

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

К. В. Сторожук, И. А. Шведов

КОМПАКТНЫЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ЧАСТЬ 4

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 514.142.2
ББК В 181.13, В.181.141

Сторожук К. В., Шведов И. А. Компактный курс математического анализа. Часть 4. Интеграл Лебега. Дифференциальные формы. Учеб. пособие/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 90 с.

Учебное пособие предназначается студентам и преподавателям математических факультетов университетов. В основе лежит курс лекций, читанный и читаемый авторами в Новосибирском государственном университете на механико-математическом факультете.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук Е. Г. Малькович

© Новосибирский государственный
университет, 2012
© Сторожук К. В., Шведов И.А. 2012

Глава 11. ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА	6
§ 11.0. Предварительные сведения и соглашения	6
§ 11.1. Примитивный интеграл	6
Примитивная мера на прямой. Лемма о счётной аддитивности примитивной меры. Интегрирование ступенчатых функций. Лемма о дроблении. Мера сегмента. Примитивная теорема Фубини. Простейшие свойства примитивного интеграла. Принцип исчерпывания.	
§ 11.2. Интегральная норма	11
Основные свойства интегральной нормы. Неравенство треугольника.	
§ 11.3. Интеграл Лебега	12
Интегрируемые функции. Простейшие свойства интеграла: линейность, ограниченность. Координатный критерий интегрируемости.	
§ 11.4. Пренебрежимые функции и множества	14
Геометрический признак пренебрежимого множества. Критерий пренебрежимости функции. Лемма о пренебрежимых отклонениях. Лемма о бесконечных значениях. Лемма о нормальных рядах.	
§ 11.5. Интеграл и предел	15
Лемма о сходимости по норме. Теорема о нормальных рядах. Теорема Беппо Леви. Лемма о верхней огибающей. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Теорема Рисса–Фишера о полноте L_1 . «Бегающий горбик».	
§ 11.6. Измеримые функции. Признаки интегрируемости	19
Необходимое условие интегрируемости. Лемма о непрерывности срезки. Теорема о срезке. Признак интегрируемости Лебега. Теорема об измеримости предела. Теорема об измеримости почти непрерывных функций. Теорема Фату. Интеграл Лебега как функция верхнего предела. Связь интегралов Ньютона и Лебега. Приложение. Признак Коши — Маклорена суммируемости ряда.	
§ 11.7. Повторный интеграл	25
Лемма о повторной норме. Теорема Фубини. «Контрпример». Теорема Фубини для подмножеств произведения. Теорема Тонелли. Теорема Фубини — Тонелли. Признак измеримости функций вида $f(x)g(y)$. Лемма о поднятии.	
§ 11.8. Основы теории меры	30
Операции над измеримыми множествами. Функциональный признак измеримости подмножеств. Аддитивные свойства интеграла. Мера Лебега. Основные свойства меры. Счётная аддитивность меры. Геометрическая интерпретация меры. Мера и операции в $\mathbb{R}^k$.	

«Пример» Витали неизмеримого множества. Формула Кавальери — Лебега. Абсолютная непрерывность интеграла как функции области интегрирования. Информация: Теорема Радона — Никодима. Лемма о производной интеграла как функции множества.	
§ 11.9. Интегралы, зависящие от параметра.....	35
Лебеговы интегралы, зависящие от параметра. Обобщённая теорема Лебега. Признаки непрерывности интеграла как функции параметра. Основной признак. Компактный признак. Правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметра. Основное правило. «Контрпримеры». Компактное правило. Правило дифференцирования интеграла с переменным отрезком интегрирования.	
§11.10. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.....	39
Признак непрерывности несобственного интеграла. Правило дифференцирования несобственного интеграла. Правило интегрирования несобственного интеграла. Вычисление интеграла Дирихле.	
§11.11. Усреднения.....	111
Свёртка функций. Правило дифференцирования свёртки. Примеры δ -образных последовательностей. Теорема о сходимости усреднений. Лемма о сглаживании индикатора. Лемма о C^m -расширении. Аппроксимация полиномами в классе C^m .	
§ 11.12. Интегрирование на пространствах с мерой.....	44
Неупорядоченное суммирование.	
§ 11.13. k -мерное интегрирование функций в $\mathbb{R}^n$	47
Детерминант Грама. Наблюдения, ведущие к определению площади поверхности. Лемма об израсходованной краске. Площадь графика. Площадь поверхности вращения. Параметрическая формула интегрирования. Интеграл в полярных координатах. Интегральные представления бета-функций Эйлера.	
Глава 12. ИСЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ.....	53
§ 12.1. Дифференциальные формы первой степени.....	53
Примеры и наблюдения. Дифференциал функции. Элемент работы векторного поля. Форма площади сектора. Форма Гаусса на плоскости (элемент угла поворота). Координатное представление 1-форм. Операция переноса. Свойства операции переноса: Аддитивность, мультипликативность, перестановочность с дифференциалом, закон композиции.	
§ 12.2. Интегрирование 1-форм вдоль путей.....	58
Классическая интерпретация. Признак интегрируемости. Свойства операции интегрирования 1-форм: линейность, ограниченность, фор-	

мула Ньютона — Лейбница.	
§ 12.3. Интегрирование 1-форм по ориентированным линиям	59
Классическая интерпретация интеграла. Признак интегрируемости. Простейшие свойства интеграла формы вдоль дуги: Линейность, ориентированность, аддитивность, Формула Ньютона — Лейбница, ограниченность. Формула Грина. Приложения: Формулы для вычисления площадей плоских фигур; интеграл Гаусса по контуру.	
§ 12.4. Дифференциальные формы произвольных степеней	63
Примеры: форма ориентированного объёма, форма потока векторного поля, форма Гаусса в $\mathbb{R}^n$, форма Паскаля в $\mathbb{R}^3$. Внешнее произведение форм. Теорема о координатном представлении дифференциальных форм. Внешнее дифференцирование. Формула Лейбница. Замкнутые и точные формы. Лемма Пуанкаре. Приложения. Векторные поля и дифференциальные формы. Потенциальные векторные поля. Градиент, дивергенция и ротор. Операция переноса. Свойства операции переноса. Формула гомотопии. Теорема Пуанкаре.	
§ 12.5. Ориентация гладкого многообразия	72
Необходимые сведения о касательном пространстве. Касательные базисы многообразия. Теорема о числе ориентаций. Индуцированная ориентация края.	
§ 12.6. Интеграл k -формы по ориентированному k -многообразию	76
Лемма о гладком разложении единицы. Признак интегрируемости. Формула Стокса (обобщённая формула Ньютона — Лейбница).	
§ 12.7. Приложения	82
Закон Архимеда. Интеграл Гаусса. Теорема о плёнке (о барабане). Теорема Брауэра о неподвижной точке. Теорема о стационарной точке. Теорема о векторных полях на сферах.	
§ 12.8. Связь интегралов первого и второго рода	86
Теорема о разнородных интегралах. Формула Гаусса — Остроградского. Классическая формула Стокса.	

Глава 11. Теория интеграла.

§ 11.0. Предварительные сведения и соглашения

В этой главе при отсутствии указаний предполагаются выполненными следующие соглашения:

1. Буква E (возможно, с каким-либо индексом) обозначает либо расширенную числовую прямую либо произвольное банахово пространство с нормой $|\cdot|$, которую будем называть модулем. При первом чтении достаточно считать, что $E = \mathbb{R}$.

2. При отсутствии специальных замечаний термин «функция» считается синонимом фразы «отображение вида $f: \mathbb{R}^s \rightarrow E$ ». Если же в результате каких-либо действий возникнет функция вида $f: U \rightarrow E$, где $U \subset \mathbb{R}^s$, то мы продолжим его на всё $\mathbb{R}^s$, положив $f(x) = 0 \in E$ для каждого $x \in \mathbb{R}^s \setminus U$.

3. Вплоть до § 11.8 предполагается, что $X := \mathbb{R}^k$, $Y := \mathbb{R}^l$, $XY := X \times Y = \mathbb{R}^{k+l}$.

4. Индикатором подмножества U пространства $\mathbb{R}^s$ будем называть характеристическую функцию $\chi_U: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ множества U , определяемую условиями $\chi_U(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R}^s \setminus U$, и $\chi_U(x) = 1$, если $x \in U$.

Упражнения. 1) Пусть $S, T \subset \mathbb{R}^n$. Если $S = \emptyset$, то $\chi_S(x) \equiv 0$, а если $S = \mathbb{R}^n$, то $\chi_S(x) \equiv 1$.

$$S \subset T \Leftrightarrow \chi_S \leq \chi_T.$$

$$\chi_{S \cap T} = \chi_S \cdot \chi_T, \quad \chi_{T \setminus S} = \chi_T - \chi_S \cdot \chi_T,$$

$$\chi_{S \cup T} = \chi_S + \chi_T - \chi_S \cdot \chi_T.$$

2) Если $P \subset X$, $Q \subset Y$, то $\chi_{P \times Q}(x, y) = \chi_P(x) \cdot \chi_Q(y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

§ 11.1. Примитивный интеграл

В этом параграфе все рассматриваемые функции предполагаются конечными ($|f(x)| < \infty \forall x \in X$).

1.1. *Примитивная мера на прямой.* Ограниченные промежутки прямой $\mathbb{R}$ будем называть *сегментами*. *Мерой (длиной)* сегмента T с концами a и b будем называть число $|b - a| = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_T(t) dt$ и обозначать μT .

Множество $A \subset \mathbb{R}^k$, являющееся объединением какой-либо конечной дизъюнктивной системы сегментов $T_1, \dots, T_n$ прямой $\mathbb{R}$, будем называть *примитивным*, а число $\mu A := \sum_{i=1}^n \mu T_i$ — *мерой множества A* . Полезно

заметить, что $\mu A = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(t) dt$.

Лемма 1 (о счётной аддитивности примитивной меры). Если сегмент S прямой $\mathbb{R}$ является объединением дизъюнктивной последовательности сегментов $T_0, \dots, T_i, \dots$, то $\mu S = \sum_{i=0}^{\infty} \mu T_i$.

◀ Поскольку $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и каждый $T_i \subset S$, то для любого номера n имеем $\sum_{i=0}^n \mu T_i \leq \mu S$, и, стало быть, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu T_i \leq \mu S$.

Установим противоположное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим символом S' какой-нибудь отрезок, лежащий в S , такой, что $\mu S < \mu S' + \varepsilon$, а для каждого промежутка T_i выберем интервал $\tilde{T}_i \supset T_i$, для которого $\mu \tilde{T}_i < \mu T_i + 2^{-i}\varepsilon$. Так как отрезок S' компактен и покрыт семейством открытых промежутков вида $\tilde{T}_i$, то найдётся такой номер n , что $S' \subset \cup_{i=0}^n \tilde{T}_i$. Следовательно,

$$\mu S < \mu S' + \varepsilon \leq \sum_{i=0}^n \mu \tilde{T}_i + \varepsilon < \sum_{i=0}^n (\mu T_i + 2^{-i}\varepsilon) + \varepsilon < \sum_{i=0}^{\infty} \mu T_i + 3\varepsilon.$$
 И это для каждого $\varepsilon > 0$. ▶

Следствия. 1. Если сегмент S является объединением дизъюнктивной последовательности примитивных множеств $B_0, \dots, B_i, \dots$, то $\mu S = \sum_{i=0}^{\infty} \mu B_i$.

2. Если сегмент $S \subset \mathbb{R}$ является объединением возрастающей цепочки примитивных множеств $A_0 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$, то $\mu S = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$.

1.2. *Интегрирование ступенчатых функций.* Множества вида $T_1 \times \dots \times T_k$, где $T_1, \dots, T_k$ — сегменты числовой прямой, будем называть *сегментами пространства $\mathbb{R}^k$* . Таким образом, сегменты пространства $\mathbb{R}^k$ — это k -мерные прямоугольники (возможно, незамкнутые), рёбра которых параллельны осям координат. Совокупность всех сегментов пространства $\mathbb{R}^k$ будем обозначать $Seg(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 2 (о дроблении). Для каждого конечного набора сегментов $A \subset Seg(\mathbb{R}^k)$ найдётся такая дизъюнктивная система сегментов $B \subset Seg(\mathbb{R}^k)$, что любой сегмент $P \in A$ является объединением некоторой конечной подсистемы $B_P \subset B$. Иными словами, $Seg(\mathbb{R}^k)$ является *дробящейся системой*.

◀ Пусть A — произвольное конечное множество сегментов числовой прямой и $t_0 < \dots < t_n$ — система концов этих сегментов. Тогда промежутки

$$\{t_0\},]t_0, t_1[, \{t_1\}, \dots,]t_{n-1}, t_n[, \{t_n\}$$

образуют дизъюнктивную систему, дробящую семейство A .

Допустим, что лемма верна для некоторого $k \geq 1$, и пусть $A = (A_1, \dots, A_n)$ — какой-то набор сегментов пространства $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$.

Каждый сегмент A_i имеет вид $A_i = S_i \times T_i$, где S_i и T_i — сегменты пространств $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^1$ соответственно.

Пусть $P = (P_1, \dots, P_l)$ — дизъюнктивная система сегментов пространства $\mathbb{R}^k$, дробящая семейство $S = (S_1, \dots, S_n)$, а $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ — дизъюнктивная система сегментов пространства $\mathbb{R}^1$, дробящая семейство $T = (T_1, \dots, T_n)$. Тогда все сегменты вида $P_i \times Q_j$ образуют дизъюнктивное семейство, дробящее систему A . ►

Мерой сегмента $S = T_1 \times \dots \times T_k$, где $T_1, \dots, T_k$ — сегменты числовой прямой, будем называть число $\mu_k S := \mu T_1 \times \dots \times \mu T_k$. В частности, если S — сегмент прямой $\mathbb{R}$, то $\mu_1 S = \mu S$. Меру μ_1 называют длиной, меру μ_2 — площадью, меру μ_3 — объёмом, а меру μ_k — k -мерным объёмом. В тех случаях, когда нет повода для недоразумений, размерностный индекс « k » в символе μ_k обычно опускают.

Функцию $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ называют *ступенчатой*, если имеются такая дизъюнктивная система сегментов $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^k$ и такой набор конечных элементов $c_1, \dots, c_n \in E$, что $\varphi(x) = c_i$, если $x \in P_i$, и $\varphi(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R}^k \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_n)$. Совокупность всех E -значных ступенчатых функций на x обозначим $Step(\mathbb{R}^k, E)$.

Упражнения. 0. Для любого конечного набора ступенчатых функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на пространстве $\mathbb{R}^k$ найдётся такая конечная дизъюнктивная система сегментов $S_1, \dots, S_q$, что каждая φ_i постоянна на любом S_j и равна нулю вне объединения $\bigcup_i S_i$.

1. Модуль и знак ступенчатой функции, сумма и произведение ступенчатых функций являются ступенчатыми функциями.

2. Функция $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l) : \mathbb{R}^k \rightarrow E = E_1 \times \dots \times E_l$ ступенчатая тогда и только тогда, когда каждая её компонента $\varphi_i : \mathbb{R}^k \rightarrow E_i$ ступенчатая.

3. $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ ступенчатая тогда и только тогда, когда она представляема в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{P_i}, \quad P_i \in Seg(\mathbb{R}^k), \quad c_i \in E. \quad (*)$$

Определение. Зададим каждую ступенчатую функцию $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ в виде $(*)$ и положим

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i \mu P_i. \quad (**)$$

Элемент $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x) dx \in E$ будем называть (примитивным) интегралом функ-

ции φ по пространству $\mathbb{R}^k$. Будем использовать также сокращённые обозначения интеграла $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi dx$ и $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi$.

Лемма 3. Определение интеграла ступенчатой функции на $\mathbb{R}^k$ корректно, т. е. не зависит от выбора представления рассматриваемой функции в виде линейной комбинации "ступенек" (*). Тем самым *определена операция «примитивный интеграл»*: $\int_{\mathbb{R}^k} : \text{Step}(\mathbb{R}^k, E) \rightarrow E$.

◀ Эта лемма является утверждением, зависящим от натурального $k > 0$. Обозначим его $W(k)$.

Если $k = 1$, то любая ступенчатая функция $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ интегрируема (по Ньютону) на отрезке $[-\infty, \infty]$ и потому условие (*) влечёт равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \sum_i c_i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{P_i}(x) dx = \sum_i c_i \mu P_i,$$

левая часть которого не зависит от выбора представления (*).

Допустим теперь, что истинны высказывания $W(k)$ и $W(l)$. Пусть $X := \mathbb{R}^k$, $Y := \mathbb{R}^l$ и $\varphi(x, y)$ — ступенчатая функция на пространстве $X \times Y = \mathbb{R}^{k+l}$, представленная в виде $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{P_i}(x, y)$. Каждый сегмент P_i пространства $X \times Y$ имеет вид $P_i = S_i \times T_i$, где S_i и T_i — сегменты пространств X и Y соответственно. Поэтому

$$\forall (x, y) \in X \times Y \quad \varphi(x, y) = \sum_i (c_i \chi_{S_i}(x)) \chi_{T_i}(y).$$

Тем самым, установлено, что

1) для каждой точки $x \in X$ функция $\varphi(x, y)$ переменной $y \in Y$ ступенчатая.

А так как $W(l)$ истинно, то

$$\forall x \in X \quad \int_Y \varphi(x, y) dy = \sum_i c_i \chi_{S_i}(x) \mu T_i = \sum_i (c_i \mu T_i) \cdot \chi_{S_i}(x)$$

Значит,

2) функция $\psi(x) := \int_Y \varphi(x, y) dy$ переменной $x \in X$ ступенчатая.

И поскольку верно $W(k)$, то

$$3) \int_X \left(\int_Y \varphi(x, y) dy \right) dx = \sum_i (c_i \mu T_i) \mu S_i = \sum_i c_i \mu P_i =: \int_{X \times Y} \varphi(x, y) d(x, y).$$

Левая часть полученной цепочки равенств не зависит от представления функции φ в виде линейной комбинации ступенек, т.е. утверждение $W(k+l)$ справедливо. И поскольку верно $W(1)$, то лемма $W(k)$ верна при $k \in \{1, 2, \dots\}$. ►

Напомним: $X := \mathbb{R}^k$, $Y := \mathbb{R}^l$, $XY := X \times Y$.

Приведенное доказательство леммы 3 попутно устанавливает истинность следующего утверждения.

Примитивная теорема Фубини (ПТФ). Для любой ступенчатой функции $\varphi(x, y)$ переменных $x \in X$ и $y \in Y$ справедливы следующие утверждения:

1) Для каждой точки $x \in X$ функция $\varphi(x, y)$ переменной y является ступенчатой на Y .

2) Функция $\psi(x) := \int_Y \varphi(x, y) dy$ переменной x является ступенчатой на X .

$$3) \int_X \left(\int_Y \varphi(x, y) dy \right) dx = \int_{XY} \varphi(x, y) d(x, y).$$

Простейшие свойства примитивного интеграла:

Линейность: если $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ступенчатые функции

на X , а $c_1, \dots, c_n$ — константы, то $\int_X \varphi = \sum_{i=1}^n c_i \int_X \varphi_i$.

Ограниченность: $|\int_X \varphi| \leq \int_X |\varphi| \quad \forall \varphi \in \text{Step}(X, E)$.

Монотонность: если $\alpha, \beta \in \text{Step}(X, \mathbb{R})$ и $\alpha \leq \beta$, то $\int_X \alpha \leq \int_X \beta$.

◄ Простые следствия упражнения 0. ►

Принцип исчерпывания: если $\varphi, \varrho_0 \leq \dots \leq \varrho_n \leq \dots$ — такая последовательность неотрицательных ступенчатых функций, что $\varphi(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) \quad \forall x \in X$, то $\int_X \varphi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varrho_n$.

◄ 1) Допустим сначала, что $X = \mathbb{R}$. Без ущерба для общности можем считать, что все рассматриваемые функции равны нулю вне некоторого отрезка $T \subset \mathbb{R}$ (например, такого T , вне которого равна нулю функция φ).

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\xi_n := \varphi - \varrho_n$. Для каждого номера n рассмотрим примитивные множества $A_n := \{t \in T \mid \xi_n(t) < \varepsilon\}$ и $B_n := T \setminus A_n$.

Поскольку последовательность функций ξ_n убывает, то последовательность множеств A_n возрастает. А так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(t) \leq 0 \quad \forall t \in T$, то $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = T$. По следствию 2 леммы 1 $\lim \mu A_n = \mu T$. Следовательно, $\lim \mu B_n = \lim(\mu T - \mu A_n) = 0$. Значит, найдётся такой номер m , что

$\mu B_m < \varepsilon$. Итак,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \xi_m &= \int_{\mathbb{R}} \xi_m \chi_T = \int_{\mathbb{R}} \xi_m (\chi_{A_m} + \chi_{B_m}) = \int_{\mathbb{R}} \xi_m \chi_{A_m} + \int_{\mathbb{R}} \xi_m \chi_{B_m} \leq \\ &\leq \varepsilon \mu A_m + \max \varphi \mu B_m \leq \varepsilon (\mu T + \max \varphi). \end{aligned}$$

Так как последовательность $\int_{\mathbb{R}} \xi_n$ убывающая, то для каждого $n \geq m$ имеем $\int_{\mathbb{R}} \xi_n \leq \int_{\mathbb{R}} \xi_m \leq (\mu T + \max \varphi) \varepsilon$. Стало быть, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \xi_n \leq (\mu T + \max \varphi) \varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \xi_n \leq 0$.

2) Если принцип исчерпывания справедлив в пространствах X и Y , то для пространства $X \times Y$ его легко установить с помощью примитивной теоремы Фубини. ►

§ 11.2. Интегральная норма

Число $s \in \overline{\mathbb{R}}$ назовём *интегральной оценкой функции* $f : X \rightarrow E$, если имеется такая возрастающая последовательность (*каскад*) ступенчатых функций $0 \leq \varrho_0 \leq \varrho_1 \leq \dots$, что

$$|f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) \quad \forall x \in X, \quad \int_X \varrho_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Нижнюю грань множества всех интегральных оценок функции f будем называть *интегральной нормой* или L_1 -нормой этой функции и обозначать символом $\|f\|_1$. Число $\|f\|$ называют также *верхним интегралом функции* $|f|$, в этом случае употребляют обозначение $\int_X^* |f(x)| dx$. Число

$\|f - g\|$ называют L_1 -расстоянием между функциями f и g .

Основные свойства интегральной нормы

- L1. $\|f\|_1 \in [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$.
- L2. $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$.
- L3. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ для любого скаляра λ (напомним: в этой главе считаем, что $0 \cdot \infty = 0$).
- L4. $\left\| \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \right\| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \|f_i\|$ (*неравенство Минковского*).
- L5. Интегральная норма ступенчатой функции равна примитивному интегралу её модуля: $\|\varphi\|_1 = \int_X |\varphi(x)| dx$.

◄ Свойства L1, L2 и L3 — простые следствия определения.

L4. Достаточно считать, что $\forall i \in \mathbb{N} f_i \geq 0$, а $\|f_i\| < \infty$.

Пусть $F := \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $\varepsilon > 0$, $s_i := \|f_i\| + 2^{-i}\varepsilon$. Поскольку число s_i является интегральной оценкой функции f_i , то для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеется такой каскад ступенчатых функций $0 \leq \varrho_{i,0} \leq \dots \leq \varrho_{i,n} \leq \dots$, что $|f_i| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{i,n}$, а $\int_X \varrho_{i,n} \leq s_i$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\sigma_n := \sum_{i=0}^n \varrho_{i,n}$. Нетрудно понять, что $0 \leq \sigma_n \leq \sigma_{n+1}$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{i=0}^j f_i \leq \sum_{i=0}^j \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{i,n} = \lim_n \sum_{i=0}^j \varrho_{i,n} \leq \lim_n \sum_{i=0}^n \varrho_{i,n} = \lim_n \sigma_n.$$

Поскольку полученное неравенство выполнено при любом $j \in \mathbb{N}$, то $F = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \leq \lim_n \sigma_n$. А так как $\sigma_0 \leq \dots \leq \sigma_n \leq \dots$ и все функции σ_n ступенчатые, то число $\lim_n \int_X \sigma_n$ служит интегральной оценкой функции f . Следовательно, $\|F\| \leq \lim_n \int_X \sigma_n = \lim_n \int_X \sum_{i=0}^n \varrho_{i,n} = \lim_n \sum_{i=0}^n \int_X \varrho_{i,n} \leq \lim_n \sum_{i=0}^n s_i = \sum_{i=0}^{\infty} s_i = \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\| + 2\varepsilon \forall \varepsilon > 0$. Значит, $\|F\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|$.

Л5. Согласно принципу исчерпывания $\int_X |\varphi| dx \leq \|\varphi\|$. А так как число $\int_X |\varphi|$ является интегральной оценкой функции $|\varphi|$, то $\|\varphi\| \leq \int_X |\varphi| dx$. ►

Неравенство треугольника. $\|f - g\| \leq \|f - h\| + \|h - g\|$.

◄ Имеем: $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \forall x \in X$. Остаётся воспользоваться свойствами 2 и 4 интегральной нормы. ►

Множество всех E -значных функций на пространстве X , снабжённое интегральной нормой, обозначим $F_1(X, E)$.

§ 11.3. Интеграл Лебега

Будем говорить, что функция $f : X \rightarrow E$ интегрируема (по Лебегу) на пространстве X , если существует такая последовательность ступенчатых функций φ_n , что $\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. В этом случае последовательность интегралов $\int_X \varphi_n$ сходится к некоторому конечному элементу пространства E , не зависящему от выбора последовательности φ_n , интегрально аппроксимирующей функцию f . Этот элемент будем называть интегралом (Лебега) функции f по пространству X и обозначать символом $\int_X f$.

◀ Из условия $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$ и неравенства

$$\left| \int_X \varphi_k - \int_X \varphi_l \right| \leq \int_X |\varphi_k - \varphi_l| = \|\varphi_k - \varphi_l\| \leq \|f - \varphi_k\| + \|f - \varphi_l\|$$

следует, что последовательность $\int_X \varphi_n$ элементов пространства E удовлетворяет условию Коши и потому имеет конечный предел.

Пусть ψ_n — другая последовательность ступенчатых функций, интегрально аппроксимирующая f ($\|f - \psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$). Положим $\tau_{2n} := \varphi_n$ и $\tau_{2n+1} := \psi_n$. Так как $\|f - \tau_q\| \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0$, то последовательность $\int_X \tau_q$ имеет предел, который обязан быть пределом её подпоследовательностей $\int_X \varphi_n$ и $\int_X \psi_n$. ▶

Всякая ступенчатая функция интегрируема по Лебегу и её интеграл Лебега совпадает с примитивным интегралом.

Говорят, что функция f интегрируема на множестве $U \subset X$, если функция $f\chi_U$ интегрируема на X . В этом случае $\int_X f\chi_U$ называется интегралом функции f по множеству U и обозначается одним из следующих символов: $\int_U f(x)dx$, $\int_U f dx$, $\int_U f$.

Пространство E -значных функций, интегрируемых на U , обозначим символом $L_1(U, E)$.

Простейшие свойства интеграла.

I1. Линейность: если $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$, где $f_1, \dots, f_n$ — интегрируемые на U функции, а $c_1, \dots, c_n$ — константы, то функция f интегрируема на U и $\int_U f = \sum_{i=1}^n c_i \int_U f_i$.

I2. Ограниченность: если $f \in L_1(U, E)$, то $|f| \in L_1(U, \mathbb{R})$ и справедливы следующие два соотношения: $\left| \int_U f \right| \leq \|f\chi_U\| = \int_U |f|$.

◀ I1. Прямое следствие определений и линейности операции $\lim$.

I2. Достаточно предполагать, что $f = f\chi_U$.

Пусть последовательность $\varphi_n \in \text{Step}(X, E)$ такова, что $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$. Поскольку $||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n|$, то $||f| - |\varphi_n|| \leq \|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$. Значит, функция $|f|$ интегрируема и

$$\int |f| = \lim_n \int |\varphi_n| = \lim_n \|\varphi_n\| \leq \lim_n \|\varphi_n - f\| + \lim_n \|f\| = \|f\|.$$

С другой стороны $\|f\| \leq \|f - \varphi_n\| + \|\varphi_n\| = \|f - \varphi_n\| + \int_x |\varphi_n|$. Следовательно, $\|f\| \leq \lim_n (\|f - \varphi_n\| + \int_x |\varphi_n|) = \int_x |f|$. ►

Упражнения. 0. Если вещественные функции f и g интегрируемы на U , причём $f(x) \leq g(x) \forall x \in U$, то $\int_U f \leq \int_U g$.

1. Если вещественные функции $f_1, \dots, f_n$ интегрируемы на U , то функции $\max(f_1, \dots, f_n)$ и $\min(f_1, \dots, f_n)$ интегрируемы. *Указание:* $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

2. Координатный критерий интегрируемости: функция $f = (f_1, \dots, f_l)$ интегрируема на U в том и лишь в том случае, когда каждая её компонента f_i интегрируема на U . В этом случае $\int_U f = (\int_U f_1, \dots, \int_U f_l)$.

3. Если функция f непрерывна на ограниченном отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нём как по Ньютону, так и по Лебегу и

$$\int_{[a,b]} f = \text{sign}(b - a) \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

§ 11.4. Пренебрежимые функции и множества

Функция f называется *пренебрежимой*, если $\|f\| = 0$. Множество $Z \subset X$ называется *пренебрежимым* или *множеством меры нуль*, если его индикатор является пренебрежимой функцией.

Свойства пренебрежимых функций и множеств

1. Если g — пренебрежимая функция и $|f| \leq |g|$, то функция f также пренебрежима.
2. Сумма ряда пренебрежимых функций — пренебрежимая функция.
3. Подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо.
4. Объединение счётного семейства пренебрежимых множеств пренебрежимо.

◀ 4. Пусть $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, Тогда $\chi_Z \leq \sum \chi_{Z_n}$ и $\|\chi_Z\| \leq \sum \|\chi_{Z_n}\| = 0$. ►

Геометрический признак пренебрежимого множества. Множество $Z \subset X$ будет пренебрежимым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность сегментов S_n пространства X , покрывающая Z такая, что $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu S_n \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left\langle Z \subset \bigcup S_n \Rightarrow \chi_Z \leq \sum \chi_{S_n} \Rightarrow \|\chi_Z\| \leq \left\| \sum \chi_{S_n} \right\| \leq \right. \\ \left. \leq \sum \|\chi_{S_n}\| = \sum \mu S_n \Rightarrow \|\chi_Z\| < \varepsilon \forall \varepsilon. \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть $\Phi(x)$ — высказывание, содержащее переменную x . Будем говорить, что высказывание $\Phi(x)$ справедливо (верно, истинно) *почти для каждого* $x \in U \subset X$, и будем писать $\Phi(x) \check{\forall} x \in U$, если имеется такое пренебрежимое множество Z , что $\Phi(x)$ истинно при любом $x \in U \setminus Z$.

Примеры. 1. Если $\Phi(x) \check{\forall} x \in U$, то $\Phi(x) \check{\forall} x \in U$.

2. $\sin x \neq 0 \check{\forall} x \in \mathbb{R}$.

3. $x \notin \mathbb{Q} \check{\forall} x \in \mathbb{R}$.

Критерий пренебрежимости функции.

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \check{\forall} x \in X \ f(x) = 0$.

◀ Пусть $Z := \{x \in X \ f(x) \neq 0\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $f_n := |f|$ и $h_n := \chi_Z$.

Пусть $\|f\| = 0$. Из того, что $\chi_Z \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ следует: $\|\chi_Z\| \leq \sum \|f_n\| = 0$.

Пусть $\|\chi_Z\| = 0$. Из того, что $|f| \leq \sum h_n$ следует: $\|f\| \leq \sum \|h_n\| = 0$. ▶

Лемма о пренебрежимых отклонениях. Допустим, что $f(x) = g(x) \check{\forall} x \in U$. Тогда а) $\|f\| \leq \|g\|$, б) если $f \in L_1(U, E)$, то $g \in L_1(U, E)$ и $\int_U g = \int_U f$.

◀ Достаточно предполагать, что $f = f\chi_U$ и $g = g\chi_U$.

а) $\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\| = \|g\|$ Аналогично, $\|g\| \leq \|f\|$.

б) Поскольку функция f интегрируема на X , то существует последовательность ступенчатых функций φ_n , $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$. Так как $g(x) - f(x) = 0 \check{\forall} x$, то согласно пункту а) $\|g - f\| = 0$. Следовательно, $\|g - \varphi_n\| \leq \|g - f\| + \|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$. Значит, $g \in L_1(U, E)$ и $\int_U g = \lim_n \int_X \varphi_n = \int_U f$. ▶

Лемма о бесконечных значениях. Если $\|f\| < \infty$, то функция f почти всюду конечна ($|f(x)| < \infty \check{\forall} x \in X$).

◀ Пусть $Z := \{x \in X \ |f(x)| = \infty\}$. Тогда $\chi_Z \leq 2^{-n}|f|$ и, стало быть, $\|\chi_Z\| \leq 2^{-n}\|f\| \ \forall n \in \mathbb{N}$. ▶

Лемма о нормальных рядах. Если ряд функций $g_0, g_1, \dots$ таков, что $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$, то почти в каждой точке $x \in X$ ряд $g_n(x)$ абсолютно суммируем ($\sum_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| < \infty$) и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0 \check{\forall} x \in X$.

◀ Пусть $f(x) := \sum |g_n(x)|$. Тогда $\|f\| \leq \sum \|g_n\| < \infty$. ▶

§ 11.5. Интеграл и предел

В этом параграфе $U \subset X = \mathbb{R}^k$.

Лемма о сходимости по норме.

Если последовательность $f, f_0, \dots, f_n, \dots$ такова, что $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и каждая f_n интегрируема на X , то f интегрируема на X и $\int_X f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n$.

◀ Для каждого номера n выберем такую ступенчатую функцию φ_n , что $\|f_n - \varphi_n\| < 2^{-n}$. Тогда $\|f - \varphi_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и, значит, $f \in L_1(X, E)$. Наконец, $|\int f - \int f_n| \leq \int |f - f_n| = \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ▶

Теорема о нормальных рядах. Если функции $g_0, \dots, g_n, \dots$ интегрируемы на множестве U и $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int |g_n| < \infty$, то

- 1) $\forall x \in U$ ряд $g_n(x)$ абсолютно суммируем в E ($\sum_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| < \infty$);
- 2) функция $f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ интегрируема на множестве U ;
- 3) $\int_U \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_U g_n$.

◀ Достаточно предполагать, что $U = X$. В этом случае $\int_U |g_n| = \|g_n\|$, и потому согласно лемме о нормальных рядах $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|g_n(x)\| < \infty \forall x$.

Пусть $f_q(x) := \sum_{n=0}^q g_n(x)$. Функция f_q интегрируема. При этом

$$\|f - f_q\| = \left\| \sum_{n>q} g_n \right\| \leq \sum_{n>q} \|g_n\| \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0.$$

Согласно лемме о сходимости по норме $f \in L_1(U, E)$ и

$$\int_U f = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_U f_q = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q \int_U g_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_U g_n. \quad \blacktriangleright$$

Теорема Беппо Леви. Если последовательность f_n интегрируемых на множестве U функций возрастает на U , а последовательность интегралов $\int_U f_n$ ограничена, то функция $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ интегрируема на U и $\int_U f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U f_n$.

◀ Для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ положим $g_n := f_n - f_{n-1}$, считая, что $f_{-1} = 0$. Тогда $f = \lim_{q \rightarrow \infty} f_q = \lim_q \sum_{n=0}^q g_n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, а $\sum_{n=0}^{\infty} \int_U |g_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_U g_n = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q \int_U g_n = \lim_q \int_U f_q < \infty$. По теореме о нормальных рядах функция f интегрируема на U и

$$\int_U f = \sum_n \int_U g_n = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q \int_U g_n = \lim_q \int_U f_q. \quad \blacktriangleright$$

Лемма о верхней огибающей. Если счётное семейство $\{f_i \mid i \in I\}$ интегрируемых на U вещественных функций ограничено сверху какой-нибудь интегрируемой функцией h , то функция $s(x) := \sup\{f(x) \mid i \in I\}$ интегрируема на U .

◀ Достаточно считать, что $I = \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $h_n := \max(f_0, \dots, f_n)$. Тогда $h_0 \leq \dots \leq h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$, причём каждая функция h_n интегрируема на U и $\int_U h_n \int_U h < \infty$. По теореме Бешпо Леви функция s интегрируема на U . ▶

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Если последовательность f_n интегрируемых на множестве U функций

- 1) почти всюду на U сходится к некоторой функции f и
- 2) обладает интегрируемой на U мажорантой: существует интегрируемая на U функция h , что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in U \quad |f_n(x)| \leq h(x),$$

то функция f интегрируема на U и $\int_U f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_U f$.

◀ Достаточно предполагать, что $U = X$.

- 1) Допустим сперва, что выполнены строгие условия теоремы Лебега: функции $h, f_0, \dots, f_n, \dots$ интегрируемы, не принимают бесконечных значений, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ для каждого $x \in X$ и $|f_n(x)| \leq h(x)$ для каждого $x \in X$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $s_n := \sup\{|f_i - f_j| \mid i, j \in \{n, n+1, \dots\}\}$.

a) $s_0 \geq s_1 \geq \dots \geq s_n \dots$

b) Функция s_n интегрируема согласно лемме о верхней огибающей.

b) $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ при любом $x \in X$ (следствие условия Коши для последовательности $f_n(x)$, имеющей конечный предел).

Из теоремы Бешпо Леви следует, что $\int_X s_n \rightarrow 0$. И поскольку $|f(x) - f_n(x)| = \lim_{q \rightarrow \infty} |f_q(x) - f_n(x)| \leq s_n$, то $\|f - f_n\| \leq \|s_n\| = \int_X s_n \rightarrow 0$. Остаётся вспомнить лемму о сходимости по норме.

- 2) Общй случай. Пусть $Z_0, \dots, Z_i, \dots$ — такие пренебрежимые множества, что $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X \setminus Z_0$, $h(x) < \infty \quad \forall x \in X \setminus Z_1$, $|f_n(x)| \leq H(x) \quad \forall x \in X \setminus Z_n \quad \forall n \geq 2$.

Пусть $Z := \bigcup_n Z_n$. На множестве $\tilde{U} := U \setminus Z$ для системы функций $(f, h, f_n \mid n \in (2 + \mathbb{N}))$ выполнены строгие условия теоремы Лебега и, стало быть, справедливо заключение теоремы. Остаётся вспомнить лемму о пренебрежимых отклонениях. ▶

Следствие. Если на ограниченном множестве U последовательность f_n интегрируемых на U функций равномерно сходится к некоторой функции f , то эта функция интегрируема на U и $\int_U f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_U f$.

◀ Пусть T — какой-то сегмент, содержащий U . Поскольку $f_n \chi_U \Rightarrow f$, то найдётся такой номер m , что $\forall q \geq m \ |f_q| \leq (|f_m| + \chi_T) \in L_1(x, \mathbb{R})$. Далее вступает в силу теорема Лебега. ▶

"Контрпримеры". 1. Последовательность $f_n(x) := \frac{1}{1+|x|} \chi_{[-n,n]}(x)$ интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций равномерно сходится к функции $\frac{1}{1+|x|}$, не интегрируемой на $\mathbb{R}$.

2. Последовательность $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[-n,n]}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к нулю, в то время как $\int_{\mathbb{R}} f_n = 2$.

Теорема Рисса–Фишера о полноте. Пространство $L_1(U, E)$, снабжённое нормой $\|f\|_U := \|f \chi_U\| = \int_U |f|$, полно.

◀ Пусть f_n — последовательность Коши в пространстве $L_1(U, E)$. Выберем какую-нибудь её подпоследовательность f_{n_q} ограниченной длины ($\sum_{q=0}^{\infty} \|f_{n_q} - f_{n_{q-1}}\| = S < \infty$). Положим $g_0 = f_{n_0}$, $g_1 = f_{n_1} - f_{n_0}$ и т.д.

Поскольку $\sum \|g_i\| = S < \infty$, то по теореме о нормальных рядах последовательность $f_{n_q}(x) = \sum_{i=0}^q g_i(x)$ почти для каждого $x \in U$ сходится к интегрируемой функции $f(x) := \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i(x)$ при $q \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\|f - f_{n_q}\|_U = \left\| \sum_{i>q} g_i \right\|_U \leq \sum_{i>q} \|g_i\|_U \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0.$$

Но f_n — последовательность Коши, значит $\|f - f_n\|_U \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ▶

Из доказательства теоремы Рисса — Фишера видно, что в пространстве $L_1(U, E)$ всякая последовательность Коши содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на U . Однако исходная последовательность может расходиться в каждой точке множества U , как показывает следующий пример:

Пример. «Бегающий горбик.» Пусть $U = [0, 1]$ и f_n — индикатор n -го члена следующей последовательности отрезков: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, \frac{3}{4}]$, $\dots$, $[\frac{1}{4}, 0]$, $[0, \frac{1}{8}]$, $\dots$, $[\frac{7}{8}, 1]$, $\dots$. Последовательность функций f_n сходится в пространстве $L_1(U, \mathbb{R})$ к нулю. Однако, какова бы ни была точка $p \in U$, последовательность $f_n(p)$ не имеет предела, поскольку содержит бесконечное множество нулей и бесконечное множество единиц.

§ 11.6. Измеримые функции. Признаки интегрируемости

Необходимое условие интегрируемости. Если функция f интегрируема на пространстве X , то существует последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к f почти всюду.

◀ Согласно определению интегрируемости для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такая ступенчатая функция φ_n , что $\|f - \varphi_n\| < 2^{-n}$. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} \|f - \varphi_n\| < 2$, то согласно лемме о нормальных рядах почти для каждого $x \in X$ $|f(x) - \varphi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ▶

Функции, удовлетворяющие приведенному необходимому условию интегрируемости, называют *измеримыми*. Говорят, что *функция f измерима на множестве U* , если измерима функция $f\chi_U$. Множество $M \subset X$ называют измеримым, если его индикатор есть измеримая функция.

Упражнения. 1. Понятие измеримости функции устойчиво относительно пренебрежимых изменений.

2. Модуль измеримой функции является измеримой функцией. Сумма и произведение измеримых почти всюду конечных функций суть измеримые функции.

3. Координатный критерий измеримости: функция $f = (f_1, \dots, f_l) : X \rightarrow E_1 \times \dots \times E_l$ измерима в том и только в том случае, когда каждая её компонента $f_i : X \rightarrow E_i$ измерима.

4. Всякая измеримая функция является поточечным пределом некоторой сходящейся всюду последовательности интегрируемых функций. [подсказ: переопределить соответствующие ступенчатые функции на множествах меры 0.]

$$\text{Для каждого } h \in [0, \infty] \text{ и } v \in E \text{ положим } \text{cut}(h, v) = \begin{cases} v & |v| \leq h \\ h \frac{v}{|v|} & |v| > h \end{cases}.$$

(Если $E = \overline{\mathbb{R}}$, то считается, что $\frac{v}{|v|} = \text{sign } v$).

Лемма о непрерывности срезки. Если $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$, $h_n \geq 0$, а $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$, то $\text{cut}(h_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{cut}(h, v)$.

◀ Если $v = 0$, то доказываемая формула вытекает из неравенства $|\text{cut}(h_n, v_n)| \leq |v_n|$.

Если же $v \neq 0$, то заключение леммы является следствием равенства $\text{cut}(h, v) = \frac{v}{|v|} \min(h, |v|)$, формулы

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \min(a_n, b_n) \rightarrow \min(a, b)$$

и надлежащих теорем теории предела. ▶

Для каждой неотрицательной функции $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и произвольной функции $f : X \rightarrow E$ определим функцию $\text{cut}(h, f) : X \rightarrow E$ формулой $\text{cut}(h, f)|_x := \text{cut}(h(x), f(x))$ и будем называть эту функцию срезкой функций h и f или h -срезкой функции f .

Упражнение. Нарисовать график функции $\text{cut}(\frac{1}{2}, \sin)$.

Теорема о срезке. Срезка $\text{cut}(h, f)$ измеримых функций $h \geq 0$ и f измерима, а если к тому же одна из этих функций интегрируема, то их срезка интегрируема.

◀ Если обе функции h и f ступенчатые, то их срезка $\text{cut}(h, f)$ является ступенчатой функцией.

Если функции h и f измеримы, то их срезка $\text{cut}(h, f)$ измерима, ибо она является пределом сходящейся почти всюду последовательности $\text{cut}(h_n, f_n)$, где h_n и f_n — последовательности ступенчатых функций, сходящиеся почти везде к функциям h и f соответственно.

Допустим, что функция h ступенчатая, а функция f — измеримая. Пусть f_n — последовательность ступенчатых функций, сходящаяся почти везде к f . Тогда последовательность ступенчатых функций $\text{cut}(h, f_n)$ почти всюду сходится к $\text{cut}(h, f)$ и ограничена интегрируемой функцией h . Согласно теореме Лебега функция $\text{cut}(h, f)$ интегрируема.

Случай, когда h — измеримая, f — ступенчатая, аналогичен.

Допустим теперь, что функция h измеримая, а функция f интегрируемая. Пусть h_n — последовательность неотрицательных ступенчатых функций, сходящаяся почти везде к h . Тогда последовательность $\text{cut}(h_n, f)$ почти всюду сходится к $\text{cut}(h, f)$, состоит из интегрируемых функций и ограничена интегрируемой функцией $|f|$. Согласно теореме Лебега функция $\text{cut}(h, f)$ интегрируема.

Случай, когда h — интегрируема, а f — измерима, аналогичен. ▶

Признак интегрируемости Лебега. Измеримая функция, обладающая интегрируемой мажорантой, интегрируема: если функция f измерима и существует такая интегрируемая функция h , что $|f| \leq h$, то f интегрируема.

◀ $\text{cut}(h, f) = f$. ▶

Следствие. Если интегральная норма измеримой функции конечна, то эта функция интегрируема.

◀ Следствие определения интегральной нормы, теоремы Беппо Леви и признака Лебега. ▶

Теорема об измеримости предела (ТИП). Если последовательность f_n измеримых функций почти всюду сходится к функции f , то функция f измерима.

◀ Пусть h_n — какая-нибудь последовательность неотрицательных интегрируемых функций, сходящаяся в каждой точке $x \in \mathbb{R}^k$ к ∞ . Например, $h_n = n\chi_{Q_n}$, где $Q_n = [-n, n]^k$. Для каждого номера n положим $g_n := \text{cut}(h_n, f_n)$. Согласно теореме о срезке, каждая функция g_n интегрируема, а последовательность g_n сходится к функции f почти всюду.

Для каждой функции g_n имеется такая ступенчатая функция φ_n , что $\|g_n - \varphi_n\| < 2^{-n}$. Так как $\sum_n \|g_n - \varphi_n\| < 2$, то согласно лемме о нормальных рядах $(g_n(x) - \varphi_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in X$. Остаётся вспомнить, что $g_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$. ▶

Следствия. 1. Знак измеримой функции измерим.

$$\langle \text{sign } f = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cut}(1, nf) \rangle.$$

2. Если функция f дифференцируема в каждой точке промежутка U , то функция Df измерима на U .

$$\langle Df(x) = \lim_n \frac{1}{n} (f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) \rangle.$$

3. Функция, обладающая обобщённой первообразной на промежутке $U \subset \mathbb{R}$, измерима на U .

Будем говорить, что функция f *почти непрерывна* на множестве $U \subset \mathbb{R}^k$, если имеется такое пренебрежимое множество Z , что сужение $f : (U \setminus Z) \rightarrow E$ этой функции на множество $U \setminus Z$ непрерывно.

Упражнения. Функция, непрерывная почти в каждой точке, является почти непрерывной. Функция Дирихле $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ почти непрерывна, будучи разрывной в каждой точке.

Теорема об измеримости почти непрерывных функций. Если функция f почти непрерывна на измеримом подмножестве U пространства $\mathbb{R}^k$, то она измерима на этом множестве.

◀ Допустим сначала, что U ограничено, т.е. содержится в каком-нибудь сегменте пространства $\mathbb{R}^k$.

Пусть Z — такое пренебрежимое множество, что функция $f : U \setminus Z \rightarrow E$ непрерывна, и пусть $V := U \setminus Z$. Для каждого номера n рассмотрим какую-нибудь конечную дизъюнктную систему $\mathcal{D}_n$, состоящую из сегментов диаметра $< 2^{-n}$, пересекающихся с V , и покрывающую V . Затем в каждом сегменте $S \in \mathcal{D}_n$ отметим точку $p_S \in S \cap V$. И, наконец, зададим ступенчатую функцию φ_n равенством $\varphi_n := \sum_{S \in \mathcal{D}_n} f(p_S) \chi_S$.

Покажем, что $\varphi_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in V$. Пусть $x \in V$ и Ω — окрестность точки $f(x)$ в E . Поскольку отображение $f : V \rightarrow E$ непрерывно в точке x , то в $\mathbb{R}^k$ найдётся такой шар $B = B_r(x)$, что $f(B \cap V) \subset \Omega$. Пусть n — такой номер, что $2^{-n} < r$, и пусть S — сегмент системы $\mathcal{D}_n$, содержащий

точку x . Поскольку $\text{diam } S < 2^{-n}$, то $S \subset B$, и потому $f(p_S) \in \Omega$. А так как функция φ_n постоянна на S и $\varphi_n(p_S) = f(p_S)$, то $\varphi_n(x) \in \Omega$ для каждого n , для которого $2^{-n} < r$.

Итак, $\varphi_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in V = U \setminus Z$. Значит, $\varphi_n(x)\chi_U(x) \rightarrow f(x)\chi_U(x) \forall x \in \mathbb{R}^k \setminus Z$. Согласно ТИП функция $f\chi_U$ измерима. (Где использовалась измеримость множества U ?)

Пусть U неограничено. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $U_n := U \cap Q_n$, где $Q_n := [-n, n]^k$. Множество U_n измеримо и на нём функция f почти непрерывна. По доказанному функция $f\chi_{U_n}$ измерима. Остаётся заметить, что $f(x)\chi_{U_n}(x) \rightarrow f(x)\chi_U(x)$ и воспользоваться теоремой об измеримости предела. ►

Результаты теории интеграла показывают, что практически каждая заданная функция измерима. Позже будет доказано существование неизмеримых функций и множеств. Однако указать неизмеримое множество в $\mathbb{R}^k$ нельзя.

Если функция h неотрицательна, измерима, но неинтегрируема на множестве U , то полагают $\int_U h(x)dx := \infty$. Если функция f либо интегрируема на множестве U , либо неотрицательна и измерима на этом множестве, то будем говорить, что определён интеграл $\int_U f(x)dx$. Пишут также $\int_U f$.

Теорема Фату. Если последовательность h_n неотрицательных измеримых на множестве U функций сходится почти в каждой точке этого множества к некоторой функции h , то

$$\text{а) } \int_U h \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_U h_n,$$

$$\text{б) а если к тому же } h_n \leq h \forall n \in \mathbb{N}, \text{ то } \int_U h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_U h.$$

◀ Для каждого номера n положим $f_n := \inf\{h_n, h_{n+1}, \dots\}$. Согласно теореме об измеримости предела каждая функция f_n измерима, ибо $f_n = \lim_{q \rightarrow \infty} \min(h_n, \dots, h_q)$.

Кроме того, $f_0(x) \leq \dots \leq f_n(x) \rightarrow h(x) \forall x \in U$. Опираясь на теорему Бешо Леви, заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U f_n = \int_U h. \quad (*)$$

б) Если на U $h_n \leq h \forall n$, то из равенства $(*)$ и неравенства $f_n \leq h_n$ следует, что $\int_U h = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U h_n$.

а) Пусть $I_n := \int_U h_n$ и I_{n_q} — такая подпоследовательность, что $\lim_{q \rightarrow \infty} I_{n_q} = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n$. Тогда из неравенства $f_{n_q} \leq h_{n_q}$ и равенства (*) получаем

$$\int_U h = \lim_q \int_U f_{n_q} \leq \lim_q \int_U h_{n_q} = \liminf_n \int_U h_n. \blacktriangleright$$

Интеграл Лебега как функция верхнего предела. Если функция f интегрируема по Лебегу на интервале $T =]a < b[$, то функция $F(x) := \int_{]a, x[} f(t) dt$ переменной $x \in [a, b]$

С) конечна и непрерывна на отрезке $[a, b]$;

D) $DF(p) = f(p)$ в каждой точке $p \in]a, b[$, в которой функция f слабо непрерывна (существует такое пренебрежимое множество Z_p , что функция $f :]a, b[\setminus Z_p \rightarrow E$ непрерывна в точке p).

◀ С) Пусть $p \in [a < b]$ и $x_n \in]a, b[$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся к p . Для каждого $x \in [a, b]$ положим $f_x := f\chi_{]a, x[}$.

Нетрудно заметить, что $f_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_x(t)$ для любой точки $t \in]a, b[\setminus \{p\}$. (В самом деле, $f_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$, если $t < p$, и $f_{x_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, если $t > p$.) Поскольку $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ для любых n и t , то согласно теореме Лебега

$$F(x_n) := \int_{]a, x_n[} f := \int_{]a, b[} f_{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{]a, b[} f_p = \int_{]a, b[} f\chi_{]a, p[} = F(p).$$

Согласно критерию Гейне $F(p) = \lim_{x \rightarrow p} F(x)$.

D) Вычисление производной функции F в точке p , где функция f слабо непрерывна, делается стандартным способом (§ 5.2). По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists]p < r[: \forall t \in]p, r[\setminus Z_p |f(t) - f(p)| < \varepsilon.$$

Поэтому для всякого $x \in]p, r[\setminus Z_p$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(p)}{x - p} - f(p) \right| &= \left| \frac{\int_{]p, x[} f(t) dt - \int_{]p, x[} f(p) dt}{x - p} \right| = \\ &= \left| \frac{\int_{]p, x[} (f(t) - f(p)) dt}{x - p} \right| \leq \frac{\int_{]p, x[} |f(t) - f(p)| dt}{|x - p|} \leq \frac{\int_{]p, x[} \varepsilon dt}{|x - p|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $D_+ i(p) = f(p)$. Аналогично, $D_- i(p) = f(p)$. $\blacktriangleright$

Замечание. Если множество точек, в которых функция f не является слабо непрерывной, счётно, то функция F является обобщённой первообразной для f на отрезке $[a < b]$.

Связь интегралов Ньютона и Лебега. Пусть f — функция, в основном непрерывная на интервале $T =]a < b[$ (т.е. имеется такое счётное множество Z , что функция $f : T \setminus Z \rightarrow E$ непрерывна). Тогда f интегрируема по Лебегу на интервале $]a < b[$ в том и только в том случае, когда функция $|f|$ интегрируема по Ньютону на отрезке $[a < b]$. В этом случае

$$\int_{]a < b[} f = \int_a^b f(t) dt.$$

◀ Пусть определён $\int_{]a, b[} f$. Поскольку функция f в основном непрерывна, то согласно предыдущей теореме функция $F(x) := \int_{]a < x[} f$ является обобщённой первообразной для f на отрезке $[a, b]$. Значит, f интегрируема по Ньютону и $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(b) = \int_{]a, b[} f$.

Так как $|f|$ в основном непрерывна и интегрируема на $]a < b[$, то по доказанному $\int_a^b |f(t)| dt = \int_{]a, b[} |f|$.

Пусть определён $\int_a^b |f(t)| dt$. Для каждого номера n положим $h_n = \text{cut}(n\chi_{[-n, n]}, |f|)$. Каждая функция h_n в основном непрерывна и интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ (почему?).

Согласно первому пункту этой теоремы $\int_{]a, b[} h_n = \int_a^b h_n(t) dt$. А так как последовательность h_n , возрастая, стремится к функции $|f|$, в то время как $\int_{]a, b[} h_n = \int_a^b |h_n| dt \leq \int_a^b |f| dt < \infty$, то согласно теореме Бешпо Леви функция $|f|$ интегрируема по Лебегу. Согласно признаку Лебега функция f также интегрируема по Лебегу, и по доказанному $\int_a^b f(t) dt = \int_{]a, b[} f$. ▶

Приложение. Признак Коши — Маклорена суммируемости ряда. Пусть f — убывающая положительная функция на полуинтервале

$[q, \infty[$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $(f(q), f(q+1), \dots)$ суммируем в том и только в том случае, когда $\int_q^\infty f(t)dt < \infty$.

◀ Пусть u и v — функции на $[q, \infty[$, определяемые следующими условиями: $u(t) = f(n+1)$, $v(t) = f(n)$ для всякого $t \in [n, n+1[$ и любого номера $n \geq q$. Так как функция f убывающая, то $u \leq f \leq v$ и, следовательно,

$\int_q^\infty u \leq \int_q^\infty f \leq \int_q^\infty v$. И поскольку $\int_q^\infty u = \sum_{n \geq q+1} f(n)$, а $\int_q^\infty v = \sum_{n \geq q} f(n)$, то $\sum_{n \geq q} f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_q^\infty f < \infty$. ▶

Упражнения. 1. При каких s ряды $(\frac{1}{n^s})$ и $(\frac{1}{n(\ln n)^s})$ суммируемы?

2. Последовательность $s_n := (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \ln n$ сходится к числу $c \in [1/2, 1]$.

(комментарий: неизвестно, является ли число Эйлера c рациональным).

§ 11.7. Повторный интеграл

В этом и следующем параграфах $X = \mathbb{R}^k$, $Y = \mathbb{R}^l$, $XY = X \times Y = \mathbb{R}^{k+l}$, $x \in X$, $y \in Y$, $(x, y) \in XY$.

Интегральную норму функции $f(x)$ переменной $x \in X$, будем обозначать $\|f(x)\|_X$. Аналогичный смысл имеет выражение $\|g(y)\|_Y$. Таким образом, если $f(x, y)$ — функция на XY , то выражение $\|f(x, y)\|_Y$ следует трактовать как $\mathbb{R}$ -значную функцию переменной $x \in X$.

Лемма о повторной норме. Для каждой функции $f : XY \rightarrow E$ справедливо неравенство

$$\|(\|f(x, y)\|_Y)\|_X \leq \|f(x, y)\|_{XY}.$$

◀ Пусть $s \geq 0$ — какая-либо интегральная оценка функции $f(x, y)$, которой соответствует каскад ступенчатых функций на XY $\varrho_0(x, y) \leq \dots \leq \varrho_n(x, y) \leq \dots \leq \varrho$ таков, что

$$|f(x, y)| \leq \lim_n \varrho_n(x, y) \quad \forall (x, y) \in XY; \quad \lim_n \int_{XY} \varrho_n(x, y) d(x, y) \leq s.$$

Поскольку для каждого $x \in X$ все функции последовательности ϱ переменной y ступенчатые и $|f(x, y)| \leq \lim_n \varrho_n(x, y) \quad \forall y \in Y$, то число $\lim_n \int_Y \varrho_n(x, y) dy$ служит интегральной оценкой функции $f(x, y)$ переменной y .

Следовательно, $\forall x \in X \quad \|f(x, y)\|_Y \leq \lim_n \int_Y \varrho_n(x, y) dy$.

Для каждого номера n положим $\sigma_n(x) := \int_Y \varrho_n(x, y) dy$. Теперь предыдущее неравенство принимает вид

$$\|f(x, y)\|_Y \leq \lim_n \sigma_n(x) \quad \forall x \in X.$$

И поскольку функции $\sigma_n(x)$ ступенчатые и образуют возрастающую последовательность, то число $\lim_X \int \sigma_n(x) dx$ является интегральной оценкой функции $\|f(x, y)\|_Y$. Значит,

$$\begin{aligned} \|\|f(x, y)\|_Y\|_X &\leq \lim_X \int \sigma_n(x) dx = \\ &= \lim_X \int \left(\int_Y \varrho_n(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{ПТФ}}{=} \lim_n \int_{XY} \varrho_n \leq s. \end{aligned}$$

А так как полученное неравенство верно для каждой интегральной оценки s функции f , то $\|h(x)\|_X \leq \|f\|_{XY}$. ►

Теорема Фубини (для произведения). Если функция $f(x, y)$ интегрируема на пространстве XY , то

1) почти для каждого $x \in X$ функция $f(x, y)$ переменной y интегрируема на пространстве Y ;

2) функция $g(x) := \int_Y f(x, y) dy$ переменной x интегрируема на пространстве X ;

$$3) \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_{XY} f(x, y) d(x, y).$$

◀ Поскольку f интегрируема на XY , то найдётся такая последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x, y)$, что

$$a) \|f - \varphi_n\|_{XY} < 2^{-n}; \quad b) \int_{XY} f = \lim_n \int_{XY} \varphi_n.$$

По лемме о повторной норме $\sum_n \|(\|f - \varphi_n\|_Y)\|_X \leq \sum \|f - \varphi_n\|_{XY} < 2$. Отсюда согласно лемме о нормальных рядах

$$\forall x \in X \quad \|f(x, y) - \varphi_n(x, y)\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а так как каждая функция $\varphi_n(x, y)$ переменной y ступенчатая при любом $x \in X$ (ПТФ), то согласно определению интеграла

1) $\forall x \in X$ функция $f(x, y)$ переменной y интегрируема на Y , причём $\int_Y f(x, y) dy \stackrel{a}{=} \lim_n \int_Y \varphi_n(x, y) dy$.

Пусть $g(x) := \int_Y f(x, y) dy$ и $\psi_n(x) := \int_Y \varphi_n(x, y) dy$. Тогда

$$\|g(x) - \psi_n(x)\|_X = \left\| \int_Y (f(x, y) - \varphi_n(x, y)) dy \right\|_X \leq \left\| \int_Y |f(x, y) - \varphi_n(x, y)| dy \right\|_X =$$

$$= \left\| \|f(x, y) - \varphi_n(x, y)\|_Y \right\|_X \stackrel{\text{ЛПН}}{\leq} \|f - \varphi_n\|_{XY} < 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

и так как функция $\psi_n(x)$ ступенчатая (ПТФ), то согласно лемме о сходимости по норме

2) функция $g(x) = \int_Y f(x, y) dy$ переменной x интегрируема на X и

$$\begin{aligned} 3) \int_X g(x) dx &= \lim \int_X \left(\int_Y \varphi_n(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{ПТФ}}{=} \\ &= \lim \int_{XY} \varphi_n(x, y) dx dy \stackrel{b}{=} \int_{XY} f(x, y) dx dy. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Упражнения. 1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на XY , то для неё определены и равны следующие три интеграла: $\int_{XY} f, \int_X \int_Y f, \int_Y \int_X f$.

2. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на пространстве XYZ , то определены и равны друг другу следующие 13 интегралов: $\int_{XYZ} f, \int_X \int_{YZ} f, \int_Y \int_{XZ} f, \int_Z \int_{XY} f, \int_X \int_Y \int_Z f, \dots$

$\int_Y \int_{XZ} f, \int_Z \int_{XY} f, \int_X \int_Y \int_Z f, \dots$

«Контрпример». Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ и f — функция на XY , определяемая следующими условиями:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y > 0, \ x < y < x + 1 \\ -1 & y > 0, \ x + 1 < y < x + 2 \\ 0 & \end{cases}$$

Для этой функции определены оба повторных интеграла, но $\int_Y \left(\int_X f dx \right) dy =$

0, а $\int_X \left(\int_Y f dy \right) dx = -1$.

Не опровергает ли сей пример теорему Фубини?

Пусть U — произвольное подмножество пространства XY . Для каждого $x \in X$ положим $U_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in U\}$. Кроме того, положим $U' := \{x \in X \mid U_x \neq \emptyset\}$. Иначе: $U' = \pi_X(U)$, а $U_x = \pi_Y(U \cap (\{x\} \times Y))$, где

π_X и π_Y — проекции декартова произведения XY на первый и второй сомножители соответственно.

Теорема Фубини (для подмножеств произведения). Если функция $f(x, y)$ интегрируема на множестве $U \subset XY$, то

1) почти для каждого $x \in X$ функция $f(x, y)$ переменной y интегрируема на множестве U_x ;

2) функция $g(x) = \int_{U_x} f(x, y) dy$ переменной x интегрируема на множестве U' ;

$$3) \int_{U'} \left(\int_{U_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_U f(x, y) d(x, y).$$

◀ Так как функция $f(x, y)\chi_U(x, y)$ интегрируема на XY , то согласно пункту 1 предыдущей теоремы почти для каждого $x \in X$ функция $f(x, y)\chi_U(x, y)$ переменной x интегрируема на Y . И поскольку $\chi_U(x, y) = \chi_{U_x}(y)$ при любых $x \in X$ и $y \in Y$, то почти для каждого $x \in X$ функция $f(x, y)\chi_{U_x}(y)$ переменной y интегрируема на Y , что равносильно интегрируемости на U_x функции $f(x, y)$ переменной y . А так как $\int_{U_x} f(x, y) dy = \int_Y f(x, y)\chi_{U_x}(y) dy$, то в силу пункта 2 предыдущей теоремы функция $g(x)$ интегрируема на X и согласно пункту 3 предыдущей теоремы $\int_X g(x) dx = \int_{XY} f(x, y)\chi_{U_x}(y) dx dy = \int_U f(x, y) dx dy$. Остаётся заметить, что функция g равна нулю вне множества U' и потому $\int_X g(x) dx = \int_{U'} g(x) dx$. ▶

Теорема Тонелли. Если функция $f(x, y)$ неотрицательна и измерима на множестве $U \subset XY$, то

1) почти для каждого $x \in X$ функция $f(x, y)$ переменной y неотрицательна и измерима на множестве U_x ;

2) функция $g(x) := \int_{U_x} f(x, y) dy$ переменной x неотрицательна и измерима на множестве U' ;

$$3) \int_{U'} \left(\int_{U_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_U f(x, y) dx dy.$$

◀ Рассмотрим какую-нибудь последовательность h_n неотрицательных интегрируемых функций, сходящуюся к ∞ в каждой точке (x, y) (например: $h_n = n\chi_{Q_n}$, $Q_n = [-n, n]^{k+l}$) и положим $f_n := \text{cut}(h_n, f)$. Согласно теореме о срезке каждая функция f_n интегрируема на U , а по лемме о непрерывности срезки $f_n(x, y) \nearrow f(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in XY$. Поэтому согласно теореме Фату $\lim_n \int_U f_n dx dy = \int_U f dx dy$.

Согласно пункту 1 теоремы Фубини для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ най-

дётся такое пренебрежимое множество $Z_n \subset X$, что для каждого $x \in X \setminus Z_n$ функция $f_n(x, y)$ переменной y интегрируема на множестве U_x .

Множество $Z := \bigcup_n Z_n$ пренебрежимо в пространстве X и для каждого $x \in X \setminus Z$ при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n(x, y)$ переменной y интегрируема на множестве U_x . А так как $f_n(x, y) \nearrow f(x, y)$, то согласно теореме Фату 1) для каждого $x \in X \setminus Z$ функция $f(x, y)$ переменной y измерима на U_x и $g_n(x) := \int_{U_x} f_n(x, y) dy \nearrow \int_{U_x} f(x, y) dy = g(x)$.

Поскольку каждая функция g_n интегрируема на множестве U' (теорема Фубини), то согласно теореме Фату

2) функция g измерима на U' и

$$\begin{aligned} 3) \int_{U'} g(x) dx &= \lim_n \int_{U'} g_n(x) dx = \lim_n \int_{U'} \left(\int_{U_x} f_n(x, y) dy \right) dx = \\ &= \lim_n \int_U f_n(x, y) dx dy = \int_U f(x, y) dx dy. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Используя введённую в § 11.6 терминологию, получаем следующее соединение двух предыдущих теорем.

Теорема Фубини — Тонелли. Если интеграл $\int_U f(x, y) d(x, y)$ определён, то

1) почти для каждого $x \in X$ определён интеграл $\int_{U_x} f(x, y) dy$,

2) для функции $g(x) := \int_{U_x} f(x, y) dy$ определён интеграл $\int_{U'} g(x) dx$ и

$$3) \int_{U'} \left(\int_{U_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_U f(x, y) d(x, y).$$

Признак измеримости функций вида $f(x)g(y)$. Функция $f(x)g(y)$ переменных $x \in X$ и $y \in Y$ измерима на пространстве XY , если функции $f(x)$ и $g(y)$ измеримы на пространствах X и Y соответственно.

◀ 0) Если функции $f(x)$ и $g(y)$ ступенчатые, то и функция $f(x)g(y)$ ступенчатая.

1) $\|f(x)g(y)\|_{XY} \leq \|f(x)\|_X \|g(y)\|_Y$. ◁ Если числа s и t служат интегральными оценками функций $f(x)$ и $g(y)$, то st будет интегральной оценкой функции $f(x)g(y)$. ▷

2) Функция $f(x)g(y)$ интегрируема на XY , если $f(x)$ интегрируема на X , а $g(y)$ — на Y . ◁ Функции f и g интегрируемы. Значит, имеются такие последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(y)$, что $\lim_n \|f -$

$\varphi_n \|_X = 0 = \lim_n \|g - \psi_n\|_Y$. Отсюда и из пункта 1 имеем

$$\begin{aligned} \|fg - \varphi_n \psi_n\|_{XY} &= \|fg - \varphi_n g + \varphi_n g - \varphi_n \psi_n\|_{XY} \leq \\ &\leq \|(f - \varphi_n)g\|_{XY} + \|\varphi_n(g - \psi_n)\|_{XY} \leq \|f - \varphi_n\|_X \|g\|_Y + \|\varphi_n\|_X \|g - \psi_n\|_Y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $f(x)g(y)$ интегрируема на XY . ▸

3) Любая измеримая функция является поточечным пределом некоторой сходящейся всюду последовательности интегрируемых функций. ►

Лемма о поднятии. Если функция $f(x)$ измерима на пространстве X , то функция $f(x, y) := f(x)$ измерима на пространстве XY .

◀ Функция $g(y) := 1 \ \forall y \in Y$ измерима на Y , а $f(x, y) = f(x)g(y)$. ►

Упражнения. 1. Если Z — пренебрежимое подмножество пространства X , то множество $Z \times Y$ пренебрежимо в XY .

2. Если функция $f(x, y)$ измерима на множестве $U \subset XY$ и почти для каждого $x \in X$ определён интеграл $g(x) = \int_{U_x} f(x, y) dy$, то функция $g(x)$ измерима.

§ 11.8. Основы теории меры

Систему всех измеримых множеств пространства X будем обозначать символом $\Sigma(X)$.

Операции над измеримыми множествами. Объединение и пересечение последовательности измеримых множеств, разность измеримых множеств, а также декартово произведение измеримых множеств суть измеримые множества:

- а) если $S_n \in \Sigma(X) \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_n S_n \in \Sigma(X)$ и $\bigcap_n S_n \in \Sigma(X)$;
- б) если $S, T \in \Sigma(X)$, то $(S \setminus T) \in \Sigma(X)$;
- в) если $A \in \Sigma(X)$, $B \in \Sigma(Y)$, то $(A \times B) \in \Sigma(X \times Y)$.

◀ $\chi_{\bigcup S_n} = \text{cut}(1, \sum \chi_{S_n})$; $\chi_{\bigcap S_n} = \lim_n (\chi_{S_0} \times \cdots \times \chi_{S_n})$; $\chi_{S \setminus T} = \chi_S - \chi_{S \cap T}$; $\chi_{S \times T}(x, y) = \chi_S(x) \chi_T(y)$. Остаётся воспользоваться подходящими утверждениями предыдущих двух параграфов. ►

Совокупность подмножеств Σ множества M , обладающую свойствами a и b , обычно называют σ -кольцом.

Функциональный признак измеримости подмножеств. Множество, определяемое не более чем счётной системой уравнений и неравенств, левые и правые части которых суть измеримые функции, измеримо.

◀ Если M — множество определяемое последовательностью соотношений $\mathcal{R}_n(x)$, то $M = \bigcap_n M_n$, где $M_n = \{x \in X \mid \mathcal{R}_n(x)\}$. Поэтому

достаточно доказать лемму в случае, когда M задано либо уравнением, либо неравенством.

Пусть f — измеримая на X функция. Если $U = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, то $\chi_U = 1 - \text{sign } |f(x)|$.

Если $V = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$, то $\chi_V = \text{sign } \max(f(x), 0)$.

Если $W = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$, то $W = U \cup V$.

Остаётся заметить, что функции $|f|$, $\max(f, 0)$, $\text{sign } f$ измеримы, если измерима функция f (§ 11.6). ►

Следствия. 1. Открытые и замкнутые части пространства $\mathbb{R}^k$ измеримы.

2. График измеримой функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ является пренебрежимым подмножеством пространства $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, если $l \geq 1$.

3. Всякое *гладкое* k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ пренебрежимо, если $k < n$.

Информация. На плоскости есть линии (одномерные многообразия) положительной площади.

Аддитивные свойства интеграла. Если функция f интегрируема или неотрицательна и измерима на X , то для каждого измеримого множества $A \subset X$ определён интеграл $\int_A f$, причём

$$1) \int_{A \cup B} f + \int_{A \cap B} f = \int_A f + \int_B f \quad \forall A, B \in \Sigma(x),$$

2) для любой дизъюнктивной последовательности $A_n \in \Sigma(x)$

$$\int_{\bigcup A_n} f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f$$

3) для любой возрастающей последовательности $U_n \in \Sigma(x)$

$$\int_{\bigcup U_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_n} f.$$

◀ Следствия формул $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$, $\chi_{\bigcup A_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{A_n}$

$$\chi_{\bigcup U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{U_n},$$

а также теорем Лебега и Фату. ►

Мерой (Лебега) произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^k$ будем называть число $\mu_k S := \|\chi_S\|$. При $k = 1$ меру $\mu_k S$ обычно называют длиной, при $k = 2$ — площадью, а при $k = 3$ — объёмом фигуры (множества) S . Часто вместо μ_k будем писать просто μ , если ясно, чему равно k .

Основные свойства меры. 0. Мера всякого сегмента пространства X совпадает с его примитивной мерой.

1. *Монотонность*: если $S \subset T \subset X$, то $0 \leq \mu S \leq \mu T$.

2. Для любой последовательности множеств $S_n \subset X$

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu S_n.$$

3. Если A измеримо, то $\mu A = \int_A 1 dx$.

4. *Счётная аддитивность меры*: для любой дизъюнктивной последовательности измеримых множеств (A_n) пространства X справедлива формула

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu A_n.$$

5. Для любой возрастающей последовательности $B_0 \subset B_1 \subset \dots$ измеримых множеств справедлива формула $\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$.

6. Для любой убывающей последовательности $U_0 \supset U_1 \supset \dots$ измеримых множеств конечной меры справедлива формула $\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n)$. Без предположения о конечности меры множеств U_n утверждение неверно. Привести пример.

Геометрическая интерпретация меры. Подмножество B пространства X , будем называть примитивным, если оно является объединением конечной дизъюнктивной системы сегментов, т.е. если его индикатор есть ступенчатая функция. Мера μB такого множества равна сумме мер объединяемых сегментов и равна $\int_X \chi_B$. Число v назовём объёмной оценкой множества $W \subset X$, если найдётся такая возрастающая последовательность примитивных множеств $B_0 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$, покрывающая W , что $\mu B_n \leq v \forall n$. Нижнюю грань совокупности всех объёмных оценок множества W вслед за классиками (Жордан, Борель, Лебег) назовём внешней мерой множества W и обозначим символом $\mu^* W$.

Как видим, в определениях отражается параллель между интегральной нормой и внешней мерой.

Теорема $\forall W \subset X \mu^* W = \mu W$.

◀ $\mu W \leq \mu^* W$, ибо каждая объёмная оценка множества W является интегральной оценкой функции χ_W .

Покажем, что $\mu^* W \leq \mu W$. Пусть h — какая-либо интегральная оценка функции χ_W и $\varrho_0 \leq \dots \leq \varrho_n \dots$ — такая последовательность ступенчатых функций, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) \geq \chi_W(x) \forall x \in X$, а $\int_x \varrho_n \leq h \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $t > 1$. Для каждого n положим $B_n := \{x \in X \mid t\varrho_n(x) \geq 1\}$.

1) Множество B_n примитивное, поскольку функция $t\varrho_n$ ступенчатая.

2) Последовательность B_n возрастает и покрывает множество W , ибо $\forall x \in W \lim_n t\varrho_n(x) > 1$.

3) $\mu B_n = \int \beta_n \leq \int t\varrho_n \leq th \forall n$.

Пункты 1, 2 и 3 говорят о том, что число th является объёмной оценкой множества W . Следовательно, $\mu^*W \leq th$ для любой интегральной оценки h и любого $t > 1$. Значит, $\mu^*W \leq \|\chi_W\| = \mu W$ ► (ср. с доказательством принципа исчерпывания).

Мера и операции в $\mathbb{R}^k$.

1. Мера инвариантна относительно параллельных переносов: для каждого множества $S \subset \mathbb{R}^k$ и вектора $v \in \mathbb{R}^k$ $\mu S = \mu(v + S)$.

2. Для каждого множества $S \subset \mathbb{R}^k$ и любого числа $r \in \mathbb{R}$ имеем $\mu(rS) = |r|^k \mu S$.

«Пример» Витали неизмеримого множества.

Множество S числовой прямой вида $S := a + \mathbb{Q}$, где $a \in \mathbb{R}$, назовём рациональным классом. Заметив, что разные рациональные классы не пересекаются, выберем в каждом из них ровно одну точку, лежащую на отрезке $[0, 1]$ и образуем из этих точек множество V . (Это можно сделать, согласно аксиоме выбора).

Покажем, что множество V неизмеримо.

◄ Множество $\mathbb{Q}_1$ рациональных точек отрезка $[-1, 1]$ счётно, и потому имеется биекция (нумерация) $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_1$. Пусть $V_n := q_n + V$ и $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Нетрудно проверить, что

1) $V_i \cap V_j = \emptyset$, если $i \neq j$. ◄ Если вдруг $\exists x \in V_i \cap V_j$, то в множестве V найдутся такие точки v_i и v_j , что $x = q_i + v_i = q_j + v_j$. Следовательно, $v_j - v_i = q_i - q_j \neq 0$. Значит, отмеченные точки v_i, v_j различны и принадлежат одному рациональному классу $v_i + \mathbb{Q}$, что невозможно.►

2) $[0, 1] \subset U \subset [0, 2]$,

3) $\mu V_n = \mu V \forall n$.

Допустим теперь, что V измеримо. Тогда каждое V_n измеримо и в силу счётной аддитивности меры $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu V_n = \mu U \leq 2$. А так как $\mu V_n = \mu V \forall n$, то $\mu V_n = 0$. Следовательно, $0 = \mu U \geq \mu[0, 1]$. Абсурд! ►

Формула Кавальери — Лебега. Пусть h — неотрицательная измеримая на $B \subset X$ функция и $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \mid x \in B, 0 < y < h(x)\}$ —

подграфик функции $h : B \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_B h(x) dx = \mu_{k+1} U = \int_0^\infty \mu_k U_y dy,$$

где $U_y := \{x \in B \mid h(x) > y\}$ — горизонтальный срез множества U .

$$\blacktriangleleft \mu_{k+1} U = \int_U 1 d(x, y) \stackrel{\text{TT}}{=} \int_{U'} \left(\int_{U_x} 1 dy \right) dx = \int_B (\mu_1]0, h(x)[) dx = \int_B h(x) dx.$$

$$\text{С другой стороны } \mu_{k+1} U = \int_U 1 d(x, y) \stackrel{\text{TT}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{U_y} 1 dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}_+} (\mu_k U_y) dy.$$

Приведенные выкладки законны, ибо множество U измеримо, поскольку является множеством решений системы неравенств $0 < y < h(x)$, рассматриваемой на множестве $B \times \mathbb{R}$, а функции 0 , y и $h(x)$ переменных x, y измеримы на $B \times \mathbb{R}$ (лемма о поднятии). $\blacktriangleright$

Упражнение. При каких $s \in \mathbb{R}$ функция $f(x) := |x|^s$, $x \in \mathbb{R}^k$ интегрируема на шаре $B = B_1(0)$? на дополнении к этому шару?

Абсолютная непрерывность интеграла как функции области интегрирования. Если функция $f : X \rightarrow E$ интегрируема, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma(X) \left(\mu A < \delta \Rightarrow \left| \int_A f \right| < \varepsilon \right).$$

$\blacktriangleleft$ для каждого $\varepsilon > 0$ имеется такая ступенчатая функция φ , что $\int_X |f - \varphi| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2 \sup |\varphi|}$.

Если $A \in \Sigma(X)$ и $\mu A \leq \delta$, то $\int_A |f| \leq \int_A |f - \varphi| + \int_A |\varphi| \leq \int_X |f - \varphi| + \int_A \sup |\varphi| < \frac{\varepsilon}{2} + \sup |\varphi| \mu A < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. $\blacktriangleright$

Информация. Теорема Радона — Никодима.

Если функция $\Phi : \Sigma(X) \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна, т.е.

$$(\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B) - \Phi(A \cap B)),$$

и абсолютно непрерывна, то найдётся такая интегрируемая функция f , что

$$\Phi(A) = \int_A f(x) dx \quad \forall A \in \Sigma(X),$$

причём всякая функция, для которой выполнена эта формула совпадает с f почти всюду.

Лемма о производной интеграла как функции множества. Если интегрируемая функция f почти непрерывна в точке $p \in \mathbb{R}^k$, то для любой последовательности измеримых множеств B_n положительной меры, сходящейся к точке p ($\text{diam}(\{p\} \cup B_n) \rightarrow 0$), имеет место формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu B_n} \int_{B_n} f(x) dx = f(p).$$

§ 11.9. Интегралы, зависящие от параметра

В этом параграфе исследуются функции вида $I(x) = \int_T f(t, x) dt : X \rightarrow E$, где $T \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^k$, а $f(t, x)$ — такая E -значная функция, что при любом $x \in X$ функция $f(t, x)$ переменной t измерима на множестве T . (Популярная ситуация: $E = \mathbb{R}$, T и X — промежутки числовой прямой.)

Лебеговы интегралы, зависящие от параметра. Говорят, что *функция $f(t, x)$ обладает интегрируемой на T мажорантой, не зависящей от параметра $x \in X$* , если есть такая интегрируемая на T функция $h(t)$, что $|f(t, x)| \leq h(t)$ при любом $x \in X$ и почти при любом $t \in T$.

Обобщённая теорема Лебега. Если

а) $f(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow p|X} g(t) \quad \forall t \in T$;

б) функция $f(t, x)$ обладает интегрируемой на T мажорантой, не зависящей от параметра $x \in X$;

то функции $g(t)$ и $f(t, x)$ переменной t интегрируемы на T при любом $x \in X$ и

$$\int_T f(t, x) dt \xrightarrow{x \rightarrow p|X} \int_T g(t) dt.$$

◀ Следствие признака интегрируемости Лебега, критерия Гейне и классической теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. ▶

Признаки непрерывности интеграла как функции параметра

Основной признак. Пусть функция $f(t, x)$ такова, что

а) почти для каждого $t \in T$ функция $f(t, x)$ переменной x непрерывна в точке $p \in X$,

б) функция $f(t, x)$ обладает интегрируемой на T мажорантой, не зависящей от параметра $x \in X$.

Тогда при любом $x \in X$ функция $f(t, x)$ переменной t интегрируема на T , причём функция $I(x) := \int_T f(t, x) dt$ непрерывна в точке p .

◀ Прямое следствие определения непрерывности и обобщённой теоремы Лебега. ▶

Компактный признак. Если множество T компактно, а функция $f(t, x)$ непрерывна на $T \times X$, то при любом $x \in X$ функция $f(t, x)$ переменной t интегрируема на T , а функция $I(x) = \int_T f(t, x) dt : X \rightarrow E$ непрерывна.

◀ Пусть $p \in X$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность $x_n \in X$, сходящуюся к p , и заметим, что множество $K := \{x_0, \dots, x_n, \dots, p\}$ компактно. Поскольку множество $T \times K$ компактно, а функция $f(t, x)$ на нём непрерывна, то имеется такое число c , что $|f(t, x)| \leq c$ для каждого $t \in T$ и любого $x \in K$. Следовательно, константа c служит интегрируемой на T мажорантой, не зависящей от параметра $x \in K$. Согласно теореме Лебега функция $f(t, x)$ интегрируема на T при любом $x \in K$, причём $\int_T f(t, x_n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_T f(t, p) dt$. Согласно теореме Гейне $\int_T f(t, x) dt \xrightarrow{x \rightarrow p} \int_T f(t, p) dt$. Значит, функция $I(x)$ непрерывна в каждой точке $p \in X$. ▶

Употребляемая в математической речи фраза «функция $\varphi(x)$ непрерывна (дифференцируема) на множестве X » допускает следующие два толкования:

- 1) функция $\varphi : \text{Dom } \varphi \rightarrow E$ непрерывна в каждой точке множества X ;
- 2) функция $\varphi : X \rightarrow E$ непрерывна (дифференцируема).

Однако если X — открытая часть объемлющего пространства, то эти трактовки эквивалентны.

Правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметра

Основное правило. Пусть X — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^k$ и $f(t, x)$ — такая функция, что

- а) почти при любом $t \in T$ функция $f(t, x)$ переменной x дифференцируема на множестве X ;
- б) функция $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ обладает интегрируемой на T мажорантой $h(t)$, не зависящей от параметра $x \in X$;
- с) имеется такая точка $q \in X$, что функция $f(t, q)$ переменной t интегрируема на T .

Тогда 1) при любом $x \in X$ функция $f(t, x)$ переменной t интегрируема на множестве T ,

- 2) функция $I(x) := \int_T f(t, x) dt$ дифференцируема на X , причём на X справедлива *формула Лейбница*

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_T f(t, x) dt = \int_T \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt.$$

◀ 1) Согласно условию а и лагранжевой оценке приращения почти для каждого $t \in T$ и любых $x, y \in X$ справедливо неравенство

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq h(t)|x - y|_1. \quad (1)$$

В силу признака Лебега функция $f(t, x) - f(t, y)$ переменной t интегрируема на T при любых $x, y \in X$. А так как $f(t, x) = (f(t, x) - f(t, q)) + f(t, q)$, то при любом $x \in X$ функция $f(t, x)$ переменной t интегрируема на T т. е. функция $I(x)$ определена на множестве X .

2) Пусть $p \in X$. Согласно условию а) почти всюду на T при любом $x \in X$ имеет место равенство

$$f(t, x) - f(t, p) - \left(\frac{\partial f(t, p)}{\partial x} \right) \cdot (x - p) = \alpha(t, x)|x - p|_1, \quad (2)$$

где функция $\alpha(t, x)$ переменной x непрерывна в точке p почти при всяком $t \in T$ и $\alpha(t, p) = 0$. Отсюда и из неравенства (1) имеем

$$|\alpha(t, x)| \cdot |x - p|_1 \leq |f(t, x) - f(t, p)| + \left| \frac{\partial f(t, p)}{\partial x} \cdot (x - p) \right| \leq 2h(t)|x - p|_1$$

и, стало быть, $|\alpha(t, x)| \leq 2h(t) \forall t \in T \forall x \in X$. Поэтому согласно основному признаку непрерывности интеграла функция $A(x) := \int_T \alpha(t, x) dt$ непрерывна в точке p и $A(p) = 0$.

Наконец, в равенстве (2) все функции интегрируемы на T и потому

$$I(x) - I(p) - \left(\int_T \frac{\partial f(t, p)}{\partial x} dt \right) \cdot (x - p) = A(x)|x - p|_1 \xrightarrow{x \rightarrow p} o(x - p).$$

Итак, функция I дифференцируема в p и $\frac{\partial I}{\partial x}(p) = \int_T \frac{\partial f(t, p)}{\partial x} dt \forall p \in X$. ►

«Контрпримеры».

$$1. \quad I(x) = \int_0^\infty A(t, x) dt, \quad \text{где } A(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \arctan(xt).$$

В этом случае $\int_0^\infty \frac{\partial A(t, x)}{\partial x} dt = 0$ при $x \neq 0$. Однако функция $I(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x$ не только не дифференцируема, но даже не является непрерывной.

$$2. \quad J(x) = \int_0^\infty B(t, x) dt, \quad \text{где } B(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\arctan(xt)}{t}.$$

В этом случае бесконечно гладкие функции $B(t, x)$ и $\frac{\partial B(t, x)}{\partial x}$ интегрируемы на $T = \mathbb{R}_+$ при любом $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = B(t, x)|_{t=0}^{t=\infty} = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. В то же время

$$\int_0^\infty \frac{\partial B(t, x)}{\partial x} dt = \frac{\partial B(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{1 + (xt)^2} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1 - |\operatorname{sign} x| \neq \frac{\partial J(x)}{\partial x} = 1.$$

Утверждение. На интервале $X =]0, \infty[$ гамма-функция

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

бесконечно дифференцируема и $D^n \Gamma(x) = \Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n dt$. В частности, на интервале $]0, \infty[$ гамма-функция выпукла.

◀ Для функции $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n$ нет интегрируемой на $T =]0, \infty[$ мажоранты, не зависящей от параметра $x \in X$, ибо $\sup\{|f(t, x)| \mid x \in X\} = \infty$ при каждом $t \in T$. Однако, интегрируемая мажоранта, не зависящая от параметра $x \in [a < b]$ существует, если $0 < a < b < \infty$. В мажоранты годится функция $h(t) = e^{-t} |\ln t|^n \cdot \max\{t^{a-1}, t^{b-1}\}$. ▶

Компактное правило. Если множество T компактно, X открыто в $\mathbb{R}^k$, а функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ непрерывны на $T \times X$, то справедливо заключение основного признака дифференцирования.

Следствие. Если T компактно, а функция $f(t, x) : T \times X \rightarrow E$ лежит в классе C^r , то функция $I(x) = \int_T f(t, x) dt : X \rightarrow E$ лежит в классе C^r .

Правило дифференцирования интеграла с переменным отрезком интегрирования. Пусть $T \subset \mathbb{R}$ — интервал, X — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, а функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ непрерывны на $T \times X$. Тогда функция $I(x, a, b) := \int_a^b f(t, x) dt$ переменных x, a, b дифференцируема на $x \times T \times T$ и справедлива формула

$$dI(x, a, b) = \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt \right) dx - f(a, x) da + f(b, x) db.$$

§11.10. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

В следующих трёх теоремах символ $\int_a^b$ обозначает операцию интегрирования по Ньютону.

Будем говорить, что интеграл $\int_a^b f(t, x) dt$ *сходится (в точке b) равномерно на множестве S* , если он определён при любом $x \in S$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая точка $b^* \in]a, b[$, что $\left| \int_c^b f(t, x) dt \right| < \varepsilon$ для каждого $x \in S$ и любого $c \in]b^*, b[$.

Признак непрерывности несобственного интеграла. Предположим, что функция $f(t, x)$ непрерывна на $T \times X$, где $T = [a, b[\subset \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^k$. Если интеграл $I(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ равномерно сходится на каждом компакте $K \subset X$, то функция $I(x)$ непрерывна.

► Пусть $c_n \in T$ — какая-либо последовательность, сходящаяся к b . Согласно компактному признаку непрерывности интеграла функция $I_n(x) := \int_a^{c_n} f(t, x) dt$ непрерывна на X при любом $n \in \mathbb{N}$. А так как последовательность $I_n(x)$ сходится равномерно к $I(x)$ на каждом компакте $K \subset X$, то функция $I(x)$ непрерывна на всяком таком компакте. Теперь ясно, что и на X она тоже непрерывна. [Для каждой последовательности $X_n \in X$, сходящейся к $p \in X$, рассмотрите компакт $K = \{x_0, \dots, x_n, \dots, p\}$; ср. с доказательством компактного признака непрерывности]. ►

Правило дифференцирования несобственного интеграла.

Пусть $T = [a, b[\subset \mathbb{R}$, X — открытая выпуклая часть пространства $\mathbb{R}^k$. Если

а) на $T \times X$ непрерывны функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$,

б) интеграл $G(x) := \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt$ равномерно сходится на X ,

с) есть такая точка $q \in X$, для которой определён интеграл $\int_a^b f(t, q) dt$;

то функция $I(x) := \int_a^b f(t, x) dt$ переменной x дифференцируема на X и выполняется формула Лейбница

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt.$$

◀ Пусть $c_n \in T$ — какая-либо последовательность, сходящаяся к b .

1) По условию а) и компактному правилу дифференцирования интеграла при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $I_n(x) := \int_a^{c_n} f(t, x) dt$ дифференцируема на X , причём $\frac{\partial I_n(x)}{\partial x} = G_n(x) := \int_a^{c_n} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt$.

2) Благодаря условию б) последовательность $G_n(x)$ сходится к функции $G(x)$ равномерно на X .

3) По условию с) и свойству непрерывности интеграла как функции верхнего предела $I_n(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(q)$.

Итак: для последовательности функций I_n выполнены все три условия теоремы о пределе производных. Стало быть, $I_n(x)$ сходится к некоторой дифференцируемой на X функции $H(x)$. При этом $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = G(x)$. Остаётся заметить, что $H(x) = \int_a^b f(t, x) dt$. ▶

Правило интегрирования несобственного интеграла. Пусть функция $f(t, x)$ такова, что

- а) определены и конечны интегралы $\int_X \int_a^b f(t, x) dt dx$ и $\int_a^b \int_X f(t, x) dx dt$;
- б) на интервале $]a < b[$ есть такая точка b^* , что при всех $c \in [b^*, b[$ $\int_X \int_a^c f(t, x) dt dx = \int_a^c \int_X f(t, x) dx dt$;
- в) $\int_X \int_c^b f(t, x) dt dx \xrightarrow{c \rightarrow b} 0$.

Тогда $\int_X \int_a^b f(t, x) dt dx = \int_a^b \int_X f(t, x) dx dt$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \int_a^b \int_X f(t, x) dx dt &= \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c \int_X f dx dt = \lim_{c \rightarrow b} \int_X \int_a^c f dt dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow b} \int_X \left(\int_a^b f dt - \int_c^b f dt \right) dx = \int_X \int_a^b f dt dx - 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Упражнение. Для интеграла Дирихле справедливы следующие равенства

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt} \sin t dx dt \stackrel{?}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt} \sin t dt dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Последние три утверждения про несобственный интеграл верны для любой операции интегрирования вида $\int_a^b \varphi dt$, обладающей следующими свойствами:

- 1) если в формуле $\int_a^c f dt + \int_c^b f dt = \int_a^b f dt$ определены какие-либо два интеграла, то определён третий и формула верна;
- 2) $\int_a^b f dt = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f dt$;
- 3) если функция φ непрерывна на ограниченном отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b \varphi dt$ определён.

§11.11. Усреднения

Пусть f и g — измеримые функции на пространстве $\mathbb{R}^k$, причём одна из них E -значная, а другая скалярнозначная. Случай $E = \mathbb{R}$ не исключается. Свёрткой функций f и g называют функцию $f*g$, определяемую формулой

$$f*g|_x := \int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g(y)dy.$$

Упражнения. 1. Свёртка симметрична: $f*g|_x = g*f|_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$.

2. $\|f*g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$

и, следовательно, свёртка интегрируемых функций интегрируема.

3. Если f интегрируема, а g ограничена, то $f*g$ непрерывна.

Правило дифференцирования свёртки. Пусть функция f локально интегрируема, а функция g принадлежит классу C^m , причём одна из них имеет компактный носитель. Тогда $f*g \in C^m$ и для каждого мультииндекса α порядка $\leq m$ $D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g$.

◀ Достаточно установить, что заключения теоремы выполнены внутри любого шара $X := B_r$ радиуса r с центром $0 \in \mathbb{R}^k$.

Пусть $Y = B_s$ — шар, вне которого одна из данных функций равна нулю.

1) Покажем, что функция $f(y)g(x-y)$ переменной y имеет интегрируемую мажоранту, не зависящую от параметра $x \in X$.

Если $f(y) = 0$, когда $y \notin Y$, то функция f , будучи локально интегрируемой, интегрируема на $\mathbb{R}^k$. Поэтому для всякого $x \in X$ и любого $y \in \mathbb{R}^k$ выполняется неравенство $|f(y)g(x-y)| \leq |f(y)|G_1$, где G_1 — наибольшее

значение непрерывной функции $|g(x-y)|$ переменных x, y на компакте $X \times Y$. Значит, $|f(y)|G_1$ — нужная мажоранта.

Если же $g(y) = 0$, когда $y \notin Y$, то $g(x-y) = 0$ при любом $x \in X$ и любом $y \notin B_{r+s}$. Следовательно, подходящей мажорантой может служить функция $\chi_{B_{r+s}}(y)|f(y)|G_2$, где G_2 — наибольшее значение функции $|g|$ на шаре B_{r+s} .

2) Согласно признаку Лебега функция $f(y)g(x-y)$ переменной y интегрируема при всех $x \in X$. Согласно основному признаку непрерывности интеграла функция $f * g$ непрерывна на любом шаре B_r . Следовательно, $f * g \in C^0$. Применяя полученный результат к паре функций $f, D^\alpha g$, видим, что каждая функция $f * D^\alpha g$ непрерывна на X , если порядок мультииндекса α не больше m .

3) Если $m > 0$, то по пункту 1) функции $f(y)g(x-y)$ и $f(y)D_i g(x-y)$ переменной y обладают интегрируемыми на $\mathbb{R}^k$ мажорантами, не зависящими от параметра $x \in X$. Согласно основному правилу дифференцирования интеграла справедлива формула $D_i(f * g)|_x = f * D_i g|_x$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ и любой внутренней точки x шара X . Вдобавок, согласно пункту 2) каждая функция $f * D_i g$ принадлежит классу C^0 . Значит, $f * g \in C^1$. По индукции заключаем, что для всякого мультииндекса α порядка $\leq m$ $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ и что функция $D^\alpha(f * g)$ непрерывна. ►

Последовательность неотрицательных функций $g_n : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ называют δ -образной, если

- а) все они сосредоточены на некотором шаре B_r ;
- б) для каждого $\varrho > 0$ последовательность g_n равномерно стремится к нулю на кольце $B_r \setminus B_\varrho$;
- в) $\int_{B_r} g_n = 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Примеры δ -образных последовательностей. В следующих примерах нормировочные константы c_n таковы, что интеграл равен единице.

$$\delta_n(x) = c_n \exp((nx)^2 - 1)^{-1} \cdot \chi_{B_{\frac{1}{n}}}(x).$$

Проверьте, что каждая функция δ_n бесконечно гладкая.

$$\xi_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \chi_{B_1}(x).$$

последние функции полиномиальны там, где они ненулевые. Это нам пригодится, когда мы будем аппроксимировать функции полиномами.

Упражнение. Доказать, что для функций ξ_n выполнены условия б) из определения δ -образности.

Теорема о сходимости усреднений. Если функция $f : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ непрерывна, то для любой δ -образной последовательности g_n последовательность усреднений $g_n * f$ сходится к f равномерно на каждом компакте $X \subset \mathbb{R}^k$.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$, B_r — шар, вне которого все функции g_n равны нулю; B_s — шар, содержащий компакт X ; C — наибольшее значение функции $|f|$ на шаре B_{s+r} ; $\varrho > 0$ — такое число, что для любых $z, x \in B_{r+s}$, условие $|z - x| \leq \varrho$, влечёт неравенство $|f(z) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (такое ϱ найдётся согласно теореме Кантора — Гейне о равномерной непрерывности); m — такой номер, что $g_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{4C\mu B_r}$ для каждой точки x кольца $K := B_r \setminus B_\rho$ и любого номера $n > m$.

Теперь для каждой точки $x \in B_s$ и любого номера $n > m$ будем иметь

$$\begin{aligned} |(g_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g_n(y)dy - f(x) \right| = \\ &= \left| \int_{B_r} f(x-y)g_n(y)dy - \int_{B_r} f(x)g_n(y)dy \right| \leq \int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy = \\ &= \int_{B_\rho} |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy + \int_K |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy \leq \\ &\leq \int_{B_\rho} \frac{\varepsilon}{2}g_n(y)dy + \int_K 2C \frac{\varepsilon}{4C\mu B_r}dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Следствие. Для любой функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ класса C^m существует такая последовательность бесконечно гладких функций $f_n : \mathbb{R}^k \rightarrow E$, что для каждого мультииндекса α порядка $\leq m$ последовательность функций $D^\alpha f_n$ сходится к функции $D^\alpha f$ равномерно на каждом компакте.

◀ Например, $f_n = \delta_n * f$, где δ_n — последовательность примера 1. ▶

Лемма о сглаживании индикатора. Для каждого $S \subset \mathbb{R}^k$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая бесконечно гладкая функция $\tau : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$, что $\tau(x) = 1$, если $x \in S$, и $\tau(x) = 0$, если $x \notin O_\varepsilon(S)$ ($O_\varepsilon(S)$ — ε -окрестность множества S .)

◀ Например, $\tau = \chi * \delta_n$, где χ — индикатор $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестности множества S , δ_n — такая функция примера 1, у которой номер $n > \frac{2}{\varepsilon}$. ▶

Лемма о C^m -расширении. Для всякой окрестности U компакта $K \subset \mathbb{R}^k$ и функции $f : K \rightarrow E$ класса C^m найдётся такая функция $f_U : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ класса C^m , что $f_U(x) = f(x)$ при $x \in K$ и $f_U(x) = 0$ вне U .

Аппроксимация полиномами в классе C^m . Для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^k$ и функции $f : K \rightarrow E$ класса C^m существует такая последовательность полиномов $P_n(x)$, что для всех мультииндексов α порядка $\leq m$ последовательность $D^\alpha P_n$ сходится к $D^\alpha f$ равномерно на K .

◀ Теорему достаточно доказать, полагая, что $K \subset U := O_{1/2}(0)$. Кроме того, благодаря лемме о C^m -расширении можно считать, что $\text{Dom } f = \mathbb{R}^k$, $f \in C^m$, $f(x) = 0$, если $x \notin U$.

Пусть ξ_n — δ -образная последовательность примера 2. Согласно теоремам о производных свёртки и о сходимости усреднений для каждого мультииндекса α порядка $\leq m$ последовательность функций $D^\alpha f * \xi_n$ сходится к функции $D^\alpha f$ равномерно на всём $\mathbb{R}^k$.

Так как функция f равна нулю вне шара U и при любых $x, y \in U$ $|x - y| < 1$, то для каждого $x \in U$ имеем

$$f * \xi_n|_x = \int_U f(y) \xi_n(x - y) dy = \int_U f(y) (1 - (x - y)^2)^n c_n dy =: P_n(x).$$

Тем самым, на открытом множестве U функция $f * \xi_n$ совпадает с полиномом $P_n(x)$. ►

§ 11.12. Интегрирование на пространствах с мерой

Пусть X — произвольное множество. Систему подмножеств $\mathcal{S}$ множества X будем называть *дробящейся*, если для каждого конечного набора $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ найдётся такая дизъюнктивная конечная система $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$, что любое множество $P \in \mathcal{A}$ является объединением некоторой подсистемы $\mathcal{B}_P \subset \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{S}$ — некоторая дробящаяся система подмножеств множества X . Функцию $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ будем называть *мерой на X* , если для всякой дизъюнктивной последовательности A_n элементов системы $\mathcal{S}$, объединение которой является элементом системы $\mathcal{S}$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu A_n.$$

Множество, на котором задана мера, называют пространством с мерой. Точнее, *пространство с мерой* — это тройка вида $(X, \mathcal{S}, \mu)$, где X — множество, $\mathcal{S}$ — некоторая дробящаяся система его подмножеств, $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ — мера на X .

Примеры. 1. $(\mathbb{R}^k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), \mu_k)$, где $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ — система сегментов пространства $\mathbb{R}^k$, а μ_k — стандартная мера сегмента.

2. $(\mathbb{R}^k, \Sigma(\mathbb{R}^k), \mu_k)$, где $\Sigma(\mathbb{R}^k)$ — система всех измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^k$, μ_k — лебегова мера.

3. $(I, I^1, 1)$, где I — произвольное множество (индексов), I^1 — система его одноточечных подмножеств, $1 : I^1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция, определяемая условием $1(\{i\}) = 1(i \in X)$ (считающая функция).

4. Пусть $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция и $T = [a < b] \subset \mathbb{R}$. Число $\sigma_g T := \lim_{t \nearrow b} g(t) - \lim_{t \nearrow a} g(t)$ называют *мерой Стильеса* полуинтервала T относительно функции g . Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{S}, \sigma_g)$, где $\mathcal{S}$ — система открытых справа полуинтервалов, является пространством с мерой. *Произведением пространств с мерой* $(X, \mathcal{A}, \alpha)$ и $(Y, \mathcal{B}, \beta)$ называется тройка $(Z, \mathcal{S}, \mu)$, где $Z = X \times Y$, $\mathcal{S} = \{\mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{B}\}$, а мера μ задаётся равенством $\mu(A \times B) = (\alpha A) \cdot (\beta B)$.

Упражнения.

1. Произведение пространств с мерой является пространством с мерой.

2. Убедиться, что все определения теории интеграла Лебега, а также формулировки всех общих теорем и их доказательства переносятся на произвольные пространства с мерой простым копированием за исключением обоснования корректности определения интеграла ступенчатой функции и принципа исчерпывания. Эти два факта выводятся с опорой на свойство дробления системы $\mathcal{S}$ и счётную аддитивность меры. Общими считаются теоремы, имеющие смысл для произвольных пространств с мерой (примеры: признак интегрируемости Лебега, теоремы Фату и Лебега о сходимости, теоремы Фубини и Тонелли).

Теорема об измеримости почти непрерывных функций является специальной, т. е. не относится к числу общих теорем. Какие ещё?

3. Всякое измеримое подмножество пространства с мерой $(X, \mathcal{S}, \mu)$ можно покрыть счётным семейством сегментов (элементов системы $(\mathcal{S})$). Если нет повода для недоразумений, то пространство с мерой обычно обозначают той же буквой, что и множество его точек.

Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой. Так как на множестве X могут рассматриваться другие меры, то во избежание недоразумений в этих случаях обычно употребляют эпитеты μ -интегрируемая и μ -измеримая. Если функция $f : X \rightarrow E$ μ -интегрируемая или неотрицательная μ -измеримая на множестве $U \subset X$, то её μ -интеграл по U обозначают символом $\int_U f d\mu$ или $\int_U f(x) d\mu(x)$, если требуется указать переменную интегрирования.

При отсутствии специальных указаний считается, что пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено стандартной мерой.

Систему всех μ -измеримых подмножеств пространства $X = (X, \mathcal{S}, \mu)$ обозначим $\Sigma(X)$. Функцию $\mu : \Sigma(X) \rightarrow [0, \infty]$, определяемую равенством $\mu A = \int_A 1 d\mu$ называют *лебеговым расширением меры* $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$.

Приложение. Неупорядоченное суммирование.

Пусть I — какое-либо счётное множество, точки которого именуют индексами. Всякую функцию $\alpha : I \rightarrow E$ в этом случае называют семейством элементов (точек) пространства E и пишут $\alpha = (\alpha_i \in E \mid i \in I)$. Если $I = \mathbb{N}$, то слово «семейство» обычно заменяют термином «последовательность» или «ряд». Семейства вида $\alpha = (\alpha_{i,j} \in E \mid (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ классики называют двойными рядами.

Будем считать, что множество I снабжено мерой, которая каждому индексу $i \in I$ сопоставляет число 1. (Каждый индекс i отождествляется с одноточечным подмножеством $\{i\}$.) На таком пространстве с мерой всякая функция измерима. Семейство $\alpha = (\alpha_i \in E \mid i \in I)$ называют *абсолютно суммируемым*, если функция α_i переменной $i \in I$ интегрируема на I . Если семейство α неотрицательно или абсолютно суммируемо, то интеграл функции α по пространству с мерой I называют суммой семейства α и обозначают $\sum_{i \in I} \alpha_i$.

Упражнения.

1. *Принцип сравнения*: если семейства α и β таковы, что $|\alpha_i| \leq \beta_i \forall i \in I$ и $\sum_{i \in I} \beta_i < \infty$, то семейство α абсолютно суммируемо. (Трансформация признака Лебега.)

2. *Закон ассоциативности*: если $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, где S_n — дизъюнктная последовательность подмножеств, а семейство α абсолютно суммируемо или неотрицательно, то $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S_n} \alpha_i$. (Трансформация свойства счётной аддитивности интеграла.)

3. *Теорема о повторном суммировании*. Пусть I и J — счётные множества индексов. Если семейство $\alpha = (\alpha_{i,j} \in E \mid (i,j) \in I \times J)$ абсолютно суммируемо или неотрицательно, то

1) $\forall i \in I$ определена сумма $a_i := \sum_{j \in J} \alpha_{i,j}$;

2) семейство $a := (a_i \in E \mid i \in I)$ обладает суммой, т. е. абсолютно суммируемое или неотрицательное;

3) $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} = \sum_i \sum_j \alpha_{i,j}$ (трансформация теоремы Фубини — Тонелли).

§ 11.13. k -мерное интегрирование функций в $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе $k \leq n$.

Детерминант Грама.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_k)$ — скалярная $n \times k$ -матрица, $(a_i \in \mathbb{R}^n)$ — её столбцы. Детерминант Грама матрицы a — число

$$\Gamma(a) := \det a^* a = \det(\langle a_i, a_j \rangle \mid i, j \in \{1, \dots, k\}).$$

1. если a — квадратная матрица, то $\Gamma(a) = |\det a|^2$.
2. $\Gamma(a)$ = (сумма квадратов всех старших миноров матрицы a) (докажем в последней главе).
3. Если $a = (b, c)$, где b и c — n матрицы из n строк каждая, то $a^* a = \begin{pmatrix} b^* b & b^* c \\ c^* b & c^* c \end{pmatrix}$.

Наблюдения, ведущие к определению площади поверхности

1. Длина гладкого пути $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ равна

$$\int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\Gamma(\varphi'(t))} dt.$$

2. Если $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкий изоморфизм между подмножествами пространства $\mathbb{R}^k$, то согласно ФЗП

$$\mu_Y Y = \int_Y dy = \int_X \sqrt{\Gamma(\varphi'(x))} dx.$$

3. ε -утолщением множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть множество

$$U_\varepsilon(M) := \{x + v \mid x \in M, v \perp T_x M, |v| \leq \varepsilon\}.$$

Лемма об израсходованной краске. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие класса C^2 , $\alpha : X \rightarrow M$ — какой-либо C^2 -изоморфизм, где $X \subset \mathbb{R}^k$, и $l = n - k$. Тогда у каждой точки $p \in M$ найдётся такая окрестность X_p , что

$$\frac{\mu_n U_\varepsilon(\alpha(X_p))}{\mu_l B_\varepsilon^l} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X_p} \sqrt{\Gamma \alpha'(x)} dx.$$

◀ Пусть $\tau_i(x) := \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i}$, $x \in X$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Для каждого $x \in X$ векторы $\tau_1, \dots, \tau_k$ образуют базис касательного пространства $T_{\alpha(x)} M$. Для

заданной точки $p \in X$ выберем какой-нибудь базис $v_1, \dots, v_l$ ортогональности $\perp_{\alpha(p)} M$ и рассмотрим набор векторов $v(x) = (v_1(x), \dots, v_l(x))$, полученных ортогональной проекцией этого базиса на $\perp_{\alpha(x)} M$. Поскольку вектор-функции $\tau_i(x)$ непрерывны, а набор векторов $(\tau(p), v)$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$, то у точки p найдётся такая окрестность X' , что набор векторов $(\tau(x), v(x))$ также являются базисом. Ортонормализацией Грама-Шмидта системы векторов $v(x)$ для каждого $x \in X'$ получаем ортонормированный базис $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_l(x))$ ортогональности $\perp_{\alpha(x)} M$ и базис $(\tau(x), \nu(x))$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим отображение $A : X' \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $A(x, t) := \alpha(x) + t_1 \nu_1(x) + \dots + t_l \nu_l(x)$. Его матрица Якоби в каждой точке $(x, 0) \in X' \times \mathbb{R}^l$ имеет вид $A'(x, 0) = (\tau(x), \nu(x))$. И поскольку $\nu(x)$ — ортогональный базис $\perp_{\alpha(x)} M$, то

$$\begin{aligned} |\det A'(x, 0)|^2 &= \Gamma A'(x, 0) = \Gamma(\tau(x, 0), \nu(x, 0)) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \tau^* \tau & \tau^* \nu \\ \nu^* \tau & \nu^* \nu \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tau^* \tau & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \tau^* \tau = \Gamma \alpha'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Из теоремы о локальной обратимости следует, что у точки $(p, 0)$ найдётся такая компактная окрестность вида $V_r := X_p \times B_r^l$, что отображение $A : V_r \rightarrow A(V_r)$ является C^1 -изоморфизмом. Нетрудно понять, что это отображение задаёт изоморфизм $A : V_\varepsilon = X_p \times B_\varepsilon^l \rightarrow U_\varepsilon(\alpha(X_p)) =: U_\varepsilon$ при любом $\varepsilon \leq r$. Тогда согласно ФЗП для каждого такого ε будем иметь

$$\mu_n U_\varepsilon = \int_{U_\varepsilon} 1 du = \int_{V_\varepsilon} \sqrt{\Gamma A'(x, t)} d(x, t) = \int_{B_\varepsilon^l \times X_p} \left(\int \sqrt{\Gamma A'(x, t)} dx \right) dt =: \int_{B_\varepsilon^l} f(t) dt.$$

По лемме о дифференцировании интеграла как функции множества

$$\frac{1}{\mu_l B_\varepsilon^l} \int_{B_\varepsilon^l} f(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(0) = \int_{X_p} \sqrt{\Gamma A'(x, 0)} dx = \int_{X_p} \sqrt{\Gamma \alpha'(x)} dx.$$

(Лемма применима, ибо функция $I(t)$ непрерывна по компактному правилу дифференцирования интеграла.) ►

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *k-измеримым лоскутом*, если существует гладкий изоморфизм $\alpha : T \rightarrow S$, где T — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^K$. В этом случае число $\mu_k S := \int_T \sqrt{\Gamma(\alpha'(t))} dt$ будем называть *k-мерной мерой лоскута S*.

Данное определение меры лоскута корректно, т.е. не зависит от выбора изоморфизма $\alpha : T \rightarrow S$.

◀ Пусть $\beta : U \rightarrow S$, — подобный изоморфизм и $\varphi := (\alpha)^{-1} \circ \beta : U \rightarrow T$. Тогда $\beta = \alpha \circ \gamma$.

Пусть $A := \alpha'(\varphi(u))$, $B := \beta'(u)$, $C := \varphi'(u)$ — матрицы Якоби.

Заметив, что матрица C квадратная, получаем

$$\begin{aligned} \int_T \sqrt{\Gamma(\alpha'(t))} dt &\stackrel{\Phi_{3\Pi}}{=} \int_U \sqrt{\Gamma(\alpha'(\varphi(u)))\Gamma\varphi'(u)} du = \int_U \sqrt{\Gamma(A)\Gamma(C)} du = \\ &= \int_U \sqrt{\det(A^*A) \det(C^*C)} du = \int_U \sqrt{\det(A^*A) \det C^* \det C} du = \\ &= \int_U \sqrt{\det B^*B} du. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Площадь графика. Если M — график гладкой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}^l$, где X — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, то M является k -измеримым лоскутом, в $\mathbb{R}^{k+l}$, причём

$$\mu_k M = \int_X \sqrt{1 + (\text{сумма квадратов всех миноров матрицы } Df(x))} dx.$$

В частности, если $l = 1$, то $\mu_k M = \int_X \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx$. ◀ ▶

Замечание. Пусть $\Sigma_k M$ — система всевозможных k -измеримых лоскутов, расположенных в множестве $M \subset \mathbb{R}^n$. Тройка $(M, \Sigma_k(M), \mu_k)$ является пространством с мерой.

В соответствии с общей теорией интеграла мера $\mu_k S$ произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ равна μ_k -интегральной норме функции χ_S , которая, как известно, равна внешней мере $\mu_k^* S$. Такую меру часто называют k -мерным объёмом, или k -мерной площадью или длиной. Если множество S μ_k -измеримо, то $\mu_k S = \int_S 1 d\mu_k$.

Упражнения. 1. Гладкое k -мерное многообразие μ_k -измеримо.

2. k -мерный объём всякого компактного k -измеримого лоскута и любого компактного гладкого k -мерного многообразия конечен. Осторожно! График дифференцируемой функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой условиями $f(x) = x^2 \cos x^{-3}$, $F(0) = 0$ компактен и μ_1 -измерим. Его длина бесконечна.

3. Пусть $k < l$. Если множество S k -измеримо, то $\mu_l S = 0$, а если $\mu_l S > 0$, то множество S k -неизмеримо, причём $\mu_k S = \infty$.

Площадь поверхности вращения. Если поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ получена вращением графика положительной гладкой функции $f :]a < b[\rightarrow \mathbb{R}$ вокруг оси абсцисс

$$M := \{(x, y, z) \mid y = f(x) \cos u, \quad z = f(x) \sin u, \quad x \in [a, b], \quad u \in [0, 2\pi]\},$$

то

$$\mu_2 M = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt.$$

Если же поверхность P получена вращением графика гладкой функции $f :]a < b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \geq 0$ вокруг оси ординат

$$M := \{(x, y, z) \mid x = t \cos u, \quad y = t \sin u, \quad z = f(t), \quad t \in [a, b], \quad u \in [0, 2\pi]\},$$

то

$$\mu_2 P = \int_a^b 2\pi t \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt.$$

Параметрическая формула интегрирования. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $T \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi : T \rightarrow X$ — какой-нибудь гладкий изоморфизм. Если в формуле

$$\int_X f(x) d\mu_k(x) = \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{\Gamma \varphi'(t)} dt$$

определён один из интегралов, то определён другой и формула верна.

◀ Для каждой функции $f : X \rightarrow E$ определим функцию $\tilde{f} : T \rightarrow E$ формулой $\tilde{f}(t) := f(\varphi(t))$ ▶

Интеграл в полярных координатах. Пусть S — какая-нибудь часть сферы $S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid |x| = 1\}$, $T =]a < b[\subset \mathbb{R}_+$ и $X = \{x = ts \mid s \in S, t \in T\} := T \cdot S$ — шаровой пласт. Если f — интегрируемая или неотрицательная измеримая на X функция, то

$$\int_X f(x) dx = \int_S \int_T f(ts) t^k dt d\mu_k(s) = \int_T \int_S f(ts) t^k d\mu_k(s) dt.$$

◀ Достаточно считать, что $k > 0$ и что S не содержит какую-нибудь точку p сферы S^k (интервал $T \cdot p$ пренебрежим в $\mathbb{R}^{k+1}$ и потому без ущерба для доказываемой формулы его можно удалить из X).

В этом случае существует гладкий изоморфизм $s : U \rightarrow S$ где $U \subset \mathbb{R}^k$ (например, обратное отображение к стереографической проекции из точки p).

Пусть $x : T \times U \rightarrow X$ — отображение, определяемое формулой $x(t, u) = ts(u) = (ts_1(u), \dots, ts_k(u))$. Его матрица Якоби такова:

$$Dx(t, u) = (s(u), tDs(u)) = (s(u), tD_1s(u), \dots, tD_k s(u)).$$

Столбцы матрицы $Ds(u) = (D_1s(u), \dots, D_k s(u))$ являются касательными векторами к сфере S^k в точке $s(u)$ и потому ортогональны единичному вектору $s(u)$. Следовательно, $\Gamma(Dx(t, u)) = \Gamma(tDs(u)) = t^{2k}\Gamma(Ds(u))$. Отсюда, применяя формулу замены переменной и теорему Фубини — Тонелли, получаем

$$\begin{aligned} \int_X f(x)dx &= \int_{T \times U} f(x(t, u)) \sqrt{\Gamma(Dx(t, u))} d(t, u) = \\ &= \int_T \int_U f(ts(u)) t^k \sqrt{\Gamma Ds(u)} du dt = \int_T \int_S f(ts) t^k d\mu_k(s) dt = \\ &= \int_S \left(\int_T f(ts) t^k dt \right) d\mu_k(s). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Упражнение. $\mu_k B^k = \frac{1}{k} \mu_{k-1} S^{k-1}$.

Интегральные представления бета-функций Эйлера. Для каждого натурального $k \geq 1$ зададим функцию B переменных $z_1, \dots, z_k \in]0, \infty[$ формулой

$$B(z_1, \dots, z_k) := \frac{\Gamma(z_1) \cdots \Gamma(z_k)}{\Gamma(z_1 + \dots + z_k)}.$$

Теорема. Для любых $z_1, \dots, z_k \in]0, \infty[$ справедлива формула

$$B(z_1, \dots, z_k) = 2^{k-1} \int_{\Delta} s_1^{2z_1-1} \dots s_k^{2z_k-1} d\mu_{k-1}(s),$$

где $\Delta := \{s = (s_1, \dots, s_k) \in S^{k-1} \mid s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}_+\} = S^{k-1} \cap (\mathbb{R}_+)^k$.

◀ Пусть $T =]0, \infty[$, $X = T^k$. Поскольку $\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi$, а $X = T \cdot \Delta$, то

$$2^{-k} \Gamma(z_1) \times \dots \times \Gamma(z_k) = \int_X e^{-(x_1^2 + \dots + x_k^2)} x_1^{2z_1-1} \dots x_k^{2z_k-1} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Delta} \int_T e^{-\sum t^2 s_i^2} (ts_1)^{2z_1-1} \times \dots \times (ts_k)^{2z_k-1} t^{k-1} dt d\mu_{k-1}(s) = \\
&= \left(\int_T e^{-t^2} t^{2\sum z_i-1} dt \right) \int_{\Delta} s_1^{2z_1-1} \times \dots \times s_k^{2z_k-1} d\mu_{k-1}(s) = \\
&= 2^{-1} \Gamma(\sum z_i) \int_{\Delta} s_1^{2z_1-1} \times \dots \times s_k^{2z_k-1} d\mu_{k-1}(s). \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Упражнения. 1. $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x-1} (\sin t)^{2y-1} dt \Leftrightarrow \Gamma^2(1/2) = \pi$.

2. $\mu_k B^k = \frac{1}{k} \mu_{k-1} S^{k-1} = \frac{2}{k} \frac{\Gamma^k(1/2)}{\Gamma(k/2)} = \frac{\Gamma^k(1/2)}{\Gamma(1+k/2)}$.

Упражнения. 1. Найти $\mu_0 S^0, \dots, \mu_4 S^4$.

2. $B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du$.

Глава 12. ИСЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Дабы не отвлекать читателя от основных идей теории, в этой главе все отображения и многообразия предполагаются достаточно гладкими, если нет специальных указаний.

§ 12.1. Дифференциальные формы первой степени

Говорят, что на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задана E -значная дифференциальная форма ω первой степени (или просто "1-форма"), если каждой точке $x \in U$ и каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ сопоставлен элемент $\omega(x)\langle v \rangle$ пространства E , причём функция $\omega(x)\langle v \rangle$ линейна по векторной переменной v . Элемент $\omega(x)\langle v \rangle$ называют значением формы ω в точке x на векторе v .

Иногда удобно считать дифференциальную форму ω на множестве U функцией, которая каждой точке $x \in U$ сопоставляет линейное отображение $\omega(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow E$. По этой причине векторная переменная v в обозначении дифференциальной формы заключается в особые скобки.

Примеры и наблюдения. 1. Если функция f дифференцируема на множестве U , то её дифференциал представляет собой дифференциальную форму на множестве U . Исторически этот пример явился первоисточником названия "дифференциальная форма".

Простейшая задача теории уравнений в частных производных: восстановить функцию f по её дифференциалу.

Допустим, что задано значение $f(p)$ и для каждой точки $x \in U$ выбран гладкий путь $\varphi_x : [a, b] \rightarrow U$, соединяющий точку p с точкой x . Тогда

$$f(x) = f(p) + \int_a^b df(\varphi_x(t))\langle \varphi'_x(t) \rangle dt. \quad (1)$$

2. Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим вещественную дифференциальную форму α_w , называемую элементом работы векторного поля w

$$\alpha_w(x)\langle v \rangle := \langle w(x), v \rangle$$

Физическая интерпретация: Пусть в области U физического пространства имеется силовое поле w . Это означает, что на материальную частицу, попавшую в точку x действует сила $w(x)$. Предположим, что область U снабжена прямоугольной системой координат и, кроме того, выбрана какая-либо система единиц измерения физических величин. Это позволяет считать рассматриваемую область частью пространства $\mathbb{R}^3$, а силовое поле w — векторным полем. Пусть в области Ω перемещается какая-то материальная частица, причём её движение описывается функцией

$\varphi : [a, b] \rightarrow U$. Известно, что, работа, произведённая силовым векторным полем $w : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ при указанном перемещении рассматриваемой частицы выражается формулой

$$A_w(\varphi) = \int_a^b \langle w(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \alpha_w(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt. \quad (2)$$

3. Определим 1-форму σ площади сектора на плоскости $\mathbb{R}^2$ формулой

$$\sigma(x) \langle v \rangle := \frac{1}{2} \det(x, v).$$

Название естественно по следующей причине: если $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — движение с положительной угловой скоростью, то, как известно, площадь сектора $\nabla = \bigcup_t [0, z(t)]$ задаётся формулой

$$\mu_2 \nabla = \int_a^b \sigma(z(t)) \langle z'(t) \rangle dt. \quad (3)$$

4. Формой Гаусса на плоскости $\mathbb{R}^2$ (элементом угла поворота) называют дифференциальную форму $d\Theta$, задаваемую формулой

$$d\Theta(z) \langle v \rangle = \frac{1}{|z|^2} \det(z, v), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Геометрическая интерпретация: Пусть $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — гладкий путь. Символом $\Theta_z(t)$ обозначим угол, на который поворачивается радиус-вектор z при перемещении из положения $z(a)$ в положение $z(t)$. (Этот угол может быть отрицательным или быть больше 2π .) Угловая скорость Θ'_z движения z совпадает с угловой скоростью Θ'_u движения $u := \frac{z}{|z|}$. В то же время секториальная скорость $\hat{u}$ равна $\frac{1}{2}|u|^2\Theta'_u$. Следовательно, $\Theta_z = \Theta'_u = 2\hat{u} = \det(u, u') = \det\left(\frac{z}{|z|}, \left(\frac{z}{|z|}\right)'\right) = \det\left(\frac{z}{|z|}, \frac{z'}{|z|}\right) = d\Theta_z(z) \langle z' \rangle$ и

$$\Theta_z|_a^b = \int_a^b d\Theta(z(t)) \langle z'(t) \rangle dt. \quad (4)$$

Пару точка-вектор (x, v) полезно мыслить как вектор v , прикрепленный к точке x . Это позволяет трактовать всякую форму первой степени

как функцию направленного отрезка. Линейность формы по векторной переменной есть математическое отражение того факта, что многие физические и геометрические величины, являющиеся функциями гладких путей, линейно зависят от малых перемещений.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Множество всех E -значных 1-форм на множестве X обозначим символом $\mathcal{F}^1(X, E)$, а множество всех E -значных функций на X будем обозначать символом $\mathcal{F}^0(X, E)$, иногда называя его элементы 0-формами.

Говорят, что 1-форма ω на множестве X является суммой форм α и β и пишут $\omega = \alpha + \beta$, если $\omega(x)\langle v \rangle = \alpha(x)\langle v \rangle + \beta(x)\langle v \rangle$ для каждой точки $x \in X$ и любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$.

Говорят, что 1-форма ω на множестве X является произведением функции α и 1-формы β и пишут $\omega = \alpha \cdot \beta$ или $\omega = \alpha\beta$, если $\omega(x)\langle v \rangle = \alpha(x)\beta(x)\langle v \rangle$ для каждой точки $x \in X$ и любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — стандартные координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $e_1, \dots, e_n$ — его стандартный базис.

Координатное представление 1-форм. Каждую 1-форму ω можно и притом лишь одним образом представить в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) dx_i,$$

где $c_i \in \mathcal{F}^0(X, E)$. При этом для любого $x \in X$ и любого $j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется формула $c_j(x) = \omega(x)\langle e_j \rangle$.

Функции c_i , участвующие в этой теореме, называются *коэффициентами формы* ω (относительно стандартной системы координат).

◀ Единственность. Если $\omega = \sum_i c_i dx_i$, то для каждой точки $p \in X$ и любого номера $j \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\omega(p)\langle e_j \rangle = \sum c_i(p) dx_i(p)\langle e_j \rangle = \sum c_i(p) \delta_{ij} = c_j(p).$$

Возможность. Для каждого номера $i \in \{1, \dots, n\}$ и любой точки $p \in X$ положим $c_i(p) := \omega(p)\langle e_i \rangle$. Остаётся проверить, что значения форм ω и $\sum c_i dx_i$ в любой точке $p \in X$ на любом векторе $v = \sum_j v_j e_j$ совпадают. ►

Упражнения. 1. Найти координатные представления упомянутых выше 1-форм $df(x)$, $\alpha_w(x)$, $\sigma(x)$, $d\Theta(x)$, а также $\mathbb{R}^3$ -значной формы $x \times tv$, которую физики называют моментом количества движения (импульса) или просто моментом.

2. Для каждой вещественной 1-формы ω на X имеется ровно одно векторное поле $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \alpha_w$.

Если все коэффициенты формы ω суть функции класса C^r на множестве X , то будем говорить, что ω — форма класса C^r на X .

Модулем дифференциальной формы $\omega = \sum_i c_i dx_i$ называется функция $|\omega(x)| := \sqrt{\sum_i |c_i(x)|^2}$.

Операция переноса.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, и $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Для $k = 0, 1$ каждой k -форме ω на множестве Y сопоставим k -форму $\varphi^* \omega$, определяемую следующим образом:

если $k = 0$, то положим $\varphi^* \omega := \omega \circ \varphi$;

если же $k = 1$, то для каждой точки $x \in X$ и любого вектора $v \in \mathbb{R}^m$ положим $\varphi^* \omega(x) \langle v \rangle = \omega(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v \rangle$.

Тем самым задано отображение $\varphi^* : \mathcal{F}^k(Y, E) \rightarrow \mathcal{F}^k(X, E)$, называемое операцией переноса (замены переменной). Заметим: стрелка направлена от Y к X , т.е. "навстречу" отображению $\varphi : X \rightarrow Y$.

Свойства операции переноса.

1. Аддитивность: $\varphi^*(\alpha + \beta) = \varphi^* \alpha + \varphi^* \beta$.

2. Мультипликативность: $\varphi^*(\alpha \cdot \beta) = \varphi^* \alpha \cdot \varphi^* \beta$, если α — функция.

3. Перестановочность с дифференциалом: $\varphi^* df = d\varphi^* f$ для каждой гладкой функции $f \in \mathcal{F}^0(Y, E)$.

$$\blacktriangleleft (\varphi^* df)(x) \langle v \rangle = df(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v \rangle = (d(f \circ \varphi))(x) \langle v \rangle \blacktriangleright$$

Можно сказать, что операция переноса уважает сложение, умножение и дифференциал.

4. Закон композиции: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, то есть $(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^*(\psi^* \omega)$ для любых гладких отображений $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ и формы $\omega \in \mathcal{F}^k(Z, E)$, $k \in \{0, 1\}$.

◀ Если $\omega \in \mathcal{F}^0(Z, E)$, то формула — просто запись закона ассоциативности композиции: $\omega \circ (\psi \circ \varphi) = (\omega \circ \psi) \circ \varphi$. Если $\omega \in \mathcal{F}^1(Z, E)$, то

$$\begin{aligned} ((\psi \circ \varphi)^* \omega)(x) \langle v \rangle &= \omega((\psi \circ \varphi)(x)) \langle d(\psi \circ \varphi)(x)v \rangle = \\ &= \omega(\psi(\varphi(x))) \langle d\psi(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v \rangle \rangle \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} ((\varphi^* \circ \psi^* \omega)(x) \langle v \rangle) (\varphi^*(\psi^* \omega))(x) \langle v \rangle &= (\psi^* \omega)(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v \rangle = \\ &= \omega(\psi(\varphi(x))) \langle d\psi(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v \rangle \rangle. \blacktriangleright \end{aligned}$$

5. Запись в координатах: если преобразование φ задано формулами

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m),$$

то для каждой формы $\omega(y) = \sum_{i=1}^n c_i(y) dy_i$ имеет место равенство

$$\varphi^* \omega(x) = \sum_{i=1}^n c_i(\varphi(x)) d\varphi_i(x).$$

Иными словами: операция переноса форм, заданных в координатах, осуществляется путём формальной замены переменных.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \varphi^* \omega &= \varphi^* \left(\sum_i c_i dy_i \right) = \sum_i (\varphi^* c_i) \varphi^* dy_i = \\ &= \sum_i (c_i \circ \varphi) d\varphi^* y_i = \sum_i (c_i \circ \varphi) d(y_i \circ \varphi) = \sum_i (c_i \circ \varphi) d\varphi_i. \end{aligned}$$

Остаётся взглянуть на начало и конец полученной цепочки равенств в точке $x \in X$. $\blacktriangleright$

Упражнения. 0. Всякая 1-форма ω на подмножестве числовой прямой имеет вид $\omega(x) = f(x)dx$, а формулу замены переменной можно записать следующим образом:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \omega = \int_a^b \varphi^* \omega.$$

1. Записать форму Гаусса в полярных координатах ρ, Θ , т.е. найти координатное представление формы $\psi^* d\Theta$, где преобразование ψ задано формулами $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

2. Если ω – форма класса C^r , а φ – преобразование класса C^{r+1} , то $\varphi^* \omega$ является формой класса C^r .

3. Если $T \subset \mathbb{R}$, то для всякого гладкого отображения $\varphi : T \rightarrow X$ и любой дифференциальной формы ω на X выполняется равенство

$$\varphi^* \omega(t) = \omega(\varphi(t)) \langle \varphi'(t) \rangle dt.$$

Последнее позволяет записать формулы примеров 1 — 4 в таком виде:

$$\begin{aligned} 1. f|_p^x &= \int_a^b \varphi^* df. \\ 2. A_w(\varphi) &= \int_a^b \varphi^* \alpha_w. \\ 3. \mu_2 \nabla &= \int_a^b z^* \sigma. \\ 4. \Theta_z|_a^b &= \int_a^b z^*(d\Theta). \end{aligned}$$

§ 12.2. Интегрирование 1-форм вдоль путей

Пусть T — промежуток числовой прямой с концами a и b . Будем говорить, что 1-форма $\omega(t) = f(t)dt$ интегрируема на промежутке t , если на этом промежутке функция f интегрируема по Лебегу. В этом случае лебеговский интеграл функции f по промежутку T будем называть интегралом формы ω по T и обозначать одним из следующих символов:

$$\int_T \omega, \int_a^b \omega := \text{sign}(b-a) \int_T \omega.$$

Говорят, что 1-форма ω , заданная на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ интегрируема вдоль кусочно-гладкого пути $\gamma : T \rightarrow U$, если форма $\gamma^* \omega$ интегрируема на T . В этом случае $\int_T \gamma^* \omega$ называют интегралом формы ω вдоль пути γ и обозначают символом $\int_\gamma \omega$. (Напомним: путь $\gamma : T \rightarrow U$ называют *кусочно-гладким*, если $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и существуют такие точки $t_0 = a < \dots < t_q = b$, что путь $[t_{i-1}, t_i] \rightarrow U$ гладкий при любом i .)

Классическая интерпретация. Классики рекомендовали мысленно представлять путь γ как цепочку направленных отрезков с началом $\gamma(t)$ и концом $\gamma(t) + \gamma'(t)dt$, где число dt бесконечно мало. Форма ω сопоставляет каждому такому отрезку значение $\omega(\gamma(t))\langle \gamma'(t)dt \rangle = \omega(\gamma(t))\langle \gamma'(t) \rangle dt$. Сумма полученной цепочки значений есть интеграл 1-формы ω вдоль пути γ .

Признак интегрируемости. Непрерывная на множестве U 1-форма интегрируема вдоль любого кусочно-гладкого пути $\gamma : T \rightarrow U$.

Свойства операции интегрирования 1-форм.

1. **Линейность:** $\int_\gamma \sum_{i=1}^q c_i \omega_i = \sum_{i=1}^q c_i \int_\gamma \omega_i$ для любых констант c_i и 1-форм ω_i , интегрируемых вдоль пути γ .

2. Ограниченность: если форма $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$ интегрируема вдоль пути $\gamma : T \rightarrow U$ и $|\omega(x)| \leq C \forall x \in U$, то

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt = c \cdot (\text{длина пути } \gamma).$$

$$\blacktriangleleft \left| \int_{\gamma} \omega \right| = \left| \int_T \gamma^* \omega \right| = \left| \int_T \sum_i \omega_i(\gamma(t)) \langle \gamma'_i(t) \rangle dt \right| \leq \int_T \sum_i |\omega_i(\gamma(t))| \cdot |\gamma'_i(t)| dt \leq \int_T |\omega(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq C \int_T |\gamma'(t)| dt. \blacktriangleright$$

3. Формула Ньютона — Лейбница: $\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ для любого кусочно гладкого пути $\gamma : [a < b] \rightarrow U$ и любой гладкой на U функции f .

$$\blacktriangleleft \int_{\gamma} df = \int_a^b \gamma^* df = \int_a^b d\gamma^* f = \int_a^b d(f \circ \gamma) \stackrel{N=L}{=} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \blacktriangleright$$

Следствие. Если на множестве U форма ω является дифференциалом гладкой функции, а путь $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ замкнут, т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$, то $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Приложение. Согласно теореме о вторых производных для того чтобы гладкая 1-форма $\sum_{i=1}^n f_i dx_i$ на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ обладала первообразной (была дифференциалом какой-либо функции), необходимо, чтобы на U выполнялись равенства $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. Для коэффициентов формы Гаусса эти равенства выполнены на $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Однако на этом множестве у формы Гаусса нет первообразной, ибо $\int_z d\Theta$ вдоль пути $z(t) = e^{it} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ равен 2π , (ведь это же приращение угла).

Далее (см. §12.4, частный случай теоремы Пуанкаре) будет показано, что при выполнении равенств $D_i \omega_j = D_j \omega_i$ форма на выпуклом множестве U , форма ω имеет первообразную на U . (Условие выпуклости гарантирует отсутствие внутри области "дырок".)

§ 12.3. Интегрирование 1-форм по ориентированным линиям.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$, гладко изоморфное отрезку числовой прямой, будем называть *дугой*. Дугу S называют *ориентированной* или *направленной*, если одна из её крайних точек объявлена началом, а другая — концом. Началом отрезка $[a, b]$, как правило, считается точка a . Употребление символа $\int_a^b$ свидетельствует о том, что a служит началом проме-

жутка интегрирования. Если p и q — точки дуги S , то символом $S[p, q]$ будем обозначать отрезок этой дуги, считая p его началом, а q — концом. Если S — ориентированная дуга, то символом $(-S)$ обозначают ту же самую дугу, снабжённую противоположной ориентацией. В этом смысле $S[p, q] = -S[q, p]$.

Пусть S — ориентированная дуга и ω — 1-форма на S . Выберем какой-либо гладкий изоморфизм $\alpha : [a < b] \rightarrow S$, *сохраняющий ориентацию* (переводящий начало в начало, конец — в конец). Если при этом форма $\alpha^*\omega$ окажется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, то будем говорить, что форма ω интегрируема на S , а $\int_a^b \alpha^*\omega$ будем называть *интегралом формы ω по ориентированной дуге (кривой) S* и обозначать символом $\int_S \omega$. Если изоморфизм $\alpha : [a < b] \rightarrow S$ сохраняет ориентацию, то $\int_S \omega = \int_\alpha \omega$.

Лемма 0. Приведенное определение интеграла корректно, т.е. не зависит от выбора *соориентированного* изоморфизма α .

► Пусть $\beta : [u < v] \rightarrow S$ — любой другой соориентированный изоморфизм и $\gamma = \beta^{-1} \circ \alpha$. Тогда $\gamma(a) = u$, $\gamma(b) = v$ и потому

$$\int_u^v \beta^*\omega \stackrel{\text{ФЭП}}{=} \int_a^b \gamma^*(\beta^*\omega) = \int_a^b (\beta \circ \gamma)^*\omega = \int_a^b \alpha^*\omega. \blacktriangleright$$

Классическая интерпретация интеграла. Представим себе ориентированную дугу S как бесконечную цепочку бесконечно малых направленных отрезков $[s, s + ds]$. Дифференциальная форма ω сопоставляет каждому звену этой цепочки бесконечно малый элемент $\omega(s)\langle ds \rangle$. Сумма этих элементов и есть $\int_S \omega$.

Признак интегрируемости. Непрерывная на множестве U 1-форма интегрируема вдоль любой дуги $S \subset U$.

Простейшие свойства интеграла формы вдоль дуги.

1. **Линейность:** Если $\omega = \sum_{i=1}^q c_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_q$ — 1-формы, интегрируемые вдоль ориентированной дуги S , а $c_1, \dots, c_q$ — постоянные, то ω интегрируема вдоль S и

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^q c_i \int_S \omega_i.$$

2. **Ориентированность:** $\int_{-S} \omega = - \int_S \omega$.

3. Аддитивность: Если в формуле

$$\int_{S[p,r]} \omega = \int_{S[p,q]} \omega + \int_{S[q,r]} \omega$$

определены два интеграла, то третий также определён и формула верна.

4. Формула Ньютона — Лейбница: если на ориентированной дуге S с началом p и концом q форма ω представима в виде $\omega = df$, где f — гладкая функция, то $\int_S \omega = f|_p^q$.

5. Ограниченность: если форма ω интегрируема вдоль ориентированной дуги S и $|\omega(x)| \leq c$ для любой точки $x \in S$, то $|\int_S \omega| \leq c \mu_1 S$.

Конечный набор $S_1, \dots, S_k$ ориентированных дуг будем называть *цепью* и употреблять обозначение $S_1 + \dots + S_k$. Знак $+$ играет здесь такую же роль, что и запятая, дополнительно указывая на то, что все звенья цепи суть ориентированные дуги. Если 1-форма ω интегрируема на каждом звене S_i цепи $C = S_1 + \dots + S_k$, то сумму $\int_{S_1} \omega + \dots + \int_{S_k} \omega$ называют интегралом формы ω по цепи C и обозначают символом $\int_C \omega$. Операция интегрирования форм по цепям обладает всеми свойствами, присущими интегралу по дуге. В то же время она придаёт алгебраический характер действиям с областями интегрирования.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — компактная область с кусочно гладкой границей, т.е. 1) множество U компактно, 2) множество $Int U$ его внутренних точек плотно в U , 3) граница $Fr U$ является объединением *правильной системы* гладких дуг $S_1, \dots, S_k$ ($S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$ для любых $i \neq j$).

Ориентируем каждую дугу S_i так, чтобы *область U примыкала к ней слева* и обозначим полученную цепь $S_1 + \dots + S_k$ ориентированных дуг символом ∂U . [Фраза, выделенная курсивом, означает, что начало p и конец q дуги S_i выбраны так, что для каждой точки $z \in S \setminus \partial S$ имеется такой отрезок $[z, u] \subset U$, что $\det(v, u - z) > 0$, где v — какой-либо ненулевой вектор, касательный к дуге $S_i[z, q]$ в точке z .]

Формула Грина. Для любой гладкой на U формы $fdx + gdy$ имеет место равенство

$$\int_{\partial U} (fdx + gdy) = \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy$$

◀ Допустим, что область U представляет собой криволинейную горизонтальную полосу, т.е. что $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a < b], y \in [u(x), h(x)]\}$,

где u и h — такие кусочно-гладкие функции на отрезке $[a < b]$, что $u(x) < h(x)$ для любой точки x интервала $]a < b[$.

Пусть S_u — график функции u , S_h — график функции h , $T_a = [(a, u(a)), (a, h(a))]$; $T_b = [(b, u(b)), (b, h(b))]$. Будем считать, что дуги S_u , S_h направлены слева направо, а отрезки T_a , T_b — снизу вверх, т.е., что точка $(a, u(a))$ служит началом дуг S_u , T_a , а точка $(b, h(b))$ — концом дуг S_h , T_b . Тогда $S_u + T_b - S_h - T_a = \partial U$.

$$\begin{aligned} \int_{T_a} f dx &= 0 = \int_{T_b} f dx, \quad \int_{S_u} f dx = \int_a^b f(x, u(x)) dx, \quad \int_{S_h} f dx = \int_a^b f(x, h(x)) dx; \\ \int_{T_a} g dy &= \int_{u(a)}^{h(a)} g(a, y) dy, \quad \int_{T_b} g dy = \int_{u(b)}^{h(b)} g(b, y) dy, \\ \int_{S_u} g dy &= \int_a^b g(x, u(x)) u'(x) dx, \quad \int_{S_h} g dy = \int_a^b g(x, h(x)) h'(x) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \int_U \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_a^b (f(x, h(x)) - f(x, u(x))) dx = \int_{S_h} f dx - \int_{S_u} f dx = \\ &= - \left(\int_{-S_h} f dx + \int_{S_u} f dx + \int_{T_b} f dx - \int_{T_a} f dx \right) = - \int_{\partial U} f dx; \\ \int_U \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{h(x)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{u(x)}^{h(x)} g(x, y) dy - g(x, h(x)) h'(x) + g(x, u(x)) u'(x) \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u(b)}^{h(b)} g(b, y) dy - \int_{u(a)}^{h(a)} g(a, y) dy - \int_a^b g(x, h(x)) h'(x) dx + \int_a^b g(x, u(x)) u'(x) dx = \\
&= \int_{T_b} g dy - \int_{T_a} g dy - \int_{S_h} g dy + \int_{S_u} g dy = \int_{\partial U} g dy.
\end{aligned}$$

Для вертикальных полос формула Грина устанавливается так же.

Допустим, что компактная область U с кусочно-гладкой границей есть объединение областей U_1 и U_2 , причём $\partial U_1 = A_1 + B_1$, $\partial U_2 = A_2 + B_2$, где A_1, B_1, A_2, B_2 — такие цепи, что $B_1 = -B_2$, $\partial U = A_1 + A_2$. Ясно, что если для формы $f dx + g dy$ формула Грина справедлива для двух из областей, то и для третьей тоже.

На практике сделанных замечаний бывает достаточно, чтобы, разрезая заданную область на части, убедиться в справедливости формулы Грина. Доказательство в общем случае выходит за рамки первоначального студенческого курса. ►

Приложения

1. Формулы для вычисления площадей плоских фигур.

$$\mu_2 U = \int_{\partial U} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial U} (x dy - y dx) = -\frac{i}{2} \int_{\partial U} \bar{z} dz, \text{ где } z = x + iy.$$

Глядя на эти равенства, полезно вспомнить доказательство изопериметрического неравенства в теории рядов Фурье.

2. Интеграл Гаусса по контуру. Если область U не содержит точку $0 \in \mathbb{R}^2$, то $\int_{\partial U} d\Theta = 0 \in \mathbb{R}$. Если же $0 \in U \setminus \partial U$, то $\int_{\partial U} d\Theta = 2\pi$.

◀ Если $0 \notin U$, то $\int_{\partial U} d\Theta = \int_U 0 dx dy = 0$.

Пусть $0 \in \text{Int } U$. Прямое применение формулы Грина невозможно (почему?). Пусть B_r — круг радиуса r с центром 0 , лежащий в $\text{Int } U$, и $V := U \setminus \text{Int } B_r$. Поскольку $0 \notin V$ и $\partial V = \partial U - \partial B_r$, то $0 = \int_{\partial V} d\Theta = \int_{\partial U} d\Theta - \int_{\partial B_r} d\Theta$. Следовательно, $\int_{\partial U} d\Theta = \int_{\partial B_r} d\Theta = \int_{\partial B_1} d\Theta = \int_{\partial B_1}^{\partial V} (x dy - y dx) \stackrel{\Phi\Gamma}{=} \int_{B_1} 2 dx dy = 2\pi$. ►

§ 12.4. Дифференциальные формы произвольных степеней

Говорят, что на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана E -значная дифференциальная форма ω степени k (или k -форма), если каждой точке $x \in X$ и каждому набору векторов $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ сопоставлен элемент $\omega(x)(v_1, \dots, v_k)$

пространства E , причём функция $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ векторных переменных $v_1, \dots, v_k$ антисимметрична и линейна по всем v_i . Элемент $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ называют значением формы ω в точке x на векторах $v_1, \dots, v_k$. (Напомним: дифференциальные формы степени 0 — это функции вида $X \rightarrow E$, т.е. векторных переменных у 0-форм нет).

Бывает полезно трактовать k -форму ω как функцию, сопоставляющую каждой точке $x \in X$ полилинейное антисимметричное отображение $\omega(x) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$. По этой причине точечную и векторные переменные заключают в отдельные скобки.

Примеры и наблюдения.

1. Определим вещественную n -форму dV в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$dV(x)\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \det(v_1, \dots, v_n).$$

Эту форму называют элементом ориентированного объёма из-за того, что модуль числа $dV(x)\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ — объём n -мерного параллелограмма $P(x; v_1, \dots, v_n) := \{x + \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid t_i \in [0, 1]\}$, построенного по реперу $(x; v_1, \dots, v_n)$, а знак этого числа говорит о том, соориентирован или нет базис $v_1, \dots, v_n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Пусть $w : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле в области $U \subset \mathbb{R}^n$. Зададим $(n-1)$ -форму β_w на U формулой $\beta_w(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle = \det(w(x), v_1, \dots, v_{n-1})$ и назовём её элементом потока векторного поля w .

Интерпретация. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — область физического пространства, в которой течёт нечто текучее (жидкость, газ и т.п.), и пусть $c(x) \in \mathbb{R}_+$ — плотность текучего вещества в точке x , $v(x) \in \mathbb{R}^n$ — скорость потока в этой точке, $w(x) := c(x)v(x)$ — интенсивность потока, $P := P(x; a, b)$ — воображаемый параллелограмм, построенный по реперу $(x; a, b)$ и, наконец, B_+ — количество вещества, протекающего за единицу времени через площадку P с левой стороны на правую, т.е. в ту же сторону, куда направлен вектор $a \times b$, B_- — количество вещества, протекающего с правой стороны на левую. Если параллелограмм мал, то

$$B_+ - B_- \approx \beta_w(x)\langle a, b \rangle.$$

3. Формой Гаусса в $\mathbb{R}^n$ будем называть $(n-1)$ -форму, заданную на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ равенством

$$d\Theta(x)\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle := \det\left(\frac{x}{|x|^n}, v_1, \dots, v_{n-1}\right).$$

Видим, что $d\Theta = \beta_w$, где $w(x) = \frac{x}{|x|^n}$. Примеры: если Солнце находится в точке $0 \in \mathbb{R}^3$, то создаваемое им поле тяготения имеет вид $c \frac{x}{|x|^3}$, $c < 0$, а поле интенсивности светового потока — тот же вид, но $c > 0$.

4. Пусть в области $V \subset \mathbb{R}^3$ задана вещественная функция ρ (величина давления вещества, заполняющего область V). Формой Паскаля в области V будем называть $\mathbb{R}^3$ -значную 2-форму π_ρ , определяемую формулой $\pi_\rho(x)\langle a, b \rangle = -\rho(x)a \times b$.

Согласно закону Паскаля, для силы давления $F(P)$, действующей на внешнюю (правую) сторону малой площадки $P := P(x; a, b)$, имеет место формула $F(P) = \pi_\rho(x)\langle a, b \rangle$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Множество всех E -значных k -форм на множестве X обозначим символом $\mathcal{F}^k(X, E)$. Говорят, что k -форма ω на множестве X является суммой форм α и β и пишут $\omega = \alpha + \beta$, если $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \alpha(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle + \beta(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ для каждой точки $x \in X$ и любого набора векторов $v_1, \dots, v_k$ в $\mathbb{R}^n$.

Говорят, что k -форма ω на множестве X является произведением функции α и k -формы β и пишут $\omega = \alpha \cdot \beta$, если $\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \alpha(x) \cdot \beta(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ для каждой точки $x \in X$ и любого набора векторов $v_1, \dots, v_k$ в $\mathbb{R}^n$.

Внешним произведением скалярных 1-форм $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ называют k -форму ω , определяемую равенством

$$\omega(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \det(\omega_i(x)\langle v_j \rangle) \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Упражнения. 1. Внешнее умножение 1-форм дистрибутивно и антикоммутативно, т.е. операция $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ линейна по каждой переменной ω_i и меняет знак при перестановке любых двух сомножителей.

$$2. \quad dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x)\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_n).$$

Здесь и далее $x := (x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат пространства $\mathbb{R}^n$, $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $M(n, k)$ — множество мультииндексов вида $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$.

Для каждого мультииндекса $I = (i_1 < \dots < i_k) \in M(n, k)$ положим

$$e_I := (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad dx_I := dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Если $k = 0$, то $M(n, k) = \emptyset$, а $dx_\emptyset = 1$.

Для каждой $n \times k$ -матрицы $a = (a_1, \dots, a_k)$ и любого мультииндекса $I = (i_1 < \dots < i_k)$ определим I -тый минор этой матрицы формулой $\det_I(a) := \det(a_I)$, где a_I — $k \times k$ -матрица, полученная из матрицы a удалением строк с номерами, не входящими в набор I . Такие миноры матрицы называют старшими.

Лемма 1. Для каждого мультииндекса $I \in M(n, k)$ и любого набора векторов $a = (a_1, \dots, a_k)$ пространства $\mathbb{R}^n$ имеет место равенство $dx_I \langle a \rangle = \det_I(a)$ и, следовательно, $dx_I \langle e_J \rangle = \delta_{I,J}$ для любых мультииндексов $I, J \in M(n, k)$.

◀ $dx_I \langle a \rangle := \det(dx_i \langle a_j \rangle : i \in I, j = 1, \dots, k) = \det((a_{ji})_{i \in I, j = 1, \dots, k}) := \det(a_I) := \det_I(a)$. ▶

Лемма 2. Две k -линейные функции α и β векторных переменных $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ совпадают, если $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ для каждого набора $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$, и, следовательно, антисимметричные k -линейные функции α и β совпадают, если $\alpha(e_J) = \beta(e_J)$ для любого мультииндекса $J \in M(k, n)$.

◀ Пусть $\gamma = \alpha - \beta$. Разлагая по базису все $a_i = \sum_{j=1}^n (a_i^j) e_j$, имеем

$$\gamma(a_1, \dots, a_k) = \sum ((a_1^{j_1}) \times \dots \times (a_k^{j_k}) \gamma(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0. \quad \blacktriangleright$$

Приложение. Для всех $n \times k$ -матриц $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_k)$, где $k \leq n$, справедлива формула

$$\det(a^*b) = \sum_{I \in M(n, k)} \det_I(a) \det_I(b). \quad (Gram)$$

◀ 1) Левая $\alpha(a, b)$ и правая $\beta(a, b)$ части равенства (G) суть линейные функции векторов — столбцов матриц $a_1, \dots, b_k$, антисимметричные как по первым k переменным, так и по последним.

2) $\alpha(e_I, e_J) = \delta_{I,J} = \beta(e_I, e_J) \quad \forall I, J \in M(n, k)$.

Из 2) с учётом 1) следует, что функции α и β совпадают на всех базисных наборах $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$. ▶

Теорема о координатном представлении дифференциальных форм. Каждую k -форму $\omega \in \mathcal{F}^k(X, E)$ можно и притом лишь одним образом представить в виде

$$\omega = \sum_{I \in M(n, k)} c_I dx_I,$$

где $c_I \in \mathcal{F}^0(X, E)$. При этом для любой точки $x \in X$ и любого мультииндекса $I \in M(n, k)$ верна формула $c_I(x) = \omega(x) \langle e_I \rangle$.

◀ См. доказательство этого факта для 1-форм. ▶

Функции c_I , участвующие в этой теореме, называются *коэффициентами формы* ω (относительно стандартной системы координат).

Упражнения. 1. Всякая 1-форма ω представима в виде $\omega = \sum_{i=1}^n c_i dx_i$.

2. Всякая 2-форма ω представима в виде $\omega = \sum_{i < j} c_{i,j} dx_i \wedge dx_j$.

3. Всякая n -форма ω на $X \subset \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$\omega(x) = f(x)dx = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

4. Всякая $(n-1)$ -форма ω имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^n c_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$.

Здесь крышка над dx_i означает, что это место пропущено.

5. Если $k > n$, то всякая k -форма в $\mathbb{R}^n$ является нулевой.

6. Найти координатные представления известных дифференциальных форм $(df, \alpha_w, dV, \beta_w, d\Theta, \pi_p)$.

7. Для каждой вещественной $(n-1)$ -формы ω на X имеется ровно одно векторное поле $w : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\omega = \beta_w$.

Модуль формы $\alpha(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$ — это функция $|\alpha(x)| = \sqrt{\sum_I |a_I(x)|^2}$.

Если все коэффициенты формы ω суть функции класса $\mathcal{C}^r$ на множестве X , то говорят, что ω — форма класса $\mathcal{C}^r$ на X .

Внешним произведением форм $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$ называют форму $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$. Внешним произведением k -формы $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ и l -формы $\beta = \sum_J b_J dx_J$ называют $(k+l)$ -форму $\alpha \wedge \beta$, определяемую равенством

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Если α — 0-форма (функция), то $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$.

Упражнения. 1. Если $w = (w_1, \dots, w_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторное поле, то $\alpha_w \wedge \beta_w = ?$

2. Внешнее умножение форм ассоциативно, дистрибутивно, а закон коммутативности имеет вид: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$.

Внешнее дифференцирование

Напомним, что все рассматриваемые функции, в том числе и коэффициенты дифференциальных форм, предполагаются достаточно гладкими.

Внешним дифференциалом k -формы $\omega = \sum_I f_I dx_I$ называют форму $d\omega := \sum_I df_I \wedge dx_I$. Внешний дифференциал k -формы ω является $(k+1)$ -формой, определённой на множестве точек дифференцируемости всех коэффициентов исходной формы.

Найдите координатную запись формы $\omega = d(fdx + gdy)$ и заметьте, что формула Грина теперь имеет вид

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega.$$

Правила внешнего дифференцирования:

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta.$$

$$\text{Формула Лейбница: } d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta.$$

Лемма Пуанкаре: $d^2 := d \circ d = 0$, точнее: $d(d\omega) = 0$ на множестве, где все коэффициенты формы ω дважды дифференцируемы. Это правило является иной формой теоремы о вторых производных.

Приложения. Векторные поля и дифференциальные формы.

Говорят, что векторное поле w является потенциальным в области X , если на X имеется такая вещественная функция u (потенциал поля w), что $w = \nabla u (= \text{grad } u)$, иначе: если $du = \alpha_w$. Особенностью такого поля является такое свойство: каким бы путём ни перемещалась частица из пункта $p \in X$ в пункт $q \in X$, работа, произведённая потенциальным полем, будет равна разности потенциалов $u(q) - u(p)$. Необходимым признаком потенциальности поля w согласно лемме Пуанкаре является условие $d\alpha_w = 0$.

Дивергенцией векторного поля w называется такая функция f , что $d\beta_w(x) = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Эту функцию обозначают символом $\text{div } w$.

Пусть $n = 3$. Ротором векторного поля w называют такое векторное поле v , что $d\alpha_w = \beta_v$. Обозначение: $\text{rot } w$.

Упражнения. 1. $\nabla u = (D_1, \dots, D_n)u$; $\text{div } w = D_1 w_1 + \dots + D_n w_n = \langle \nabla, w \rangle$; $\text{div} \circ \nabla = D_1^2 + \dots + D_n^2 = \Delta$ (оператор Лапласа).

2. Пусть $n = 3$. Тогда

$$\text{rot } w = [\nabla \times w] = \det \begin{pmatrix} e_1 & D_1 & w_1 \\ e_2 & D_2 & w_2 \\ e_3 & D_3 & w_3 \end{pmatrix}; \quad \text{rot} \circ \text{grad} = 0; \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0.$$

Операция переноса.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Каждой форме $\omega \in \mathcal{F}^k(Y, E)$ сопоставим форму $\varphi^* \omega \in \mathcal{F}^k(X, E)$, определяемую следующим образом: если $k = 0$, то $\varphi^* \omega = \omega \circ \varphi$, а если $k > 0$, то $\varphi^* \omega(x) \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \omega(\varphi(x)) \langle d\varphi(x)v_1, \dots, d\varphi(x)v_k \rangle$. Тем самым задано отображение $\varphi^* : \mathcal{F}^k(Y, E) \rightarrow \mathcal{F}^k(X, E)$, называемое операцией переноса (замены переменной).

Свойства операции переноса. 1. Аддитивность: если $\omega = \alpha + \beta$, то $\varphi^*\omega = \varphi^*\alpha + \varphi^*\beta$.

2. Мультипликативность: если $\omega = \alpha \wedge \beta$, то $\varphi^*\omega = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$.

◀ Проверим это свойство для внешнего произведения 1-форм.

Пусть $\omega := \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$, $\omega_i \in \mathcal{F}^1(Y, \mathbb{R})$, $x \in X$, $y := \varphi(x)$, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$, $u_i := d\varphi(x)v_i$.

Тогда $(\varphi^*\omega)(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(y)\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \det(\omega_i(y)\langle u_j \rangle)$.

Но $(\varphi^*\omega_1 \wedge \dots \wedge \varphi^*\omega_k)(x)\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \det(\varphi^*\omega_i(x)\langle v_j \rangle) = \det(\omega_i(y)\langle u_j \rangle)$. ▶

3. Закон композиции: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, т.е. $(\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega)$ для любых гладких отображений $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ и формы $\omega \in \mathcal{F}^k(Z, E)$.

4. Перенос внешнего дифференциала: $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$.

5. Запись в координатах: если преобразование φ задано формулами $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$, то для каждой k -формы $\omega(y) = \sum_I c_I(y) dy_I$ имеет место равенство

$$\varphi^*\omega(x) = \sum_{I=(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)} c_I(\varphi(x)) d\varphi_I(x),$$

где $d\varphi_I(x) := d\varphi_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(x)$. Иными словами: операция переноса форм осуществляется путём формальной замены переменных в координатах.

Следствие. Если $\varphi \in C^{r+1}$, а $\omega \in C^r$, то $\varphi^*\omega \in C^r$.

Упражнение. Если $m = n$ то

$$\varphi^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = \det(D\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Формула гомотопии. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $U = [a, b] \times X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(t, x) := (t, x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой непрерывной k -формы ω , заданной на полосе U , определим $(k-1)$ -форму $\int_a^b \omega$, заданную на X следующим образом: представим форму $\omega(t, x)$ в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{I \in M(n, k-1)} f_I(t, x) dt \wedge x_I + \sum_{J \in M(k, n)} g_J(t, x) dx_J$$

и положим

$$\int_a^b \omega := \sum_{I \in M(n, k-1)} \left(\int_a^b f_I(t, x) dt \right) dx_I.$$

— интеграл формы ω по левой переменной, послойный интеграл.

Теорема. Для каждой гладкой формы $\omega \in \mathcal{F}^k(U, E)$ верна формула

$$d \int_a^b \omega + \int_a^b d\omega = j_b^* \omega - j_a^* \omega,$$

где $j_c : X \rightarrow U$, $c \in [a, b]$ — отображение, задаваемое формулой $j_c(x) = (c, x)$ — вложение множества X на уровень c .

► Поскольку каждое слагаемое в формуле гомотопии линейно относительно переменной ω , то достаточно проверить эту формулу для форм вида $g(t, x)dx_J$ и $f(t, x)dt \wedge dx_I$.

Пусть ω — форма первого типа. Тогда $d \int_a^b \omega = d0 = 0$, а

$$\begin{aligned} \int_a^b d\omega &= \int_a^b (dg(t, x)) \wedge dx_J = \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_J = \\ &= \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial t} dt \right) dx_J = g(b, x) \wedge dx_J - g(a, x) \wedge dx_J = j_b^* \omega - j_a^* \omega. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\omega = f(t, x)dt \wedge dx_I$. В этом случае для всех $c \in [a, b]$ $j_c^* \omega = f(c, x)dc \wedge dx_I = 0$ и с учётом правил дифференцирования интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^b d\omega &= \int_a^b (df(t, x)) \wedge dt \wedge dx_I = \int_a^b \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dt \wedge dx_I \right) = \\ &= - \sum_k \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} dt \wedge dx_k \wedge dx_I \right) = - \sum_k \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_k} dt \right) \wedge dx_k \wedge dx_I = \\ &= - \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \int_a^b f(t, x) dt \right) \wedge dx_k \wedge dx_I = -d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) \wedge dx_I := \\ &:= -d \left(\left(\int_a^b f(t, x) dt \right) \wedge dx_I \right) = -d \int_a^b (f(t, x) dt \wedge dx_I) = -d \int_a^b \omega. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int_a^b d\omega + d \int_a^b \omega = 0 = j_b^* \omega - j_a^* \omega$. ►

Точные и замкнутые дифференциальные формы.

Говорят, что k -форма ω является точной на множестве X , если существует такая $(k-1)$ -форма ψ , что $\omega = d\psi$ на X . Каждую такую форму ψ будем называть первообразной (для) формы ω на X .

Говорят, что форма ω замкнута на множестве X , если $d\omega = 0$ на X .

Каждая точная форма является замкнутой. Однако замкнутость не является достаточным условием точности. Например, форма Гаусса замкнута на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но не точна на этом множестве, ибо её интеграл вдоль замкнутого пути $e^{it} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ не равен нулю.

Множество X называют звёздным относительно точки p , если оно вместе с каждой своей точкой x содержит отрезок $[p, x]$.

Теорема Пуанкаре. На звёздном множестве всякая замкнутая дифференциальная форма положительной степени точна.

► Пусть X — звёздное относительно точки p множество, $U = [0, 1] \times X$ и ω — замкнутая форма степени > 0 . Определим отображение $\gamma : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $\gamma(t, x) = p + t(x - p)x$. При фиксированном x число t , изменяясь от 0 до 1, параметризует отрезок $[p, x]$. Положим также $j_c(x) = (c, x)$ — вложение на уровень c .

Отображение γ преобразует полосу U в конус X и, стало быть, форма γ^* определена на U . Применяя к ней формулу гомотопии, получаем

$$d \int_0^1 \gamma^* \omega + \int_0^1 d\gamma^* \omega = j_1^* \gamma^* \omega - j_0^* \gamma^* \omega.$$

Отображение $\gamma \circ j_1$ тождественное и потому $j_1^* \gamma^* \omega = (\gamma \circ j_1)^* \omega = \omega$.

Так как $\gamma \circ j_0 = p$ — постоянное отображение, а $\deg \omega > 0$, то $j_0^* \gamma^* \omega = (\gamma \circ j_0)^* \omega = 0$.

Наконец, $d\gamma^* \omega = \gamma^* d\omega = 0$. В результате $d \int_0^1 \gamma^* \omega = \omega$. ►

Упражнения. 0. Что предложенное рассуждение даёт для 0-форм?

1. На полуплоскости $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ функция $\arctan \frac{y}{x}$ служит первообразной для формы Гаусса $d\Theta$. Указать первообразную этой формы на звёздном множестве $\mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0]$.

Следствия. Гладко неизоморфны

- 1) плоскость и проколотая плоскость;
- 2) круг и кольцо;
- 3) шар и заполненный тор;
- 4) сфера S^2 и тор.

§ 12.5. Ориентация гладкого многообразия

Необходимые сведения о касательном пространстве.

Пусть $p \in M \subset \mathbb{R}^n$. Множество касательных векторов к множеству M в точке p будем обозначать символом $T_p^+ M$, а его линейную оболочку – символом $T_p M$, называя её элементы касательными векторами, а элементы множества $T_p^+ M$ – внутренними касательными векторами к множеству M в точке p (заметим: эти обозначения немного отличаются от тех, что были ранее).

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть M – гладкое k -мерное многообразие. Тогда $T_p M$ есть k -мерное векторное пространство, причём
если $p \in M \setminus \partial M$, то $T_p^+ M = T_p M$;
а если $p \in \partial M$, то $T_p^+ M$ является полупространством пространства $T_p M$ и $\partial T_p^+ M = T_p \partial M$.
2. Дифференциал $d\varphi(p)$ всякого гладкого отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ переводит $T_p X$ в $T_{\varphi(p)} Y$, а $T_p^+ X$ в $T_{\varphi(p)}^+ Y$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое k -мерное многообразие.

Касательным базисом многообразия M называют всякий набор вида $(x; v_1, \dots, v_k)$, где $x \in M$, а $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ – линейно независимые касательные векторы. Если $k = 0$, то каждая точка $x \in M$ является касательным базисом многообразия M .

Множество всех касательных базисов многообразия M обозначим через BM и отметим, что $BM \subset \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{(k+1)n}$.

Для исследования многих физических и геометрических явлений (правило правой руки, формула Грина, векторное произведение и т.д.) бывает полезно некоторые касательные базисы многообразия назвать положительными, а некоторые – отрицательными, причём это нужно сделать так, чтобы при непрерывных деформациях базиса его имя не изменялось, а при замене какого-либо из векторов базиса на противоположный приводило к переименованию. Заметив, наконец, что приписывание имени каждому касательному базису многообразия M есть отображение пространства BM в множество, образованное двумя элементами (именами), приходим к следующему определению.

Ориентацией гладкого многообразия M будем называть всякую непрерывную функцию $\vartheta : BM \rightarrow \{-1, 1\} = S^0$, нечётную по каждой векторной переменной. Многообразие M называют *ориентируемым*, если оно обладает ориентацией и *ориентированным*, если на нём задана ориентация. Точнее, *ориентированное многообразие* – это упорядоченная пара вида (M, ϑ) , где M – многообразие, а ϑ – его ориентация. Зачастую ори-

ентированное многообразие обозначают той же буквой, что и множество точек этого многообразия. Если M – ориентированное многообразие, то символом $(-M)$ обозначают многообразие, снабжённое противоположной ориентацией.

Примеры и упражнения. 0. Всякое нульмерное многообразие M ориентируемо: любая функция $\vartheta : M \rightarrow S^0$ служит ему ориентацией. Следовательно, ориентированное нульмерное многообразие (M, ϑ) – это множество пар вида (p, ϑ) , где p – точка дискретного пространства M , а $\vartheta = \pm 1$.

1. Всякая дуга ориентируема: касательный базис $(x; v)$ дуги S с началом p и концом q считается положительным, если либо вектор v касателен к дуге $S[x, q]$, либо вектор $(-v)$ касателен к дуге $S[p, x]$. Более того, любое одномерное многообразие ориентируемо, ибо всякая его компонента линейной связности гладко изоморфна либо промежутку числовой прямой, либо окружности.

2. Функцию $\varepsilon(x; v_1, \dots, v_n) := \text{sign det}(v_1, \dots, v_n)$, где $(x; v_1, \dots, v_n)$ – базис векторного пространства $\mathbb{R}^n$, будем называть *стандартной ориентацией* пространства $\mathbb{R}^n$.

3. Функцию $\dot{\varepsilon}(x; v_1, \dots, v_{n-1}) := \text{sign det}(x, v_1, \dots, v_{n-1})$, где в скобках стоит касательный базис сферы S^{n-1} , будем называть *стандартной ориентацией* сферы S^{n-1} .

4. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость суть неориентируемые поверхности.

5. Множество регулярных решений системы уравнений $f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$ является ориентируемым $(n - k)$ -мерным многообразием. Ориентирует его функция

$$\vartheta(x; v_1, \dots, v_{n-k}) := \text{sign det}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), v_1, \dots, v_{n-k}).$$

Касательный базис $(x; v_1, \dots, v_k)$ многообразия (M, ϑ) называют положительным (отрицательным), если $\vartheta(x; v_1, \dots, v_k) > 0$ (соответственно, $\vartheta(x; v_1, \dots, v_k) < 0$). Эпитеты: положительный, правый, положительно ориентированный в отношении к касательному базису суть синонимы. (Это же касается и слов: отрицательный, левый, отрицательно ориентированный.)

Если k -мерное многообразие X является частью k -мерного многообразия Y , то будем говорить, что X – кусок многообразия Y . Примеры: X – открытая часть многообразия Y ; X – k -мерный шар в $\mathbb{R}^k$. Если X – кусок ориентированного многообразия (Y, ϑ) , то $BX \subset BY$ и потому сужение функции ϑ на множество BX будет ориентацией куска X

$:=$ индуцированной ориентацией. Обычно считаем, что каждый кусок ориентированного многообразия снабжён этой именно ориентацией.

Теорема о числе ориентаций. Связное многообразие либо неориентируемо, либо обладает ровно двумя ориентациями.

◀ 1) Для каждой ориентации ϑ многообразия M и любых касательных базисов $(x; a) := (x; a_1, \dots, a_k)$ и $(x; b) := (x; b_1, \dots, b_k)$ имеет место формула

$$\vartheta(x; a) = \text{sign det}(a/b) \vartheta(x; b), \quad (*)$$

где (a/b) — матрица базиса a относительно базиса b в пространстве $T_x M$.

◀ Согласно определению и критерию соориентированности базисов существует такой непрерывный путь $u(t) := (u_1(t), \dots, u_k(t))$, $t \in [0, 1]$ в пространстве базисов векторного пространства $T_x M$, что $u(0) = a$, а $u(1) = (s_{ab}b_1, b_2, \dots, b_k)$, где $s_{ab} = \text{sign det}(a/b)$. Поскольку функция $\vartheta(x; u(t))$ переменной t непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения в множестве $\{-1, 1\}$, то согласно теореме Больцано – Коши эта функция постоянна и, стало быть, $\vartheta(x; a) = \vartheta(x; u(0)) = \vartheta(x; u(1))$. И так как функция ϑ нечётна по первой векторной переменной, $\vartheta(x; u(1)) = s_{ab}\vartheta(x; b)$. ▶

2) Пусть ϑ и τ — какие либо ориентации многообразия M . Для каждой точки $x \in M$ выберем какой-нибудь базис $a(x)$ в пространстве $T_x M$ и положим $f(x) := \frac{\tau(x; a(x))}{\vartheta(x; a(x))}$. Из формулы (*) следует, что функция $f(x)$ не зависит от выбора базиса $a(x)$.

3) Покажем, что функция f непрерывна в каждой точке $p \in M$. Пусть M_p — открытая распрямляемая часть многообразия M , содержащая точку p , и $\varphi : U \rightarrow M_p$ — гладкий изоморфизм, где U — открытая часть пространства $\mathbb{R}_+^k$. Для каждого индекса $i \in \{1, \dots, k\}$ положим $v_i(x) := D_i \varphi(\varphi^{-1}(x))$. Набор векторов $v(x) := (v_1(x), \dots, v_k(x))$ является базисом пространства $T_x M_p$ в каждой точке $x \in M_p$. Согласно пункту 2) на M_p выполнено равенство $f(x) := \frac{\tau(x; v(x))}{\vartheta(x; v(x))}$ и, следовательно, функция f непрерывна на M_p .

4) Так как функция $f : M \rightarrow \{-1, 1\}$ непрерывна, а многообразие M линейно связно, то в силу теоремы Больцано – Коши эта функция постоянна. Следовательно, либо $\tau = \vartheta$, либо $\tau = -\vartheta$. ▶

Предостережение. Попытка упростить доказательство путём построения на M непрерывного поля касательных базисов обречена на неудачу, ибо далеко не на каждом многообразии существует такое поле. Так среди сфер такое поле имеется лишь на S^1 , S^3 , S^7 (теорема Адамса).

Следствие. Для каждого касательного базиса $(x; b)$ связного ориентируемого многообразия M существует ровно одна ориентация ϑ , для

которой $\vartheta(x; b) > 0$. Поэтому для задания ориентации связного ориентируемого многообразия достаточно объявить какой-нибудь его касательный базис правым. Такой базис называют *ориентирующим*.

Говорят, что отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ ориентированных многообразий сохраняет ориентацию, если оно переводит касательные базисы многообразия X в касательные базисы многообразия Y того же названия: $\forall (x; v_1 \dots) \in BX \ (\varphi(x); d\varphi(x)\langle v_1 \rangle, \dots) \in BY$ и $\vartheta_X(x; v_1, \dots) = \vartheta_Y(\varphi(x); d\varphi(x)\langle v_1 \rangle, \dots)$.

Лемма 1. Координатный признак сохранения ориентации. Изоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ связного куска X пространства $\mathbb{R}^k$ на ориентированное многообразие (Y, ϑ) сохраняет ориентацию, если для некоторой точки $p \in X$ выполнено равенство

$$\vartheta(\varphi(p); D_1\varphi(p), \dots, D_k\varphi(p)) > 0.$$

Упражнения. 1. Верно ли, что отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ ориентированных многообразий сохраняет ориентацию, если оно переводит положительные касательные базисы многообразия X в положительные касательные базисы многообразия Y ?

2. Изоморфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ связных ориентированных многообразий либо сохраняет, либо меняет ориентацию. Он сохраняет ориентацию, если какой-нибудь касательный базис многообразия U переходит в базис того же наименования.

4. Отображение $(e^{it})^n : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ сохраняет ориентацию, если $n > 0$, и меняет, если $n < 0$.

5. Сферическая параметризация $\psi :]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R} \rightarrow S^2$, задаваемая формулой

$$\psi(s, t) = (\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin t),$$

меняет ориентацию.

Индукцированная ориентация края.

Рассматривая какое-либо многообразие M вблизи его края ∂M , полезно представлять его куском некоторого многообразия $\tilde{M}$ без края. Например, шар B^k и полупространство $\mathbb{R}_+^k$ в $\mathbb{R}^k$; полусфера в сфере и т.п.. Такое многообразие $\tilde{M}$ действительно существует. В этом случае $T_p M = T_p \tilde{M}$ даже в точках ∂M .

Пусть (M, ϑ) – ориентированное k -многообразие. Для каждой точки $x \in \partial M$ выберем какой-нибудь внешний касательный вектор $w(x) \in (T_x M) \setminus T_x^+ M$ и для каждого касательного базиса $(x; v_2, \dots, v_k) \in B(\partial M)$ положим

$$\dot{\vartheta}(x; v_2, \dots, v_k) = \vartheta(x; w(x), v_2, \dots, v_k).$$

Лемма 2. Данное определение корректно: функция $\dot{\vartheta}$ не зависит от выбора внешнего касательного вектора $w(x)$ и является ориентацией многообразия ∂M .

◀ 1) Совокупность $T_x M \setminus T_x^+ \partial M$ внешних касательных векторов в точке x — открытое полупространство векторного пространства $T_x M$ и потому двузначная непрерывная функция $\tau(W) := \vartheta(x; w, v_2, \dots, v_k)$ переменной w постоянна на этом полупространстве. Поэтому для любой пары внешних касательных векторов w, w' выполнено $\vartheta(x; w', v_2, \dots, v_k) = \vartheta(x; w, v_2, \dots, v_k)$.

2) нечётность функции $\dot{\vartheta}$ по векторным переменным очевидна.

3) Покажем, что $\dot{\vartheta}$ непрерывна в любой точке $(p; b) := (p; b_2, \dots, b_k) \in B \partial M$. Пусть M_p — такая открытая часть многообразия M , содержащая точку p , что имеется гладкий изоморфизм $\varphi : \mathbb{R}_+^k \rightarrow M_p$. Отметим, что вектор $(-e_1) \in \mathbb{R}_+^k$ является внешним касательным вектором многообразия $\mathbb{R}_+^k$, и что дифференциал гладкого изоморфизма многообразий переводит внутренние касательные векторы во внутренние, а внешние во внешние.

Следовательно, вектор $w'(x) := -D_1 \varphi(\varphi^{-1}(x)) = d\varphi(\varphi^{-1}(x)) \langle -e_1 \rangle$ является внешним касательным вектором к многообразию ∂M_p в точке x . Согласно пункту 1) для каждой точки $x \in M_p$ и любого касательного базиса $(x; w'(x), v_2, \dots, v_k)$ справедлива формула $\dot{\vartheta}(x; v_2, \dots, v_k) = \vartheta(x; w'(x), v_2, \dots, v_k)$. Так как вектор-функция $w(x)$ непрерывна на ∂M_p , а функция ϑ непрерывна на $B M$, то функция $\dot{\vartheta}$ непрерывна на множестве $B \partial M_p$, которое является открытой частью множества $B \partial M$, содержащей базис $(p; b)$. ►

При отсутствии специальных указаний край ориентированного многообразия (M, ϑ) предполагается снабжённым ориентацией $\dot{\vartheta}$ (индуцированной ориентацией края).

Упражнения. 1. Стандартная ориентация сферы S^{n-1} индуцирована стандартной ориентацией шара B^n ($S^{n-1} = \partial B^n$).

2. Пусть U и V — такие куски пространства $\mathbb{R}^n$, что их пересечение есть край каждого из них. Тогда $\partial U = -\partial V$.

3. Справедливо следующее равенство ориентированных нульмерных многообразий $\partial[a < b] = \{(a, -1), (b, +1)\}$.

§ 12.6. Интеграл k -формы по ориентированному k -многообразию.

Для каждого ориентированного гладкого k -многообразия M и любого банахова пространства E будут определены

А) векторное подпространство $L_1^k(M, E)$ пространства $F^k(M, E)$, со-

стоящее из интегрируемых на M форм;

В) операция $\int_M : L_1^k(M, E) \rightarrow E$, сопоставляющая каждой форме $\omega \in L_1^k(M, E)$ элемент $\int_M \omega \in E$, называемый интегралом формы ω по многообразию M , обладающая следующими элементарными свойствами:

И0. Если k -многообразие M лежит в $\mathbb{R}^k$ и снабжено стандартной ориентацией пространства $\mathbb{R}^k$, то k -форма $f(t)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$ интегрируема на M в том и только в том случае, когда функция f интегрируема по Лебегу на множестве M . В этом случае $\int_M f(t)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = \int_M f(t)dt_1 \dots dt_k$.

И1. Линейность: если $\omega = \sum_{i=1}^q c_i \omega_i$, где $\omega_1, \dots, \omega_q$ — k -формы, интегрируемые на ориентированном многообразии M , а $c_1, \dots, c_q$ — константы, то $\int_M \omega = \sum_{i=1}^q c_i \int_M \omega_i$.

И2. Ориентированность: $\int_M = - \int_{-M}$.

И3. Формула замены переменной: Если $\varphi : W \rightarrow M$ — гладкий изоморфизм ориентированных многообразий, сохраняющий ориентацию, и если в формуле $\int_M \omega = \int_W \varphi^* \omega$ определён один из интегралов, то определён другой и формула верна.

И4. Сужаемость области интегрирования: пусть M_0 — кусок ориентированного k -многообразия M , а форма ω , заданная на M , сосредоточена на M_0 (равна нулю на множестве $M \setminus M_0$). Тогда эта форма интегрируема на M в том и только в том случае, когда она интегрируема на M_0 . В этом случае $\int_M \omega = \int_{M_0} \omega$.

Если M — 0-мерное многообразие (счётное дискретное множество) в $\mathbb{R}^n$ и $\vartheta : M \rightarrow \{-1, 1\}$ — его ориентация, то 0-форму (функцию) $\omega : M \rightarrow E$ считают интегрируемой на многообразии $M = (M, \vartheta)$ в том и только в том случае, когда $\sum_{x \in M} |\omega(x)| < \infty$, и в этом случае полагают

$$\int_M \omega := \sum_{x \in M} \vartheta(x) \omega(x).$$

Предположим теперь, что $k > 0$. Пусть M — ориентированное гладкое k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и $\omega \in F^k(M, E)$.

Допустим сначала, что имеется сохраняющий ориентацию гладкий изоморфизм $\varphi : U \rightarrow M$, $U \subset \mathbb{R}^k$ (в этом случае многообразие M будем называть *распрямляемым*). Будем говорить, что форма ω интегрируема на (по, вдоль) M , если форма $\varphi^* \omega$ интегрируема на множестве U (см.И0).

В таком случае интеграл $\int_U \varphi^* \omega$ будем называть интегралом формы ω по M и обозначать символом $\int_M \omega$.

Лемма 1. Определение интеграла формы по распрямляемому многообразию не зависит от выбора изоморфизма φ , сохраняющего ориентацию.

Лемма 2. Операция интегрирования дифференциальных форм по распрямляемым многообразиям обладает свойствами I0–I4.

Доказательства: См. § 12.3, в частности, доказательство леммы 0. ►

Пусть теперь M — любое ориентированное гладкое k -многообразие. Будем говорить, что k -форма ω , заданная на M , интегрируема на M , если существует L_1 -разложение этой формы, т.е. такая система $\mathcal{A}$, состоящая из открытых распрямляемых частей $A_1, \dots, A_q$ многообразия M , и k -форм $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, что каждая форма α_i интегрируема на A_i , равна нулю на $M \setminus A_i$, а $\sum_{i=1}^q \alpha_i(x) = \omega(x) \forall x \in M$. В этом случае сумму $\sum_{i=1}^q \int_{A_i} \alpha_i$ будем называть *интегралом дифференциальной формы ω по многообразию M* и обозначать символом $\int_M \omega$.

Лемма 3. Приведенное определение интеграла корректно, т.е. не зависит от выбора L_1 -разложения формы ω .

◀ допустим сначала, что $\omega = 0$ и покажем, что $\sum_i \int_{A_i} \alpha_i = 0$.

Пусть $A_{ij} := A_i \cap A_j$, $A := \cup_{j=1}^q A_j$, и $\xi_i(x) := \frac{\chi_{A_i}}{\sum_{j=1}^q \chi_{A_j}(x)}$, если $x \in A$ и $\xi_i(x) := 0$, если $x \in M \setminus A$. Тогда $\sum_i \xi_i(x) = 1$, если $x \in A$, и $\sum_i \xi_i(x) = 0$, если $x \in M \setminus A$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{A_i} \alpha_i &= \sum_i \int_{A_i} \sum_j \xi_j \alpha_i = \sum_{i,j} \int_{A_i} \xi_j \alpha_i = \sum_{i,j} \int_{A_{ij}} \xi_j \alpha_i = \\ &= \sum_{i,j} \int_{A_j} \xi_j \alpha_i = \sum_j \int_{A_j} \sum_i \xi_j \alpha_i = \sum_j \int_{A_j} \xi_j \sum_i \alpha_i = \sum_j \int_{A_j} \xi_j \omega = 0. \end{aligned}$$

Если ω не обязательно нулевая и $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_r; \beta_1, \dots, \beta_r)$ — другое её L_1 -разложение, то $(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_r; \alpha_1, \dots, \alpha_q, -\beta_1, \dots, -\beta_r)$ является L_1 -разложением нулевой k -формы и $\sum_i \int_{A_i} \alpha_i + \sum_j \int_{B_j} -\beta_j = 0$. ►

Множество всех E -значных k -форм, интегрируемых на ориентированном k -многообразии M , будем обозначать символом $L_1^k(M, E)$.

Лемма 4. Операция интегрирования дифференциальных форм обладает свойствами I0–I4.

◀ II. Пусть $\omega = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in L_1^k(M, E)$ и $(A_1, \dots, A_q; \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ и $(B_1, \dots, B_r; \beta_1, \dots, \beta_r)$ — какие-нибудь L_1 -разложения форм α и β . Тогда система $(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_r; \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_r)$ является L_1 -разложением формы ω . Дальнейшее очевидно. Проверка свойств I2–I4 легко сводится к распрямляемым многообразиям. ▶

Лемма о гладком разложении единицы. Пусть W — какая-нибудь система открытых частей пространства $\mathbb{R}^n$, покрывающая компакт K . Существуют такие бесконечно гладкие функции $\lambda_1, \dots, \lambda_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ и такие компакты $B_1, \dots, B_q$, что а) $\sum_{i=1}^q \lambda_i(x) = 1 \ \forall x \in K$, б) каждая функция λ_i сосредоточена на B_i , в) каждый компакт B_i лежит в некотором элементе W_i покрытия W .

◀ Для каждой точки $p \in K$ выберем какой-нибудь замкнутый шар $B(p)$ с центром p , лежащий в некотором элементе $W(p)$ покрытия W . Пусть $U(p) := \text{Int } B(p)$. Семейство открытых шаров $\{U(p) \mid p \in K\}$ покрывает компакт K и потому имеется набор шаров $U(p_1), \dots, U(p_q)$, покрывающий K .

Пусть $\delta_1, \dots, \delta_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — такие бесконечно гладкие функции, что каждая функция δ_i положительна на шаре $U(p_i)$ и равна нулю вне его. Пусть $U := \bigcup_{i=1}^q U(p_i)$. По лемме о сглаживании индикатора существует бесконечно гладкая функция $\delta_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, равная нулю на K и единице вне U . Пусть $\sigma := \sum_{j=0}^q \delta_j$ и $\lambda_i := \frac{\delta_i}{\sigma}$. Ясно, что система функций и шаров $\{\lambda_i, B(p_i) \mid i \in \{1, \dots, q\}\}$ удовлетворяет условиям а), б), в). ▶

Говорят, что k -форма ω имеет компактный носитель на множестве M , если она определена на M и существует такой компакт $K \subset M$, что $\omega(x) = 0 \ \forall x \in M \setminus K$.

Признак интегрируемости. Если непрерывная k -форма ω имеет компактный носитель на ориентированном k -многообразии M , то она интегрируема на M . В частности, на компактном ориентированном k -многообразии всякая непрерывная k -форма интегрируема.

◀ Пусть $K \subset M$ такой компакт, что $\omega(x) = 0 \ \forall x \in M \setminus K$.

1) Предположим сначала, что M — распрямляемо. Пусть $\varphi : U \rightarrow M$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — какой-нибудь гладкий изоморфизм, $H := \varphi^{-1}(K)$ и $\varphi^* \omega = f(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k$. Функция f непрерывна на компакте H , равна нулю на $U \setminus H$ и потому интегрируема на U . Следовательно, форма ω интегрируема на M .

2) Общий случай. Для каждой точки $p \in M$ имеется открытая распрямляемая часть M_p многообразия M , содержащая эту точку.

Каждое множество M_p представимо в виде $M_p = M \cap W_p$, где W_p – открытая часть пространства $\mathbb{R}^n$. Совокупность множеств вида W_p покрывает компакт K . Поэтому в силу леммы о разложении единицы найдутся такие гладкие функции $\lambda_1, \dots, \lambda_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, что $\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$ на K и что $\lambda_i = 0$ вне некоторого компакта $B_i \subset W_{p_i}$. Пусть $\omega_i := \lambda_i \omega$ и $K_i := B_i \cap K$. Каждая форма ω_i непрерывна и равна нулю на $M \setminus K_i$. Поскольку компакт K_i лежит в распрямляемом многообразии M_{p_i} , то согласно пункту 1) форма ω интегрируема на M_{p_i} , а, значит, и на M . Остаётся заметить, что $\sum \omega_i = \omega$. ►

Формула Стокса (обобщённая формула Ньютона–Лейбница).

Если гладкая k -форма ω на ориентированном $(k+1)$ -мерном многообразии M имеет компактный носитель, то

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

(Край многообразия M снабжён индуцированной ориентацией.)

◀ 1) Сначала докажем формулу для простейших многообразий, т.е. для $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}_+^k$.

Пусть $k = 0$. В этом случае форма ω является гладкой функцией.

Если $M = [a < b]$, то согласно формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_M d\omega = \int_a^b d\omega = \omega(b) - \omega(a) = \int_{\partial M} \omega.$$

Пусть $M = \mathbb{R}$. Так как ω имеет компактный носитель, то она равна нулю вне некоторого отрезка $[a < b]$ и потому $\int_{\mathbb{R}} d\omega = 0$.

Если же $M = \mathbb{R}_+$, то по аналогичной причине $\int_M d\omega = -\omega(0) = \int_{\partial \mathbb{R}_+} \omega$.

Допустим, что формула Стокса доказана для многообразия $X := \mathbb{R}^k$, т.е. что на X для каждой гладкой $(k-1)$ -формы α с компактным носителем $\int_X d\alpha = 0$. Пусть $M = [a, \infty[\times X$ и ω – гладкая k -форма на M , имеющая компактный носитель. В этом случае найдётся такое число $b > a$,

что $\omega = 0$ на $[b, \infty[\times X$. Поэтому $\int_M d\omega = \int_U d\omega$, где $U = [a, b] \times X$. Форма

$d\omega$ представима в виде $f(t, x)dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Вспоминая свойство I0 интеграла формы, теорему Фубини и формулу гомотопии, получаем

$$\begin{aligned}
\int_U d\omega &= \int_U f(t, x) dt dx = \int_X \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx = \int_X \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \\
&= \int_X \int_a^b f(t, x) dt \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_X \int_a^b d\omega = - \int_X d \left(\int_a^b \omega \right) + \int_X j_b^* \omega - \int_X j_a^* \omega
\end{aligned}$$

(напомним: символ j_c обозначает отображение $X \rightarrow \mathbb{R} \times X$, определяемое формулой $j_c(x) = (c, x)$).

Поскольку на множестве $\{b\} \times X$ форма ω равна нулю, то $j_b^* \omega = 0$.

Так как гладкая k -форма ω имеет компактный носитель на U , то $\int_a^b \omega$ является гладкой $(k-1)$ -формой на X , имеющей компактный носитель.

Поэтому согласно индуктивному предположению $\int_X d \int_a^b \omega = 0$.

Согласно лемме 1 § 12.5 изоморфизм $j_a : X \rightarrow \partial M$ меняет ориентацию, поскольку

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(j_a(x); D_1 j_a(x), \dots, D_k j_a(x)) &= \varepsilon(j_a(x); -e_0, D_1 j_a(x), \dots, D_k j_a(x)) = \\
&= \varepsilon(j_a(x); -e_0, e_1, \dots, e_k) := \text{sign det}(-e_0, e_1, \dots, e_k) = -1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\int_{\partial M} \omega = - \int_X j_a^* \omega = \int_M d\omega$.

Пусть ω — гладкая k -форма на $\mathbb{R}^{k+1}$ с компактным носителем и a — такое число, что на полупространстве $] -\infty, a] \times X$ эта форма нулевая. По доказанному $\int_{\mathbb{R}^{k+1}} d\omega = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = 0 = \int_{\partial \mathbb{R}^{k+1}} \omega$. Итак, для простейших многообразий формула Стокса установлена.

2) Допустим, что M изоморфно простейшему многообразию $X \in \{\mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+^k\}$ и пусть $\varphi : X \rightarrow M$ — какой-нибудь гладкий изоморфизм. Можно считать, что φ сохраняет ориентацию. (В ином случае M надо переориентировать.) Если ω — гладкая $(k-1)$ -форма на M с компактным носителем, то

$$\int_M d\omega = \int_X \varphi^* d\omega = \int_X d\varphi^* \omega = \int_{\partial X} \varphi^* \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

3) Пусть ω — гладкая k -форма с компактным носителем на k -многообразии M и $K \subset M$ — такой компакт, что $\omega(x) = 0 \forall x \in M \setminus K$. Для каждой точки $p \in M$ существуют открытая часть M_p многообразия M , содержащая эту точку, гладко изоморфная простейшему k -многообразию.

Повторяя рассуждения пункта 2 доказательства признака интегрируемости, видим, что на M форма ω представима в виде $\omega = \sum_{i=1}^k \omega_i$, где ω_i — гладкая форма, равная нулю вне некоторого компакта $K_i \subset U_i := M_{p_i}$. Согласно пункту 2 для пары (m_{p_i}, ω_i) формула Стокса справедлива и, следовательно,

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_M d\omega_i = \sum_i \int_{U_i} d\omega_i = \sum_i \int_{\partial U_i} \omega_i = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i = \int_{\partial M} \sum_i \omega_i = \int_{\partial M} \omega. \blacktriangleright$$

Упражнения. 1. Формулы Ньютона — Лейбница и Грина являются частными случаями формулы Стокса.

2. Если α и β — такие гладкие формы на компактном k -многообразии M , что степень их внешнего произведения равна $k-1$, то

$$\int_M d\alpha \wedge \beta + (-1)^\alpha \int_M \alpha \wedge d\beta = \int_{\partial M} \alpha \wedge \beta$$

(формула интегрирования по частям).

Часто пользуются формулой Стокса для кусочно гладких многообразий (например, для квадрата или для полушара). Несмотря на то, что этот случай нуждается в более деликатном определении ориентации, на практике в каждой конкретной ситуации обычно бывает ясно, как нужно задавать ориентацию на гладких кусках рассматриваемого многообразия. На самом деле формула Стокса верна даже для липшицевых многообразий и форм с липшицевыми коэффициентами.

§ 12.7. Приложения

Закон Архимеда. Пусть A — тело, расположенное внутри области V физического пространства, заполненной жидкостью или газом. Можно считать, что A есть компактное гладкое 3-многообразие, расположенное внутри области $V \subset \mathbb{R}^3$. В соответствии с физическими представлениями, вытекающими из закона Паскаля, суммарная сила, производимая давлением жидкости на поверхность тела A (*архимедова сила*) определяется формулой $F(A) = \int_{\partial A} \pi_p$, где π_p — форма Паскаля, $\pi_p(x, y, z)\langle u, v \rangle = -p(x, y, z) \cdot (u \times v)$, где p — скалярная функция, называемая давлением.

Используя координатное представление формы Паскаля $\pi_p(x, y, z) = -p(x, y, z)(e_3 dx \wedge dy + e_1 dy \wedge dz + e_2 dz \wedge dx)$ и формулу Стокса, получаем

следующую версию закона Архимеда

$$F(A) = \int_A \text{grad } p \, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Упражнение. Пусть давление в точке $\xi = (x, y, z)$ задано формулой $p(\xi) = -cz$ где c — плотность жидкости, заполняющей резервуар V . Какова в такой ситуации архимедова сила, действующая на тело A ? (Ответ: $F(A) = e_3 c \mu A$.)

Интеграл Гаусса. Пусть U — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Если $0 \in \mathbb{R}^n \setminus U$, то $\int_{\partial U} d\Theta = 0$, а если $0 \in \text{Int } U$, то $\int_{\partial U} d\Theta = n \mu B^n$.

◀ Форма Гаусса $d\Theta(x) = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{x_i}{|x|^n} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ замкнута ($d(d\Theta) = 0$).

Если $0 \notin U$, то на U форма Гаусса гладкая и по Стоксу $\int_{\partial U} d\Theta = 0$.

(Это — не лемма Пуанкаре, это надо проверить!)

Пусть $0 \in \text{Int } U$ и B — какой-нибудь шарик с центром 0, лежащий как в $\text{Int } U$, так и в стандартном шаре B^n . Пусть $A = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int } B$ и $W = A \cap U$. Тогда с учётом ориентаций $\partial A = -\partial B$ и $\partial W = \partial U \cup \partial A$. Поскольку $0 \notin W$, то $0 = \int_{\partial W} d\Theta = \int_{\partial U} d\Theta + \int_{\partial A} d\Theta = \int_{\partial U} d\Theta - \int_{\partial B} d\Theta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} d\Theta &= \int_{\partial B} d\Theta = \int_{\partial B^n} d\Theta = \int_{\partial B^n} \sum_i (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \stackrel{\Phi C}{=} \\ &\stackrel{\Phi C}{=} \int_{B^n} n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \mu B^n. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Следствие. Если K — компактная непустая часть пространства $\mathbb{R}^n$, то множества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \setminus K$ гладко неэквивалентны.

Упражнение. Многообразия S^{k+l} и $S^k \times S^l$ гладко неэквивалентны.

Теорема о плёнке (о барабане). Пусть K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такое непрерывное отображение, что $f(x) = x$ для каждой точки $x \in \text{Fr } K$. Тогда $f(K) \supset K$.

◀ 1) Допустим, что это не так, т.е. есть точка $p \in (\text{Int } K) \setminus f(K)$. Можно считать, что $p = 0$ и что K лежит в шаре B_1 радиуса 1 с центром 0.

Распространим отображение f на всё $\mathbb{R}^n$ по формуле $f(x) = x \, \forall x \notin K$. Итак, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, f непрерывно и $f(x) = x$ вне шара B_1 . Осталось показать, что отображений со столь странными свойствами не бывает.

2) Установим сначала, что странного *гладкого* отображения быть не может. Для этого нам как раз и пригодятся формы. Допустим, что существует такое гладкое отображение $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, что $g(x) = x$ при $|x| \geq 2$. В этом случае форма $g^*d\Theta$ гладка на всём $\mathbb{R}^n$. А так как $g(x) = x$ при $|x| \geq 2$, то для таких x $g^*d\Theta(x) = d\Theta(x)$. Следовательно,

$$\int_{\partial B_2} d\Theta = \int_{\partial B_2} g^*d\Theta = \int_{B_2} dg^*d\Theta = \int_{B_2} g^*dd\Theta = 0,$$

что противоречит равенству $\int_{\partial B_r} \Theta = n \mu B^n$.

3) Сгладим теперь отображение f , построенное в 1), сохранив его странные свойства. Так как множество $f(B_2)$ компактно, то найдётся такое $\varepsilon > 0$, что расстояние $\rho(0, f(\mathbb{R}^n)) > \varepsilon$.

Примеры δ -образных последовательностей и теорема о сходимости усреднений говорят, что имеется такая неотрицательная бесконечно гладкая чётная функция τ , что $\tau(y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$, $\int_{B_1} \tau(y) dy = 1$, отображение $g := \tau * f$ бесконечно гладкое, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ при любом $x \in B_2$. Для каждого x , $|x| \geq 2$, получаем:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\tau(y)dy = \int_{B_1} f(x-y)\tau(y)dy = \int_{B_1} (x-y)\tau(y)dy = \\ &= \int_{B_1} x\tau(y)dy - \int_{B_1} y\tau(y)dy = x - 0, \end{aligned}$$

ибо $y\tau(y)$ – нечётная функция. Тем самым, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ и, стало быть, $|g| > 0$, поскольку $|f| > \varepsilon$.

Итак, бесконечно гладкое отображение g переводит $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, причём $g(x) = x$ если $|x| \geq 2$. Согласно пункту 2 таких отображений нет. Значит исходное допущение неверно. ►

Следствия. 1. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Всякое непрерывное отображение n -мерного шара в себя обладает неподвижной точкой.

2. Теорема о стационарной точке. Если непрерывное векторное поле v на шаре $B_1 = B^n$ таково, что в любой точке $x \in \partial B_1$ угол между векторами $v(x)$ и x меньше π , то в шаре B_1 найдётся такая точка p в которой $v(p) = 0$. Тем самым, уравнение $x' = v(x)$ в шаре B_1 обладает стационарным решением $x(t) = p$.

◀ Распространим отображение $v : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ на шар B_2 следующим образом. Для каждого $x \in B_2 \setminus B_1$ положим $t := t(x) := |x| - 1$ и $v(x) := tx + (1 - |t|)v\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

Отображение $v : B_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно и $v(x) = x \ \forall x \in \partial B_2$. Следовательно, $0 \in v(B_2)$, т.е. $\exists p \in B_2 \mid 0 = v(p)$. Но так как векторы x и $v\left(\frac{x}{|x|}\right)$ не противоположны, то $v(x) \neq 0$ при любом $x \in B_2 \setminus \text{Int } B_1$. Значит, $p \in \text{Int } B_1$. ▶

Теорема о векторных полях на сферах. Для всякого непрерывного векторного поля $v : S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ существует такая точка $x \in S^{2n}$, что вектор $v(x)$ параллелен вектору x .

◀ Докажем это для векторного поля v на сфере $S := \partial B_3 \subset \mathbb{R}^{2k+1}$.

Допустим, что теорема неверна, т.е. что в каждой точке $x \in S$ векторы $v(x)$ и x линейно независимы.

Распространим отображение $v : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ на всё $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Если $|x| \leq 2$, то положим $v(x) := -x$; если $|x| \geq 4$, то $v(x) = x$. А если $2 \leq |x| \leq 4$, то $v(x) := tx + (1 - |t|)v(3x/|x|)$, где $t := |x| - 3$.

Построенное отображение $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, причём $v(x) \neq 0$ для каждой точки $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $K := B_5 \setminus \text{Int } B_2$. Так как множество $v(K)$ компактно и не содержит нуля, то имеется такое $\varepsilon > 0$, что $|v(x)| > \varepsilon$ для каждого $x \in K$.

Применив к построенному отображению v процедуру сглаживания, использованную при доказательстве теоремы о плёнке, получим такое гладкое отображение $g := \tau * v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $g(x) = x$ при $|x| \geq 5$, $g(x) = -x$ при $|x| \leq 1$, $0 \notin g(K)$. Отсюда следует, что гладкая форма $g^*d\Theta$ определена на всём кольце K ; на ∂B_5 $g^*d\Theta = d\Theta$; на ∂B_1 $g^*d\Theta = -d\Theta$, ибо n нечётно. И поскольку $dg^*d\Theta = 0$, то согласно формуле Стокса

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K dg^*d\Theta = \int_{\partial K} g^*d\Theta = \int_{\partial B_5} g^*d\Theta + \int_{-\partial B_1} g^*d\Theta = \\ &= \int_{\partial B_5} d\Theta - \int_{-\partial B_1} d\Theta = \int_{\partial B_5} d\Theta + \int_{\partial B_1} d\Theta = 2n \mu B^n - \text{абсурд!} \end{aligned} \blacktriangleright$$

Упражнения. 0. Где использовалась чётномерность сферы?

1. На любом торе $S^1 \times \dots \times S^1$ и на каждой нечётномерной сфере имеется гладкое единичное касательное векторное поле.

2 Если гладкая поверхность s изоморфна чётномерной сфере, то любое непрерывное касательное векторное поле v на ней имеет «плешь», т.е. место, откуда не растёт волос ($\exists x \in S \ v(x) = 0$.)

§ 12.8. Связь интегралов первого и второго рода

Экскурс в § 11.14.

1. Пусть $\varphi : U \rightarrow M$ — гладкий изоморфизм, $U \subset \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Функция f μ_k -интегрируема на M , если функция $f(\varphi(u))\sqrt{\Gamma D\varphi(u)}$ интегрируема на U . В этом случае верна параметрическая формула интегрирования

$$\int_M f(x) d\mu_k(x) = \int_U f(\varphi(u)) \sqrt{\Gamma D\varphi(u)} du$$

2. Функция f , заданная на гладком k -многообразии M μ_k -интегрируема на M , если найдётся такая система $\mathcal{A}$, состоящая из открытых распрямляемых частей $A_1, \dots, A_q$ этого многообразия и функций $f_1, \dots, f_q$, что каждая функция f_i интегрируема на A_i и равна нулю на $M \setminus A_i$, а $\sum_{i=1}^q f_i(x) = f(x) \forall x \in M$. В этом случае $\int_M f d\mu_k = \sum_i \int_{M_i} f_i d\mu_k$.

Теорема о разнородных интегралах. Пусть на гладком k -мерном ориентированном многообразии M заданы такие функция f и k -форма ω , что $f(x) = \omega(x)\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ для каждой точки $x \in M$ и некоторого положительного ортонормированного касательного базиса $(x; b_1, \dots, b_k)$ в этой точке. Тогда функция f μ_k -интегрируема на M в том и только в том случае, когда на M интегрируема форма ω . В этом случае $\int_M f d\mu_k = \int_M \omega$.

◀ 1) Пусть $(x; a) := (x; a_1, \dots, a_k)$ и $(x; b) := (x; b_1, \dots, b_k)$ — касательные базисы многообразия M . Тогда

$$\omega(x)\langle a \rangle = \omega(x)\langle b \rangle \det(a/b),$$

где a/b — матрица базиса a относительно базиса b . Это вытекает из того, что левая и правая части равенства суть антисимметрические полилинейные функции векторных переменных $a_1, \dots, a_k$ на k -мерном векторном пространстве $T_x M$ и из того, что при $a = b$ рассматриваемое равенство верно.

Следовательно, если базис a и ортонормированный базис b соориентированы, то

$$\omega(x)\langle a \rangle = \omega(x)\langle b \rangle \sqrt{\Gamma(a)}. \quad (*)$$

2) Допустим, что M — распрямляемое многообразие и $x : U \rightarrow M$ — сохраняющий ориентацию изоморфизм, где $U \subset \mathbb{R}^k$. В такой ситуации

$\int_M f d\mu_k = \int_U f(x(u)) \sqrt{\Gamma Dx(u)} du$ (параметрическая формула интегрирования), а

$$\int_M \omega = \int_U x^* \omega = \int_U c(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k,$$

где

$$\begin{aligned} c(u) &= x^* \omega(u) \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \omega(x(u)) \langle dx(u)e_1, \dots, dx(u)e_k \rangle = \\ &= \omega(x(u)) \langle D_1 x(u), \dots, D_k x(u) \rangle = \omega(x(u)) \langle Dx(u) \rangle. \end{aligned}$$

Отображение x сохраняет ориентацию. Значит, касательный базис $(x(u); Dx(u))$ положителен и потому в силу формулы (*) для всякого положительного ортонормального касательного базиса $(x(u); b)$ получаем равенство $c(u) = \omega(x(u)) \langle Dx(u) \rangle = \omega(x(u)) \langle b \rangle \sqrt{\Gamma(Dx(u))}$.

По условию теоремы в точке $x(u)$ имеется такой ортонормированный касательный базис $(x(u)|b)$, что $\omega(x(u)) \langle b \rangle = f(x(u))$. Значит, $c(u) = f(x(u)) \sqrt{\Gamma(Dx(u))}$.

Итак, если в цепочке равенств

$$\int_M f(x) d\mu_k(x) = \int_U f(x(u)) \sqrt{\Gamma(Dx(u))} du = \int_M \omega$$

определён один из интегралов, то определены и два других и формула справедлива.

3) Пусть M – произвольное k -мерное ориентированное многообразие и $M_1, \dots, M_q$ – система его открытых распрямляемых частей, покрывающая это многообразие. Для каждого номера $i \in \{1, \dots, q\}$ определим функцию $\xi_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ формулой $\xi_i := \frac{\chi_{M_i}}{\sum_{j=1}^q \chi_{M_j}}$. Для функции $f_i = f \xi_i$ и

формы $\omega_i = \omega \xi_i$ выполнено условие теоремы и они сосредоточены на M_i . Поэтому $\int_M f_i d\mu_k = \int_{M_i} \omega_i$. Остаётся заметить, что $\sum_i f_i = f$, $\sum_i \omega_i = \omega$, и что $|f_i| \leq |f|$. ►

Упражнение. На каждом гладком ориентированном k -многообразии (M, θ) имеется такая k -форма σ , что $\sigma(x) \langle b_1, \dots, b_k \rangle = 1$ для каждого положительного ортонормированного базиса $(x; b_1, \dots, b_k) \in BM$. Например, этому условию удовлетворяет форма σ , определяемая равенством

$$\sigma(x) \langle v \rangle = \vartheta(x; \bar{v}) \sqrt{\Gamma(\bar{v})},$$

где $v := (v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v}_i$ – ортогональная проекция вектора v_i на касательное пространство $T_x M$. (Линейность функции σ по векторным

переменным следует из формулы $\sqrt{\Gamma(\bar{v})} = \det(\bar{v}/b)$, где b – какой-нибудь базис пространства $T_x M$.)

Пусть M – гладкое k -многообразие (гиперповерхность) в $\mathbb{R}^{k+1}$ и $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ – непрерывное векторное поле единичных нормалей на поверхности M ($\forall x \in M \ \nu(x) \perp T_x M, \ |\nu(x)| = 1$). Такое поле задаёт ориентацию ϑ_ν поверхности M , определяемую формулой $\vartheta_\nu(x; v_1, \dots, v_k) = \text{sign det}(\nu(x), v_1, \dots, v_k)$.

Если на поверхности M задано векторное поле w , то число $\int_M \langle w, \nu \rangle d\mu_k$ классики называли потоком векторного поля w через поверхность M .

Формула Гаусса — Остроградского. Пусть X — компактная область с гладкой границей в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ и w — гладкое векторное поле на X . Тогда

$$\int_{\partial X} \langle w, \nu \rangle d\mu_k(x) = \int_X \text{div } w(x) dx,$$

где ν – (векторное) поле внешних единичных нормалей на поверхности ∂X . (Классическая формулировка: поток векторного поля через границу области равен интегралу его дивергенции по этой области.)

◀ Пусть $(x; b_1, \dots, b_k)$ – какой-то положительный ортонормированный касательный базис поверхности $M = \partial X$. Векторы $(\nu(x), b_1, \dots, b_k)$ образуют положительный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{k+1}$ (почему?) и, стало быть, вектор $w(x)$ представим в виде $w(x) = t(x)\nu(x) + \sum_{i=1}^k t_i b_i$, где $t(x) = \langle w(x), \nu(x) \rangle$. Следовательно, для формы β_w имеют место равенства

$$\beta_w(x) \langle b_1, \dots, b_k \rangle = \det(w(x), b_1, \dots, b_k) = \det(t(x)\nu(x), b_1, \dots, b_k) = t(x).$$

Согласно теореме о разнородных интегралах

$$\int_{\partial X} t(x) d\mu_k(x) = \int_{\partial X} \beta_w = \int_X d\beta_w = \int_X \text{div } w(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_X \text{div } w(x) dx. \blacktriangleright$$

Пусть S — ориентированная гладкая линия в $\mathbb{R}^m$ и $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ — поле единичных положительных касательных векторов на S . Интеграл $\int_S \langle w, \tau \rangle d\mu_1$ выражает работу векторного поля w вдоль линии S . Если S — замкнутая ориентированная кривая (компактная линия без края), то этот интеграл называют циркуляцией вектора w вдоль кривой S .

Классическая формула Стокса. Пусть M — компактная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ν — непрерывное поле единичных нормалей на M и τ — поле положительных единичных касательных векторов края ∂M . (Считается, что поверхность M снабжена ориентацией ϑ_ν , задаваемой полем нормалей.) Тогда для любого гладкого векторного поля w на M справедлива формула

$$\int_{\partial M} \langle w, \tau \rangle d\mu_1 = \int_M \langle \operatorname{rot} w, \nu \rangle d\mu_2.$$

Классическая формулировка: "циркуляция вектора w вдоль края поверхности M равна потоку ротора этого вектора через поверхность M ".

◀ Для каждой точки $x \in \partial M$ пара $(x; \tau(x))$ является положительным единичным касательным базисом линии ∂M и при этом справедливо равенство $\alpha_w(x) \langle \tau(x) \rangle = \langle w(x), \tau(x) \rangle$. Поэтому согласно теореме о разнородных интегралах

$$\int_{\partial M} \langle w, \tau \rangle d\mu_1 = \int_{\partial M} \alpha_w = \int_M d\alpha_w = \int_M \beta_{\operatorname{rot} w} = \int_M \langle \operatorname{rot} w, \nu \rangle d\mu_2. \blacktriangleright$$