

Задача. Пользуясь формулой Остроградского, найти объем тела, ограниченного тором $\begin{cases} x = (b + a \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (b + a \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = a \sin \varphi. \end{cases}$

Здесь $0 < a \leq b$. Указание: воспользоваться формулой $V = \frac{1}{3} \int_T (x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности T .

С помощью формулы Грина вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ($a > 0, b > 0, n > 0$) и осями координат.

С помощью формулы Грина вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$) (петля декартова листа). Указание. В качестве параметра взять $t = \frac{y}{x}$.

С помощью формулы Грина вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x + y)^2 = ax$ ($a > 0$) и осью O_x (парабола).

Вычислить интеграл $\int_S (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.

Вычислить интеграл $\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, взятый по куску винтовой линии $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$ от точки $A = (a, 0, 0)$ до точки $B = (a, 0, h)$. Указание. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, где C есть эллипс $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t .

Площадь поверхности

Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$

Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

Найти площадь поверхности тора $\begin{cases} x = (b + a \cos \varphi) \cos \theta; \\ y = (b + a \cos \varphi) \sin \theta; \\ z = a \sin \varphi. \end{cases}$

Здесь $0 < a \leq b$.

Найти площадь части геликоида

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi, \quad \text{где } 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Перенос формы объема

Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$ задано так:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta; \\ y = r \cos \varphi \sin \theta; \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

f отображает множество $M = [0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^3$ на шар радиуса r_0 в $\mathbb{R}^3$. Сохраняет ли ориентацию отображение f ? Найти $\omega = f^*(dx \wedge dy \wedge dz)$. В каких точках $\omega = 0$?

Криволинейные интегралы 2-го рода (вдоль кривых)

Найти $\int_C (2a - y) dx + x dy$, где C — арка циклоиды $x = a(t - \cos t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Найти $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямую $y = x$.

На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

где AmB — прямая, соединяющая точки $A(1, 1)$ и $B(2, 6)$, и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки и начало координат?

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$. Указание. Дополнить путь AmO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox .

Поверхностные интегралы

Вычислить интеграл

$$\int_S \frac{dS}{h},$$

где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

Вычислить интеграл

$$\int_S z^2 dS,$$

где S — часть поверхности конуса $x = r \cos \varphi \sin \alpha$, $y = r \sin \varphi \sin \alpha$, $z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), и α — постоянный параметр ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Поверхностные интегралы II рода

Вычислить интеграл

$$\int_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Указание: сделать замену переменных, так чтобы центр сферы совпал с началом координат, затем воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского и соображениями симметрии.

Вычислить интеграл

$$\int_S (y-z) dy \wedge dz + (z-x) dz \wedge dx + (x-y) dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$). Указание: дополнить поверхность до замкнутой, и воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского.