $f \in \mathcal{F}^0(X)$, то, в силу теоремы о равенстве смешанных производных, справедливо тождество

$$\frac{\partial c_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial c_k(x)}{\partial x_j} \quad (3.29)$$

для всех точек $x \in X$ и любой пары индексов j, k . В самом деле, если выполнено (3.28), то $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j$ и $c_j(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, поэтому равенство (3.29) эквивалентно хорошо известному тождеству $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k}$. Однако условие (3.29) в общем случае уже не является достаточным для того, нашлась функция f , удовлетворяющая (3.28) во всем X . В самом деле, рассмотрим множество $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и на нем гауссову форму $\omega = d\Theta$, задаваемую в точке $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ формулой

$$\omega(z)(v) = \frac{1}{x^2 + y^2} \det(z, v) = \frac{1}{x^2 + y^2} \det \begin{pmatrix} x & v_1 \\ y & v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y v_1 + x v_2). \quad (3.30)$$

Тогда

$$\omega(z) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy) = c_1 dx + c_2 dy, \quad c_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad c_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (3.31)$$

и

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} = -\frac{1}{|z|^2} + \frac{2y^2}{|z|^4} = \frac{y^2 - x^2}{|z|^4} = \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (3.32)$$

т.е. тождества (3.29) выполнены. В то же время, если взять в X произвольный замкнутый путь, окружающий точку 0, например, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, то имеем

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0, \quad (3.33)$$

что невозможно при выполнении равенства (3.28).

Однако для случая, когда X — односвязная область¹, условие (3.29) эквивалентно равенству (3.28).

¹Область (открытое связное множество) называется *односвязной*, если в нем любую замкнутую кривую можно непрерывной деформацией стянуть в точку, также принадлежащую этой области. К односвязным относятся выпуклые и звездные области. Напомним, что область Ω называется *звездной* относительно точки $x_* \in \Omega$, если для каждого $x \in \Omega$ весь отрезок $[x_*, x]$ целиком содержится в Ω .

На самом деле, имеет место следующий факт (который является простейшим одномерным случаем одной из теорем де Рама):

ТЕОРЕМА 3.1.13 (без доказательства). Пусть на открытом связном множестве U задана дифференциальная 1-форма ω с непрерывными коэффициентами. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) интеграл от формы ω по любому замкнутому пути в U зануляется;
- (ii) $\omega = df$ для некоторой C^1 -гладкой функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

§3.1.4 Дифференцирование интеграла с переменным отрезком интегрирования

Нам понадобится следующий полезный факт.

ТЕОРЕМА 3.1.14. Пусть $T \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток, $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $g : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $g = g(t, x)$, причем частные производные $\frac{\partial g}{\partial x}$ существуют и непрерывны на $T \times X$. Тогда функция $I(x, a, b)$, определенная для $x \in X$ и $a, b \in T$ по формуле

$$I(x, a, b) = \int_a^b g(t, x) dt, \quad (3.34)$$

является гладкой на множестве $X \times T \times T$, причем для ее дифференциала справедливо представление

$$dI(x, a, b) = \left[\int_a^b \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} dt \right] dx + g(b, x) db - g(a, x) da. \quad (3.35)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.15. Пусть $T, X \subset \mathbb{R}$ — некоторые промежутки, $g : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $g = g(t, x)$, причем частная производная $\frac{\partial g}{\partial x}$ существуют и непрерывна на $T \times X$. Тогда для любой пары гладких отображений $u : X \rightarrow T$ и $h : X \rightarrow T$ функция $I(x)$, определенная для $x \in X$ по формуле

$$I(x) = \int_{u(x)}^{h(x)} g(t, x) dt, \quad (3.36)$$

является дифференцируемой на промежутке X , причем для ее производной справедливо равенство

$$I'_x = g(h(x), x) \cdot h'(x) - g(u(x), x) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} dt. \quad (3.37)$$

§3.1.5 Интегрирование 1-форм вдоль ориентированных кривых

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется *дугой*, если оно гладко изоморфно отрезку вещественной прямой. Далее, дуга Γ называется *ориентированной*, если одна из ее концевых точек объявлена *начальной*, а другая — *конечной*. Таким образом, для всякой гладкой ориентированной дуги $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ найдется гладкий изоморфизм $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ такой, что $\gamma(a)$ совпадает

с начальной точкой Γ , а $\gamma(b)$ — с конечной точкой. Тогда для 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$, $X \supset \Gamma$, полагают

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_{\gamma} \omega. \quad (3.38)$$

ТЕОРЕМА 3.1.16 (Корректность определения). *Левая часть в интеграле (3.38) не зависит от выбора гладкой и сохраняющей ориентацию параметризации γ кривой Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$, $\beta : [c, d] \rightarrow \Gamma$ — две параметризации одной и той же ориентированной кривой Γ . Тогда $\varphi := \gamma^{-1} \circ \beta$ — гладкий изоморфизм отрезка $[c, d]$ на $[a, b]$, причем $\varphi(c) = a$ и $\varphi(d) = b$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &\stackrel{\text{определ.}}{=} \int_a^b \gamma^* \omega = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \gamma^* \omega \stackrel{\text{ФЗП (3.15)}}{=} \int_c^d \varphi^* [\gamma^* \omega] \stackrel{(3.11)}{=} \int_c^d (\gamma \circ \varphi)^* \omega = \int_c^d \beta^* \omega = \int_{\beta} \omega. \end{aligned} \quad (3.39)$$

□

Свойства интеграла по кривой.

- (i) Критерий интегрируемости: если все коэффициенты 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ непрерывны на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то эта форма интегрируема вдоль гладкой дуги $\Gamma \subset X$.
- (ii) Линейность: $\int_{\Gamma} (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_{\Gamma} \omega_1 + \lambda_2 \int_{\Gamma} \omega_2$ для любой пары чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и произвольных интегрируемых вдоль Γ форм ω_1, ω_2 ;
- (iii) Ограниченность: если $|\omega(x)| \leq C$ для всех $x \in X$, то

$$\left| \int_{\Gamma} \omega \right| \leq C \mu_1(\Gamma), \quad (3.40)$$

где через $\mu_1(\Gamma)$ обозначена (одномерная) мера кривой Γ .

- (iv) Аддитивность: для каждой гладкой дуги Γ , произвольной формы ω , интегрируемой вдоль Γ , и для каждой тройки точек $p, q, r \in \Gamma$ справедливо равенство

$$\int_{\Gamma[p, q]} \omega = \int_{\Gamma[p, r]} \omega + \int_{\Gamma[r, q]} \omega, \quad (3.41)$$

где через $\Gamma[p, q]$ обозначена гладкая ориентированная дуга, лежащая в Γ и соединяющая точки p и q (так что p является начальной, а q — конечной точкой кривой $\Gamma[p, q]$).

- (v) Формула Ньютона–Лейбница: если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ представляет собой гладкую функцию, заданную на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то для каждой кривой $\Gamma \subset X$ с начальной точкой A и конечной точкой B справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} df = f(B) - f(A). \quad (3.42)$$

Пусть дана конечная совокупность гладких ориентированных дуг $C_1, \dots, C_k$ и чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Тогда формально определенная сумма

$$S = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k \quad (3.43)$$

называется *1-цепью*. Далее, *интеграл по 1-цепи* от 1-формы ω определяется как

$$\int_S \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \dots + \lambda_k \int_{C_k} \omega. \quad (3.44)$$

Определение 3.1.17. Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется *компактной областью с кусочно-гладкой границей*, если

- (i) Ω есть компактное множество;
- (ii) $\text{Cl Int } \Omega = \Omega$, т.е. множество внутренних точек Ω всюду плотно в Ω ;
- (iii) $\partial\Omega$ представляет собой цепь: $\partial\Omega = C_1 + \dots + C_k$, где все C_j суть гладкие ориентированные дуги такие, что $C_i \cap C_j = (\partial C_i) \cap (\partial C_j)$ (т.е. эти дуги могут пересекаться только в конечных своих точках), и все C_j ориентированы таким образом, что область Ω *остается слева* при положительном обходе вдоль C_j .

Последняя фраза (курсивом) означает, что для каждой точки $z \in C_j$ найдется отрезок $[u, z] \subset \Omega$ такой, что для вектора v , касательного к C_j в точке z и положительно направленного (относительно ориентации дуги C_j) справедливо неравенство $\det(z - u, v) > 0$.

ТЕОРЕМА 3.1.18 (Формула Грина). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — компактная область с кусочно-гладкой границей. Тогда для всякой гладкой 1-формы $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ справедливо тождество

$$\int_{\partial\Omega} f dx + g dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.45)$$

Данная формула является обобщением классического тождества Ньютона–Лейбница для двумерного случая, и, в свою очередь, формула Грина представляет собой частный случай одного из самых красивых фактов анализа — многомерной формулы Стокса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала формулу Грина для частного случая, когда Ω является криволинейной полосой, т.е. имеется интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и гладкие функции $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq h(x)\},$$

т.е. Ω представляет собой множество точек, лежащих между графиками функций u и h на отрезке $[a, b]$.

Тогда граница $\partial\Omega$ вычисляется по формуле $\partial\Omega = T_a \cup T_b \cup S_u \cup S_h$, где T_a и T_b суть вертикальные отрезки:

$$T_a := \{(a, y) : y \in [u(a), h(a)]\}, \quad T_b := \{(b, y) : y \in [u(b), h(b)]\}, \quad (3.46)$$

а S_u и S_h представляют собой соответствующие отрезки графиков функций u и h :

$$S_u := \{(x, u(x)) : x \in [a, b]\}, \quad S_h := \{(x, h(x)) : x \in [a, b]\}. \quad (3.47)$$

Зададим параметризацию этих кривых:

$$\forall y \in [u(a), h(a)] \quad \gamma_a(y) = (a, y) \in T_a, \quad \gamma'_a(y) = (0, 1); \quad (3.48)$$

$$\forall y \in [u(b), h(b)] \quad \gamma_b(y) = (b, y) \in T_b, \quad \gamma'_b(y) = (0, 1); \quad (3.49)$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi_u(x) = (x, u(x)), \quad \varphi'_u(x) = (1, u'(x)); \quad \varphi_h(x) = (x, h(x)), \quad \varphi'_h(x) = (1, h'(x)). \quad (3.50)$$

Тогда

$$dx\langle\varphi'_u(x)\rangle \equiv dx\langle\varphi'_h(x)\rangle \equiv 1, \quad dx\langle\gamma'_a(y)\rangle \equiv dx\langle\gamma'_b(y)\rangle \equiv 0; \quad (3.51)$$

$$dy\langle\varphi'_u(x)\rangle \equiv u'(x), \quad dy\langle\varphi'_h(x)\rangle \equiv h'(x), \quad dy\langle\gamma'_a(y)\rangle \equiv dy\langle\gamma'_b(y)\rangle \equiv 1; \quad (3.52)$$

Геометрически очевидно, что граница $\partial\Omega$, ориентированная относительно области Ω стандартным образом, представляет собой цепь:

$$\partial\Omega = T_b - T_a + S_u - S_h. \quad (3.53)$$

Теперь все готово к вычислениям:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy \stackrel{\text{т.Фубини}}{=} - \int_a^b dx \int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \stackrel{\text{Ф-ла Н.-Л.}}{=} - \int_a^b [f(x, h(x)) - f(x, u(x))] dx \\ & = \int_a^b f(x, u(x)) dx - \int_a^b f(x, h(x)) dx \stackrel{(3.50)-(3.51)}{=} \int_a^b [f(\varphi_u(x)) dx\langle\varphi'_u(x)\rangle] dx - \\ & - \int_a^b [f(\varphi_h(x)) dx\langle\varphi'_h(x)\rangle] dx = \int_{\varphi_u} f dx - \int_{\varphi_h} f dx = \int_{S_u} f dx - \int_{S_h} f dx = \int_{\partial\Omega} f dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

В последнем равенстве здесь использовалось то обстоятельство, что, в силу правых тождеств в (3.51), $\int_{T_a} f dx = \int_{T_b} f dx = 0$. Аналогично,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy \stackrel{\text{т.Фубини}}{=} \int_a^b dx \int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dy \stackrel{(3.37)}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{u(x)}^{h(x)} g(x, y) dy \right] - \int_a^b g(x, h(x)) h'(x) dx + \\ & + \int_a^b g(x, u(x)) u'(x) dx \stackrel{\text{Ф-ла Н.-Л., (3.50), (3.52)}}{=} \int_{u(x)}^{h(x)} g(x, y) dy \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b [g(\varphi_h(x)) dy\langle\varphi'_h(x)\rangle] dx + \\ & + \int_a^b [g(\varphi_u(x)) dy\langle\varphi'_u(x)\rangle] dx = \int_{u(b)}^{h(b)} g(b, y) dy - \int_{u(a)}^{h(a)} g(a, y) dy - \int_{\varphi_h} g dy + \int_{\varphi_u} g dy = \\ & = \int_{T_b} g dy - \int_{T_a} g dy - \int_{S_h} g dy + \int_{S_u} g dy = \int_{\partial\Omega} g dy. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Тем самым формула Грина для случая, когда область Ω является криволинейной полосой, доказана. Если же теперь Ω — произвольная компактная область с кусочно-гладкой

границей, то ее можно представить в виде объединения конечной совокупности криволинейных полос (возможно, повернутых относительно исходной системы декартовых координат). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.19. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — компактная область с гладкой границей, то

$$\mu_2\Omega = \int_{\partial\Omega} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} [x dy - y dx] = \frac{-i}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{z} dz. \quad (3.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве на самом деле нуждается только последнее равенство. Имеем

$$\bar{z} dz = (x - iy)(dx + i dy) = (x dx + y dy) + i(x dy - y dx) = i(x dy - y dx) + d\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Однако по формуле Грина $\int_{\partial\Omega} (x dx + y dy) = 0$ (последнее равенство можно вывести из свойства (v) интеграла по кривой, см. формулу (3.42)). Поэтому

$$\frac{-i}{2} \int_{\partial\Omega} \bar{z} dz = \frac{-i}{2} \int_{\partial\Omega} i(x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x dy - y dx) \stackrel{\text{Ф-ла Грина}}{=} \mu_2\Omega.$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.20. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — компактная область с гладкой границей. Тогда, если $0 \notin \Omega$, то

$$\int_{\partial\Omega} d\Theta = 0, \quad (3.57)$$

где, напомним, $d\Theta$ представляет собой форму Гаусса, вычисляемая в точке $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ по формуле

$$d\Theta(z)\langle v \rangle = \frac{1}{x^2 + y^2} \det(z, v). \quad (3.58)$$

Если же $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$, то

$$\int_{\partial\Omega} d\Theta = 2\pi. \quad (3.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$d\Theta(x) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy) = f dx + g dy, \quad f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (3.60)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{|z|^2} + \frac{2y^2}{|z|^4} = \frac{y^2 - x^2}{|z|^4} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (3.61)$$

(см. формулы (3.30)–(3.32)). Отсюда и из формулы Грина немедленно вытекает формула (3.57) в случае, когда $0 \notin \Omega$.

Если же $0 \in \text{Int } \Omega$, то рассмотрим замкнутый шар B_r радиуса r с центром в начале координат, такой, что $B_r \subset \text{Int } \Omega$. Тогда для области $U = \Omega \setminus (\text{Int } B_r)$ имеем $0 \notin U$, поэтому по формуле Грина

$$\int_{\partial U} d\Theta = 0. \quad (3.62)$$

Последнюю формулу, в силу очевидного равенства $\partial U = \partial\Omega - \partial B_r$ можно переписать в виде

$$\int_{\partial\Omega} d\Theta = \int_{\partial B_r} d\Theta. \quad (3.63)$$

Если теперь параметризовать окружность ∂B_r функцией $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, то получим $\gamma'(t) = r(-\sin t, \cos t)$,

$$d\Theta(\gamma(t))\langle \gamma'(t) \rangle \equiv 1,$$

поэтому

$$\int_{\partial B_r} d\Theta = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \quad (3.64)$$

□

§3.2 Дифференциальные формы произвольных степеней.

Говорят, что на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана вещественная дифференциальная форма степени k (или k -форма), если каждой точке $x \in X$ и всякому набору векторов $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ сопоставлено число $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, причем функция $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ векторных переменных $v_1, \dots, v_k$ антисимметрична и линейна по всем v_i . Это означает, что если поменять местами пару векторов v_i и v_j , то значение формы поменяет свой знак; кроме того для каждой пары чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\omega(x)\langle \lambda v_1 + \mu v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \lambda \omega(x)\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle + \mu \omega(x)\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle.$$

Число $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ называют значением формы ω в точке x на векторах $v_1, \dots, v_k$.

Из курса алгебры известно, что определитель матрицы, рассматриваемый как функция от векторов-столбцов, как раз обладает описанными свойствами: определитель линеен по каждому столбцу, более того, если два столбца матрицы переставить, то и определитель знак поменяет (антисимметричность). Поэтому детерминанты играют ключевую роль в теории k -форм.

Пример 3.2.1 (Форма объема). Определим вещественную n -форму объема dV в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$dV(x)\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_n). \quad (3.65)$$

Эту форму называют *ориентированным объемом*: ее значение совпадает с объемом параллелепипеда $P(x; v_1, \dots, v_n) = \{x + \sum_{i=1}^n t_i v_i : t_i \in [0, 1]\}$, причем знак будет положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает ли ориентация набора векторов $v_1, \dots, v_n$ с ориентацией стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$.

Пример 3.2.2 (Форма потока). Пусть $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Зададим $(n-1)$ -форму β_w на U формулой

$$\beta_w(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \det(w(x), v_1, \dots, v_{n-1}). \quad (3.66)$$

Данная форма также имеет наглядную физическую интерпретацию, которую особенно легко пояснить в трехмерном случае $n = 3$. Предположим, что вектор $w(x)$ равен значению скорости жидкости в точке x . Для пары векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ рассмотрим параллелограмм $P = P(x; v_1, v_2) = \{x + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_i \in [0, 1]\}$ с вершиной в точке x , натянутый на вектора v_1, v_2 . Тогда значение $\beta_w\langle v_1, v_2 \rangle$ приблизительно совпадает с объемом жидкости, который протекает через площадку P из "нижнего" полупространства в "верхнее", причем "верхнее" полупространство определяется по отношению к параллелограмму P направлением векторного произведения $v_1 \times v_2$. Причем относительная погрешность в этом равенстве стремится к нулю, когда размеры параллелограмма стремятся к нулю.

Пример 3.2.3 (Форма Гаусса). На множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ введем $(n-1)$ форму ω_G по формуле

$$\omega_G(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \frac{1}{|x|^n} \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}). \quad (3.67)$$

Данная форма совпадает с формой β_w , порожденной векторным полем $w(x) = \frac{x}{|x|^n}$. Например, если звезда находится в начале координат (трехмерное пространство), то создаваемое ей гравитационное поле имеет вид $c \frac{x}{|x|^3}$ (=сила, действующая на материальную точку единичной массы с координатой x), $c < 0$, а поле интенсивности светового потока имеет тот же вид, но с другим знаком.

Пример 3.2.4 (Закон Паскаля). Пусть область $U \subset \mathbb{R}^3$ заполнена жидкостью, и пусть вещественная неотрицательная функция $p : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ задает давление жидкости в этой области. Для точки $x \in U$ и пары векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ обозначим через $P = P(x; v_1, v_2) = \{x + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_i \in [0, 1]\}$ параллелограмм с вершиной в точке x , натянутый на вектора v_1, v_2 . Тогда согласно закону Паскаля сила, действующая на P сверху, т.е. из того полупространства, куда направлен вектор $v_1 \times v_2$, примерно равна

$$F(P) = \pi_p\langle v_1, v_2 \rangle = -p(x) v_1 \times v_2, \quad (3.68)$$

т.е. ее абсолютная величина прямо пропорциональна площади данного параллелограмма. Данная формула тем точнее, чем меньше размеры параллелограмма. Отметим, что 2-форма π_p является *векторнозначной*.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Множество всех вещественных k -форм на X будем обозначать символом $\mathcal{F}^k(X)$, а множество всех k -форм со значениями в векторном пространстве E — символом $\mathcal{F}^k(X, E)$.

Для пары k -форм на X можно естественным образом определить их сумму и умножение на число (или даже умножение на произвольную вещественную функцию). Таким образом, множество $\mathcal{F}^k(X)$ образует вещественное векторное пространство. Что можно сказать о его размерности? Для выяснения данного вопроса нам понадобится следующее понятие, играющее ключевую роль в теории.

Определение 3.2.5 (Внешнее произведение 1-форм). Пусть имеется конечный набор 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k \in \mathcal{F}(X)$. Тогда их *внешним произведением* $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k$ называется k -форма ω , определяемая по формуле

$$\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \det(\omega_i\langle v_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \quad (3.69)$$

где в правой части равенства стоит определитель соответствующей $k \times k$ матрицы.

В качестве простого упражнения рекомендуется проверить следующие свойства введенного понятия.

- (i) Внешнее умножение 1-форм полилинейно и антисимметрично, т.е. форма $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ линейна по каждому аргументу ω_i , и меняет знак, если переставить местами ω_i и ω_j при $i \neq j$.
- (ii) $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_n)$.

Здесь и в дальнейшем $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — стандартные координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $M(n, k)$ — множество мультииндексов вида $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ с условием $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Далее, чтобы подчеркнуть последнее условие, такие мультииндексы I будут обозначаться $I = (i_1 < \dots < i_k)$.

Для каждого мультииндекса $I = (i_1 < \dots < i_k) \in M(n, k)$ положим

$$e_I := (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Для каждой $n \times k$ матрицы $a = (a_1, \dots, a_k)$ и любого мультииндекса $I = (i_1 < \dots < i_k)$ определим I -й минор этой матрицы формулой $\det_I(a) := \det(a_I)$, где a_I — $k \times k$ -матрица, полученная из матрицы a удалением строк с номерами, не входящими в набор I . Такие миноры матрицы называют старшими (т.к. они имеют максимальный размер).

ЛЕММА 3.2.6. Для каждого мультииндекса $I \in M(n, k)$ и любого набора векторов $a = (a_1, \dots, a_k)$ пространства $\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$dx_I(a) = \det(a_I), \quad (3.70)$$

и, следовательно, $dx_I(e_J) = \delta_{I,J}$ для любой пары мультииндексов $I, J \in M(n, k)$.

ЛЕММА 3.2.7. Пусть имеются две k -формы ω_1 и ω_2 из $\mathcal{F}^k(X)$, значения которых в каждой точке $x \in X$ совпадают на всех наборах базисных векторов e_I , $I \in M(n, k)$. Тогда $\omega_1 = \omega_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Тогда $\omega(x)\langle e_I \rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \forall I \in M(n, k)$. Пусть теперь $v_1, \dots, v_k$ — произвольный набор векторов из $\mathbb{R}^n$ с координатами $v_j = (v_j^1, \dots, v_j^n)$, $j = 1, \dots, k$. Тогда

$$\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \omega(x)\left\langle \sum_{i=1}^n v_1^i e_i, \dots, \sum_{i=1}^n v_k^i e_i \right\rangle \stackrel{\text{ПОЛИЛИН-ТЬ}}{=} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} \omega(x)\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle = 0.$$

Тем самым $\omega_1 \equiv \omega_2$. Лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2.8. Каждую k -форму $\omega \in \mathcal{F}^k(X)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде

$$\omega(x) = \sum_{J \in M(n,k)} c_J(x) dx_J, \quad (3.71)$$

где $c_J \in \mathcal{F}^0(X)$. Функции $c_J(x)$ называются *координатами* формы ω (относительно стандартной системы координат). При этом имеют место равенства

$$c_J(x) = \omega(x) \langle e_J \rangle. \quad (3.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводится по аналогии со случаем 1-форм. $\square$

На основе последней теоремы вводятся естественные определения. k -Форма $\omega \in \mathcal{F}^k(X)$ называется *гладкой*, если все коэффициенты $c_J(x)$ в разложении (3.72) гладкие. Далее, модулем k -формы называется величина $|\omega(x)| = \sqrt{\sum_{J \in M(n,k)} c_J^2(x)}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.9 (Формула Бине–Коши (с доказательством)). Для любой пары $n \times k$ матриц a, b имеет место тождество

$$\det(a^*b) = \sum_{J \in M(n,k)} \det a_J \cdot \det b_J \quad (3.73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $n \times k$ матрицу a . Рассмотрим k -форму $\omega(x)$, полагая для произвольного набора векторов $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(x) \langle b_1, \dots, b_k \rangle = \det(a^*b), \quad (3.74)$$

где символом b обозначена соответствующая $n \times k$ матрица $b = (b_1, \dots, b_k)$. Ясно, что на самом деле эта форма не зависит от x . По предыдущей теореме, имеет место разложение

$$\omega = \sum_{J \in M(n,k)} c_J dx_J, \quad (3.75)$$

где

$$c_J = \omega \langle e_J \rangle. \quad (3.76)$$

Применяя последнюю формулу к рассматриваемой ситуации, в силу определения (3.74) несложным вычислением получаем

$$c_J = \det(a^*e_J) = \det a_J^* = \det a_J.$$

Возвращаясь к формуле (3.75), имеем

$$\omega = \sum_{J \in M(n,k)} \det a_J dx_J. \quad (3.77)$$

Тогда для произвольной $n \times k$ матрицы $b = (b_1, \dots, b_k)$ получаем

$$\det(a^*b) = \omega \langle b \rangle = \sum_{J \in M(n,k)} \det a_J dx_J \langle b \rangle \stackrel{(3.70)}{=} \sum_{J \in M(n,k)} \det a_J \cdot \det b_J.$$

Лемма доказана. $\square$

Пример 3.2.10. Пусть $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда поле $w(x)$ порождает две формы α_w и β_w степени 1 и $(n-1)$ соответственно. Найдем разложение этих форм по указанному выше базису. По определению, для вектора $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\alpha_w(x)\langle v \rangle = \langle w(x), v \rangle = w_1(x)v_1 + \dots + w_n(x)v_n,$$

поэтому

$$\alpha_w = \sum_{j=1}^n w_j dx_j.$$

Теперь обратимся к форме

$$\beta_w(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \det(w(x), v_1, \dots, v_{n-1}), \quad (3.78)$$

Расписывая правую часть этой формулы по формулам Крамера, нетрудно показать, что

$$\beta_w(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} w_j(x) \det M_j, \quad (3.79)$$

где через M_j обозначена $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, полученная из $n \times (n-1)$ -матрицы $(v_1, \dots, v_{n-1})$ удалением j -й строки. С другой стороны, из принятых определений и обозначений нетрудно вывести, что

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \det M_j. \quad (3.80)$$

Тогда из формул (3.79)–(3.80) заключаем, что

$$\beta_w(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} w_j(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (3.81)$$

В частности, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для векторного поля $w(x) = (w_1, w_2, w_3)$ имеем

$$\beta_w(x) = w_1 dx_2 \wedge dx_3 - w_2 dx_1 \wedge dx_3 + w_3 dx_1 \wedge dx_2 = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2. \quad (3.82)$$

Следствие 3.2.11. Для любой (гладкой) 1-формы $\omega \in \mathcal{F}^1(X)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ существует единственное (гладкое) векторное поле $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \alpha_w$. Аналогично, для любой (гладкой) $(n-1)$ -формы $\omega \in \mathcal{F}^{n-1}(X)$ существует единственное (гладкое) векторное поле $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \beta_w$.

Упражнение 3.2.12. Доказать, что для любой пары векторных полей $w : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $u : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^3$ справедливо тождество

$$\alpha_w \wedge \alpha_u = \beta_{w \times u}, \quad (3.83)$$

где символом $w \times u$ обозначено векторное произведение векторов w и u .

Внешним произведением одночленов $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ степеней k и l соответственно называется $(k+l)$ -форма

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

Определение 3.2.13 (Внешнее произведение k -форм). Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ имеется k -форма $\omega^k = \sum_{I \in M(n,k)} a_I(x) dx_I$ и l -форма $\omega^l = \sum_{J \in M(n,l)} b_J(x) dx_J$. Тогда их *внешним произведением* называется $(k+l)$ -форма

$$\omega = \omega^k \wedge \omega^l = \sum_{I \in M(n,k)} \sum_{J \in M(n,l)} a_I(x) b_J(x) dx_I \wedge dx_J. \quad (3.84)$$

ТЕОРЕМА 3.2.14 (Свойства внешнего произведения). Операция внешнего произведения дифференциальных форм

- (i) ассоциативна: $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$;
- (ii) дистрибутивна: $\omega \wedge (\omega_1^k + \omega_2^k) = \omega \wedge \omega_1^k + \omega \wedge \omega_2^k$ (здесь и далее символом ω^k обозначается дифференциальная форма k -й степени);
- (iii) закон коммутативности имеет вид: $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$.

Договоримся о некоторых обозначениях для классического случая трехмерного пространства. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ и пусть имеется векторное поле $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда ими естественным образом порождаются следующие формы степени 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{A}}^1 &= \alpha_{\mathbf{A}}, & \text{т.е. } \omega_{\mathbf{A}}^1(x) \langle v \rangle &= \langle \mathbf{A}(x), v \rangle; \\ \omega_{\mathbf{A}}^2 &= \beta_{\mathbf{A}}, & \text{т.е. } \omega_{\mathbf{A}}^2(x) \langle u, v \rangle &= \det(\mathbf{A}(x), u, v); \\ \omega_f^3 &= f dV, & \text{т.е. } \omega_f^3(x) \langle u, v, w \rangle &= f(x) \det(u, v, w). \end{aligned} \quad (3.85)$$

В координатной записи для $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ это будет иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{A}}^1 &= A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3; \\ \omega_{\mathbf{A}}^2 &= A_1 dx_2 \wedge dx_3 + A_2 dx_3 \wedge dx_1 + A_3 dx_1 \wedge dx_2; \\ \omega_f^3 &= f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Тогда установленную выше формулу (3.83) можно переписать в виде

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2. \quad (3.87)$$

Упражнение 3.2.15. Доказать, что для любой пары векторных полей $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{B} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^3$ справедливо тождество

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = \omega_{\mathbf{B}}^2 \wedge \omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle}^3, \quad (3.88)$$

где символом $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

ТЕОРЕМА 3.2.16. Пусть X — подмножество в $\mathbb{R}^3$, и пусть ω^1 — произвольная (гладкая) 1-форма на X . Тогда найдется единственное (гладкое) векторное поле $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что $\omega^1 = \omega_{\mathbf{A}}^1$. Аналогично,

$$\forall \omega^2 \in \mathcal{F}^2(X) \quad \exists! \mathbf{B} : X \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \omega^2 = \omega_{\mathbf{B}}^2; \quad (3.89)$$

$$\forall \omega^3 \in \mathcal{F}^3(X) \quad \exists! f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega^3 = \omega_f^3. \quad (3.90)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Формула (3.84) дает определение произведения дифференциальных форм использованием координатного разложения. Можно сформулировать это определение и в инвариантной форме, не прибегая к координатам.

ТЕОРЕМА 3.2.17 (Внешнее произведение k -форм: инвариантное определение). Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ имеются дифференциальные формы ω^k и ω^l степеней k и l соответственно. Тогда их внешнее произведение совпадает с $(k+l)$ -формой

$$\omega \langle v_1, \dots, v_{k+l} \rangle = \sum (-1)^\nu \omega^k \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle \cdot \omega^l \langle v_{j_1}, \dots, v_{j_l} \rangle, \quad (3.91)$$

где $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_l$, и $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ есть перестановка номеров $1, \dots, k+l$, а

$$\nu = \begin{cases} 1, & \text{если эта перестановка нечетная;} \\ 0, & \text{если эта перестановка четная.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

§3.2.1 Внешний дифференциал k -формы

Определение 3.2.18. Пусть на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ имеется k -форма $\omega = \sum_{I \in M(n,k)} f_I(x) dx_I$ с гладкими коэффициентами f_I . Тогда ее *дифференциалом* называется $(k+1)$ -форма

$$d\omega = \sum_{I \in M(n,k)} df_I(x) \wedge dx_I. \quad (3.92)$$

Расписывая по координатам, получаем

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{I \in M(n,k)} \frac{\partial f_I(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I. \quad (3.93)$$

Свойства операции внешнего дифференцирования.

- (i) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;
- (ii) $d(\omega^k \wedge \omega^l) = (d\omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^l$ (здесь и далее символом ω^k обозначается дифференциальная форма k -й степени);
- (iii) $d(g\omega) = (dg) \wedge \omega + g \wedge d\omega$ (здесь g — произвольная гладкая скалярная функция);

$$(iv) \quad d^2\omega = 0$$

◁ Всякая k -форма является суммой элементарных форм вида $\omega = f(x) dx_I$. Для каждой такой элементарной k -формы имеем

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d(d\omega) = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_m \partial x_j} dx_m \wedge dx_j \wedge dx_I \stackrel{dx_m \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_m}{=} \\ &= \sum_{m=2}^n \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_m \partial x_j} \right) dx_m \wedge dx_j \wedge dx_I \stackrel{\text{равенство смешанных ч.пр.}}{=} 0. \quad \triangleright \end{aligned} \quad (3.94)$$

§3.2.2 Векторный анализ в трехмерном пространстве.

Пусть X — открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Рассмотрим ее дифференциал df . Он является 1-формой. По теореме 3.2.16 найдется единственное векторное поле $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, такое, что $df = \omega_{\mathbf{A}}^1$, т.е. $df(x)\langle v \rangle = \langle \mathbf{A}(x), v \rangle$ для всех векторов $v \in \mathbb{R}^3$. Этот вектор $\mathbf{A}(x)$ называется *градиентом функции f в точке x* и обозначается символом $\nabla f(x)$. Таким образом,

$$df = \omega_{\nabla f}^1. \quad (3.95)$$

Поскольку в координатной записи

$$df = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} dx_3,$$

то в стандартной декартовой системе координат имеем

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right). \quad (3.96)$$

Теперь для произвольного гладкого поля $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ возьмем форму $\omega_{\mathbf{A}}^1$ и рассмотрим ее дифференциал $d\omega_{\mathbf{A}}^1$. Он является 2-формой, поэтому по теореме 3.2.16 найдется единственное векторное поле $\mathbf{B} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, такое, что $d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\mathbf{B}}^2$. Это векторное поле называется *ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\mathbf{A}$, и обозначается символом $\text{rot } \mathbf{A}$. Таким образом,

$$d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\text{rot } \mathbf{A}}^2. \quad (3.97)$$

Поскольку в координатной записи для $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$

$$d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3,$$

то в стандартной декартовой системе координат имеем

$$\text{rot } \mathbf{A}(x) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \quad (3.98)$$

Можно переписать эту формулу, как формальный определитель

$$\text{rot } \mathbf{A}(x) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Наконец, для произвольного гладкого поля $\mathbf{A} : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ возьмем теперь уже форму второго порядка $\omega_{\mathbf{A}}^2$ и рассмотрим ее дифференциал $d\omega_{\mathbf{A}}^2$. Он является 3-формой, поэтому по теореме 3.2.16 найдется скалярная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \omega_f^3$. Эта скалярная функция называется *дивергенцией* векторного поля $\mathbf{A}$, и обозначается символом $\operatorname{div} \mathbf{A}$. таким образом,

$$d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \omega_{\operatorname{div} \mathbf{A}}^3. \quad (3.100)$$

Поскольку в координатной записи для $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$,

$$\omega_{\mathbf{A}}^2 = A_1 dx_2 \wedge dx_3 + A_2 dx_3 \wedge dx_1 + A_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

то в стандартной декартовой системе координат имеем

$$d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad (3.101)$$

т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (3.102)$$

Ценность полученных формул

$$df = \omega_{\nabla f}^1;$$

$$d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2; \quad (3.103)$$

$$d\omega_{\mathbf{A}}^2 = \omega_{\operatorname{div} \mathbf{A}}^3.$$

состоит в том, что они позволяют получать красивые соотношения про операции векторного анализа безкоординатным методом.

Упражнение 3.2.19. Для произвольных гладких векторных полей $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ на $X \subset \mathbb{R}^3$ и гладкой скалярной функции $a : X \rightarrow \mathbb{R}$ доказать следующие тождества:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla f \equiv 0;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}); \quad (3.104)$$

$$\operatorname{rot}(a\mathbf{A}) = (\nabla a) \times \mathbf{A} + a \operatorname{rot} \mathbf{A};$$

$$\operatorname{div}(a\mathbf{A}) = (\nabla a, \mathbf{A}) + a \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Указание. Первые формулы следуют из равенства $d^2\omega = 0$, например

$$0 = d(dw_{\mathbf{A}}^1) = d\omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2 = \omega_{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A})}^3.$$

Для доказательства третьей формулы нужно вспомнить, что $\omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2 = \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1$, поэтому

$$\omega_{\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}^3 = d\omega_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}^2 = d(\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1) = (d\omega_{\mathbf{A}}^1) \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 - \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge (d\omega_{\mathbf{B}}^1) = \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 - \omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{B}}^2 = \omega_{(\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B})}^3.$$

Пример 3.2.20 (Уравнения Навье–Стокса и Гельмгольца). Классические уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ для стационарного случая записываются в виде

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (3.105)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — трехмерное поле скоростей жидкости, p — давление (скалярная величина), ν — коэффициент вязкости (константа), а символом $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ обозначается производная по направлению: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = u_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}$. Обозначим $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ (вихрь), и $\Phi = p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$ (так называемое *полное давление*, или давление Бернулли. Можно показать (проверьте в качестве упражнения!), что условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ влечет равенство

$$-\Delta \mathbf{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}), \quad (3.106)$$

а для полного давления справедлива формула

$$\nabla \Phi = -\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.107)$$

Умножим обе части последнего равенства скалярно на вектор $\mathbf{u}$ и воспользуемся тем фактом, что $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$, поэтому

$$(\mathbf{u}, \nabla \Phi) = -\nu (\mathbf{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}). \quad (3.108)$$

Посмотрим теперь, как полученные ранее формулы (3.104) помогают получить из равенства (3.107) новые красивые и важные уравнения. Применим к обеим частям (3.107) оператор дивергенции, тогда из тождества $\Delta \Phi = \operatorname{div}(\nabla \Phi)$ и формул (3.104) получаем

$$\Delta \Phi = 0 + \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \stackrel{(3.104_2)}{=} (\boldsymbol{\omega}, \operatorname{rot} \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) \stackrel{(3.108)}{=} |\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{\nu} (\mathbf{u}, \nabla \Phi) \stackrel{(3.104_4)}{=} |\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{\nu} \operatorname{div}(\Phi \mathbf{u}). \quad (3.109)$$

Теперь применим к обеим частям уравнения равенства (3.107) оператор ротора, тогда из тождества $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) = -\Delta \boldsymbol{\omega}$ получаем

$$\nu \Delta \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}. \quad (3.110)$$

Последнее уравнение вместе с полученным ранее уравнением $\Delta \Phi = |\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{\nu} \operatorname{div}(\Phi \mathbf{u})$ носят название "уравнений Гельмгольца".

§3.2.3 Векторные операции в триортогональной системе координат

Пусть имеется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^3$ и гладкий изоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$, $V = \varphi(U)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим $\mathbf{e}_{U,i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^3$, заданный единица на i -м месте на множестве U . Далее, для $y = \varphi(x)$ обозначим

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{e}}_i(y) = d\varphi(x) \langle \mathbf{e}_{U,i} \rangle = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}.$$

Для краткости будем обозначать $d\varphi(x) = \varphi_*$. Предположим, что система векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$ ортогональна:

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \begin{cases} E_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.111)$$

Рассмотрим произвольный вектор $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_x U$, где, напомним, $T_x U$ — касательное пространство к открытому множеству U в точке x . Тогда $\varphi_* \langle v \rangle \in T_y V$, $y = \varphi(x)$, и

$$\begin{aligned} |\varphi_* \langle v \rangle|^2 &= (\varphi_* \langle v \rangle, \varphi_* \langle v \rangle) = \left(\varphi_* \left\langle \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_{U,i} \right\rangle, \varphi_* \left\langle \sum_{j=1}^3 v_j \mathbf{e}_{U,j} \right\rangle \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i v_j (\varphi_* \langle \mathbf{e}_{U,i} \rangle, \varphi_* \langle \mathbf{e}_{U,j} \rangle) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i v_j (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) \stackrel{(3.111)}{=} \sum_{i=1}^3 v_i^2 E_i = \sum_{i=1}^3 E_i (dx_i \langle v \rangle)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, метрика на касательном пространстве $T_y V$ относительно системы координат x_i , $y = \varphi(x)$, задается квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 E_i dx_i^2.$$

Чтобы сделать систему векторов $\tilde{\mathbf{e}}_i$ ортонормированной, положим

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(y) = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_i}{|\tilde{\mathbf{e}}_i|} = \frac{1}{\sqrt{E_i}} \tilde{\mathbf{e}}_i.$$

Тогда $|\mathbf{e}_i| = 1$. Поскольку

$$dx_i \langle \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle := dx_i \langle \mathbf{e}_{U,j} \rangle = \delta_{ij},$$

то

$$dx_i \langle \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E_i}}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.112)$$

Тогда, если на множестве V задано векторное поле $\mathbf{A} = \mathbf{A}(y)$, $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$, то, как обычно, для каждого вектора $v = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ имеем $dx_i \langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{E_i}} v_i$ и

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \langle v \rangle = (\mathbf{A}, v) = A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 = (A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3) \langle v \rangle,$$

т.е.

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_1 \sqrt{E_1} dx_1 + A_2 \sqrt{E_2} dx_2 + A_3 \sqrt{E_3} dx_3, \quad (3.113)$$

$$\omega_{\mathbf{A}}^2 = A_1 \sqrt{E_2 E_3} dx_2 \wedge dx_3 + A_2 \sqrt{E_1 E_3} dx_3 \wedge dx_1 + A_3 \sqrt{E_1 E_2} dx_1 \wedge dx_2. \quad (3.114)$$

$$\omega_g^3 = g \sqrt{E_1 E_2 E_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (3.115)$$

Посмотрим, к чему приведут эти формулы для дифференциальных операций векторного анализа. Для произвольной функции, заданной на множестве V , по закону инвариантности первого дифференциала имеем $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \omega_{\nabla f}^1$. Сравнивая последнюю формулу с равенством (3.113), получаем, что

$$\nabla f(x) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \mathbf{e}_3. \quad (3.116)$$

Теперь перейдем к вычислению ротора. Имеем

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{A}}^1 &= d(A_1\sqrt{E_1}dx_1 + A_2\sqrt{E_2}dx_2 + A_3\sqrt{E_3}dx_3) = \left(\frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(A_1\sqrt{E_1})}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial(A_1\sqrt{E_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_1}\right)dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Сравнивая последнюю формулу с тождеством (3.114), заключаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{E_2 E_3}} \left(\frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{E_1 E_3}} \left(\frac{\partial(A_1\sqrt{E_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(A_3\sqrt{E_3})}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \left(\frac{\partial(A_2\sqrt{E_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(A_1\sqrt{E_1})}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Наконец, вычислим дивергенцию. Имеем

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{A}}^2 &= d(A_1\sqrt{E_2 E_3}dx_2 \wedge dx_3 + A_2\sqrt{E_1 E_3}dx_3 \wedge dx_1 + A_3\sqrt{E_1 E_2}dx_1 \wedge dx_2) = \\ &= \left(\frac{\partial(A_1\sqrt{E_2 E_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2\sqrt{E_1 E_3})}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_3\sqrt{E_1 E_2})}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \omega_{\operatorname{div} \mathbf{A}}^3. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Сравнивая последнюю формулу с тождеством (3.115), заключаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial(A_1\sqrt{E_2 E_3})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2\sqrt{E_1 E_3})}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_3\sqrt{E_1 E_2})}{\partial x_3} \right). \quad (3.120)$$

Теперь можно посчитать оператор Лапласа $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \stackrel{(3.116)}{=} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) = \\ &\stackrel{(3.120)}{=} \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3}} \left(\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{E_2 E_3}{E_1}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_2}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{E_1 E_2}{E_3}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right)}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Пример 3.2.21 (Цилиндрическая система координат). Будем обозначать точку трех-

мерного пространства символом $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Зададим систему цилиндрических координат $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \varphi, z)$ по формулам

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi; \\ y &= r \sin \varphi; \\ z &= z. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Тогда $\tilde{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Легко подсчитать,

что $E_1 = |\tilde{\mathbf{e}}_r|^2 = 1$, $E_2 = |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi|^2 = r^2$, $E_3 = 1$, так что $\mathbf{e}_r = \tilde{\mathbf{e}}_r$, $\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r} \tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e}_z = \tilde{\mathbf{e}}_z$. Тогда, в частности, для скалярной функции $f = f(r, \varphi, z)$ и вектор-функции $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$ получаем:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial f}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(ср. с выводом формулы для оператора Лапласа в полярных координатах в первом семестре).

Упражнение 3.2.22. Проведите аналогичный анализ для сферической системы координат, которая задается формулами

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \theta; \\ y &= r \sin \varphi \cos \theta; \\ z &= r \sin \theta.\end{aligned}\tag{3.123}$$

§3.2.4 Операция переноса

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Каждой форме $\omega \in \mathcal{F}^k(Y)$ сопоставим форму $\varphi^* \omega \in \mathcal{F}^k(X)$ по следующему правилу. Если $k = 0$, то $\varphi^* \omega = \omega \circ \varphi$. Если же $k > 0$, то для векторов $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ и точки $x \in X$ полагаем

$$\varphi^* \omega(x) \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \omega(\varphi(x)) \langle u_1, \dots, u_k \rangle, \quad \text{где } u_i = d\varphi(x) \langle v_i \rangle.$$

Свойства операции переноса.

- (i) Линейность: $\varphi^*[\omega_1 + \omega_2] = \varphi^* \omega_1 + \varphi^* \omega_2$ для любых $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}^k(Y)$;
- (ii) Мультипликативность: если $\omega = \alpha \wedge \beta$, то $\varphi^*[\omega] = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta$.
- (iii) Перестановочность с дифференциалом: $\varphi^*[d\omega] = d[\varphi^* \omega]$.
- (iv) Формула композиции: если $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ — гладкие отображения, то $\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$, т.е.

$$\varphi^*[\psi^* \omega] = (\psi \circ \varphi)^* \omega \tag{3.124}$$

для каждой формы $\omega \in \mathcal{F}^k(Z)$;

- (v) Запись в координатах: если $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ и $\omega = \sum_{I \in M(m, k)} c_I(y) dy_I$, то $\varphi^* \omega = \sum_{I \in M(m, k)} c_I(\varphi(x)) d\varphi_I$, где для $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m)$ обозначено $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$. Это означает, что операция переноса дифференциальных форм достигается формальной подстановкой координатных функций φ_i вместо y_i .

СЛЕДСТВИЕ 3.2.23. Если $\omega \in C^r$ и $\varphi \in C^{r+1}$, то $\varphi^*\omega \in C^r$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.24. Если $n = m = k$, то

$$\varphi^*[dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n] = \det \varphi'(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (3.125)$$

где, напомним, $\varphi'(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right)$ — это $n \times n$ матрица Якоби отображения φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим два доказательства этого факта. Можно воспользоваться полилинейностью формы по каждому аргументу:

$$\begin{aligned} \varphi^*[dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n] &= d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} dx_i \right) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{\sigma j}} dx_{\sigma 1} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma n} = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{\sigma j}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det \varphi'(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned} \quad (3.126)$$

где $\mathfrak{S}_n$ — множество всех перестановок чисел от 1 до n , $(-1)^\sigma = \pm 1$ в зависимости от четности или нечетности подстановки σ .

Второй способ использует определение внешнего произведения 1-форм:

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n \langle v_1, \dots, v_n \rangle &= \det(d\varphi_i(x) \langle v_j \rangle) = \det(\varphi'(x)v_1, \dots, \varphi'(x)v_n) = \\ &= \det[\varphi'(x) \cdot (v_1, \dots, v_n)] = [\det \varphi'(x)] \cdot [\det(v_1, \dots, v_n)] = \det \varphi'(x) \left(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \langle v_1, \dots, v_n \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.127)$$

□

§3.2.5 Формула гомотопии

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $U = [a, b] \times X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой непрерывной k -формы ω , заданной на полосе U , определим $(k-1)$ -форму $\int_a^b \omega$, заданную на X следующим образом. Представим форму $\omega(t, x)$ в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{I \in M(n, k-1)} f_I(t, x) dt \wedge dx_I + \sum_{J \in M(n, k)} g_J(t, x) dx_J. \quad (3.128)$$

Теперь полагаем

$$\int_a^b \omega := \sum_{I \in M(n, k-1)} \left(\int_a^b f_I(t, x) dt \right) dx_I,$$

это называется *интегралом формы ω по левой переменной*, или *послойным интегралом*.

Замечание 3.2.25. Обращаем внимание читателя на то, что вторая часть в разложении (3.128), члены с $g_J dx_J$, дает нулевой вклад в величину $\int_a^b \omega$.

ТЕОРЕМА 3.2.26. Для каждой гладкой формы $\omega \in \mathcal{F}^k(U)$ верна формула

$$d \int_a^b \omega + \int_a^b d\omega = j_b^* \omega - j_a^* \omega, \quad (3.129)$$

где отображение $j_c : X \rightarrow U$ при $c \in [a, b]$ задается формулой $j_c(x) = (c, x)$ и представляет собой вложение множества X на уровень c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку форма ω раскладывается в сумму слагаемых двух видов (см. (3.128)), то достаточно проверить утверждение теоремы для каждого из них по отдельности, т.е. рассмотреть случаи $\omega = f(t, x) dt \wedge dx_I$ и $\omega = g(t, x) dx_J$.

Пусть ω — форма второго типа, т.е. $\omega = g_J(t, x) dx_J$. Тогда $\int_a^b \omega = 0$, а значит, и $d \int_a^b \omega = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_a^b d\omega &= \int_a^b (dg(t, x)) \wedge dx_J = \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_J \stackrel{\text{Замечание 3.2.25}}{=} \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx_J = \\ &= \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial t} dt \right) dx_J = [g(b, x) - g(a, x)] dx_J = j_b^* \omega - j_a^* \omega. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Пусть теперь ω — форма первого типа, т.е. $\omega = f(t, x) dt \wedge dx_I$. Тогда для каждого $c \in [a, b]$ имеем $j_c^* \omega = f(c, x) dc \wedge dx_I = 0$, т.е. правая часть в формуле (3.129) зануляется. Посмотрим, что происходит с левой частью.

$$\begin{aligned} \int_a^b d\omega &= \int_a^b (df(t, x)) \wedge dt \wedge dx_I = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dt \wedge dx_I = - \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \wedge dx_i \wedge dx_I = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_I = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left(\int_a^b f(t, x) dt \right)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I = -d \int_a^b \omega. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Следовательно, $\int_a^b d\omega + d \int_a^b \omega = 0$, и теорема полностью доказана. $\square$

§3.2.6 Теорема Пуанкаре

Пусть X — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. k -Форма ω на X называется *точной*, если она представима в виде

$$\omega = d\alpha, \quad (3.132)$$

где α — некоторая $(k-1)$ -форма. Каждую такую форму α будем называть *первообразной* (для) формы ω . Как было показано ранее, второй внешний дифференциал от любой дифференциальной формы зануляется. Поэтому, для всякой точной формы ω справедливо равенство

$$d\omega = 0. \quad (3.133)$$

Последнее условие является необходимым для того, чтобы ω было представимым в виде (3.132), но не достаточным. Например, форма Гаусса первой степени на проколоте

плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ имеет нулевой внешний дифференциал, но форма Гаусса не представима в виде дифференциала ни от какой функции на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (т.к. ее интеграл по замкнутому контуру не равен нулю). Формы, удовлетворяющие условию (3.133), называют *замкнутыми*. Таким образом, всякая точная форма замкнута, но обратное в общем случае неверно, и вопрос об обратимости условия (3.133) далеко не банален и приобретает особый интерес.

Простое условие, когда такая обратимость возможна, дается следующей классической теоремой Пуанкаре.

ТЕОРЕМА 3.2.27. *Если открытое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ звездно относительно некоторой отмеченной своей точки $p \in X$, то всякая замкнутая форма ω положительной (т.е. ненулевой) степени на множестве X точна.*

В этой связи напомним, что множество X называется *звездным* относительно отмеченной точки $p \in X$, если для всякой другой точки $x \in X$ весь отрезок $[p, x]$ целиком лежит в X , т.е. $\{p + (x - p)t : t \in [0, 1]\} \subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Возьмем полосу $U = [0, 1] \times X$ и рассмотрим гладкое отображение $\varphi : U \rightarrow X$, действующее по правилу $\varphi(t, x) = p + (x - p)t$. Тогда на U определена k -форма $\varphi^*\omega$. Обозначим теперь

$$\alpha = \int_0^1 \varphi^*\omega dt,$$

где интегрирование формы по полосе определено в предыдущем параграфе. По формуле гомотопии (3.129)

$$d\alpha + \int_0^1 d(\varphi^*\omega) = j_1^*(\varphi^*\omega) - j_0^*(\varphi^*\omega), \quad (3.134)$$

По свойству операции переноса, $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) = 0$. Далее, $j_c^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ j_c)^*\omega$. При $c = 1$ имеем $\varphi \circ j_1(x) = \varphi(1, x) = x$, т.е. $\varphi \circ j_1$ — тождественное отображение, поэтому $j_1^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ j_1)^*\omega = \omega$. С другой стороны, при $c = 0$ по аналогии получаем $\varphi \circ j_0(x) = \varphi(0, x) \equiv p$, т.е. $\varphi \circ j_0$ представляет собой постоянное отображение, поэтому, с учетом предположения $\deg \omega > 0$, имеем $j_0^*(\varphi^*\omega) = 0$. Таким образом, формула (3.134) преобразуется к виду $d\alpha = \omega$. Теорема доказана. $\square$

Упражнение 3.2.28. Найти первообразную формы Гаусса на плоскости вырезанным вертикальным лучом $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \geq 0\}$.

Упражнение 3.2.29. Доказать, что гладко неизоморфны следующие многообразия:

- 1) плоскость и проколота плоскость;
- 2) круг и кольцо;
- 3) шар и заполненный тор;
- 4) сфера и тор.

Указание. В перечисленных примерах показать, что в каждой паре у одного из многообразий все замкнутые 1-формы точные, а у другого — нет (предъявить в каждом случае замкнутую, но не точную форму).

§3.3 Интегрирование дифференциальных форм на ориентированных многообразиях

§3.3.1 Ориентация на многообразиях

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — связное k -мерное многообразие (возможно, с краем). Тогда множество касательных векторов к M в точке $p \in M$ будем обозначать через $T_p^+(M)$. Символом же $T_p M$ будет обозначаться линейная оболочка множества $T_p^+(M)$.

Понятие ориентации в пространстве связано с такими привычными объектами, как левая и правая перчатка, направление обхода по- и против часовой стрелки и т.п. И при выводе формулы Грина мы уже сталкивались с тем обстоятельством, что при интегрировании дифференциальных 1-форм большое значение имеет ориентация многообразия. Аналогичная ситуация и при интегрировании в многомерном случае — поскольку k -формы "чувствительны" к перестановкам векторов, здесь также следует позаботиться об ориентации.

Касательным базисом многообразия M называется всякий набор вида $(p; v_1, \dots, v_k)$, где $p \in M$ и $v_1, \dots, v_k \in T_p M$. Обозначим через $\mathcal{B}M$ множество всех касательных базисов многообразия M во всевозможных точках $p \in M$. По построению, $\mathcal{B}M \subset \mathbb{R}^{(k+1)n}$. Как известно, для фиксированного линейного пространства справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3.1. Пусть имеются два базиса $v_1, \dots, v_k$ и $u_1, \dots, u_k$ касательного пространства $T_p M$ в одной и той же точке $p \in M$. Тогда следующие условия эквивалентны.

(i) $\det A > 0$, где A есть $k \times k$ -матрица перехода, удовлетворяющая равенству

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

(ii) Базис $u_1, \dots, u_k$ можно непрерывно продеформировать в $v_1, \dots, v_k$ в пространстве всех базисов линейного пространства $T_p M$, т.е. найдутся вектор функции $w_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, такие, что при каждом $t \in [0, 1]$ набор векторов $w_i(t)$ является базисом в пространстве $T_p M$, причем $w_i(0) = u_i$ и $w_i(1) = v_i$.

Базисы, удовлетворяющие условиям (i)–(ii) леммы, называются *одинаково ориентированными* в $T_p M$.

Основное отличие ситуации многообразия от ситуации линейного пространства — тот факт, что касательное пространство (и его базисы) меняются от точки к точке.

Фактически, задать ориентацию многообразия — это все равно, что указать, какие базисы ориентированы положительно, а какие — нет.

Определение 3.3.2. *Ориентацией* многообразия M называется принимающая два значения функция $\theta : \mathcal{B}M \rightarrow \{-1, 1\} = S_0$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) функция θ непрерывна;
- (ii) для каждого касательного базиса $(p; v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{B}M$ справедливо соотношение $\theta(p; v_1, \dots, v_k) = -\theta(p; -v_1, \dots, v_k)$, т.е. при замене одного из базисных векторов противоположным ориентация также меняется на противоположную.

Многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает ориентацией. Многообразие называется *ориентированным*, если на нем задана ориентация, т.е. ориентированное многообразие представляет собой (M, θ) , где M — само многообразие, а θ — его ориентация. Иногда вместо пары пишут просто M (неявно имея ввиду то же самое). Для ориентированного многообразия M символом $-M$ обозначают то же многообразие, но с противоположной ориентацией.

Пример 3.3.3. 1) Для $M = \mathbb{R}^n$ стандартная ориентация задается формулой $\varepsilon(p; v_1, \dots, v_n) = \text{sign det}(v_1, \dots, v_n)$;

2) Для сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ стандартная ориентация задается функцией $\dot{\varepsilon}(p; v_1, \dots, v_{n-1}) = \text{sgn det}(p, v_1, \dots, v_{n-1})$, где $p \in S^{n-1}$ — точка сферы, а $v_1, \dots, v_{n-1}$ образуют базис ее касательного пространства в точке p (которое, напомним, задается уравнением $T_p S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle p, v \rangle = 0\}$).

3) Нульмерное многообразие M всегда ориентируемо, и его ориентацией служит произвольное отображение $\theta : M \rightarrow S_0$;

4) Бутылка Клейна, лист Мебиуса и проективная плоскость — не ориентированы;

5) Всякая дуга ориентируема. Дело в том, что дуга гладко изоморфна отрезку числовой прямой, а на этом отрезке ориентация порождается стандартной ориентацией $\mathbb{R}$. Можно сказать и так: если p, q — соответственно начальная и конечная точка дуги S , то касательный базис $(x; v)$ называется положительно ориентированным, если v — касательный вектор дуги $S[x, q]$, или же (при $x = q$) $(-v)$ — касательный вектор дуги $S[p, x]$.

6) Множество регулярных решений системы уравнений $f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$ является ориентированным $(n - k)$ -мерным многообразием. Ориентация на нем задается следующим образом:

$$\theta(x; v_1, \dots, v_{n-k}) = \text{sgn det}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), v_1, \dots, v_{n-k}).$$

Пусть имеются два k -мерных многообразия X и Y и гладкое отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, причем φ представляется собой изоморфизм X на $\varphi(X)$. Тогда, если (Y, θ) — ориентированное многообразие, то ориентацию на X можно задать по формуле

$$\theta_X(x; v_1, \dots, v_k) = \theta(\varphi(x); d\varphi(x)\langle v_1 \rangle, \dots, d\varphi(x)\langle v_k \rangle).$$

Например, если $X \subset Y$ и $\varphi(x) = x$ — просто вложение многообразия X в Y , то говорят, что ориентация на X *индуцируется* ориентацией Y .

ТЕОРЕМА 3.3.4. *Связное многообразие либо неориентируемо, либо обладает ровно двумя ориентациями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — связное ориентируемое многообразие размерности k , и τ, θ — какие-то его две ориентации. Положим $\alpha = \frac{\tau}{\theta}$. Требуется доказать, что

$$\alpha = \text{const} \quad \text{на } \mathcal{B}M. \quad (3.135)$$

По построению, функция α зависит от $(k + 1)$ переменных: $\alpha = \alpha(x; v_1, \dots, v_k)$, где $x \in M$ и $v_1, \dots, v_k$ — базис в $T_x M$. Сначала разберемся, как ведет себя α при фиксированной точке x .

ШАГ 1. Для каждой точки $x \in M$ $\alpha(x, \cdot) \equiv \text{const}$.

В самом деле, возьмем любые два базиса $(v_1, \dots, v_k)$, $(u_1, \dots, u_k)$ линейного пространства $T_x M$, которые связаны $k \times k$ матрицей перехода A :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

С помощью Леммы 3.3.1 легко показать, что $\theta(x; u_1, \dots, u_k) = \theta(x; v_1, \dots, v_k) \cdot \operatorname{sgn} \det A$. Аналогично $\tau(x; u_1, \dots, u_k) = \tau(x; v_1, \dots, v_k) \cdot \operatorname{sgn} \det A$. Поэтому

$$\alpha(x; u_1, \dots, u_k) = \frac{\tau(x; u_1, \dots, u_k)}{\theta(x; u_1, \dots, u_k)} = \frac{\tau(x; v_1, \dots, v_k)}{\theta(x; v_1, \dots, v_k)} = \alpha(x; v_1, \dots, v_k),$$

и утверждение первого шага доказано.

Из этого утверждения вытекает, что на самом деле α фактически зависит только от точки $x \in M$ (нет зависимости от векторных переменных).

ШАГ 2. Для каждой точки $x \in M$ найдется ее открытая окрестность U такая, что $\alpha|_{U \cap M} = \operatorname{const}$.

В самом деле, зафиксируем точку $x \in M$ и возьмем k -мерный (полу)интервал $I \subset \mathbb{R}^k$ и параметризацию (гладкий изоморфизм) $\varphi : I \rightarrow M$, такой, что $x \in \varphi(I) = M \cap U$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Возьмем стандартный базис $e_1, \dots, e_k$ пространства $\mathbb{R}^k$, и для точки $z = \varphi(y)$ положим $u_i(z) = d\varphi(y)\langle e_i \rangle$. Тем самым каждой точке $z \in M \cap U$ мы сопоставили базис $(u_1(z), \dots, u_k(z))$ пространства $T_z M$, причем вектора $u_i(z)$ непрерывно зависят от z . Тогда функция $\alpha(z; u_1(z), \dots, u_k(z))$ будет также непрерывна по z , и, в силу дискретности ее значений и связности множества $M \cap U$, $\alpha(z; u_1(z), \dots, u_k(z)) \equiv \operatorname{const}$ на $M \cap U$. В силу первого шага, $\alpha(z, \cdot)$ не зависит от выбора базиса касательного пространства в точке z , поэтому в самом деле $\alpha|_{U \cap M} = \operatorname{const}$, и утверждение второго шага доказано.

Отсюда немедленно вытекает

ШАГ 3. Функция $\alpha : M \rightarrow \{-1, 1\}$ непрерывна.

Однако последнее утверждение ввиду линейной связности многообразия M и теоремы Коши о промежуточных значениях влечет искомое тождество $\alpha \equiv \operatorname{const}$ на M .

Таким образом, либо $\alpha \equiv 1$ на $\mathcal{B}M$, либо $\alpha \equiv -1$ на $\mathcal{B}M$, т.е. либо $\theta \equiv \tau$, либо $\theta \equiv -\tau$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.3.5. Попытка упростить доказательство путем построения на M непрерывного поля касательных базисов обречена на неудачу, т.к. такое поле существует далеко не на каждом многообразии. Так, среди сфер таким полем обладают только S^1 , S^3 и S^7 (теорема Адамса).

Замечание 3.3.6. Фактически, из рассуждений доказательства последней теоремы вытекает, что для каждого линейно-связного многообразия M множество $\mathcal{B}M$ либо также линейно связно (случай неориентированного многообразия), либо состоит из объединения в точности двух компонент линейной связности (случай ориентированного многообразия).

Говорят, что гладкое отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ ориентированных многообразий одинаковой размерности *сохраняет ориентацию*, если оно переводит касательные базисы X в касательные базисы многообразия Y с тем же названием. Далее, будем говорить, X является *куском* k -мерного многообразия Z , если X — многообразие той же размерности k , и $X \subset Z$.

ЛЕММА 3.3.7 (Координатный признак сохранения ориентации). Пусть X — кусок пространства $\mathbb{R}^k$, (Y, θ) — ориентированное многообразие той же размерности, и пусть имеется гладкое отображение $\varphi : X \rightarrow Y$. Тогда φ сохраняет ориентацию $\Leftrightarrow$

$$\theta\left(x; \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\right) > 0 \quad (3.136)$$

Упражнение 3.3.8. (i) Верно ли, что отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ сохраняет ориентацию, если оно переводит положительные касательные базисы многообразия X в положительные касательные базисы Y ? (Фактически, необходимо выяснить, вытекает ли из приведенного условия, что и отрицательный тип касательных базисов также сохраняется?)

(ii) Доказать, что изоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ между ориентированными многообразиями либо сохраняет, либо меняет ориентацию. При этом сохранение ориентации происходит, если хотя бы один базис касательный базис многообразия X переходит в касательный базис Y того же наименования.

(iii) Выяснить, при каких n отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{int} \in S_1$ сохраняет (меняет) ориентацию.

(iv) Доказать, что параметризация двумерной сферы $\psi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R} \rightarrow S_2$, задаваемая формулой

$$\psi(s, t) = (\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)$$

меняет ориентацию. Каков простейший способ "переделки" этого отображения, чтобы ориентация сохранялась?

§3.3.2 Индуцированная ориентация края

Рассматривая какое-либо многообразие M вблизи его края ∂M , полезно представлять его куском некоторого многообразия $\tilde{M}$ без края. Такое многообразие в самом деле существует, причем $T_p M = T_p \tilde{M}$ даже в точках ∂M . Например, шар B_n и полупространство $\mathbb{R}_+^n$ лежат в пространстве $\mathbb{R}^n$, полусфера лежит в сфере, и т.п.

Пусть теперь (M, θ) — некоторое k -мерное многообразие с краем. Для краевой точки $p \in \partial M$ возьмем какой-нибудь ненулевой вектор $v_* \in T_p M \setminus T_p^+ M$, такие вектора называются *внешними*. Тогда для набора векторов $v_1, \dots, v_{k-1}$, образующих базис касательного пространства $T_p(\partial M)$ края многообразия M в точке p , положим

$$\dot{\theta}(p; v_1, \dots, v_{k-1}) := \theta(p; v_*, v_1, \dots, v_{k-1}). \quad (3.137)$$

ТЕОРЕМА 3.3.9. Приведенное определение корректно, т.е. $\dot{\theta}$ в самом деле задает ориентацию на многообразии ∂M , в частности, $\dot{\theta}$ не зависит от выбора внешнего вектора v_* в точке p в формуле (3.137).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Докажем сначала последнее утверждение. Зафиксируем точку $p \in \partial M$, касательный базис $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_p(\partial M)$, и два каких-либо внешних вектора v_* и v_{**} в точке p . Напомним, что $T_p M$ представляет собой k -мерное линейное пространство, $T_p(\partial M)$ есть его $(k-1)$ -мерное подпространство, которое делит $T_p M$ на два полупространства, в одном из которых (т.е. в $T_p M \setminus T_p^+ M$) лежат оба внешних вектора v_*, v_{**} . Поэтому $v_{**} = \lambda_0 v_* + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$, где $\lambda_0 > 0$. Тем самым базисы $v_*, v_1, \dots, v_{k-1}$ и

$v_{**}, v_1, \dots, v_{k-1}$ пространства $T_p M$ связаны матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} v_{**} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_* \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\det A > 0$ и потому $\theta(p; v_*, v_1, \dots, v_{k-1}) = \theta(p; v_{**}, v_1, \dots, v_{k-1})$.

ШАГ 2. Нечетность $\dot{\theta}$ по векторным аргументам v_i очевидна (вытекает из нечетности θ по v_i).

ШАГ 3. Осталось проверить непрерывность функции $\dot{\theta}$. Зафиксируем произвольную точку $p \in \partial M$ и рассмотрим изоморфизм $\varphi : I \rightarrow M$, где $I = [0, 1) \times (0, 1) \times \dots \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^k$ есть k -мерный полуинтервал, $\varphi(I) = M \cap U \ni p$, где U — открытое множество в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n \supset M$. Обозначим $M_p = U \cap M$. Тогда

$$\partial M_p = U \cap \partial M = \varphi(\partial I).$$

На I рассмотрим векторные поля $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Тогда $-e_1$ — это внешний вектор единица на i -м месте

для ∂I в каждой точке $x \in \partial I$. Поскольку для $y = \varphi(x)$ дифференциал $d\varphi$ переводит $T_x(\partial I)$ в $T_y(\partial M)$ и $T_x^+ I$ в $T_y^+ M$ для всех $x \in \partial I$, в частности, внешние вектора переходят во внешние, то для $y = \varphi(x)$ вектор $v_*(y) = -d\varphi(x)\langle e_1 \rangle$ является внешним к ∂M в каждой точке $y \in \partial M_p$. Так как функция $v_*(y)$ непрерывна на ∂M_p , а функция θ непрерывна на $\mathcal{B}M$, то функция $\theta(y; v_*(y), v_1, \dots, v_{k-1})$ будет непрерывна на $\mathcal{B}(\partial M_p)$. Но $\mathcal{B}(\partial M_p) = \mathcal{B}(U \cap \partial M)$ представляет собой открытую часть пространства $\mathcal{B}(\partial M)$. Теорема доказана. $\square$

Упражнение 3.3.10. 1. Стандартная ориентация сферы S^{n-1} индуцируется стандартной ориентацией шара B^n (т.е. $S^{n-1} = \partial B^n$).

2. Пусть U и V — такие куски пространства $\mathbb{R}^n$, что их пересечение есть край каждого из них. Тогда $\partial U = -\partial V$.

3. Для ориентированного отрезка справедливо равенство $\partial[a, b] = \{(a, -1), (b, 1)\}$, т.е. у его левого конца индуцированная ориентация отрицательна, а у правого — положительна.

§3.4 Интеграл от k -формы по ориентированному k -многообразию

В данном разделе для каждого ориентированного гладкого k -многообразия M будут определены

(i) векторное пространство $L_1^k(M) \subset \mathcal{F}^k(M)$, состоящее из *интегрируемых на M k -форм*,

(ii) для каждой формы $\omega \in L_1^k(M)$ будет определено значение $\int_M \omega$ — *интеграл от формы ω по многообразию M* ,

причем указанная операция интегрирования обладает следующими свойствами.

(I0) Если k -многообразие M лежит в $\mathbb{R}^k$ и снабжено стандартной ориентацией пространства $\mathbb{R}^k$, то k -форма $\omega = f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ на M интегрируема тогда и только тогда, когда отображение f интегрируемо по Лебегу на M . В этом случае

$$\int_M f(t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_M f(t) dt_1 \dots dt_k.$$

- (I1) Линейность: если k -формы ω_i интегрируемы на M , а c_i — некоторые константы, $i = 1, \dots, m$, то форма $\sum_{i=1}^m c_i \omega_i$ интегрируема на M , причем

$$\int_M \sum_{i=1}^m c_i \omega_i = \sum_{i=1}^m c_i \int_M \omega_i.$$

- (I2) Ориентированность: $\int_M = - \int_{-M}$.

- (I3) Замена переменных: если $\varphi : N \rightarrow M$ — гладкий сохраняющий ориентацию изоморфизм k -мерных многообразий, и если в формуле $\int_M \omega = \int_N \varphi^* \omega$ определен один из интегралов, то определен и другой, и формула верна.

- (I4) Сужаемость области интегрирования: если M_0 — кусок ориентированного k -многообразия M , ω — k -форма на M , причем $\omega \equiv 0$ на $M \setminus M_0$, тогда ω интегрируема на M_0 в том и только том случае, когда она интегрируема на M , причем справедлива формула $\int_M \omega = \int_{M_0} \omega$.

Легче всего интеграл определить для случая, когда $M \subset \mathbb{R}^n$ — нульмерное многообразие. Другими словами, у каждой точки $x \in M$ найдется окрестность U такая, что $U \cap M$ изоморфно 0-мерному интервалу, т.е. точке. Это означает, что $U \cap M$ состоит из одной единственной точки x . Такие множества M (локально одноточечные) называют дискретными; легко видеть, что они не более чем счетны. Если теперь $\theta : M \rightarrow \{-1, 1\}$ ориентация многообразия M , то 0-форму (т.е. функцию) $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$ считают интегрируемой на $M = (M, \theta)$, если $\sum_{x \in M} |\omega(x)| < \infty$. В этом случае полагают $\int_M \omega = \sum_{x \in M} \omega(x) \theta(x)$.

Теперь рассмотрим более содержательный случай $k > 0$. Пусть M — ориентированное k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и $\omega \in \mathcal{F}^k(M)$.

Допустим сначала, что имеется сохраняющий ориентацию гладкий изоморфизм $\varphi : U \rightarrow M$, где $U \subset \mathbb{R}^k$. В этом случае будем называть многообразие M *распрямляемым*. Тогда форма $\omega \in \mathcal{F}^k(M)$ называется интегрируемой в том и только том случае, когда k -форма $\varphi^* \omega \in \mathcal{F}^k(U)$ интегрируема на U (см. (I0)). В этом случае полагают

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^* \omega. \quad (3.138)$$

ЛЕММА 3.4.1. Приведенное определение корректно, т.е. $\int_M \omega$ не зависит от выбора изоморфизма $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ в формуле (3.138).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

ЛЕММА 3.4.2. Операция интегрирования дифференциальных форм по распрямляемым многообразиям обладает свойствами (I0)–(I4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно действовать по аналогии со случаем 1-форм (см., в частности, доказательство теоремы 3.1.16 из §3.1.5). $\square$

Пусть теперь M — произвольное ориентированное гладкое k -многообразие. Будем говорить, что k -форма ω , заданная на M , *интегрируема на M* , если существует L_1 -разложение этой формы, т.е. набор $A_1, \dots, A_m$ открытых распрямляемых частей многообразия M и k -формы α_i на M такие, что α_i интегрируема на A_i , $\alpha_i \equiv 0$ на $M \setminus A_i$, и $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) = \omega(x)$ для всех $x \in M$. В этом случае полагают

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} \alpha_i. \quad (3.139)$$

ЛЕММА 3.4.3. Приведенное определение корректно, т.е. значение $\int_M \omega$ в формуле (3.139) не зависит от выбора L_1 -разложения формы ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что $\omega \equiv 0$, и покажем, что $\sum_{i=1}^m \int_{A_i} \alpha_i = 0$ для всякого L_1 -разложения $(A_1, \dots, A_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ нулевой формы. Положим $A_{ij} = A_i \cap A_j$, $A = \bigcup_i A_i$ и $\xi_i(x) = \frac{\chi_{A_i}(x)}{\sum_{j=1}^m \chi_{A_j}(x)}$, где, напомним,

$$\chi_{A_i}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A_i; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_i. \end{cases}$$

представляет собой характеристическую функцию множества A_i . Тогда по построению

$$\sum_{i=1}^m \xi_i(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Теперь переходя к интегрированию, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{A_i} \alpha_i &= \sum_{i=1}^m \int_{A_i} \sum_{j=1}^m \xi_j \alpha_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{A_{ij}} \xi_j \alpha_i \stackrel{\text{см. (I4) для } M_0 = A_j, \omega = \xi_j \alpha_i}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{A_{ij}} \xi_j \alpha_i \stackrel{\text{ibid.}}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \xi_j \alpha_i = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \sum_{i=1}^m \xi_j \alpha_i = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} \xi_j \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0 \end{aligned} \quad (3.140)$$

Итак, равенство нулю интеграла $\int_M \omega$ для $\omega = 0$ независимо от способа L_1 -разложения доказано.

Если теперь ω — произвольная интегрируемая k -форма на M , и имеются два каких-либо ее L_1 -разложения $(A_1, \dots, A_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $(B_1, \dots, B_l; \beta_1, \dots, \beta_l)$, то $(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_l; \alpha_1, \dots, \alpha_m, -\beta_1, \dots, -\beta_l)$ — это L_1 -разложение нулевой формы на M , поэтому

$$\sum_{i=1}^m \int_{A_i} \alpha_i - \sum_{j=1}^l \int_{B_j} \beta_j = 0.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 3.4.4. *Операция интегрирования дифференциальных форм по многообразиям (общего вида) обладает свойствами (I0)–(I4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (I1). Пусть $\omega = \alpha + \beta$, причем формы α, β интегрируемы. Возьмем L_1 -разложения $(A_1, \dots, A_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $(B_1, \dots, B_l; \beta_1, \dots, \beta_l)$ форм α и β соответственно. Тогда $(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_l; \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_l)$ — это L_1 -разложение формы $\alpha + \beta$. Дальнейшее очевидно. Остальные свойства (I0), (I2)–(I4) вытекают из соответствующих свойств интегралов по распрямляемым многообразиям. $\square$

Ниже нам понадобится следующее понятие. Говорят, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ *сосредоточена на множестве B* , если $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in X \setminus B$.

ТЕОРЕМА 3.4.5 (Теорема о разбиении единицы). *Пусть $\{W_i\}$ — система открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, покрывающих компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда найдется конечный набор бесконечно гладких функций $\lambda_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и компактных множеств B_j , $j = 1, \dots, m$ со следующими свойствами:*

- (i) *каждая из функций λ_j сосредоточена на компактном множестве B_j ;*
- (ii) $\sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \equiv 1$ *для всех $x \in K$;*
- (iii) *для каждого компакта B_j найдется элемент покрытия W_i такой, что $B_j \subset W_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $p \in K$ возьмем содержащее ее множество W_i и замкнутый шар $B(p)$ с центром в p ненулевого радиуса и такой, что $B(p) \subset W_i$. Положим $U(p) = \text{Int } B(p)$. Тогда совокупность множеств $\{U(p)\}_{p \in K}$ образует открытое покрытие множества K . По теореме Бореля–Лебега из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие $U(p_1), \dots, U(p_m)$, по-прежнему покрывающее K . $U(p_j)$ представляют собой открытые шары. Нетрудно построить бесконечно-гладкие функции $\sigma_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, положительные на $U(p_j)$ и равные нулю вне $U(p_j)$ (например, если такими функциями будут

$$\sigma_j(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{r_j - |x - p_j|}\right), & x \in U(p_j); \\ 0, & x \notin U(p_j), \end{cases}$$

где через r_j обозначен радиус шара $U(p_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p_j| < r_j\}$. Обозначим $U = \bigcup_{j=1}^m U(p_j)$. По построению U является открытым множеством, содержащим компакт K . Тогда существует бесконечно гладкая функция $\sigma_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, равная нулю на K и единице вне U (существование такой функции вытекает, например, из Леммы 4.0.9). Теперь положим $\sigma(x) = \sum_{j=0}^m \sigma_j(x)$ и $\lambda_j(x) = \frac{\sigma_j(x)}{\sigma(x)}$. Легко видеть, что функции $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяют всем искомым требованиям доказываемой леммы. $\square$

Будем говорить, что форма $\omega \in \mathcal{F}^k(M)$ имеет компактный носитель, если замыкание множества $\{x \in M : \omega(x) \neq 0\}$ компактно (т.е. если $\omega(x) \equiv 0$ вне некоторого компактного множества).

ТЕОРЕМА 3.4.6 (Критерий интегрируемости). *Пусть M — k -мерное ориентированное многообразие, и пусть ω — k -форма на M с компактным носителем. Предположим, что форма ω локально интегрируема, т.е. что для каждого $p \in M$ найдется открытая окрестность U точки p такая, что $M_p := M \cap U$ представляет собой k -многообразие, и форма $\omega|_{M_p}$ интегрируема на M_p . Тогда ω интегрируема на всем M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко выводится из определения операции интегрирования (через L_1 -разложения) и Теорем 3.4.4–3.4.5. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.4.7 (Интегрируемость непрерывных форм). Пусть M — k -мерное ориентированное многообразие, и пусть ω — непрерывная k -форма на M с компактным носителем. Тогда ω интегрируема на M .

Наконец мы подошли к центральному моменту всей теории.

ТЕОРЕМА 3.4.8 (Теорема Стокса). Пусть M — k -мерное ориентированное многообразие, и пусть ω — гладкая $(k-1)$ -форма на M с компактным носителем. Тогда справедлива формула

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (3.141)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Пусть выполнены предположения теоремы. Докажем ее утверждение сначала для простейших многообразий $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{R}_+^k$. Доказательство будем вести индукцией по k . Пусть для $X = \mathbb{R}^k$ теорема верна. Рассмотрим теперь многообразие $M = [a, +\infty) \times X$. По условию теоремы, найдется число $b \in \mathbb{R}$ такое, что носитель k -формы ω лежит в $U = [a, b] \times X$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_U d\omega. \quad (3.142)$$

Пусть форма $d\omega$ представима в виде

$$d\omega = f(t, x) dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_U d\omega &\stackrel{\text{см. (I0)}}{=} \int_U f(t, x) dt dx_1 \dots dx_k \stackrel{\text{т.Фубини}}{=} \int_X \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx_1 \dots dx_k = \int_X \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \\ &= \int_X \left(\int_a^b d\omega \right) \stackrel{\text{формула гомотопии}}{=} \int_X \left(j_b^* \omega - j_a^* \omega - d \int_a^b \omega \right) = \int_X j_b^* \omega - \int_X j_a^* \omega - \int_X d \left(\int_a^b \omega \right). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Исследуем каждый из этих трех интегралов по отдельности. Поскольку $\omega(t, x) \equiv 0$ при $t \geq b$, то $j_b^* \omega \equiv 0$, и первый интеграл зануляется. Далее, т.к. $\partial X = \partial \mathbb{R}^k = \emptyset$, и мы предположили по индукции, что формула Стокса (3.141) верна для многообразия $X = \mathbb{R}^k$, то третий интеграл также зануляется

$$\int_X d \left(\int_a^b \omega \right) = \int_{\partial X} \left(\int_a^b \omega \right) = 0.$$

Остается последний, второй интеграл. Вложение $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto j_a(x) = (a, x) \in \mathbb{R}^{k+1}$ является гладкой параметризацией края ∂M многообразия $M = [a, +\infty) \times \mathbb{R}^k$. Легко видеть, что эта параметризация *меняет* ориентацию (т.е. *внешняя* нормаль к ∂M представляет собой вектор $(-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$). Поэтому, по определению интеграла по распрямляемым

многообразиям (в роли параметризации сейчас выступает j_a) имеем, $-\int_X j_a^* \omega = \int_{\partial M} \omega$. В итоге равенство (3.143) преобразуется к виду $\int_M d\omega = \int_U d\omega = \int_{\partial M} \omega$, и формула Стокса (3.141) для многообразия $M = [a, +\infty) \times \mathbb{R}^k$ доказана.

Если теперь $M = \mathbb{R}^{k+1} = (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^k$, то найдется точка $a \in \mathbb{R}$ такая, что носитель формы ω содержится во многообразии $M_a = [a, +\infty) \times \mathbb{R}^k$, поэтому можно свести дело к предыдущему случаю, и получим

$$\int_M d\omega = \int_{M_a} d\omega \stackrel{\text{предыдущий случай}}{=} \int_{\partial M_a} \omega = 0.$$

Итак, формула Стокса (3.141) полностью доказана для простейших многообразий вида $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}_+^k$.

ШАГ 2. Теперь перейдем к случаю, когда M — распрямляемое многообразие с краем, т.е. существует гладкий сохраняющий ориентацию изоморфизм $\varphi : X \rightarrow M$, $\varphi(X) = M$, где $X = \mathbb{R}_+^k$. Тогда

$$\int_M d\omega \stackrel{(3.138)}{=} \int_X \varphi^*(d\omega) = \int_X d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial X} \varphi^*\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Здесь мы воспользовались Шагом 1 (в третьем равенстве) и тем обстоятельством, что $\varphi(\partial X) = \partial M$, т.е. $\varphi : \partial X \rightarrow \partial M$ также представляет собой гладкий сохраняющий ориентацию изоморфизм.

ШАГ 3. Аналогично доказывается формула Стокса для случая, когда M — распрямляемое многообразие без края, т.е. существует гладкий сохраняющий ориентацию изоморфизм $\varphi : X \rightarrow M$, $\varphi(X) = M$, где $X = \mathbb{R}^k$. На самом деле, т.к. носитель у формы ω компактен, то этот случай сводится к предыдущему, именно, найдется полупространство $X_+ = [a, +\infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$ такое, что $\omega \equiv 0$ вне $\varphi(X_+)$.

ШАГ 4. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\omega \equiv 0$ вне некоторого компактного множества $K \subset M$. Для каждой точки $p \in K$ найдется множество $X_p = \mathbb{R}^k$ или $\mathbb{R}_+^k$ и изоморфизм $\varphi_p : X_p \rightarrow M$ такие, что $p \in \varphi_p(X_p) = M \cap U_p$, где U_p представляет собой открытое множество. По теореме Бореля–Лебега, найдется конечная совокупность множеств X_i , $i = 1, \dots, m$, каждое из которых равно $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{R}_+^k$, и изоморфизмов $\varphi_i : X_i \rightarrow M$, таких, что $\varphi_i(X_i) = M \cap U_i$, здесь U_i — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, покрывающие все K . Далее, по теореме о разбиении единицы, найдется конечный набор бесконечно гладких функций $\lambda_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и компактных множеств B_j , $j = 1, \dots, l$ со следующими свойствами:

- (i) каждая из функций λ_j сосредоточена на компактном множестве B_j ;
- (ii) $\sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \equiv 1$ для всех $x \in K$;
- (iii) для каждого компакта B_j найдется элемент покрытия U_i такой, что $B_j \subset U_i$.

Объединяя (суммируя) при фиксированном i все λ_j , у которых носитель лежит в U_i , можем прийти к ситуации, когда $l = m$ и носитель λ_i лежит в U_i .

Рассмотрим теперь формы $\omega_i(x) = \lambda_i(x)\omega$. Носитель каждой из этих форм сосредоточен на распрямляемом многообразии $M_i := M \cap U_i$. Поэтому по предыдущим шагам для

них выполнена формула Стокса, т.е.

$$\int_M d\omega_i = \int_{M_i} d\omega_i = \int_{\partial M_i} \omega_i = \int_{U_i \cap \partial M} \omega_i \stackrel{\text{см. (I4) для } M_0 = U_i \cap \partial M, \omega = \omega_i}{=} \int_{\partial M} \omega_i.$$

Но тогда в силу линейности интеграла и равенства $\sum_{i=1}^m \omega_i = \omega$ получаем

$$\int_M d\omega = \int_M d\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\right) = \sum_{i=1}^m \int_M d\omega_i = \sum_{i=1}^m \int_{\partial M} \omega_i = \int_{\partial M} \sum_{i=1}^m \omega_i = \int_{\partial M} \omega.$$

Теорема Стокса доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.4.9 (Интеграл от точных форм). Пусть M — компактное k -мерное ориентированное многообразие без края, и пусть ω — гладкая k -форма на M . Предположим, что форма ω точная, т.е. найдется гладкая $(k-1)$ -форма ψ такая, что $\omega = d\psi$ на M . Тогда

$$\int_M \omega = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения Следствия. Тогда

$$\int_M \omega = \int_M d\psi \stackrel{\text{формула Стокса}}{=} \int_{\partial M} \psi = 0.$$

$\square$

§3.4.1 Приложения формулы Стокса

Пример 3.4.10 (Закон Паскаля). Пусть область $U \subset \mathbb{R}^3$ заполнена жидкостью, и пусть вещественная неотрицательная функция $p : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ задает давление жидкости в этой области. Для точки $q = (x, y, z) \in U$ и пары векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$ обозначим через $P = P(q; u, v) = \{q + t_1 u + t_2 v : t_i \in [0, 1]\}$ параллелограмм с вершиной в точке q , натянутый на вектора u, v . Тогда согласно закону Паскаля сила, действующая на P сверху, т.е. из того полупространства, куда направлен вектор $u \times v$, примерно равна

$$\pi_p \langle u, v \rangle = -p(x, y, z) u \times v, \quad (3.144)$$

т.е. ее абсолютная величина прямо пропорциональна площади данного параллелограмма. Данная формула тем точнее, чем меньше размеры параллелограмма. Отметим, что 2-форма π_p является *векторнозначной*. Запишем теперь эту форму в координатном виде:

$$\pi_p(x, y, z) = -p(x, y, z) \left(\mathbf{e}_x dy \wedge dz + \mathbf{e}_y dz \wedge dx + \mathbf{e}_z dx \wedge dy \right).$$

Пусть внутри области U погружено тело M , которое представляет собой трехмерное компактное многообразие с краем. Суммарная сила, действующая на тело M , будет равна

$$F_M = \int_{\partial M} \pi_p = \int_M d\pi_p = - \int_M \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) dx \wedge dy \wedge dz = - \int_M \nabla p(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.145)$$

Например, если $p(x, y, z) = \lambda(c - z)$ (давление прямо пропорционально глубине), то

$$F_M = -\lambda \int_M (0, 0, -1) dx dy dz = (0, 0, \lambda \mu_3(M)).$$

ТЕОРЕМА 3.4.11 (Форма Гаусса). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, и рассмотрим $(n-1)$ -форму Гаусса

$$\omega_G(x) \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \frac{1}{|x|^n} \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Тогда, если $0 \notin \Omega$, то

$$\int_{\partial\Omega} \omega_G = 0. \quad (3.146)$$

Если же $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$, то

$$\int_{\partial\Omega} \omega_G = \mu_{n-1}(S^{n-1}), \quad (3.147)$$

где $\mu_{n-1}(S^{n-1})$ — объем единичной $(n-1)$ -мерной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеем

$$\omega_G(x) = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (3.148)$$

Тогда непосредственным вычислением проверяется, что

$$d\omega_G(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left(\frac{x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \right)}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n = 0. \quad (3.149)$$

Отсюда и из формулы Стокса немедленно вытекает формула (3.146) в случае, когда $0 \notin \Omega$.

Если же $0 \in \text{Int } \Omega$, то рассмотрим замкнутый шар B_r радиуса r с центром в начале координат, такой, что $B_r \subset \text{Int } \Omega$. Тогда для области $U = \Omega \setminus (\text{Int } B_r)$ имеем $0 \notin U$, поэтому по формуле Грина

$$\int_{\partial U} \omega_G = 0. \quad (3.150)$$

Последнюю формулу, в силу очевидного равенства $\partial U = \partial\Omega - \partial B_r$ можно переписать в виде

$$\int_{\partial\Omega} \omega_G = \int_{\partial B_r} \omega_G. \quad (3.151)$$

Из сказанного выше вытекает, в частности, что величина $\int_{\partial B_r} \omega_G$ **НЕ** зависит от r . Поэтому можно посчитать при $r = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} \omega_G &= \int_{\partial B_1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \stackrel{\text{Ф-ла Стокса}}{=} \int_{B_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int_{B_1} n dx_1 dx_2 \dots dx_n = n \mu_n(B_1) = \mu_{n-1}(S^{n-1}), \end{aligned} \quad (3.152)$$

где $\mu_n(B_1)$ обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см. формулы (2.36), (2.43)). Последняя формула вместе с (3.151) дает искомое равенство (3.147). $\square$

Замечание 3.4.12. Приведенные вычисления показывают, что форма Гаусса является *замкнутой* (т.е. $d\omega_G \equiv 0$ всюду в проколотом пространстве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, см. (3.149)), но не *точной*, т.е. не существует гладкой формы $(n-2)$ -формы ψ такой, что $\omega_G = d\psi$ всюду на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В самом деле, если бы форма Гаусса была точной, то ее интеграл по единичной сфере в $\mathbb{R}^{n-1}$ занулялся бы по Следствию 3.4.9, что противоречило бы только что доказанной Теореме 3.4.11.

Следствие 3.4.13. Для каждого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ открытые множества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \setminus K$ не являются гладко изоморфными.

Упражнение 3.4.14. Сфера S^{k+l} и "торического типа" многообразие $S^k \times S^l$ не являются гладко изоморфными.

Теорема 3.4.15 (Теорема о "барабане"). Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, и предположим, что имеется непрерывное отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in \partial K$. Тогда $f(K) \supset K$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $K \subset B_1$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда можно распространить f непрерывно на все $\mathbb{R}^n$, полагая $f(x) := x$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т.е. что найдется точка $x_* \in K$ такая, что $f(x) \neq x_*$ для всех $x \in K$. Но тогда $f(x) \neq x_*$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. $x_* \in K \setminus f(K) = K \setminus f(\mathbb{R}^n)$. Не умаляя общности, можно предположить, что $x_* = 0$, т.е.

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad (3.153)$$

$$f(x) = x \quad \text{при } |x| \geq 1. \quad (3.154)$$

Нужно доказать, что это приводит к противоречию. Рассмотрим два возможных случая.

СЛУЧАЙ I. Функция $f(x)$ гладкая. Поскольку $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а форма Гаусса ω_G является гладкой на проколотом пространстве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, имеем, что $f^*\omega_G$ также гладкая на всем $\mathbb{R}^n$. Напомним также, что форма Гаусса замкнутая, т.е. $d\omega_G \equiv 0$ всюду на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (см. (3.149)). Но тогда

$$0 = \int_{B_1} f^*(d\omega_G) = \int_{B_1} d(f^*\omega_G) \stackrel{\text{Ф-ла Стокса}}{=} \int_{S^{n-1}} f^*\omega_G \stackrel{(3.154)}{=} \int_{S^{n-1}} \omega_G \stackrel{(3.147)}{=} \mu_{n-1}(S^{n-1}). \quad (3.155)$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы для гладкого случая.

СЛУЧАЙ II. Рассмотрим общий случай, когда функция $f(x)$ непрерывная. Из формул (3.153)–(3.154) следует, что найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$|f(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.156)$$

Возьмем гладкую неотрицательную четную функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Обозначим $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \varphi(\frac{1}{\delta}x)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 3.4.16 (О сглаживании). При сделанных предположениях для всех $\delta > 0$ справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(x) dx \equiv 1. \quad (3.157)$$

Более того, функция $f_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_\delta(x - y) dy$ является бесконечно гладкой, причем

$$f_\delta(x) = f(x) = x \quad \text{при } |x| \geq 1 + \delta, \quad (3.158)$$

и имеет место сходимость

$$|f_\delta(x) - f(x)| \Rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (3.159)$$

В самом деле, если $|x| \geq 1 + \delta$, то

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_\delta(x - y) dy = \int_{|y-x| \leq \delta} f(y) \varphi_\delta(x - y) dy = \int_{|y-x| \leq \delta} y \varphi_\delta(x - y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (y - x) \varphi_\delta(x - y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} x \varphi_\delta(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} x \varphi_\delta(x - y) dy = x \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(x - y) dy = x. \end{aligned}$$

Остальные утверждения этой леммы вытекают из Теоремы 4.0.3, 4.0.7 следующей главы.

Из формул (3.156) и (3.159) следует, что найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$f_\delta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.160)$$

для всех $\delta < \delta_0$. Но тогда гладкая функция $f_\delta(x)$ при $\delta < \delta_0$ попадает в уже разобранный случай I (см. (3.158)). Значит, и здесь имеет место противоречие. Теорема "о барабане" полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3.4.17 (Теорема Брауэра о неподвижной точке). У всякого непрерывного отображения $f : B \rightarrow B$ n -мерного шара $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ в себя имеется неподвижная точка $x_* = f(x_*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это утверждение неверно, т.е. найдется непрерывное отображение $f : B \rightarrow B$ без неподвижных точек:

$$f(x) \neq x \quad \text{для всех } x \in B. \quad (3.161)$$

Обозначим через $S = \partial B$ единичную $(n - 1)$ -мерную сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$. Зададим отображение $g : B \rightarrow S$ по правилу:

$g(x)$ является точкой пересечения луча, исходящего из $f(x)$ и проходящего через x , со сферой S .

Нетрудно видеть, что по построению $g(x) = x$ для всех $x \in S$, и функция $g(x)$ непрерывна на всем шаре B (это вытекает из свойства (3.161)). По построению, $|g(x)| \equiv 1 \neq 0$ для всех $x \in B$. Но такого непрерывного отображения $g : B \rightarrow S$ не может существовать по предыдущей теореме (о "барабане"). Теорема Брауэра доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.4.18. Пусть на единичном n -мерном шаре $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ имеется векторное поле $v(x)$ со свойством: угол между $v(x)$ и x меньше чем π для всех $x \in S = \partial B_1$. Тогда найдется такая точка $x \in B_1$, что $v(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in B_2$ (здесь $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\}$ — шар удвоенного радиуса с тем же центром) зададим отображение

$$f(x) = \begin{cases} v(x), & |x| \leq 1; \\ (1-t)v\left(\frac{x}{|x|}\right) + tx, & \text{где } t = t(x) = |x| - 1. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$ будет непрерывной, причем $f(x) = x$ для $x \in \partial B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\}$. По теореме 3.4.15 о барабане найдется точка $x_* \in B_2$ такая, что $f(x_*) = 0$. Ясно, что x_* не может лежать во множестве $B_2 \setminus B_1$ (ибо в этом случае $f(x)$ является линейной комбинацией векторов x и $v\left(\frac{x}{|x|}\right)$, а эти вектора линейно независимы по условию теоремы). Поэтому $x_* \in B_1$ и $f(x_*) = v(x_*) = 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 3.4.19 (Теорема "о еже"). Пусть на единичной четномерной сфере задано непрерывное векторное поле $v : S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$, где $S^{2k} = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} : |x| = 1\}$. Тогда найдется точка $x \in S^{2k}$ такая, что $v(x) \perp S^{2k}$, т.е. $v(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Данную теорему иногда называют "теоремой о еже", т.к. она имеет наглядную иллюстрацию: на двумерной сфере нельзя построить ненулевое векторное поле, касательное к сфере в каждой точке, напротив, всегда найдется точка, в которой вектор будет перпендикулярен сфере ("ежика не получится причесать - всегда хотя бы одна колючка будет стоять торчком"). **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для четномерной сферы $S = \partial B_3 = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} : |x| = 3\}$ найдется непрерывное векторное поле $v : S \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ такое, что вектора $v(x)$ и x линейно независимы для всех $x \in S$. Для сферического слоя $M = B_4 \setminus (\text{Int } B_2) = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1} : |x| \in [2, 4]\}$ зададим отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ по правилу

$$f(x) = tx + (1-|t|)v\left(\frac{3x}{|x|}\right), \text{ где } t = t(x) = |x| - 3.$$

Из этого определения вытекает, что

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| = 2; \\ x, & |x| = 4; \\ f(x) \neq 0, & x \in M. \end{cases} \quad (3.162)$$

С помощью процедуры сглаживания можно добиться того, чтобы отображение f , сохраняя все указанные свойства (3.162), стало вдобавок гладким. Рассмотрим гладкую форму $\omega = f^*\omega_G$ на M . (Гладкость этой формы вытекает из третьего условия в (3.162).) По формуле Стокса,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M f^*d\omega_G = \int_M d(f^*\omega_G) = \int_{\partial M} f^*\omega_G = \int_{\partial B_4} f^*\omega_G - \int_{\partial B_2} f^*\omega_G = \\ &\stackrel{(3.162)}{=} \int_{\partial B_4} \omega_G - \int_{\partial B_2} (-\omega_G) = \int_{\partial B_4} \omega_G + \int_{\partial B_2} \omega_G \stackrel{(3.147)}{=} 2\mu_{2k}(S^{2k}) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.163)$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Упражнение 3.4.20. 1) Где в рассматриваемом доказательстве используется четность сферы?

2) Доказать, что на любом торе $S^1 \times \cdots \times S^1$ и на каждой нечетномерной сфере имеется гладкое единичное касательное поле.

3) Если гладкая поверхность S изоморфна четномерной сфере, то любое непрерывное касательное векторное поле $v(x)$ на ней имеет "плешь", т.е. место, откуда не растет волос ($\exists x \in S \ v(x) = 0$).

§3.5 Интегралы первого и второго рода

Напомним, что ранее (см. параграф §2.2) был предложен иной подход к интегрированию по k -мерному многообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ — **Интеграл от функций по k -мерной мере**. Именно, множество A называлось *k -мерным лоскутом* множества M , если имелся гладкий изоморфизм $\varphi : U \rightarrow M$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — измеримое множество, и $\varphi(U) = A$. В этом случае полагают

$$\mu_k(A) = \int_U \sqrt{\Gamma(\varphi'(x))} dx, \quad (3.164)$$

где $\Gamma(\varphi'(x))$ — сумма квадратов старших $k \times k$ -миноров матрицы Якоби $\varphi'(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, k}}$,

или, что, равносильно,

$$\Gamma(a) = \det(a^* a). \quad (3.165)$$

Было показано, что определение (3.164) не зависит от выбора параметризации φ . Если задана мера лоскутов, то ее можно распространить на **все** подмножества M по стандартной схеме (см. параграф §2.2.1). При этом каждое μ_k измеримое подмножество M представимо в виде счетного объединения непересекающихся лоскутков. И для каждого лоскутка $A = \varphi(U) \subset M$ имеем

$$\int_A f(y) d\mu_k(y) = \int_U f(\varphi(x)) \sqrt{\Gamma(\varphi'(x))} dx. \quad (3.166)$$

В частном случае, когда суммируемая по мере μ_k функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет компактный носитель, найдется конечная совокупность распрямляемых открытых частей A_i многообразия M (в частности, все A_i — лоскутки), и суммируемых функций f_i таких, что $f_i(x) \equiv 0$ для $x \notin A_i$, поэтому

$$\int_M f(y) d\mu_k(y) = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f_i(y) d\mu_k(y). \quad (3.167)$$

Интеграл от функций по мере μ_k называется *интегралом первого рода*, в отличие от интеграла k -формы по ориентированному k -многообразию, который называется *интегралом второго рода*. Интересно сопоставить интегралы этих двух типов.

ТЕОРЕМА 3.5.1 (Связь разнородных интегралов). Пусть M — ориентированное k -многообразие, и ω — k -форма на M с компактным носителем. Зададим функцию $f(y) = \omega(y) \langle b_1, \dots, b_k \rangle$, где $b_1, \dots, b_k$ — ортонормированный положительно ориентированный базис

в касательном пространстве $T_y M$. Тогда функция $f(y)$ будет μ_k -интегрируемой² в том и только том случае, если форма ω интегрируема, при этом

$$\int_M f d\mu_k = \int_M \omega. \quad (3.168)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ I. Пусть $b = (b_1, \dots, b_k)$, $a = (a_1, \dots, a_k)$ — два базиса в пространстве $T_y M$. Тогда легко проверяется (используя полилинейность и кососимметричность формы ω) что

$$\omega(y)\langle a \rangle = \det(a/b) \omega(y)\langle b \rangle, \quad (3.169)$$

где (a/b) — матрица перехода от базиса b к базису a . В частности, если оба базиса ортонормированные и положительной ориентации, то $\det(a/b) = 1$ и $\omega(y)\langle b \rangle = \omega(y)\langle a \rangle$, т.е. функция $f(y)$ определена корректно (она не зависит от выбора базиса b с указанными свойствами).

ШАГ 2. Предположим, что многообразие M распрямляемо, т.е. существует сохраняющий ориентацию изоморфизм $\varphi : U \rightarrow M$, $\varphi(U) = M$, $U \subset \mathbb{R}^k$. Тогда по определению

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^* \omega = \int_U \omega(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx,$$

где обозначено $\omega(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle = \omega(\varphi(x)) \langle \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \rangle$. Обозначим через a базис $a = (\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k})$ касательного пространства $T_y M$, где $y = \varphi(x)$, а через $b = (b_1, \dots, b_k)$ обозначим какой-нибудь положительный ортонормированный базис того же пространства. Тогда b является $n \times k$ матрицей, и в силу предположения об ортонормированности $b^* b = E_k$, где через E_k обозначена единичная $k \times k$ матрица. Справедлива формула $a = bC$, где C представляет собой $k \times k$ -матрицу перехода: $C = (a/b)$. Тогда $a^* a = C^* b^* b C = C^* C$. Это означает, что $\det(a^* a) = (\det C)^2$. Следовательно, $\sqrt{\Gamma(a)} = \det C$. Тем самым, с учетом принятых обозначений и (3.169), доказана формула

$$\omega(y)\langle a \rangle = (\det C) \omega(y)\langle b \rangle = \sqrt{\Gamma(a)} \omega(y)\langle b \rangle = f(y) \sqrt{\Gamma(a)}. \quad (3.170)$$

Вспоминая, что $y = \varphi(x)$ и $a = \varphi'(x)$, получаем

$$\omega(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle = f(\varphi(x)) \sqrt{\Gamma(\varphi'(x))}. \quad (3.171)$$

Тогда

$$\int_U \omega(\varphi(x)) \langle \varphi'(x) \rangle dx = \int_U f(\varphi(x)) \sqrt{\Gamma(\varphi'(x))} dx,$$

что в силу принятых определений равносильно искомому равенству

$$\int_M \omega = \int_M f d\mu_k.$$

ШАГ 3. В общем случае с помощью разбиения единицы интегрирование ω и f сводится к сумме интегралов по распрямляемым многообразиям, и искомая формула (3.168) сводится к разобранной на втором шаге ситуации. $\square$

²В данной главе для удобства мы используем термин *интегрируемая* и *суммируемая* функции как синонимы, т.е. интегрируемость означает *конечность* соответствующего интеграла.

Упражнение 3.5.2. Доказать, что для всякого ориентированного k -мерного многообразия (M, θ) найдется k -форма $\mathcal{V}ol_M$ такая, что $\mathcal{V}ol_M(x)\langle b_1, \dots, b_k \rangle \equiv 1$ для всякого ортонормированного положительного базиса касательного пространства $T_x M$. Эта форма называется *формой ориентированного объема*³: легко видеть, что для каждого подмногообразия $A \subset M$ справедливо равенство $\int_A \mathcal{V}ol_M = \mu_k(A)$.

Определение 3.5.3 (Векторное произведение). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ имеются k векторов $v_1, \dots, v_k$. Вектор $v \in \mathbb{R}^{k+1}$ называют *векторным произведением* этих векторов (обозначают $v = v_1 \times \dots \times v_k$), если в стандартной системе координат справедливо равенство

$$(u, v) = \det(u, v_1, \dots, v_k) \quad \text{для каждого вектора } u \in \mathbb{R}^{k+1}. \quad (3.172)$$

Здесь (u, v) — скалярное произведение векторов u и v . Легко видеть, что справедлива формула

$$v = v_1 \times \dots \times v_k = \det(\mathbf{e}, v_1, \dots, v_k),$$

где $(\mathbf{e}, v_1, \dots, v_k)$ — это $(k+1) \times (k+1)$ -матрица, у которой первый столбец состоит из

базисных векторов $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{R}^{k+1}$, а остальные столбцы совпадают с

векторами v_j в стандартной системе координат. Если кто-то пожелает записать это определение в независимой от координатной системе форме, то получим

$$v = v_1 \times \dots \times v_k \Leftrightarrow (u, v) = \mathcal{V}ol_{\mathbb{R}^{k+1}}(u, v_1, \dots, v_k) \quad \forall u \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

Легко видеть, что вектор v перпендикулярен каждому из векторов v_j , а его длина совпадает с k -мерным объемом $\mu_k(P)$ k -мерного параллелепипеда $P = \{y = \sum_{j=1}^k t_j v_j : t_j \in [0, 1]\}$, натянутого на вектора v_j — это вытекает из формулы Бине–Коши из Теоремы 2.1.2: для произвольной $(k+1) \times k$ матрицы $a = (v_1, \dots, v_k)$ имеем

$$\mu_k(P) = \sqrt{\Gamma(a)} = \sqrt{\text{сумма квадратов } k \times k \text{ миноров матрицы } a}.$$

Напомним, что в $\mathbb{R}^{k+1}$ для векторного поля $w(x)$ определена k -форма потока

$$\beta_w(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \det(w(x), v_1, \dots, v_k).$$

Пусть S — компактное k -мерное многообразие (гиперповерхность) в $\mathbb{R}^{k+1}$. Предположим, что на нем задано непрерывное поле векторов единичных нормалей $\nu(x)$, $x \in S$. Тогда это поле задает ориентацию многообразия S по правилу:

$$\theta(x; v_1, \dots, v_k) = \text{sgn} \det(\nu(x), v_1, \dots, v_k)$$

для любого касательного базиса $v_1, \dots, v_k \in T_x S$.

³**Указание.** В качестве $\mathcal{V}ol_M$ можно взять форму $\mathcal{V}ol_M(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \theta(x; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k) \sqrt{\Gamma(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)}$, где $\tilde{v}_j$ есть проекция вектора v_j на касательное пространство $T_x M$. Полилинейность этой формы следует из доказанного в последней теореме тождества $\sqrt{\Gamma(\tilde{v})} = \det(\tilde{v}/b)$, где $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$ — произвольный положительный базис пространства $T_x M$, а $b = (b_1, \dots, b_k)$ — ортонормированный положительный базис того же пространства.

ТЕОРЕМА 3.5.4 (Разнородные интегралы формы потока). Если S — компактное k -мерное многообразие (гиперповерхность) в $\mathbb{R}^{k+1}$, ориентация на котором задана с помощью непрерывного поля нормалей $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, то для каждого непрерывного векторного поля $w : S \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ справедлива формула

$$\int_S \beta_w = \int_S (w(x), \nu(x)) d\mu_k(x), \quad (3.173)$$

где β_w — определенная выше форма потока, и (w, ν) — скалярное произведение векторов w и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Для $x \in S$ обозначим $f(x) = \beta_w \langle b_1, \dots, b_k \rangle$, где $b_1, \dots, b_k$ — какой-нибудь положительный ортонормированный базис касательного пространства $T_x S$. С одной стороны, по Теореме 3.5.1 о разнородных интегралах имеем

$$\int_S \beta_w = \int_S f(x) d\mu_k(x). \quad (3.174)$$

С другой стороны, из свойств векторного произведения вытекает, что вектор $v(x) = b_1 \times \dots \times b_k$ перпендикулярен каждому из векторов b_j , т.е. $v(x) = t\nu(x)$. Вычислим, чему равно t . Имеем

$$1 = \det(\nu(x), b_1, \dots, b_k) \stackrel{\text{опр-е вект.пр-я}}{=} (\nu(x), v(x)) = t.$$

Итак, $t = 1$ и потому

$$v(x) = \nu(x).$$

Тогда

$$f(x) = \det(w(x), b_1, \dots, b_k) \stackrel{\text{опр-е вект.пр-я}}{=} (w(x), v(x)) = (w(x), \nu(x)).$$

Последнее тождество, с учетом ранее установленного равенства (3.174), завершает доказательство теоремы. $\square$

Напомним, что в стандартных координатах форма потока задается формулой

$$\beta_w(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_i(x) (-1)^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{k+1}.$$

По определению, $d\beta_w(x) = \operatorname{div} w(x) \operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^{k+1}}$, где $\operatorname{Vol}_{\mathbb{R}^{k+1}}$ — форма ориентированного объема в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$. Следовательно, в тех же стандартных координатах $d\beta_w(x) = \operatorname{div} w(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k+1}$ и потому $\operatorname{div} w(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_i}$. Теперь теорема 3.5.4 позволяет переписать формулу Стокса для формы потока в следующем виде.

ТЕОРЕМА 3.5.5 (Классическая формула Гаусса–Остроградского). Если Ω — компактное $(k+1)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^{k+1}$, то для каждого гладкого векторного поля $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ справедлива формула

$$\int_{\partial\Omega} (w(x), \nu(x)) d\mu_k(x) = \int_{\Omega} \operatorname{div} w(x) dx, \quad (3.175)$$

где $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$ в точке x , а в правой части равенства стоит обычный интеграл от функции $\operatorname{div} w(x)$ по $(k+1)$ -мере Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная теорема непосредственно вытекает из определения $\operatorname{div} w(x)$, формулы Стокса (3.141) и только что доказанной теоремы 3.5.4. $\square$

Напомним, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ формы первой и второй степени порождаются векторными полями $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{A}}^1(x)\langle v \rangle &= (\mathbf{A}(x), v), & \omega_{\mathbf{A}}^1 &= A_1(x) dx_1 + A_2(x) dx_2 + A_3(x) dx_3, \\ \omega_{\mathbf{B}}^2 &= \beta_{\mathbf{B}} \quad (\text{форма потока}); & \omega_{\mathbf{B}}^2(x)\langle u, v \rangle &= \det(\mathbf{B}(x), u, v), \\ \omega_{\mathbf{B}}^2 &= B_1(x) dx_2 \wedge dx_3 + B_2(x) dx_3 \wedge dx_1 + B_3(x) dx_1 \wedge dx_2,\end{aligned}$$

причем справедливо тождество

$$d\omega_{\mathbf{A}}^1 = \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2. \quad (3.176)$$

Форму $\omega_{\mathbf{A}}^1(x)$ называют еще *формой работы*. Теорема о разнородных интегралах позволяет переписать формулу Стокса для нее в следующем виде.

ТЕОРЕМА 3.5.6 (Классическая формула Стокса). Пусть M — компактное 2-мерное многообразие в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что ориентация на M задана непрерывным полем единичных нормалей $\boldsymbol{\nu} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда для каждого гладкого векторного поля $\mathbf{A} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ справедлива формула

$$\int_{\partial M} (\mathbf{A}, \mathbf{l}) d\mu_1 = \int_M (\operatorname{rot} \mathbf{A}, \boldsymbol{\nu}) d\mu_2, \quad (3.177)$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x)$ — единичный касательный вектор к ∂M с положительным направлением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. По формуле Стокса (3.141)

$$\int_{\partial M} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_M \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2. \quad (3.178)$$

Сведем оба этих интеграла к интегралам первого рода. Для правой части согласно теореме о потоке 3.5.4 имеем

$$\int_M \omega_{\operatorname{rot} \mathbf{A}}^2 = \int_M (\operatorname{rot} \mathbf{A}, \boldsymbol{\nu}) d\mu_2. \quad (3.179)$$

Теперь применим к левой части равенства (3.178) теорему 3.5.1 о разнородных интегралах. Тогда получим

$$\int_{\partial M} \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_{\partial M} \omega_{\mathbf{A}}^1 \langle \mathbf{l} \rangle d\mu_1 = \int_{\partial M} (\mathbf{A}, \mathbf{l}) d\mu_1. \quad (3.180)$$

Теперь из тождеств (3.178)–(3.180) следует утверждение доказываемой теоремы. $\square$

§3.6 Некоторые приложения

§3.6.1 Уравнение теплопроводности

Известно, что *количество теплоты* тела массы m и температуры T вычисляется по формуле $Q = ctT$, где c — удельная теплоемкость рассматриваемого вещества. Если теперь

температура тела разная в разных точках тела, то количество теплоты Q тела, занимающего пространственную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, подсчитывается с помощью интеграла:

$$Q = \int_{\Omega} c\rho T \, dx,$$

где $\rho = \rho(x)$ равно плотности рассматриваемого вещества в точке x . Допустим, нас интересует изменение количества теплоты с течением времени t , тогда $T = T(t, x)$, и поэтому

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\Omega} c\rho(x) \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} \, dx. \quad (3.181)$$

Известно из эксперимента, что за единицу времени количество теплоты, проходящее через ориентированную площадку $\sigma = \nu\sigma$ (здесь σ — площадь площадки, а ν — вектор единичной нормали к ней), приблизительно равно $-k\nabla T \cdot \sigma$, где k — коэффициент теплопроводности. Последнее равенство тем точнее, чем меньше размеры площадки σ . Знак $-\nabla T$ означает, что теплота переходит от более нагретых участков к более охлажденным. Поэтому для области Ω с гладкой границей имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} k\nabla T \cdot \nu \, d\mu_2 \stackrel{\text{Ф-ла Гаусса-Остр.}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla T) \, dx. \quad (3.182)$$

Сравнивая формулы (3.181)–(3.182), приходим к заключению, что

$$\int_{\Omega} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla T) \, dx. \quad (3.183)$$

Поскольку это равенство верно для любой подобласти Ω рассматриваемого тела, то справедливо поточечное равенство

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div}(k\nabla T). \quad (3.184)$$

Это и есть знаменитое *уравнение теплопроводности*. Напомним, что здесь $\rho = \rho(x)$, $T = T(t, x)$, $k = k(x)$. В частном случае, когда коэффициент теплопроводности k не зависит от x , имеем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -k\Delta T, \quad (3.185)$$

где Δ — оператор Лапласа (по пространственным переменным $x = (x_1, x_2, x_3)$).

Если тепловой режим стационарный (не зависит от времени), то получаем, что температура должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta T = 0. \quad (3.186)$$

Напомним, что решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями*. Интерпретация гармонической функции как температуры стационарного теплового процесса позволяет предугадать многие свойства таких функций. Например, они не могут иметь максимумов и минимумов внутри области — т.к. теплота должна перераспределяться от более нагретых частей тела к более охлажденным.

§3.6.2 Уравнение неразрывности

Пусть в области пространства $\mathbb{R}^3$ движется жидкость. Известно, что масса жидкости, содержащейся в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, подсчитывается с помощью интеграла:

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \, dx,$$

где $\rho = \rho(x)$ равно плотности рассматриваемого вещества в точке x . Допустим, нас интересует изменение содержащейся в Ω массы жидкости с течением времени t , тогда $\rho = \rho(t, x)$ и поэтому

$$\frac{dm(\Omega)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} \, dx. \quad (3.187)$$

С другой стороны, изменение массы жидкости в области Ω вызвано тем, что часть жидкости вытекла (втекла) через границу Ω . Количество жидкости, протекшее за единицу времени через ориентированную площадку $\sigma = \nu \sigma$ (здесь σ — площадь площадки, а ν — вектор единичной нормали к ней), приблизительно равно $\rho \mathbf{v} \cdot \sigma$, где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости. Последнее равенство тем точнее, чем меньше размеры площадки σ . Поэтому для области Ω с гладкой границей имеем

$$\frac{dm(\Omega)}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \nu \, d\mu_2 \stackrel{\text{ф-ла Гаусса-Остр.}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx \quad (3.188)$$

(знак минус связан с тем очевидным обстоятельством, изменение массы жидкости внутри области равно количеству вытекшей жидкости с противоположным знаком). Сравнивая формулы (3.187)–(3.188), приходим к заключению, что

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx. \quad (3.189)$$

Поскольку это равенство верно для любой подобласти Ω рассматриваемого тела, то справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.190)$$

Это и есть знаменитое *уравнение неразрывности*. Напомним, что здесь $\rho = \rho(t, x)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$. В частном случае, когда движение жидкости стационарно (не зависит от времени), имеем

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.191)$$

В еще более частном случае, когда при стационарном движении жидкость несжимаема (т.е. $\rho = \text{const}$), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.192)$$

§3.6.3 Уравнения Эйлера

Рассмотрим вновь стационарное движение несжимаемой жидкости. Согласно закону Ньютона, ускорение частицы жидкости, помноженное на ее массу, равно действующей на эту частицу силе. Как и в предыдущем параграфе, обозначим через $\mathbf{v}(x)$ скорость жидкости в точке x , $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Пусть закон движения частицы жидкости (материальная точка), находящейся в точке ξ в начальный момент времени $t = 0$, определяется функцией $\gamma(t, x)$. Тогда на функцию $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ имеем уравнения

$$\begin{cases} \gamma(0, \xi) = \xi; \\ \frac{\partial \gamma(t, \xi)}{\partial t} = \mathbf{v}(\gamma(t, \xi)). \end{cases} \quad (3.193)$$

Можно также посчитать ускорение указанной точки жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma(t, \xi)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathbf{v}(\gamma(t, \xi))}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2(t, \xi)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \gamma_3(t, \xi)}{\partial t} \right) \Big|_{x=\gamma(t, \xi)} = \\ &\stackrel{(3.193_2)}{=} \left(v_1(x) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_1} + v_2(x) \frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_2} + v_3(x) \frac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_3} \right) \Big|_{x=\gamma(t, \xi)} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Big|_{x=\gamma(t, \xi)}, \end{aligned} \quad (3.194)$$

где в правой части использовано общепринятое обозначение $(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$. По второму закону Ньютона, масса тела помноженная на ускорение, равна действующей на тело силе. Обозначим через $\mathbf{F}$ объемную плотность силы. Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F}.$$

С другой стороны, из закона Паскаля (см. (3.145)) известно, что объемная плотность силы равна $-\nabla p$. Поэтому в итоге получаем

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0.$$

Рассматривая нормированный случай единичной плотности ($\rho = 1$) и учитывая уравнение неразрывности из предыдущего параграфа, получаем соотношения,

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (3.195)$$

которые представляют собой систему *уравнений Эйлера* в простейшем стационарном случае идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости.

Глава 4

Свертка и усреднения функций

Замечание 4.0.1. Начиная с данного раздела и ниже, термины *суммируемая функция* и *интегрируемая функция* употребляются как синонимы, т.е. интегрируемыми называются измеримые функции с конечным интегралом. Пространство всех суммируемых (=интегрируемых) функций, заданных на множестве $\mathbb{R}^n$, обозначается символом $L_1(\mathbb{R}^n)$. В дальнейшем для удобства это пространство зачастую будет обозначаться просто L_1 .

Пусть f и g — измеримые функции на пространстве $\mathbb{R}^n$. *Сверткой функций f и g* называют функцию $f * g$, определенную формулой

$$f * g|_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

Упражнение 4.0.2. 1. Свертка симметрична: $f * g|_x = g * f|_x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Свертка суммируемых функций также измерима и суммируема, причем справедлива оценка

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}. \quad (4.1)$$

3. Если функция f суммируема, а g ограничена, то функция $f * g$ непрерывна и равномерно ограничена.

4. Операция свертки ассоциативна: если $f, g, h \in L_1$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$.

ТЕОРЕМА 4.0.3. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ локально суммируема, а функция $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу C^m , причем одна из этих функций имеет компактный носитель. Тогда $f * g \in C^m$, и для каждого мультииндекса α порядка $\leq m$ справедливо равенство $\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$.

В связи с формулировкой данной теоремы напомним, что функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локально суммируемой*, если ее сужение на каждый шар B пространства $\mathbb{R}^n$ суммируемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что утверждение теоремы выполняется внутри замкнутого шара $X = B_r \subset \mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса r . Обозначим через $Y = B_s$ замкнутый шар, вне которого одна из данных функций равна нулю.

ШАГ 1. Покажем, что функция $f(y)g(x - y)$ переменной y имеет интегрируемую мажоранту, не зависящую от параметра x

Случай 1а. Пусть $f(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus Y$. Тогда функция f , будучи локально суммируемой, будет и глобально суммируемой на всем $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\forall x \in X \forall y \in Y$

выполнены соотношения $f(y)g(x-y) \leq |f(y)|G_1$, где $G_1 = \sup\{g(x-y) : x \in X, y \in Y\}$. Супремум в последней формуле конечен, т.к. функция $g(x-y)$ непрерывна на компактном множестве $X \times Y$. Значит, $|f(y)|G_1$ — требуемая мажоранта.

Случай 1b. Пусть $g(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus Y$. Тогда $g(x-y) = 0$ для всех $x \in X$ и $y \in B_{r+s}$. Следовательно,

$$|f(y)g(x-y)| \leq \chi_{B_{r+s}}(y) \cdot |f(y)|G_2,$$

где $\chi_{B_{r+s}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in B_{r+s}; \\ 0, & y \notin B_{r+s} \end{cases}$ представляет собой характеристическую функцию шара B_{r+s} , и G_2 есть максимум функции g на шаре Y .

Итак, требуемая (не зависящая от параметра x) интегрируемая мажоранта для функции $f(y)g(x-y)$ переменной y построена в каждом из возможных случаев.

ШАГ 2. Поскольку обе функции f и g измеримы, то их произведение $f(y)g(x-y)$ будет измеримой по y функцией при каждом $x \in X$. Более того, т.к. имеется интегрируемая мажоранта, то функция $f(y)g(x-y)$ интегрируема (по y) при каждом $x \in X$. Опять-таки, вследствие наличия мажоранты, по теореме о непрерывности интеграла по параметру, свертка $f * g|_x$ будет непрерывной по x функцией на шаре X .

ШАГ 3. Применяя полученный на предыдущих шагах результат к функциям f , $\partial^\alpha g$ при $|\alpha| \leq m$, получаем, что свертка $f * \partial^\alpha g|_x$ будет непрерывной по x функцией на шаре X , причем у порождающей ее функции $f(y)\partial^\alpha g(x-y)$ имеется интегрируемая мажоранта относительно переменной y , не зависящая от параметра x .

Тогда по теореме о непрерывной дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, получаем, что для каждого $i = 1, \dots, n$ свертка $f * g$ дифференцируема по переменной x_i в каждой внутренней точке шара X , причем справедлива формула

$$\partial_i(f * g) = f * \partial_i g.$$

Так как стоящая в правой части функция непрерывна (см. выше), то $f * g \in C^1$. Действуя аналогично по индукции, нетрудно доказать, что $f * g \in C^m$, причем справедлива формула

$$\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$$

для всех n -мультиндексов α порядка $\leq m$. □

Напомним, что *носителем функции* f называется замыкание множества точек x , где $f(x) \neq 0$. Носитель обозначается символом $\text{supp } f$ (от английского слова *support*). Говорят, что функция f *сосредоточена* на множестве X , если $f(x) = 0$ при $x \notin X$.

Определение 4.0.4. Последовательность неотрицательных функций $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется δ -образной, если

- (i) все они сосредоточены на некотором шаре B_r ;
- (ii) для каждого $\rho > 0$ последовательность g_k равномерно стремится к нулю на кольце $B_r \setminus B_\rho$;
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} g_k dx = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Пример 4.0.5 (Примеры δ -образных последовательностей). В приведенных ниже примерах нормировочный коэффициент c_k подбирается таким образом, чтобы интеграл от функции был равен единице.

$$\delta_k(x) = c_k \exp\left(\frac{1}{k^2 x^2 - 1}\right) \cdot \chi_{B_{\frac{1}{k}}}(x).$$

Эта последовательность хороша тем, что все входящие в нее функции бесконечно гладкие на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (это достигается за счет того, что рост экспоненты превосходит рост любого полинома на бесконечности).

$$\xi_k(x) = c_k(1 - x^2)^k \chi_{B_1}(x).$$

Функции этой последовательности имеют то преимущество, что все они полиномиальны (на своих носителях).

Упражнение 4.0.6. Проверить, что построенные функции ξ_k удовлетворяют требованию (ii) из Определения 4.0.4.

ТЕОРЕМА 4.0.7. Если функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, и g_k представляет собой δ -образную последовательность, то последовательность усреднений $f * g_k$ сходится равномерно к функции f на каждом компактном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$.

Напомним, что ε -окрестностью множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (обозначается $U_\varepsilon(X)$) называется множество $U_\varepsilon(X) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(y, X) < \varepsilon\}$, где $\text{dist}(y, X) := \inf_{x \in X} |y - x|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Зафиксируем компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и возьмем радиус r из условия (i) определения 4.0.4, т.е. $g(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^n \setminus B_r$. Тогда найдется константа $M > 0$ такая, что $|f(y)| \leq M$ для всех $y \in U_r(X)$ (определение ε -окрестности $U_\varepsilon(X)$ множества X см. выше). В частности,

$$|f(y)| \leq M \quad \forall x \in X \quad \forall y \in B_r(x). \quad (4.2)$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Возьмем число $\rho > 0$ такое, что

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех } x \in X \text{ и } y \in B_\rho(x). \quad (4.3)$$

(такое ρ существует в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции $f|_X$).

Положим $f_k(x) = f * g_k|_x$. Тогда, используя равенство $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x - y) dy$, имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_k(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(y) - f(x)] g_k(x - y) dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{y \in B_\rho(x)} [f(y) - f(x)] g_k(x - y) dy \right| + \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\rho(x)} [f(y) - f(x)] g_k(x - y) dy \right| = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оценим каждую из этих величин по отдельности. Для первой величины I_1 в силу условия (4.3) имеем

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x - y) dy = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.5)$$

Для второго интеграла I_2 при $x \in X$ в силу условия (4.2) имеем

$$I_2 = \left| \int_{y \in B_r(x) \setminus B_\rho(x)} [f(y) - f(x)] g_k(x-y) dy \right| \leq 2M \int_{y \in B_r(x) \setminus B_\rho(x)} g_k(x-y) dy = 2M \int_{y \in B_r \setminus B_\rho} g_k(y) dy \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (4.6)$$

(последняя сходимость справедлива вследствие того, что $g_k(y) \rightrightarrows 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно для $y \in B_r \setminus B_\rho$, см. определение 4.0.4 (ii)). Окончательно получаем, что $I_1 + I_2 < \varepsilon$ для всех $x \in X$ при достаточно больших номерах k . Это означает, что $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$ равномерно при $x \in X$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.0.8. Для любой функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^m найдется последовательность бесконечно гладких функций $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для каждого n -мультииндекса α порядка $|\alpha| \leq m$ последовательность функций $\partial^\alpha f_k$ равномерно сходится к $\partial^\alpha f$ на каждом компакте $X \subset \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для δ -образной последовательности гладких функций δ_k из Примера 4.0.5 можно положить $f_k = \delta_k * f$. По Теореме 4.0.3 справедливо тождество $\partial^\alpha f_k = \delta_k * \partial^\alpha f$. Тогда по Теореме 4.0.7 справедлива сходимость $\partial^\alpha f_k \rightrightarrows \partial^\alpha f$ на каждом компакте. $\square$

ЛЕММА 4.0.9. Для каждого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и параметра $\varepsilon > 0$ найдется бесконечно гладкая функция $\varsigma : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ такая, что $\varsigma(x) = 1$ для всех $x \in S$ и $\varsigma(x) = 0$ при $x \notin U_\varepsilon(S)$, здесь $U_\varepsilon(S)$ обозначает ε -окрестность множества S (см. выше).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для δ -образной последовательности гладких функций δ_k из Примера 4.0.5 можно положить $\varsigma_k = \delta_k * \chi$, где $\chi(y) = \begin{cases} 1, & y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(S); \\ 0, & y \notin U_{\frac{\varepsilon}{2}}(S). \end{cases}$ Эта последовательность функций будет бесконечно гладкой по Теореме 4.0.3. Далее, при достаточно больших k функция $\varsigma = \varsigma_k$ будет удовлетворять всем требованиям доказываемой Леммы 4.0.9 — проверка этого факта оставляется читателям в качестве упражнения. $\square$

ЛЕММА 4.0.10 (о C^m -расширении (без доказательства)). Для всякой функции $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^m , заданной на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, и для каждого открытого множества $U \supset K$ найдется функция $f_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ также класса C^m такая, что $f_U(x) = f(x)$ при $x \in K$ и $f_U(x) = 0$ при $x \notin U$.

ТЕОРЕМА 4.0.11. Для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и для любой функции $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^m существует такая последовательность полиномов $P_k(x)$, что для всех мультииндексов α порядка $\leq m$ последовательность производных $\partial^\alpha P_k$ сходится к $\partial^\alpha f$ равномерно на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности можно считать, что K лежит во внутренней части шара $B = B_{\frac{1}{2}}(0)$. Применяя лемму 4.0.10 о C^m -расширении, возьмем бесконечно гладкую функцию $f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $f_B(y) = f(y)$ для $y \in K$ и $f_B(y) = 0$ при $|y| \geq \frac{1}{2}$. Для δ -образной последовательности гладких функций ξ_k из Примера 4.0.5 можно положить $f_k = \xi_k * f_B$. По определению свертки,

$$f_k(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f_B(y) \xi_k(x-y) dy = \int_{|y| < \frac{1}{2}} f_B(y) \xi_k(x-y) dy.$$

Ясно, что если $x \in K \subset B$ и $|y| < \frac{1}{2}$, то $|x - y| < 1$, поэтому, вспоминая определение функций ξ_k , получаем

$$\forall x \in K \quad f_k(x) = \int_{|y| < \frac{1}{2}} f_B(y) c_k(1 - (x - y)^2)^k dy = P_k(x),$$

где $P_k(x)$ представляет собой полином (от переменной x) степени $2k$. Требуемая же равномерная сходимость $\partial^\alpha f_k \Rightarrow \partial^\alpha f_B = \partial^\alpha f$ на K при $|\alpha| \leq m$ вытекает из установленного ранее Следствия 4.0.8. $\square$

Глава 5

Преобразование Фурье

§5.1 Определение и основные свойства

Определение 5.1.1. Для всякой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ее *преобразованием Фурье* называется ограниченная непрерывная функция

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i(x,\xi)} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Здесь и в дальнейшем, для функций f , заданных на $\mathbb{R}^n$, будем писать $\int f dx$ вместо $\int_{\mathbb{R}^n} f dx$,

и, напомним, $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ представляет собой скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Оказывается, что в случае, когда функция $\hat{f}$ тоже интегрируема, исходная функция f восстанавливается по $\hat{f}$ с помощью *формулы обращения Фурье*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Чтобы изучить свойства преобразования Фурье, и, в частности, доказать последнюю формулу, рассмотрим сначала поведение преобразования Фурье на гладких быстроубывающих функциях. Нам понадобится класс функций

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty : \exists R > 0 \quad f(x) = 0 \text{ при } |x| \geq R\}.$$

Его еще называют *классом гладких функций с компактным носителем*. Однако, к сожалению, этим классом ограничиться нельзя: включение $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ отнюдь не означает, что $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; последнее включение нарушается в типичных случаях (это вытекает из красивой *теоремы Котельникова*, играющей важную роль в теории передачи информации). Поэтому, приходится расширить C_0^∞ до следующего класса так называемых *быстроубывающих функций*.

Определение 5.1.2. Через $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad (5.3)$$

для любых n -мерных мультииндексов α, β . Топология в $\mathcal{P}$, задаваемая полунормами, равными всевозможным левым частям в (5.3), превращает $\mathcal{P}$ в пространство Фреше, т.е.

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \text{ в } \mathcal{P} \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_m(x) - \varphi(x))| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{для любой пары } n\text{-мультииндексов } \alpha, \beta. \quad (5.4)$$

Важность класса $\mathcal{P}$ объясняется следующим результатом, в котором вместо операторов $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ мы используем операторы $D_j = -i\partial_j$, что гораздо удобнее, когда речь идет о преобразовании Фурье. Заметим, что $D_j \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, $x_j \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset L^1$.

ТЕОРЕМА 5.1.3. Преобразование Фурье $F : \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ непрерывно отображает $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Преобразованием Фурье функции $D_j \varphi$ служит $\xi_j \hat{\varphi}(\xi)$, а преобразованием Фурье функции $x_j \varphi$ служит $-D_j \hat{\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование формулы (5.1) дает

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} (-x)^\alpha \varphi(x) dx$$

(дифференцирование здесь законно, поскольку получающийся интеграл равномерно сходится). Следовательно, $\hat{\varphi} \in C^\infty$ и $D^\alpha \hat{\varphi}$ есть преобразование Фурье от $(-x)^\alpha \varphi$. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} D^\beta ((-x)^\alpha \varphi(x)) dx \quad (5.5)$$

(интегрирование по частям законно, т.к. $\varphi \in \mathcal{P}$). В последнем интеграле умножим и поделим подынтегральную функцию на $(1 + |x|)^{n+1}$, тогда получим оценку

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{n+1} D^\beta ((-x)^\alpha \varphi(x)),$$

где $C = \int (1 + |x|)^{-n-1} dx$ (проверить, что этот интеграл конечен!). Из установленной оценки вытекает, что $\hat{\varphi} \in \mathcal{P}$, т.е. преобразование Фурье непрерывно отображает $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Перепишем равенство (5.5) при $\alpha = 0$:

$$\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} D^\beta \varphi(x) dx. \quad (5.6)$$

Это показывает, что $\xi^\beta \hat{\varphi}$ есть преобразование Фурье от $D^\beta \varphi$, чем и завершается доказательство Теоремы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.1.4. Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы

$$\widehat{\partial^\alpha \varphi} = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}; \quad (5.7)$$

$$\widehat{x^\beta \varphi} = i^{|\beta|} \partial^\beta \hat{\varphi}. \quad (5.8)$$

Итак, преобразование Фурье превращает операцию взятия производной в умножение на полином, и наоборот. В изучении таких преобразований нам поможет следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 5.1.5. Если линейное отображение $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям

$$T(D_j \varphi) = D_j T \varphi, \quad T(x_j \varphi) = x_j T \varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P},$$

то $T \varphi = c \varphi$, где c — некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ I. Если $\varphi \in \mathcal{P}$ и точка $y \in \mathbb{R}^n$ такова, что $\varphi(y) \in \mathcal{P}$, то функция φ представима в виде

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \varphi_j(x), \quad (5.9)$$

где $\varphi_j \in \mathcal{P}$. В самом деле, лемма Адамара (установленная нами при доказательстве леммы Морса) гарантирует существование такого типа представления

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \tilde{\varphi}_j(x)$$

с $\tilde{\varphi}_j \in C^\infty$. Однако этого мало: лемма Адамара ничего не говорит про поведение на бесконечности, и потому у нас нет включения $\tilde{\varphi}_j \in \mathcal{P}$. Но при больших $x \neq y$ можно взять $\bar{\varphi}_j(x) = \varphi(x)(x_j - y_j)|x - y|^{-2}$, тогда имеет место формула

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \bar{\varphi}_j(x).$$

Конечно, функции $\bar{\varphi}_j$ уже не будут гладкими в точке y , зато они будут иметь быстрое убывание при $x \rightarrow \infty$ (как функции класса $\mathcal{P}$). Лемма о разбиении единицы позволяет "склеить" из этих разложений требуемое представление (5.9), в котором функции φ_j являются гладкими и принадлежат $\mathcal{P}$ (т.е. они быстро убывают на бесконечности).

ШАГ II. Применим оператор T к обеим частям разложения (5.9), и учитывая коммутационные свойства T , тогда получим

$$T \varphi(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) T \varphi_j(x) = 0 \quad \text{при } x = y. \quad (5.10)$$

Итак, для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}$ доказана импликация

$$\varphi(y) = 0 \Rightarrow T \varphi(y) = 0. \quad (5.11)$$

ШАГ III. Из установленного только что свойства (5.11) легко вывести, что

$$T \varphi(x) = c(x) \varphi(x), \quad (5.12)$$

где величина $c(x)$ НЕ зависит от φ . В самом деле, достаточно проверить последнюю формулу только для случая $\varphi(x) \neq 0$; далее, используя линейность оператора T , достаточно проверить эту формулу только для функций с условием $\varphi(x) = 1$. Предположим, что (5.12) неверно. Тогда найдутся две функции $\varphi_1 \in \mathcal{P}$ и $\varphi_2 \in \mathcal{P}$ такие, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 1$, но $T \varphi_1(x) \neq T \varphi_2(x)$. Положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. По построению, $\varphi \in \mathcal{P}$, $\varphi(x) = 0$, но $T \varphi(x) \neq 0$. Полученное противоречие (со свойством (5.11)) завершает доказательство формулы (5.12).

ШАГ IV. Докажем, что функция $c(x)$ в формуле (5.12) на самом деле равна константе. Выберем функцию $\varphi \in \mathcal{P}$, которая всюду отлична от нуля (например, сходится $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$). Тогда $c(x) = \frac{T\varphi(x)}{\varphi(x)} \in C^\infty$. Наконец, в силу предположений о коммутационных свойствах T имеем

$$0 = D_j T\varphi - T D_j \varphi = D_j(c\varphi) - c D_j \varphi \stackrel{\text{произв-я произвед.}}{=} (\varphi D_j c + c D_j \varphi) - c D_j \varphi = \varphi D_j c \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Следовательно, $D_j c \equiv 0$, и потому функция $c(x)$ постоянна. $\square$

Приведенные элементарные факты позволяют доказать один из фундаментальных результатов теории — формулу (5.2) обращения преобразования Фурье.

ТЕОРЕМА 5.1.6. Преобразование Фурье $F : \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ есть изоморфизм пространства $\mathcal{P}$ на себя, обратный к которому задается формулой обращения Фурье (5.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двухкратное преобразование Фурье $L = F^2$. В силу доказанной теоремы 5.1.3 оно антикоммутирует с операциями дифференцирования и умножения на полином, т.е.

$$L(D_j \varphi) = -D_j L\varphi, \quad L(x_j \varphi) = -x_j L\varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.13)$$

Введем обозначение $R\varphi(x) = \varphi(-x)$. Поскольку $\frac{\partial R\varphi(x)}{\partial x_j} = -R\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\right)$, то из формул (5.13) легко следует, что оператор $T = RL = RF^2$ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$T(D_j \varphi) = D_j T\varphi, \quad T(x_j \varphi) = x_j T\varphi \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.14)$$

Тогда по Лемме 5.1.5 получаем, что $T\varphi = c\varphi$ для всех функций $\varphi \in \mathcal{P}$. Осталось только посчитать константу c для данного случая. С этой целью возьмем функцию $\varphi(x) = \exp(-|x|^2/2)$. Элементарными вычислениями проверяется, что $\varphi \in \mathcal{P}$ и справедливо тождество $(x_j + iD_j)\varphi = 0$. Применяя к этому тождеству оператор Фурье F имеем $(-D_j + i\xi_j)\hat{\varphi}(\xi) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$. Решая эти элементарные линейные дифференциальные уравнения (относительно каждой из переменных x_j), получаем, что $\hat{\varphi} = c_1 \varphi$. Константа c_1 легко вычисляется, т.к. $\varphi(0) = 1$,

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|x|^2/2) dx = (2\pi)^{n/2}$$

(интеграл Пуассона). Поэтому $c_1 = (2\pi)^{n/2}$. По построению, для данного случая $T\varphi = c_1^2 \varphi$, поэтому $c = c_1^2 = (2\pi)^n$. $\square$

Замечание 5.1.7. В процессе доказательства последней теоремы было попутно установлено следующее весьма полезное тождество:

$$\text{для } \varphi(x) = \exp(-|x|^2/2) \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2). \quad (5.15)$$

ТЕОРЕМА 5.1.8. Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ справедливы соотношения

$$\int \hat{\varphi} \psi dx = \int \varphi \hat{\psi} dx; \quad (5.16)$$

$$\int \varphi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}} dx \quad (\text{формула Парсеваля}); \quad (5.17)$$

$$\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \hat{\psi}; \quad (5.18)$$

$$\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-n} \hat{\varphi} * \hat{\psi}. \quad (5.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части в формуле (5.16) равны двойному интегралу

$$\int \int \varphi(x) \psi(\xi) e^{-i(x,\xi)} dx d\xi. \quad (5.20)$$

Чтобы доказать следующую формулу (5.17), положим $\chi = (2\pi)^{-n} \widehat{\psi}$. В силу формулы обращения Фурье, имеем

$$\overline{\widehat{\chi}(\xi)} = \overline{\int \chi(x) e^{-i(x,\xi)} dx} = \int \overline{\chi(x)} e^{i(x,\xi)} dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(x) e^{i(x,\xi)} dx \stackrel{(5.2)}{=} \psi(\xi).$$

Поэтому $\widehat{\chi}(\xi) \equiv \overline{\psi(\xi)}$, и равенство (5.17) вытекает из (5.16) с ψ , замененным на χ . Доказательство равенства (5.18), столь же элементарное, как и доказательство равенства (5.16), предоставляется читателю. Наконец, чтобы установить (5.19), заметим, что преобразование Фурье от $\widehat{\varphi\psi}$ равно $(2\pi)^n \varphi(-x) \psi(-x)$, а преобразование Фурье от $\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$, согласно все той же формуле обращения Фурье и предыдущего равенства (5.18), равно $(2\pi)^n \varphi(-x) (2\pi)^n \psi(-x)$. $\square$

Замечание 5.1.9. Легко видеть, что $R(\varphi * \psi) = (R\varphi) * (R\psi)$, где, напомним, $R\varphi(x) = \varphi(-x)$. Поэтому из формул (5.18)–(5.19) и установленного ранее факта $\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^n Rf$, вытекает, в частности, что

$$F^{-1}(\varphi * \psi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi) \cdot F^{-1}(\psi); \quad (5.21)$$

$$F^{-1}(\varphi \psi) = F^{-1}(\varphi) * F^{-1}(\psi), \quad (5.22)$$

где F^{-1} обозначает обратное к преобразованию Фурье.

Определение 5.1.10. Функционал $\ell : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывным, если для всякой последовательности $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$ (сходимость здесь понимается во введенном ранее смысле (5.4)) имеет место сходимость $\ell(\varphi_m) \rightarrow \ell(\varphi)$.

Определение 5.1.11. Непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{P}$ называются *умеренными распределениями* (или *распределениями умеренного роста*). Множество всех умеренных распределений обозначается через $\mathcal{P}'$.

Примером элементов из $\mathcal{P}'$ служат меры $d\mu$, удовлетворяющие при некотором m условию

$$\int (1 + |x|)^{-m} d\mu(x) < \infty.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}'$$

для любого p . Именно, функция $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ задает линейный функционал на $\mathcal{P}$ по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{P} \quad u(\varphi) := \int \varphi(x) u(x) dx. \quad (5.23)$$

Иногда для удобства этот функционал будет обозначаться символом ℓ_u , а иногда — просто символом u (как и саму порождающую функцию), когда это не приводит к недоразумениям. Непрерывность в $\mathcal{P}'$ этого функционала может быть установлена и с помощью неравенства Гельдера.

Если $\ell \in \mathcal{P}'$ то для каждого n -мультииндекса α можно определить производную $\partial^\alpha \ell \in \mathcal{P}'$ по правилу:

$$\partial^\alpha \ell(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \ell(\partial^\alpha \varphi). \quad (5.24)$$

С помощью формулы интегрирования по частям легко проверяется, что если функция $u \in C^k$ такова, что все ее производные до порядка k имеют не более чем полиномиальный рост, то для функционала

$$\partial^\alpha \ell_u = \ell_{\partial^\alpha u}.$$

Таким образом, для гладких функций производная считается "по обычному".

Аналогично, если $\ell \in \mathcal{P}'$ и $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то можно определить произведение $f\ell \in \mathcal{P}'$ по правилу:

$$f\ell(\varphi) = \ell(f\varphi).$$

Таким же образом задается произведение и в случае, когда f — многочлен, или, более общо, когда функция f бесконечно гладкая и имеет не более чем полиномиальный рост (в этом случае $f\varphi \in \mathcal{P}$ для всех $\varphi \in \mathcal{P}$).

Определение 5.1.12. Для всякого распределения $u \in \mathcal{P}'$ его преобразование Фурье $\widehat{u}$ определяется формулой

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{P}. \quad (5.25)$$

Из Теоремы 5.1.3 вытекает, что $\widehat{u} \in \mathcal{P}'$, и, поскольку доказательство равенства (5.16) сохраняет свою силу для всех $\varphi, \psi \in L_1$, это определение согласуется с определением (5.1) в случае, когда $u \in L_1$.

Формула обращения Фурье, доказанная в Теореме 5.1.6, утверждает, что

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = (2\pi)^n \check{\varphi} \quad \text{для } \varphi \in \mathcal{P}, \quad \text{где } \check{\varphi}(x) := \varphi(-x).$$

Отсюда вытекает, что для $u \in \mathcal{P}'$

$$\widehat{\widehat{u}}(\varphi) = u(\widehat{\widehat{\varphi}}) = (2\pi)^n u(\check{\varphi}) = (2\pi)^n \check{u}(\varphi).$$

Здесь $\check{u}$ — это, конечно же, композиция функционала u с отображением $x \rightarrow -x$, т.е. $\check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi})$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5.1.13. Преобразование Фурье осуществляет изоморфизм пространства $\mathcal{P}'$ (со слабой топологией¹) на себя, и для всякого элемента $u \in \mathcal{P}'$ справедлива формула обращения Фурье $\widehat{\widehat{u}}(\varphi) = (2\pi)^n \check{u}(\varphi)$.

В частности, если $f \in L_1$ и $\hat{f} \in L_1$, то формула обращения (5.2) справедлива для почти всех x . На самом деле, в этом случае $f \in L_\infty \cap L_1$, поэтому интеграл в определении $\hat{f}(\xi)$ будет непрерывно зависеть от ξ , т.е. обе функции $f, \hat{f}$ непрерывны и ограничены (после их изменения, если нужно, на множестве меры ноль).

Напомним, что символом $L_2(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех комплекснозначных измеримых функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, с конечной L_2 -нормой:

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

¹Сходимость последовательности $u_m \in \mathcal{P}'$ к элементу $u \in \mathcal{P}'$ в слабой топологии пространства $\mathcal{P}'$ определяется следующим образом: $u_m \rightarrow u$ в $\mathcal{P}' \Leftrightarrow u_m(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ для каждой функции $\varphi \in \mathcal{P}$.

(здесь и в дальнейшем для удобства пишем $\|\cdot\|_{L_2}$ вместо $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$). На самом деле $L_2(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым пространством, и скалярное произведение двух функций $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ вычисляется по формуле

$$(\varphi, \psi)_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следующая теорема имеет ключевое значение в теории преобразований Фурье.

ТЕОРЕМА 5.1.14 (Теорема Планшереля). *Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье $\hat{u}$ тоже принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$, и формула Парсеваля (5.17) справедлива для всех $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. В частности,*

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \quad (5.26)$$

т.е. преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Выберем последовательность функций $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\|u_j - u\|_{L_2} \rightarrow 0$. В частности, последовательность u_j будет фундаментальной в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Из Теоремы 5.1.6 и равенства (5.17), доказанного для гладких функций, вытекает, что последовательность функций $\hat{u}_j$ лежит в пространстве быстроубывающих функций $\mathcal{S}$ и также будет фундаментальной в $L_2(\mathbb{R}^n)$, поэтому в силу теоремы Рисса–Фишера о полноте пространства L_2 найдется функция $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\hat{u}_j \rightarrow v$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что $v \in \mathcal{S}'$, и, более того, $\hat{u}_j \rightarrow v$ в слабой топологии пространства $\mathcal{S}'$. С другой стороны, в силу непрерывности преобразования Фурье относительно указанной топологии (см. теорему 5.1.13) имеем $\hat{u}_j \rightarrow \hat{u}$. Значит, $\hat{u} = v \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Если теперь φ, ψ — произвольная пара функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$, то по аналогии с предыдущим возьмем последовательности функций $\varphi_j, \psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $\|\varphi_j - \varphi\|_{L_2} \rightarrow 0$, $\|\psi_j - \psi\|_{L_2} \rightarrow 0$. По теореме 5.1.8 равенство Парсеваля будет верно для функций φ_j, ψ_j :

$$\int \varphi_j \bar{\psi}_j dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}_j \overline{\widehat{\psi}_j} dx, \quad (5.27)$$

и, поскольку по доказанному на первом шаге $\widehat{\varphi}_j \rightarrow \widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}_j \rightarrow \widehat{\psi}$ в пространстве L_2 , то в последнем равенстве можно перейти к пределу и в левой, и в правой части, и получим искомую формулу Парсеваля для пары исходных (негладких) функций φ, ψ . $\square$

Замечание 5.1.15. Стоит обратить особое внимание, что преобразование Фурье от функции $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ в общем случае нельзя задать с помощью классической формулы (5.1), т.к. соответствующий интеграл там может и не существовать (расходиться) в смысле Лебега. Можно показать, что если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то для последовательности функций $\hat{u}_N(\xi) = \int_{|x| \leq N} u(x) e^{-i(x, \xi)} dx$ справедлива сходимости $\hat{u}_N \rightarrow \hat{u}$, где $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u , вычисленное с точки зрения теории обобщенных функций (т.е. для u как для элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Доказанную теорему можно значительно усилить с помощью следующего результата из функционального анализа.

ТЕОРЕМА 5.1.16 (Интерполяционная теорема Рисса–Торина). Пусть T — линейное отображение из $L_{p_1} \cap L_{p_2}$ в $L_{q_1} \cap L_{q_2}$ такое, что

$$\|Tf\|_{q_j} \leq M_j \|f\|_{p_j}, \quad j = 1, 2. \quad (5.28)$$

Тогда, если $\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{(1-t)}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{(1-t)}{q_2}$ для некоторого $t \in (0, 1)$, то

$$\|Tf\|_q \leq M_1^t M_2^{1-t} \|f\|_p, \quad \forall f \in L_{p_1} \cap L_{p_2}. \quad (5.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очень короткое, красивое, основано на применении методов ТФКП. См., например, в книге [9, Теорема 7.1.12]. $\square$

ТЕОРЕМА 5.1.17 (Хаусдорфа–Юнга). Если $f \in L_p$ с $1 \leq p \leq 2$, то $\hat{f} \in L_{p'}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и справедлива оценка

$$\|\hat{f}\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L_p}. \quad (5.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (5.30) справедливо при $p = 2$ в силу формулы Парсеваля и очевидно при $p = 1$, поэтому в общем случае оно следует из теоремы Рисса–Торина 5.1.16. $\square$

§5.2 Примеры и приложения

Следующие примеры и задачи взяты из учебника В.А. Зорича по математическому анализу (см. [3]).

Пример 5.2.1. Найдём преобразование Фурье от простейшей финитной (= с компактным носителем) функции

$$f(x) = \begin{cases} h, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (5.31)$$

Для простоты рассмотрим одномерный $n = 1$ случай. Тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a h e^{-ix\xi} dx = h \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2h \frac{\sin a\xi}{\xi}.$$

Если взять повторное преобразование Фурье, то, по формуле обращения, должны получить ту же функцию $f(-x) = f(x)$, помноженную на коэффициент 2π . Тем самым показано, что

$$\text{для } \varphi(x) = 2 \frac{\sin ax}{x} \quad \text{имеем} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 2\pi, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \quad (5.32)$$

Пример 5.2.2. Пусть $\hat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье от функции $f(x)$. Найдём преобразование Фурье от функции $f_a(x) := f(ax)$, где $a > 0$. Тогда

$$\hat{f}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-i(x,\xi)} dx \stackrel{\text{Замена } y = ax}{=} a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y, \frac{\xi}{a})} dy = a^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Ранее (см. формулу (5.15)) было установлено тождество

$$\text{для } \varphi(x) = \exp(-|x|^2/2) \quad \text{имеем } \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \exp(-|\xi|^2/2) \quad (5.33)$$

поэтому для всякого $\alpha > 0$

$$\text{для } \varphi_\alpha(x) = \exp(-\alpha|x|^2/2) \quad \text{имеем } \widehat{\varphi}_\alpha(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2\alpha}\right). \quad (5.34)$$

Аналогично, поскольку для обратного преобразования Фурье верна формула $F^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} RF$, получаем соотношение,

$$F^{-1}\left(\exp(-\alpha|x|^2/2)\right) = (2\pi\alpha)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2\alpha}\right). \quad (5.35)$$

которое пригодится нам в дальнейшем (при выводе формулы для решения уравнения теплопроводности).

Волновое уравнение

Успешное применение теории преобразований Фурье к уравнениям математической физики объясняется тем обстоятельством, что преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования алгебраической операцией умножения на полином.

Пусть, например, ищется функция $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \dots + a_n u(x) = f(x),$$

где a_j — некоторые постоянные коэффициенты, и $f(x)$ — известная функция. Применим к обеим частям этого равенства преобразование Фурье (в предположении достаточной регулярности функций u и f , тогда по Теореме 5.1.3 указанное дифференциальное уравнение преобразуется в следующее алгебраическое соотношение:

$$(a_0(i\xi)^n + a_1(i\xi)^{n-1} + \dots + a_{n-1}i\xi + a_n)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

относительно $\widehat{u}$. Найдя из него $\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)}$, обратным преобразованием Фурье получаем $u(x)$.

Применим эту идею к отысканию функции $u = u(x, t)$, удовлетворяющей в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad (5.36)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (5.37)$$

Здесь, как и в следующем примере, мы не будем останавливаться на обосновании промежуточных выкладок, потому что, как правило, легче бывает найти нужную функцию и непосредственно проверить, что она решает поставленную задачу, чем обосновать и преодолеть все возникающие по дороге технические трудности. Существенную роль в принципиальной борьбе с этими трудностями (наведение "строго фундамента" под формальные выкладки) играют обобщенные функции, упомянутые выше.

Итак, рассматривая t , как параметр, сделаем преобразование Фурье по x от обеих частей уравнения (5.36). Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и пользуясь Теоремой 5.1.3, получаем

$$\widehat{u}_{tt}(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Отсюда, решая простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t , находим, что

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(a\xi t) + B(\xi) \sin(a\xi t).$$

В силу начальных данных

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) = A(\xi),$$

$$\widehat{u}'_t(\xi, 0) = \widehat{u}'_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) = a\xi B(\xi).$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(a\xi t) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{a\xi} \sin(a\xi t) = \frac{1}{2} \widehat{f}(\xi) (e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}) + \frac{1}{2} \frac{\widehat{g}(\xi)}{ia\xi} (e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}). \quad (5.38)$$

Домножая это равенство на $\frac{1}{2\pi} e^{ix\xi}$ и интегрируя по ξ , короче, взяв обратное преобразование Фурье и используя формулу

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(\xi)}{ia\xi} e^{i\xi(x \pm at)} d\xi \right)'_t = \pm \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi(x \pm at)} d\xi = 2\pi g(x \pm at),$$

получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2} \int_0^t (g(x - a\tau) + g(x + a\tau)) d\tau. \quad (5.39)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция $u(x, t)$, вычисленная по полученной формуле (5.39), действительно дает решение уравнения (5.36) с начальными условиями (5.37). Но формула (5.39) имеет то достоинство, что она справедлива не только для быстро убывающих бесконечно гладких функций класса $\mathcal{P}$, но и для менее регулярных случаев, например, когда функции f, g лишь C^2 -гладкие. Более того, формула (5.39) справедлива даже и для менее регулярных случаев (например, когда функции f, g лишь непрерывны), но тогда ее надо понимать уже в смысле теории обобщенных функций (см., например, [9]).

Уравнение теплопроводности

Это уравнение было выведено в предыдущей главе, как приложение формулы Гаусса–Остроградского (см. (3.185)), в простейшей своей форме для функции $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (5.40)$$

где Δ — оператор Лапласа $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. При этом налагаются начальные условия

$$u(x, 0) = f(x). \quad (5.41)$$

Итак, рассматривая t , как параметр, сделаем преобразование Фурье по x от обеих частей уравнения (5.40). Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и пользуясь Теоремой 5.1.3, получаем

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Отсюда, решая простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t , находим, что

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

В силу начальных данных

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) = A(\xi),$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}. \quad (5.42)$$

Применим к обоим частям обратное преобразование Фурье, тогда по формулам (5.35), (5.22) получаем

$$u = (4\pi a^2 t)^{-n/2} f * \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2 t}\right),$$

т.е.

$$u(x, t) = u = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\right) dy. \quad (5.43)$$

Это знаменитая *формула Вейерштрасса* для решения уравнения теплопроводности. Она связана с тем фактом, что при $t > 0$ функция $(4\pi a^2 t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$ является решением уравнения теплопроводности, и при $t \rightarrow 0$ она стремится к δ -функции (=образует δ -образную в широком смысле последовательность).

Формула Пуассона

ТЕОРЕМА 5.2.3 (Формула Пуассона). Если $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}. \quad (5.44)$$

В частности, полагая $x = 0$, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n). \quad (5.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Обозначим $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$. Очевидно, что $f(x)$ представляет собой гладкую 2π -периодическую функцию (гладкость вытекает из быстрого убывания функций φ и $\widehat{\varphi}$ на бесконечности). Тогда функция $f(x)$ является суммой своего ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (5.46)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t+2\pi n) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(k). \quad (5.47)$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}.$$

□

Формула Котельникова

Этот пример также основан на красивой комбинации рядов и преобразований Фурье. Он играет важную роль в теории передачи информации по каналу связи. Напомним, что человеческое ухо может воспринимать лишь ограниченный диапазон частот (примерно от двадцати герц до двадцати килогерц). Таким образом, какие бы ни были сигналы, мы, подобно фильтру, вырезаем только ограниченную часть их спектра и воспринимаем их как сигналы с финитным спектром.

Будем поэтому считать, что передаваемый нами или получаемый нами сигнал $f(t)$ имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот ω , величина которых не превышает некоторого критического значения $a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| \geq a$, поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.48)$$

На отрезке $[-a, a]$ функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) e^{ik\frac{\pi}{a}\omega}, \quad (5.49)$$

где

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{-ik\frac{\pi}{a}\omega} d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} f\left(-k\frac{\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{a} f\left(-k\frac{\pi}{a}\right). \quad (5.50)$$

Тогда из формул (5.48)–(5.50) вытекает

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{a}\right) \int_{-a}^a e^{i\omega(t-k\frac{\pi}{a})} d\omega. \quad (5.51)$$

Беря эти несложные интегралы от экспоненты и учитывая четность/нечетность, получаем итоговое соотношение

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{a}\right) \frac{\sin a\left(t - k\frac{\pi}{a}\right)}{a\left(t - k\frac{\pi}{a}\right)}. \quad (5.52)$$

Это и есть известная *формула Котельникова*. Она показывает, что для восстановления сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, сосредоточенном в полосе частот $|\omega| \leq a$, достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые *отсчетными значениями*) через равные промежутки времени $\Delta = \frac{\pi}{a}$.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Напомним, что n -м *моментом* функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$.

В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т.е. $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f , а *дисперсия* $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$. Из самого определения видно, что величина дисперсии оценивает разброс случайной величины — ее отклонение от среднего значения.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ — две функции класса $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, причем $\psi = \widehat{\varphi}$. Нормируем функцию φ так, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$, тогда в силу равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2 dp = 1. \quad (5.53)$$

Это означает, что функции $|\varphi(x)|^2$ и $|\psi(p)|^2$ можно рассматривать, как плотности некоторых случайных величин x и p соответственно. Оценим теперь их дисперсию. Эта оценка разбивается на ряд этапов.

ШАГ 1. Покажите, что сдвигом по аргументу $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(x - a)$ можно, не меняя величины $|\widehat{\varphi}(p)|$, получить функцию φ такую, что

$$M_1(|\varphi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 dx = 0. \quad (5.54)$$

Аналогично, не меняя $|\varphi|$ и соотношения $M_1(\varphi) = 0$, можно, сдвигом по аргументу $\psi(p) \leftrightarrow \psi(p - b)$ добиться того, что

$$M_1(|\psi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p |\psi(p)|^2 dp = 0. \quad (5.55)$$

Подсказка. В качестве a и b нужно взять математические ожидания исходных функций $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ соответственно.

ШАГ 2. Для вещественного параметра α рассмотрим функцию

$$\alpha \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x \varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx.$$

Покажите, что эта функция является квадратичным полиномом по α , и вычислите все его коэффициенты (при α^2 , α и т.д.²).

ШАГ 3. Пользуясь неотрицательностью введенного на втором шаге полинома и вычислив его дискриминант, докажите, что

$$M_2(|\varphi|^2) \cdot M_2(|\psi|^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Это соотношение показывает, что чем более "сосредоточена" сама функция φ , тем "размытее" ее преобразование Фурье, и наоборот.

Этот факт имеет фундаментальные приложения физике. Он является математическим выражением *принципа неопределенности Гейзенберга*³: нельзя одновременно измерить точно и координату x квантовой частицы, и ее импульс p . Чем точнее измеряется одна из указанных величин, тем больше погрешности для другой.

Задачи на преобразование Фурье

1. Рассматривая преобразование Фурье как отображение $f \mapsto \hat{f}$, покажите, что оно обладает следующими часто используемыми свойствами

$$f(at) \mapsto \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

(правило изменения масштаба);

$$f(t - t_0) \mapsto \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t_0};$$

(сдвиг входного сигнала — фурье-преобраза — по времени, или *теорема о переносе*)
в частности, из последней формулы вытекает

$$[f(t + t_0) \pm f(t - t_0)] \mapsto \begin{cases} \hat{f}(\xi) 2 \cos \xi t_0, \\ h \hat{f}(\xi) 2 \sin \xi t_0 \end{cases}$$

$$f(t) e^{\pm i\omega_0 t} \mapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)$$

(сдвиг преобразования Фурье по частоте);

$$f(t) \cos \omega_0 t \mapsto \frac{1}{2} [\hat{f}(\xi - \omega_0) + \hat{f}(\xi + \omega_0)],$$

$$f(t) \sin \omega_0 t \mapsto \frac{1}{2} [\hat{f}(\xi - \omega_0) - \hat{f}(\xi + \omega_0)]$$

(амплитудная модуляция гармонического сигнала);

$$f(t) \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} \mapsto \frac{1}{4} [2\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi - \omega_0) - \hat{f}(\xi + \omega_0)].$$

²**Подсказка.** Используя интегрирование по частям, опираясь на равенство Парсеваля и формулу $\widehat{\varphi'}(p) = ip\widehat{\varphi}(p)$, покажите, что $\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2) \geq 0$.

³В.Гейзенберг — немецкий физик, один из создателей квантовой механики.

2. Найдите преобразования Фурье (или, как говорят, *фурье-образы*) следующих функций

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A}; & |t| \leq A, \\ 0; & |t| > A \end{cases}$$

(прямоугольный импульс);

$$\Pi_A(t) \cos \omega_0 t$$

(гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом);

$$\Pi_A(t + 2A) + \Pi_A(t - 2A)$$

(два прямоугольных импульса одинаковой полярности);

$$\Lambda_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|t|}{A}\right), & |t| \leq A; \\ 0, & |t| > A \end{cases}$$

(треугольный импульс);

$$\cos at^2 \quad \text{и} \quad \sin at^2 \quad (a > 0);$$

$$|t|^{-1/2} \quad \text{и} \quad |t|^{-1/2} e^{-a|t|} \quad (a > 0).$$

3. Используя предыдущие результаты, найдите значения уже встречавшихся нам интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx.$$

4. Проверьте, что интеграл Фурье функции $f(t)$ (т.е. ее восстановление по фурье-образу $\hat{f}$) можно записать в любом из следующих видов:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi(x-t)} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\omega(x-t) dx.$$

5. Пусть $f = f(x, y)$ — решение двумерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ в полуплоскости $y \geq 0$, удовлетворяющее условиям $f(x, 0) = g(x)$ и $f(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

а) Проверьте, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi, y)$ функции f по переменной y имеет вид $\hat{g}(\xi) e^{-y|\xi|}$.

б) Найдите фурье-прообраз функции $e^{-y|\xi|}$ по переменной ξ .

с) Получите представление функции f в виде интеграла Пуассона

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi.$$

6. Напомним, что n -м моментом функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$. В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т.е. $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f , а дисперсия $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$. Из самого определения видно, что величина дисперсии оценивает разброс случайной величины — ее отклонение от среднего значения.

Рассмотрим преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

функции f . Раскладывая $e^{-ix\xi}$ в ряд, покажите, что:

- а) $\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k M_k(f)}{k!} \xi^k$ если, например, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
 б) $M_k(f) = (i)^k \hat{f}^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots$
 в) Пусть теперь f — вещественнозначна, тогда $\hat{f}(\xi) = A(\xi) e^{i\varphi(\xi)}$, где $A(\xi)$ — модуль, а $\varphi(\xi)$ — аргумент $\hat{f}(\xi)$, причем $A(\xi) = A(-\xi)$ (четность), а $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$ (нечетность). Положим, для нормировки, что $\int f(x) dx = 1$. Проверьте, что тогда

$$\hat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\xi + \frac{A''(0) - (\varphi'(0))^2}{2} \xi^2 + o(\xi^2), \quad (\xi \rightarrow 0)$$

и

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \quad \sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f) = -A''(0).$$

7. Уже из Леммы Римана следует, что преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции стремится к нулю на бесконечности. Имеется общая закономерность: подобное коэффициентам Фурье, преобразование Фурье тем быстрее стремится к нулю, чем глаже функция, от которой оно берется. И наоборот, чем быстрее функция f убывает к нулю на бесконечности, тем больше гладкость ее преобразования Фурье.

Этот интересный феномен можно проиллюстрировать следующим примером.

а) Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$ ($a > 0$), как и все ее производные, определенные при $x > 0$, убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени переменной $|x|$, и тем не менее эта функция не принадлежит классу $\mathcal{S}$.

б) Убедитесь в том, что преобразование Фурье этой функции бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, но оно также не принадлежит классу $\mathcal{S}$, т.е. недостаточно быстро убывает на бесконечности (и все потому, что $e^{-a|x|}$ не дифференцируемо при $x = 0$).

§5.3 Обобщенные функции умеренного роста

Легко проверяется, что предыдущие формулы (см. Следствие 5.1.4) оказываются справедливыми и для обобщенных функций умеренного роста, т.е. справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5.3.1. Для каждой обобщенной функции $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы

$$\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}; \quad (5.56)$$

$$\widehat{x^\beta u} = i^\beta u. \quad (5.57)$$

Пример 5.3.2. Найдем преобразование Фурье δ -функции, которая, напомним, задается по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \delta(\varphi) := \varphi(0). \quad (5.58)$$

Тогда

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot 1 dx. \quad (5.59)$$

Таким образом, $\widehat{\delta} = \ell_1$, т.е. функционал $\widehat{\delta}$ порождается (в смысле определения 5.23) обычной функцией, к тому же очень простой — тождественной единицей. Можно писать для краткости, что $\widehat{\delta} \equiv 1$.

Пример 5.3.3. Рассмотрим функцию

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

которая называется *функцией Хёвисайда*. В качестве упражнения рекомендуется проверить, что

$$H' = \delta. \quad (5.60)$$

Тогда, применяя формулы (5.56)–(5.57), получаем, что

$$1 = \widehat{\delta} = \widehat{\partial H} = i\xi \widehat{H}.$$

Это означает, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} ix \cdot \widehat{H}(x) \varphi(x) dx.$$

Можно переписать это тождество и в таком виде

$$-i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{H}(x) \varphi(x) dx = \widehat{H}(\varphi), \quad (5.61)$$

или, короче, $\widehat{H} = \frac{-i}{\xi}$, только при этом необходимо уточнение, что левый интеграл в (5.61) понимается в смысле главного значения по Коши (как в ТФКП), т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

§5.3.1 Ряды Фурье и обобщенные функции умеренного роста

Любую 2π -периодическую функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию $f(s)$ точки на единичной окружности Γ (точка фиксируется значением s натурального параметра $0 \leq s \leq 2\pi$).

Рассмотрим на Γ пространство $\mathcal{D}(\Gamma)$ функций класса $C^\infty(\Gamma)$ и пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обобщенных функций, т.е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\Gamma)$. Действие (значение) функционала $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ будем обозначать символом $F(\varphi)$.

Каждая интегрируемая на Γ функция f может рассматриваться как элемент $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (регулярная обобщенная функция), действующий на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ по формуле

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s) ds.$$

Сходимость последовательности F_n обобщенных функций пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$ к функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, как обычно, означает, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi).$$

Дальнейший материал дан в виде последовательности упражнений.

1. Используя то обстоятельство, что у любой функции $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$ ее ряд Фурье сходится равномерно к самой этой функции, т.е.

$$\varphi(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\varphi) e^{iks}, \quad \text{где } c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-iks} ds,$$

покажите, что в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$ имеет место элегантная сходимость

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iks} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta. \quad (5.62)$$

Здесь, как обычно, δ представляет собой обобщенную функцию Дирака, т.е. $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

2. По аналогии с регулярным случаем, определим коэффициенты Фурье произвольного распределения $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ по формуле

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-ikx})$$

(данная формула имеет смысл, т.к. $e^{-iks} \in \mathcal{D}(\Gamma)$). Тогда любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ можно сопоставить ее ряд Фурье:

$$F \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{iks}.$$

Докажите, что $\delta \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks}$.

3. Докажите следующий замечательный по своей простоте и открывающейся свободе факт: ряд Фурье любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ сходится к F (в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\Gamma)$).
4. Покажите, что ряд Фурье функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (как и саму функцию F , и как любой сходящийся ряд из обобщенных функций) можно почленно дифференцировать любое количество раз.
5. Исходя из равенства $\delta = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iks}$, найдите ряд Фурье функции δ' .
6. Вернемся теперь с окружности Γ на прямую $\mathbb{R}$ и рассмотрим функции e^{ikx} как регулярные обобщенные функции пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, т.е. как линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ бесконечно гладких на $\mathbb{R}$ функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем.

Любая локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f может рассматриваться как элемент пространства из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (*регулярная обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*), действующий на функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ по закону $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx$. Сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определяется стандартным образом

$$F_n \rightarrow F \Leftrightarrow \left(F_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right).$$

Покажите, что в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо следующее равенство

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi), \quad (5.63)$$

в обеих частях которого подразумевается предельный переход при $n \rightarrow \infty$ по симметричным частным суммам $\sum_{-n}^n$, а $\delta(x - x_0)$, как всегда, обозначает сдвинутую в точку x_0 функцию Дирака, т.е. $\delta(x - x_0)(\varphi) := \varphi(x_0)$.

§5.3.2 Преобразование Фурье и обобщенные функции умеренного роста

1. Докажите, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Используя тот факт, что $\widehat{\delta} = 1$, найдите преобразование Фурье от сдвинутой δ -функции $\delta(x - k)$.
3. Используя равенство (5.63), и тот факт, что преобразование Фурье от сходящегося ряда представляет собой сумму преобразований Фурье его слагаемых⁴, покажите, что для $F = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$ справедлива формула

$$\widehat{F} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

⁴То есть у сходящегося в $\mathcal{D}'$ ряда можно брать преобразование Фурье почленно.

4. Используя определение $\widehat{F}(\varphi) = F(\widehat{\varphi})$, выведите из предыдущего пункта формулу Пуассона.
5. Докажите следующее соотношение (θ – формула)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}k^2} \quad (t > 0),$$

играющее важную роль в теории эллиптических функций и в теории управления.

§5.4 Преобразование Фурье и фундаментальные решения дифференциальных операторов

Пусть $P = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ — полином n -переменных (степени $\leq k$). Тогда $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *фундаментальным решением уравнения*

$$Lv = 0, \tag{5.64}$$

если $Lu = \delta$.

Напомним, что если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $u * f|_x := u(f(x - \cdot))$. Для случая, когда u является регулярной функцией, т.е. если $u \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\int (1 + |x|^m) u(x) dx < \infty \quad \text{для некоторого } m \in \mathbb{N}, \tag{5.65}$$

это определение совпадает с предыдущим:

$$u * f|_x = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) f(x - y) dy.$$

ТЕОРЕМА 5.4.1. Пусть распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является фундаментальным решением уравнения (5.64). Тогда для всякой функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ свертка $v = u * f$ является бесконечно гладкой функцией и решением уравнения

$$Lv = f \tag{5.66}$$

с краевыми условиями

$$v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \tag{5.67}$$

В качестве примера найдем фундаментальное решение уравнения Лапласа. Нам понадобится

ЛЕММА 5.4.2. Если распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является однородной функцией степени α , то распределение $\widehat{u}$ является однородной функцией степени $-n - \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение для простейшего случая, когда распределение $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ представляет собой регулярную функцию u (см. (5.65)). Тогда по предположению $u(tx) = t^\alpha u(x)$ для всех $t > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению

$$\widehat{u}(t\xi) = \int u(x) e^{-i(x,t\xi)} dx = t^{-\alpha-n} \int u(tx) e^{-i(tx,\xi)} d(tx) \stackrel{\text{Замена } y=tx}{=} t^{-\alpha-n} \int u(y) e^{-i(y,\xi)} dy = t^{-\alpha-n} \widehat{u}(\xi).$$

Лемма для случая регулярных распределений доказана. Отметим попутно тот факт, что,

$$u_t(\varphi) := \int u(tx) \varphi(x) dx = t^{-n} \int u(y) \varphi\left(\frac{y}{t}\right) dy = t^{-n} u\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right), \quad (5.68)$$

где обозначено $u_t(x) = u(tx)$. Равенство (5.68) выведено для регулярных распределений; оно кладется в основу для определения растяжения u_t в случае произвольных распределений $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$u_t(\varphi) = t^{-n} u\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n). \quad (5.69)$$

Отсюда видно, в частности, что

$$\delta_t(\varphi) = t^{-n} \delta\left(\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\right) = t^{-n} \varphi(0) = t^{-n} \delta(\varphi).$$

Таким образом, $\delta_t = t^{-n} \delta$, т.е. распределение δ однородно степени $-n$. Этот факт полностью согласуется с формулировкой доказываемой леммы 5.4.2. Полное доказательство Леммы 5.4.2 (для произвольных нерегулярных распределений $u \in \mathcal{P}'$ на основе формулы (5.69)) предоставляется читателю в качестве несложного упражнения. $\square$

Перейдем теперь к поиску фундаментального решения уравнения Лапласа. Имеем $\Delta u = \delta$, тогда

$$\widehat{\Delta u}|_\xi = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{\delta} = 1.$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Нетрудно проверить, что функция $-\frac{1}{|\xi|^2}$ принадлежит $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ при $n \geq 3$, т.е.

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^2} \varphi(\xi) d\xi$$

представляет собой непрерывный линейный функционал в пространстве $\mathcal{P}$. Поэтому можно взять прямое и обратное преобразование Фурье от этой функции. В соответствии с Леммой 5.4.2 имеем

$$u(x) = -c_n |x|^{2-n}, \quad (5.70)$$

где $c_n > 0$ — некоторая константа, зависящая только от размерности пространства. С помощью Следствия 5.3.1, формулы $\widehat{\delta} = 1$ и леммы об однородности 5.4.2 в самом деле нетрудно проверить, что $\Delta u = \delta$. Таким образом, фундаментальным решением уравнения Лапласа является функция $u(x) = -c_n |x|^{2-n}$, тем самым доказана

ТЕОРЕМА 5.4.3. Пусть $n \geq 3$. Тогда найдется положительная константа c_n такая, что для всякой функции $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ отображение $v(x) := -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}} dy$ является бесконечно гладкой функцией и решением уравнения

$$\Delta v = f \quad (5.71)$$

с краевыми условиями

$$v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0; \quad (5.72)$$

более того, $v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Можно вывести данную формулу и другим путем, заодно посчитав точное значение константы c_n . Нам понадобится

ТЕОРЕМА 5.4.4. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, тогда для любой пары C^2 -гладких функций u, v справедливо тождество

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\mu_{n-1}, \quad (5.73)$$

где символом $\frac{\partial v}{\partial n}$ обозначена производная функции v по направлению внешней нормали ко границе $\partial\Omega$.

Доказательство. Для всякой гладкой вектор-функции $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ справедлива классическая формула Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\mu_{n-1}, \quad (5.74)$$

где символом $\mathbf{n}$ обозначена внешняя нормаль ко границе $\partial\Omega$. Возьмем здесь $\mathbf{f} = u \nabla v$. Прямым вычислением легко проверяется, что $\operatorname{div} \mathbf{f} = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$. Подставляя этот результат в формулу (5.74), получаем искомую формулу (5.73). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.4.5. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, тогда для любой пары C^2 -гладких функций u, v справедливо тождество

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\mu_{n-1}. \quad (5.75)$$

Доказательство. Необходимо в формуле (5.73) поменять ролями функции v и u , и вычесть друг из друга полученные тождества. $\square$

ТЕОРЕМА 5.4.6. Пусть v — произвольная функция класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедлива формула

$$v(x) = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|} \Delta v(y) \, dy, \quad (5.76)$$

где $c_n = (n-2)\sigma_{n-1}$, и σ_{n-1} — это объем единичной $(n-1)$ -мерной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{P}$. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Возьмем числа $r > 0$ и $R > r$, и область

$$\Omega_{Rr} = B_R \setminus \bar{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R, \quad |y - x| \geq r\},$$

которая получается в результате вычитания двух шаров с центрами в точках 0 и в x соответственно. В области Ω_{Rr} применим вторую формулу Грина для функций v и $u(y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$. Прямым вычислением проверяется, что $\Delta u(y) \equiv 0$ при $y \neq x$, в частности, функция u гладкая в Ω и $\Delta u \equiv 0$ в Ω . Поэтому формула Грина принимает вид

$$\int_{\Omega_{Rr}} \frac{1}{|x-y|} \Delta v(y) dy = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1} - \int_{S_{r,x}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1}, \quad (5.77)$$

где $S_R = \partial B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = R\}$, $S_{r,x} = \partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = r\}$ — это граничные сферы взятых нами шаров, а $\frac{\partial}{\partial n}$ производные по внешней нормали к этим сферам. Легко видеть, что на $S_{r,x}$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial r}$, поэтому $u = \frac{1}{r^{n-2}}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}}$ на $S_{r,x}$, и формула Грина принимает вид:

$$\int_{\Omega_{Rr}} \frac{1}{|x-y|} \Delta v(y) dy = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_{n-1} - \frac{1}{r^{n-2}} \int_{S_{r,x}} \frac{\partial v}{\partial n} d\mu_{n-1} - (n-2) \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_{r,x}} v d\mu_{n-1} = I + II + III. \quad (5.78)$$

Теперь в последнем равенстве устремим $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. В силу того факта, что функция v сильно убывает, то интеграл в левой части равенства сходится во всем $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, $I \rightarrow 0$. Далее, поскольку $\mu_{n-1}(S_{r,x}) = \sigma_{n-1}r^{n-1}$, то для оставшихся граничных интегралов (по теореме о среднем) справедливы формулы: $II \rightarrow 0$, $III \rightarrow -(n-2)\sigma_{n-1}v(x)$. В итоге получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|} \Delta v(y) dy = -(n-2)\sigma_{n-1}v(x). \quad (5.79)$$

□

Только что доказанную Теорему 5.4.6 можно считать своеобразной переформулировкой предыдущей Теоремы 5.4.3, которая была установлена с помощью методов теории обобщенных функций.

Глава 6

Приложения формулы Грина: потенциал гравитационного поля сферических слоев

Напомним, что векторное поле $\mathbf{F}$, заданное на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, называется *потенциальным*, если найдется гладкая функция $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\mathbf{F} = \nabla U$ в Ω . Известно, что гравитационное поле, порождаемое точечной массой m , сосредоточенной в точке $y \in \mathbb{R}^3$, является потенциальным, его потенциал (с точностью до постоянного множителя) равен $U(x) = \frac{m}{|x-y|}$, соответственно, гравитационное силовое поле, порожденное этой точечной массой, имеет вид $\mathbf{F}(x) = m \frac{y-x}{|x-y|^3}$. Аналогично, тело плотности $\rho(y)$, заполняющее область Ω , порождает гравитационное поле с потенциалом $U(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$.

В данном параграфе нашей задачей будет вычисление потенциала сферического слоя, т.е. когда Ω имеет вид

$$\Omega = \Omega_{R,R_0} = B_R \setminus \bar{B}_{R_0} = \{y \in \mathbb{R}^3 : R_0 < |y| < R\},$$

причем плотность постоянна (можно предполагать, не теряя общности, что $\rho \equiv 1$). Согласно сказанному выше, имеем

$$U(x) = U(R, R_0, x) = \int_{\Omega_{R,R_0}} \frac{1}{|x-y|} dy. \quad (6.1)$$

Зафиксируем точку $x \notin \Omega$ и рассмотрим два возможных случая.

СЛУЧАЙ I. Точка x находится внутри шарового слоя, т.е. $|x| < R_0$.

Применим формулу Грина

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dy = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_2 \quad (6.2)$$

для случая $\Omega = \Omega_{R,R_0}$, $u(y) = \frac{1}{|y-x|}$, $v(y) = |y|^2$. Тогда $\Delta u(y) = 0$ при $y \neq x$ и $\Delta v(y) = 6$. Кроме того, $\partial \Omega = S_R - S_{R_0}$, где S_r означает сферу $S_r = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| = r\}$ радиуса r , ориентированную по внешней нормали к соответствующему шару. Таким образом,

$$6 \int_{\Omega} \frac{1}{|y-x|} dy = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_2 - \int_{S_{R_0}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\mu_2. \quad (6.3)$$

Обозначим $f(r) = \int_{S_r} \frac{d\mu_2(y)}{|y-x|}$. Тогда по формуле интегрирования по сферическим слоям (2.34) левая часть в (6.3) переписывается в виде

$$6 \int_{\Omega} \frac{1}{|y-x|} dy = 6 \int_{R_0}^R \left(\int_{S_r} \frac{1}{|y-x|} d\mu_2(y) \right) dr = 6 \int_{R_0}^R f(r) dr.$$

Напомним, что $v(y) = r^2$ и $\frac{\partial v}{\partial n} = 2r$ на S_r . Поэтому правая часть в формуле (6.3) может быть переписана в виде

$$2R f(R) - 2R_0 f(R_0) + R^2 \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} d\mu_2 - R_0^2 \int_{S_{R_0}} \frac{\partial u}{\partial n} d\mu_2. \quad (6.4)$$

Прямым вычислением проверяем, что $\nabla u = -\frac{y-x}{|y-x|^3}$, поэтому форма потока $\beta_{\nabla u}$, порожденная градиентом u , совпадает с точностью до знака с формой Гаусса (см. Пример 3.2.3), у которой центр сдвинулся в точку x . Тогда ввиду равенства $\frac{\partial u}{\partial n}(y) = \nabla u(y) \cdot \mathbf{n}$ по теоремам 3.5.4 и 3.4.11 получаем, что

$$\int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} d\mu_2 = -4\pi. \quad (6.5)$$

при $r > |x|$. Поэтому формула (6.4) (=правая часть в (6.3)) может быть переписана в виде

$$2R f(R) - 2R_0 f(R_0) - 4\pi(R^2 - R_0^2). \quad (6.6)$$

Окончательно, равенство (6.3) принимает вид

$$6 \int_{R_0}^R f(r) dr = 2R f(R) - 2R_0 f(R_0) - 4\pi(R^2 - R_0^2). \quad (6.7)$$

Продифференцируем это выражение по R , тогда получим

$$6f(R) = 2f(R) + 2Rf'(R) - 8\pi R,$$

т.е.

$$f'(R) = \frac{2}{R}f(R) + 4\pi. \quad (6.8)$$

Полученное дифференциальное уравнение легко интегрируется, его общее решение имеет вид

$$f(R) = CR^2 + 4\pi R. \quad (6.9)$$

По построению, здесь $C = C(x)$. Рассмотрим поведение $f(R) = \int_{S_R} \frac{1}{|y-x|} d\mu_2(y)$ при $R \rightarrow +\infty$. Очевидно, что тогда $\frac{1}{|y-x|} \sim \frac{1}{R}$ при $y \in S_R$ (здесь $\sim$ означает асимптотическую эквивалентность), поэтому $f(R) \sim 4\pi R$ при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, в формуле (6.9) верно равенство $C = 0$. Тогда

$$f(R) = 4\pi R. \quad (6.10)$$

Особенность этой формулы состоит в том, что $f(R)$ не зависит от x . Окончательно, для гравитационного потенциала $U(R, R_0, x)$ получаем

$$U(R, R_0, x) = \int_{\Omega_{R, R_0}} \frac{1}{|x - y|} dy = \int_{R_0}^R f(r) dr = 2\pi(R^2 - R_0^2).$$

Замечательным является то обстоятельство, что этот потенциал **не** зависит от x . Поэтому гравитационное поле зануляется: $\mathbf{F} = \nabla U \equiv 0$ внутри сферического слоя $|x| < R_0$.

Физический смысл этого результата состоит в следующем. Если бы какая-нибудь планета шаровидной формы имела бы пустоту внутри, причем эта пустота также бы имела форму шара с тем же центром, то притяжение бы в зоне пустоты отсутствовало: зона пустоты являлась бы зоной невесомости. Например, в сказке "Незнайка на Луне", гравитационное поле, порождаемое внешним слоем лунной поверхности, равняется нулю внутри этого слоя (т.е. сила протяжения порождается только внутренним ядром).

СЛУЧАЙ II. Точка x находится вне шарового слоя, т.е. $|x| > R$. Можно повторить все предшествующие рассуждения, только вместо формулы (6.5) по теоремам 3.5.4 и 3.4.11 будет справедливо равенство

$$\int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} d\mu_2 = 0. \quad (6.11)$$

при $r < |x|$. Тогда соответствующее дифференциальное уравнение для $f(r) = \int_{S_r} \frac{1}{|y-x|} d\mu_2(y)$ вместо (6.8) принимает упрощенный вид

$$f'(R) = \frac{2}{R} f(R), \quad (6.12)$$

его общее решение

$$f(R) = CR^2, \quad (6.13)$$

где $C = C(x)$. Устремляя теперь $R \rightarrow 0$, получаем, что $C = \frac{4\pi}{|x|}$. Тогда $f(R) = \frac{4\pi R^2}{|x|}$ и

$$U(R, R_0, x) = \int_{\Omega_{R, R_0}} \frac{1}{|x - y|} dy = \int_{R_0}^R f(r) dr = \frac{4\pi(R^3 - R_0^3)}{3|x|}.$$

Это означает, что гравитационный потенциал сферического слоя во внешней области совпадает с гравитационным потенциалом точечного тела той же массы, сосредоточенного в центре слоя. Поэтому сила притяжения у сферического слоя — такая же, как сила притяжения у точечного тела той же массы. Это оправдывает, например, тот факт, что в небесной механике тела заменяют точками.

СЛУЧАЙ III. Точка x находится в области шарового слоя, т.е. $R_0 < |x| < R$. Этот случай сводится к двум предыдущим. Получается, что "верхняя" часть шарового слоя $\{y \in \mathbb{R}^3 : |x| < |y| < R\}$ дает нулевой вклад в гравитационное поле, а "нижняя" часть шарового слоя $\{y \in \mathbb{R}^3 : R_0 < |y| < |x|\}$ порождает такое же гравитационное поле, как и материальная точка с соответствующей массой (=массе этого "нижнего" слоя).

Это означает, например, что при спуске в скважину (шахту) по мере возрастания глубины сила тяжести будет ослабевать (в создании этой силы перестает участвовать "верхний" слой Земли).

Литература

- [1] Демидович Б. П., Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
- [2] Дятлов Г.В., Основы математического анализа для студентов-физиков. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2015, ч.1–8.
- [3] Зорич В.А., Математический анализ. В 2-х тт. Москва: МЦНМО, 1998, Т.II.
- [4] Колмогоров А.Н., Фомин С.Н., Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для вузов. — 6-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 624 с.
- [5] Решетняк Ю.Г., Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. Ч. 1, кн. 1–2; Ч. 2, кн. 1–2.
- [6] Фихтенгольц Г. М., Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. I и II.
- [7] Шведов И. А., Компактный курс математического анализа. Ч. 1–3. Новосибирский гос. ун-т., 2003.
- [8] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф., Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
- [9] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными (в 4-х тт.). Том 1: Теория распределений и анализ Фурье. Москва: Мир, 1986 г.