

Вопросы по математическому анализу (II курс, 4-ой семестр 2015-16)

ПРИМЕЧАНИЕ. Если в билете указана некоторая теорема, то 'по умолчанию' она спрашивается с доказательством (если только в формулировке вопроса не оговорено противное).

1. Пространства L_p : определение, базовые свойства. Теорема Рисса–Фишера о полноте.
2. Неравенства Гельдера и Минковского в интегральной форме (для пространств L_p).
3. Формула замены переменной в интеграле (без доказательства). Определение детерминанта Грама и формула Бине–Коши (без доказательства). Мера k -мерного лоскутка в $\mathbb{R}^n$: определение, теорема о корректности, примеры.
4. Площадь графика функции $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$; объем k -мерного многообразия в терминах первой квадратичной формы. Площадь двумерной поверхности (в общем случае и при наличии осевой симметрии двух видов).
5. Формула коплощади. Пример: интегрирование по сферическим слоям; объем шара и площадь сферы.
6. Эйлеровы интегралы, определения и свойства. Выражение B -функции через Γ -функцию.
7. Эйлеровы интегралы: рекуррентные соотношения, объем единичного шара.
8. Асимптотические свойства эйлеровых интегралов. Формула Валлиса.
9. Метод Лапласа получения асимптотики интегралов. Формула Стирлинга.
10. Дифференциальные формы первой степени, определение и свойства. Координатное представление 1-форм. Примеры: дифференциал отображения, работа силового векторного поля, площадь сектора, форма Гаусса (с их координатным представлением).
11. Операция переноса: свойства, координатная инвариантность, примеры.
12. Интегрирование 1-форм вдоль путей: определение и свойства. Равенство нулю интегралов 1-формы по замкнутому контуру: необходимые и достаточные условия.
13. Интегрирование 1-форм вдоль ориентированных кривых: определение, его корректность и свойства.

14. Дифференциальные формы произвольных степеней. Примеры: форма объема, форма потока, форма Гаусса, форма давления (закон Паскаля). Внешнее произведение 1-форм.
15. Координатное представление k -форм. Формула Бинэ–Коши (с доказательством).
16. Внешнее произведение k -форм. Свойства. Приложение: алгебра k -форм в трехмерном пространстве, связь с операцией векторного произведения.
17. Внешнее произведение k -форм: инвариантное определение, согласованность с прежним (координатным) определением.
18. Внешний дифференциал k -формы. Определение и свойства. Векторный анализ в трехмерном пространстве, операции градиента, дивергенции и ротора.
19. Векторные операции в триортогональной системе координат. Примеры: операторы градиента, дивергенции, ротора и оператор Лапласа в цилиндрической и в сферической системах координат.
20. Операция переноса, определение и свойство. Координатное выражения для переноса формы объема.
21. Формула гомотопии. Теорема Пуанкаре.
22. Ориентация на многообразиях. Ориентируемые и неориентируемые многообразия, примеры. Теорема о количестве различных ориентаций. Координатный признак сохранения ориентации.
23. Индуцированная ориентация края.
24. Интеграл от k -формы по ориентированному многообразию: построение, свойства, переход от распрямляемых к произвольным многообразиям, корректность определения.
25. Теорема о разбиении единицы и критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных форм.
26. Теорема Стокса. Приложения формулы Стокса, гидростатический закон Паскаля.
27. Интеграл от формы Гаусса и формула Стокса. Неизоморфность подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Теорема "о барабане".
28. Лемма о сглаживании. Следствия теоремы "о барабане": теорема Брауэра о неподвижных точках, о векторных полях с углом $< \pi$, теорема о еже.
29. Интегралы первого и второго рода, определение и основное тождество. k -форма ориентированного объема в k -мерном многообразии.

30. Векторное произведение в $\mathbb{R}^n$. "Разнородные" интегралы формы потока. "Классические" формулы Гаусса–Остроградского и Стокса.
31. Приложения классических формул векторного анализа: уравнения теплопроводности и неразрывности. Уравнение Эйлера для стационарных течений идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости.
32. Свертка и усреднение функций. Определения и свойства. "Повышение" регулярности свертки.
33. δ -образные последовательности. Теорема о приближении непрерывных функций бесконечно гладкими. Теорема о приближении полиномами на компактах.
34. Преобразование Фурье (ПФ), определение и свойства. Класс гладких быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поведение ПФ при умножении на полином и дифференцировании.
35. Формула обращения преобразования Фурье на классе быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
36. Преобразование Фурье и свертка. Тождество Парсеваля.
37. Обобщенные функции умеренного роста (пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Правило дифференцирования, умножения на гладкие функции. Преобразование Фурье обобщенных функций.
38. Распространение преобразования Фурье на все пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ с помощью предельного перехода. Неприменимость "обычной" формулы ПФ. Теорема Планшереля об изометрии и теорема Хаусдорфа–Юнга об ограниченности в L_p .
39. Приложения преобразования Фурье: волновое уравнение и уравнение теплопроводности.
40. Преобразование Фурье и ряды Фурье: формулы Пуассона и Котельникова.
41. Равенство Парсеваля и соотношение неопределенностей Гейзенберга.
42. Преобразование Фурье и обобщенные функции умеренного роста: формула для суммы ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$, нахождение преобразования Фурье от суммы $F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k)$, вывод формулы Пуассона и θ -формулы.
43. Потенциальные векторные поля; потенциал. Вычисление потенциала гравитационного поля сферических слоев (рассмотреть два случая: точка внутри и снаружи сферического слоя).