

1. Найти интеграл от формы  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  по букве " $\wedge$ " высотой  $\frac{1}{2}$  и с концами в точках  $(\pm 1, 0)$ . Буква проходится слева направо.

2. Найти какую-нибудь функцию  $f(x, y, z, t)$ , чтобы следующая 3-форма в  $\mathbb{R}^4$  была замкнута:  $(t + x) dx \wedge dy \wedge dz + f(x, y, z, t) dy \wedge dz \wedge dt$ . Найти интеграл от придуманной формы по *поверхности* четырехмерного куба с вершинами в точках  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

3. Найти интеграл от дифференциальной формы  $(y^3 + \sin(z^2)) dx \wedge dz + (x + \sin(z^3)) dz \wedge dy$  по внешней поверхности сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — функция,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — векторное поле. Доказать:  $\text{rot}(fA) = f \text{rot} A + [\nabla f \times A]$ .

5. Пусть  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$  задано так: 
$$\begin{cases} x = (10 + r \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (10 + r \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

$f$  отображает множество  $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^3$  на полноторие (при  $r_0 < 10$ ) в  $\mathbb{R}^3$ . Сохраняет ли ориентацию отображение  $f$ ? Найти  $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ . В каких точках  $\omega = 0$ ?

1. Найти интеграл от формы  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  по букве " $\wedge$ " высотой  $\frac{1}{2}$  и с концами в точках  $(\pm 1, 0)$ . Буква проходится слева направо.

2. Найти какую-нибудь функцию  $f(x, y, z, t)$ , чтобы следующая 3-форма в  $\mathbb{R}^4$  была замкнута:  $(t + x) dx \wedge dy \wedge dz + f(x, y, z, t) dy \wedge dz \wedge dt$ . Найти интеграл от придуманной формы по *поверхности* четырехмерного куба с вершинами в точках  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

3. Найти интеграл от дифференциальной формы  $(y^3 + \sin(z^2)) dx \wedge dz + (x + \sin(z^3)) dz \wedge dy$  по внешней поверхности сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — функция,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — векторное поле. Доказать:  $\text{rot}(fA) = f \text{rot} A + [\nabla f \times A]$ .

5. Пусть  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$  задано так: 
$$\begin{cases} x = (10 + r \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (10 + r \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

$f$  отображает множество  $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^3$  на полноторие (при  $r_0 < 10$ ) в  $\mathbb{R}^3$ . Сохраняет ли ориентацию отображение  $f$ ? Найти  $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ . В каких точках  $\omega = 0$ ?

1. Найти интеграл от формы  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  по квадратной букве " $\square$ " с концами в точках  $(1, \pm 1)$ . Буква проходится сверху вниз.

2. Найти какую-нибудь функцию  $f(x, y, z, t)$ , чтобы следующая 3-форма в  $\mathbb{R}^4$  была точна:  $(z + x) dx \wedge dy \wedge dt + f(x, y, z, t) dy \wedge dt \wedge dz$ . Найти интеграл от придуманной формы по *поверхности* четырехмерного куба с вершинами в точках  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

3. Найти интеграл от дифференциальной формы  $(x^3 + \cos(y^2)) dy \wedge dz + (y + \sin(z^3)) dz \wedge dx$  по внешней поверхности сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

4.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — функция,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — векторное поле. Доказать:  $\text{div}(fA) = \langle A, \nabla f \rangle + f \text{div} A$ .

5. Пусть  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$  задано так: 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta; \\ y = r \cos \varphi \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

$f$  отображает множество  $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^3$  на шар радиуса  $r_0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

Сохраняет ли ориентацию отображение  $f$ ? Найти  $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ . В каких точках  $\omega = 0$ ?

1. Найти предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi} x \cos(1 + \alpha)x \, dx$
2. Найти  $F'(\alpha)$ , где  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} \, dx$
3. Исследовать на непрерывность функцию  $F(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln x}$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$ .
4. Исследовать интеграл  $\int_0^{\infty} \sin(x^{3\alpha}) dx$  на равномерную сходимость при  $\alpha \in (1, \infty)$ .
5. Найти интеграл  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x \, dx$ .

1. Найти предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 x^2 e^{\alpha x^3} \, dx$ .
2. Найти  $F'(\alpha)$ , где  $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x} \, dx$ .
3. Исследовать на непрерывность функцию  $F(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\alpha}(x)}$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$ .
4. Исследовать интеграл  $\int_0^{\infty} \cos(x^{2\alpha}) dx$  на равномерную сходимость при  $\alpha \in (1, \infty)$ .
5. Найти интеграл  $\int_0^1 x^3 (\ln \frac{1}{x})^5 \, dx$ .

1. Найти предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi} x \cos(1 + \alpha)x \, dx$
2. Найти  $F'(\alpha)$ , где  $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} \, dx$
3. Исследовать на непрерывность функцию  $F(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln x}$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$ .
4. Исследовать интеграл  $\int_0^{\infty} \sin(x^{3\alpha}) dx$  на равномерную сходимость при  $\alpha \in (1, \infty)$ .
5. Найти интеграл  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x \, dx$ .

1. Найти предел  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 x^2 e^{\alpha x^3} \, dx$ .
2. Найти  $F'(\alpha)$ , где  $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x} \, dx$ .
3. Исследовать на непрерывность функцию  $F(\alpha) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^{\alpha}(x)}$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$ .
4. Исследовать интеграл  $\int_0^{\infty} \cos(x^{2\alpha}) dx$  на равномерную сходимость при  $\alpha \in (1, \infty)$ .
5. Найти интеграл  $\int_0^1 x^3 (\ln \frac{1}{x})^5 \, dx$ .