

1. Найти интеграл от формы $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ по квадратной букве " $\square$ " с концами в точках $(1, \pm 1)$. Буква проходится сверху вниз.

2. Найти интеграл от формы $\omega = xy dx \wedge dz + (xz - z) dx \wedge dy$ по внутренней стороне полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$.

3. Найти 1-форму ω в области $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$, такую, что 2-форма Гаусса равна $d\omega$ в Ω .

4. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле. Доказать:

$$\operatorname{rot}(fA) = f \operatorname{rot} A + [\nabla f \times A].$$

5. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$ задано так:
$$\begin{cases} x = (10 + r \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (10 + r \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$
 f отображает множество $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^3$ на полноторие (при $r_0 < 10$) в $\mathbb{R}^3$. Сохраняет или меняет ориентацию f ? Найти $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$. В каких точках $\omega = 0$?

1. Найти интеграл от формы $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ по букве " $\wedge$ " высотой $\frac{1}{2}$ и с концами в точках $(\pm 1, 0)$. Буква проходится слева направо.

2. Найти интеграл от формы $\omega = (x + y + z)(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dx \wedge dz)$ по внутренней стороне тора $(\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 2\pi])$

$$\begin{cases} x = (10 + 3 \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (10 + 3 \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = 3 \sin \varphi \end{cases}$$

3. Найти 1-форму ω в области $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$, такую, что 2-форма Гаусса равна $d\omega$ в Ω .

4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное поле. Доказать:

$$\operatorname{div}(fA) = \langle A, \nabla f \rangle + f \operatorname{div} A.$$

5. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$ задано так:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta; \\ y = r \cos \varphi \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

f отображает множество $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^3$ на шар радиуса r_0 в $\mathbb{R}^3$. Сохраняет или меняет ориентацию f ? Найти $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$. В каких точках $\omega = 0$?