

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Конспект лекций

Новосибирск
2014

Оглавление

1	Теорема об обратном отображении	2
§1	Предварительные сведения	2
§2	Теорема об обратной функции. Дiffeоморфизмы	2
§3	Теорема о неявной функции	4
§4	Правило множителей Лагранжа для поиска условного экстремума	7
§5	Теорема о ранге. Функциональная независимость набора отображений.	9
§6	Криволинейные системы координат	12
	§6.1 Оператор Лапласа в полярных координатах	15
§7	Лемма Морса	16
2	Многообразия	19
§1	Определение многообразия, его край и внутренность	19
§2	Касательное пространство	26
§3	Касательное пространство многообразий, заданных системой уравнений (неравенств)	28
§4	Признаки условного экстремума	29
3	Поточечная и равномерная сходимость	34
§1	Основные определения. Теорема о повторных пределах	34
§2	Степенные ряды комплексного переменного	44
§3	Ряды Фурье	49
	§3.1 Теорема Фейера о равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации.	56
	§3.2 Дополнение: изопериметрическое неравенство	59
4	Мера и интеграл	62
§1	Меры и измеримые множества	62
§2	Измеримые функции	72

§2.1	Теоремы Лузина и Егорова	75
§3	Интеграл и предельные теоремы	79
§3.1	Неравенство Чебышева	86
§4	Теорема Фубини	87
§4.1	Мера Лебега	92
§4.2	Формула Кавальери–Лебега	95
§5	Интегралы, зависящие от параметра	97
§6	Несобственные интегралы, зависящие от параметра	100

Напомним некоторые обозначения. Если (X, ρ) — метрическое пространство, и $E \subset X$, то символом $\text{Int}_X E$ обозначается внутренность (множество внутренних точек) E относительно X , т.е.

$$\text{Int}_X E = \{x \in E : \exists r > 0 \ B_r(x, X) \subset E\},$$

здесь $B_r(x, X) = \{y \in X : |x - y| < r\}$ — открытый шар с центром в x и радиуса r . Когда из контекста понятно, о каком объемлющем пространстве X идет речь, то его символ опускается, и пишут просто $\text{Int } E$, $B_r(x)$ и т.п.

Далее, замыкание $\text{Cl } E = \text{Cl}_X E$ множества E в X определяется как множество всех точек прикосновения E , т.е.

$$\text{Cl } E = \{x \in X : E \cap B_r(x) \neq \emptyset \ \forall r > 0\}. \quad (1)$$

Можно дать следующее эквивалентное определение:

$$\text{Cl } E = \{x \in X : \text{найдется последовательность } x_n \in E \text{ такая, что } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}. \quad (2)$$

Наконец, граница $\text{fr } E = \text{fr}_X E$ множества E в пространстве X определяется как

$$\text{fr } E = (\text{Cl } E) \setminus \text{Int } E. \quad (3)$$

Глава 1

Теорема об обратном отображении

§1 Предварительные сведения

ТЕОРЕМА 1.1.1. Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ — компактно, а отображение $f : E \rightarrow K \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывно и инъективно, $K = f(E)$, то обратное отображение $f^{-1} : K \rightarrow E$ также непрерывно, т.е. $f : E \rightarrow K$ представляет собой гомеоморфизм.

ТЕОРЕМА 1.1.2 (Теорема Брауэра об инвариантности области). Если множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и отображение $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно и инъективно, $f(U) = V$, то множество V также открыто в $\mathbb{R}^n$, и обратное отображение $f^{-1} : V \rightarrow U$ также непрерывно, т.е. f представляет собой гомеоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.3. Если отображение $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно и инъективно, и $p \in \text{Int } U$, то $f(p) \in \text{Int } f(U)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.4. Если $m < n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\text{Int } E \neq \emptyset$, то не существует непрерывного инъективного отображения $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$.

§2 Теорема об обратной функции. Диффеоморфизмы

Пусть U, V — открытые множества пространства $\mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется C^1 -гладким, если все его частные производные непрерывны. Отображение $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ называется *диффеоморфизмом на U* , если и оно само, и обратное к нему отображение $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ являются C^1 — гладкими. Из этого определения мгновенно вытекает, что отображение представляет собой диффеоморфизм тогда и только тогда, когда обратное к нему — диффеоморфизм.

Упражнение 1.2.1. Докажите, что линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда его матрица невырождена (т.е. ее детерминант отличен от нуля).

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть V, U, W — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, и пусть $f : V \rightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ — диффеоморфизмы. Тогда их композиция $g \circ f : V \rightarrow W$ также является диффеоморфизмом.

Данная теорема почти мгновенно вытекает из соответствующих определений, поэтому ее доказательство мы опускаем.

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть V, U — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, и $\varphi : V \rightarrow U$ — C^1 -гладкий гомеоморфизм, причем $\det \varphi'(p) \neq 0$ для каждого $p \in V$. Тогда φ представляет собой диффеоморфизм, т.е. обратное к нему отображение также C^1 -гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\psi : U \rightarrow V$ отображение, обратное к φ . Нам требуется проверить гладкость ψ . Зафиксируем произвольно точку $p \in V$, и обозначим $q = \varphi(p)$, $L = d\varphi(p)$. Тогда по определению дифференцируемости имеет место представление

$$\varphi(x) - q = L(x - p) + o(|x - p|)$$

при $x \rightarrow p$. Обозначим через T линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, обратное к L . Подействуем оператором T на левую и правую части последнего равенства. Тогда получим $T(\varphi(x) - q) = x - p + o(|x - p|)$. Обозначим $y = \varphi(x)$, тогда $\psi(y) = x$, $\psi(q) = p$, и предыдущее равенство можно переписать в виде

$$T(y - q) = \psi(y) - \psi(q) + o(|\psi(y) - \psi(q)|) \quad (1.1)$$

при $y \rightarrow q$ (в самом деле, сходимости $x \rightarrow p$ и $y \rightarrow q$ равносильны в силу непрерывности φ и ψ). Беря норму от обеих частей данного равенства, и учитывая неравенство треугольника, имеем

$$|\psi(y) - \psi(q)|(1 + o(1)) = |T(y - q)| \leq \|T\| \cdot |y - q|$$

(последнее неравенство мгновенно вытекает из определения операторной нормы). Отсюда следует, что $|\psi(y) - \psi(q)| \leq C|y - q|$ для некоторой положительной константы C при $y \rightarrow q$. Значит, выполнено соотношение $o(|\psi(y) - \psi(q)|) = o(|y - q|)$ при $y \rightarrow q$, тогда формулу (1.1) можно переписать в виде

$$T(y - q) = \psi(y) - \psi(q) + o(|y - q|) \Leftrightarrow \psi(y) = \psi(q) + T(y - q) + o(|y - q|) \quad \text{при } y \rightarrow q, \quad (1.2)$$

которая равносильна искомой дифференцируемости функции $\psi(y)$ в точке q , причем ее дифференциал равен $d\psi(q) = T = L^{-1} = (d\varphi(p))^{-1}$. Соответственно, имеет место тождество $\psi'(q) = [\varphi'(p)]^{-1}$. Отсюда с помощью стандартных формул Крамера легко выводится непрерывность отображения $U \ni q \mapsto \psi'(q)$, т.е. все частные производные функции ψ непрерывны на U . Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1.2.4 (Теорема об обратной функции). Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и пусть $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкое отображение. Тогда, если в точке $p \in V$ выполнено условие $\det \varphi'(p) \neq 0$, то существует шар $B = B_\delta(p)$ такой, что множество $W = \varphi(B)$ открыто и сужение $\varphi : B \rightarrow W$ является диффеоморфизмом (т.е. оно биективно и обратное к нему отображение $\varphi^{-1} : W \rightarrow B$ также C^1 -гладкое).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Было разобрано в прошлом (втором) семестре; не будет спрашиваться на зимнем экзамене. $\square$

Замечание 1.2.5 (О классах C^k). Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^k , если все частные производные f непрерывны и принадлежат классу C^{k-1} . Отображение называется диффеоморфизмом класса C^k , если оно само и обратное к нему принадлежит классу C^k . Предыдущие теоремы обобщаются на случай отображений класса C^k , а именно: композиция отображений класса C^k принадлежит классу C^k , если гомеоморфизм принадлежит классу C^k и его дифференциал в каждой точке

невырожден, то и обратное отображение принадлежит классу C^k , наконец, если отображение принадлежит классу C^k и его дифференциал невырожден, то такое отображение локально представляет собой диффеоморфизм класса C^k (т.е. у любой точки из области определения найдется шаровая окрестность такая, что сужение отображения на эту окрестность представляет собой диффеоморфизм класса C^k).

СЛЕДСТВИЕ 1.2.6. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, и пусть $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^k , $k \geq 1$. Предположим, что $\det \varphi'(p) \neq 0$ в каждой точке $p \in V$. Тогда множество $U = \varphi(V)$ открыто. Далее, если отображение $\varphi : V \rightarrow U$ вдобавок инъективно, то оно представляет собой диффеоморфизм класса C^k .

Пример 1.2.7. Отождествляя точку плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с комплексным числом $z = x + iy$, рассмотрим отображение $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемое равенством $f(z) = u + iv = e^z$. Как известно, это отображение определяется с помощью формул Эйлера $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. На языке вещественных функций, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = e^x(\cos y, \sin y)$. Тогда соответствующая матрица Якоби будет иметь вид

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что она обратима в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, причем обратная матрица имеет вид

$$[f'(x, y)]^{-1} = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы об обратной функции. Отсюда получаем, в частности, что множество $f(\mathbb{R}^2)$ должно быть открыто, и отображение f должно быть локально инъективно. Справедливость этих утверждений более чем очевидна.

Интересно, что глобальной инъективности нет, т.к. $f(x, y + 2\pi) \equiv f(x, y)$.

Интересно также, что матрица Якоби $g'(u, v)$ обратного отображения $g = f^{-1}$ может быть подсчитана двумя способами. Можно воспользоваться равенством $g'(u, v) = [f'(x, y)]^{-1}$, и в формуле (1.3) перейти к переменным (u, v) , используя равенства $e^x \cos y = u$, $e^x \sin y = v$. Можно сделать и по-другому: выразив x, y через u, v непосредственно $x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2)$, $y = \arctg \frac{v}{u}$, продифференцировать последние два равенства и посчитать матрицу Якоби $g'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ напрямую. Разумеется, в обоих случаях получим одинаковый результат

$$g'(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}.$$

§3 Теорема о неявной функции

ТЕОРЕМА 1.3.1 (Теорема о неявной функции). Пусть $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое множество, и пусть $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^k , $k \geq 1$, $f = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что множество $M = \{(x, y) \in W : f(x, y) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m\}$ непусто, и что точка $(p, q) \in M$ такова, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0, \quad (1.4)$$

где через $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначена квадратная $m \times m$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, m$. Тогда найдется окрестности U, V точек p, q соответственно и C^k -гладкая функция $g : U \rightarrow V$ такие, что множество $(U \times V) \cap M$ совпадает с графиком функции g , т.е.

$$\forall (x, y) \in U \times V \quad [f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)]. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, задаваемое формулой $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. Нетрудно видеть, что квадратная $(n + m) \times (n + m)$ матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

где через E обозначена единичная $n \times n$ матрица, а через 0 — нулевая $n \times m$ матрица. Отсюда $\det \varphi'(p, q) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции, найдется шар $B = B_\delta(p, q)$ такой, что множество $\varphi(B)$ открыто и сужение $\varphi : B \rightarrow \varphi(B)$ является диффеоморфизмом, т.е. оно биективно и обратное к нему отображение $\varphi^{-1} : \varphi(B) \rightarrow B$ также C^k -гладкое. Обозначим $\psi = \varphi^{-1}$. По построению, $\varphi(p, q) = (p, 0)$. Тогда найдутся шары U, V с центрами в точках p, q соответственно такие, что

$$U \times V \subset B, \quad U \times \{0\} \subset \varphi(B). \quad (1.7)$$

Рассмотрим отображение $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, определяемое формулой $g(x) = \text{Pr}_y(\psi(x, 0))$, где Pr_y — проекция на пространство переменных $y \in \mathbb{R}^m$, определяемая формулой $\text{Pr}_y(x, y) = y$ при $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

По построению, если $y = g(x)$, то $(x, y) = \psi(x, 0)$, следовательно, $(x, f(x, y)) = \varphi(x, y) = \varphi(\psi(x, 0)) = (x, 0)$, значит, $f(x, y) = 0$. Обратно, пусть $f(x, y) = 0$, $x \in U, y \in V$. По построению (см. (1.7)), $(x, y) \in B$, значит, $(x, y) = \psi(\varphi(x, y)) = \psi(x, f(x, y)) = \psi(x, 0)$. Тогда $y = \text{Pr}_y(x, y) = \text{Pr}_y \psi(x, 0) = g(x)$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобятся формулы для вычисления старших производных функции g . Поскольку для всех $x \in U$ справедливо тождество $f(x, g(x)) \equiv 0$, то $\frac{\partial f(x, g(x))}{\partial x} = 0$, поэтому, дифференцируя $f(x, g(x))$ как сложную функцию, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(x) = 0,$$

где через $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ обозначены соответствующие матрицы Якоби (матрицы частных производных) размерности $m \times n$, $m \times m$ и $m \times n$ соответственно. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \quad \forall x \in U, \quad (1.8)$$

где через $\left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]^{-1}$ обозначена $m \times m$ матрица, обратная к $\frac{\partial f}{\partial y}$. Расписывая j -й столбец из последнего матричного тождества, получаем

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, g(x)) \quad \forall x \in U. \quad (1.9)$$

□

Пример 1.3.2. Состояние газа характеризуется формулой Менделеева–Клайперона

$$pV = \nu RT, \quad (1.10)$$

где p, V, T — давление, объем и температура изучаемого газа соответственно. К этому соотношению присоединяется еще и уравнение состояния

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (1.11)$$

где γ — некоторая постоянная (отличная от единицы). Таким образом, три величины p, V, T связаны двумя соотношениями, это дает надежду, взяв одну из них в качестве независимой переменной, выразить через нее две остальные. Чтобы удостовериться в возможности такого выражения, требуется проверить выполнение условий теоремы о неявной функции. Положим $f_1(p, V, T) = pV - \nu RT$, $f_2(p, V, T) = pV^\gamma - \text{const}$, тогда соответствующая матрица Якоби будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & p & -\nu R \\ V^\gamma & \gamma p V^{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что у этой матрицы любой минор 2×2 является невырожденным. Поэтому выполнены предположения о неявной функции и, действительно, любые две из этих величин можно гладким отображением выразить через третью, например, давление и объем выразить через температуру. Отметим, что теорема о неявной функции утверждает *локальную* возможность такого выражения; нетрудно видеть, однако, что в данном случае $p(T)$, $V(T)$ можно выразить из уравнений (1.10)–(1.11) и глобально. Возможность аналогично с помощью этих уравнений выразить p, T через V или V, T через p еще более очевидна.

Пример 1.3.3. Состояние двойного математического маятника задается координатами двух грузов (x, y) и (u, v) соответственно. Первый груз соединен с подвесом (находящимся в начале координат) стержнем длины R , и также оба груза соединены друг с другом стержнем длины r . Получаем два уравнения состояния

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (1.12)$$

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2. \quad (1.13)$$

Таким образом, четыре величины x, y, u, v связаны двумя соотношениями, и можно попробовать, взяв две из них в качестве независимых переменных, выразить через них остальные две. Проверим, для каких пар и когда выполняются условия теоремы о неявной функции. Положим $f_1(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - R^2$, $f_2(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2 - r^2$, тогда соответствующая матрица Якоби будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ (x - u) & (y - v) & (u - x) & (v - y) \end{pmatrix}.$$

1) Нетрудно видеть, что минор $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}$ (образованный последними двумя столбцами) тождественно равен нулю. Это означает, что теорема о неявной функции не позволяет

выразить u, v через x, y . Данное утверждение более чем очевидно геометрически: если мы фиксируем положение первого груза, то ничто не мешает второму грузу двигаться в произвольном направлении по соответствующей окружности радиуса r .

2) Посчитаем теперь минор $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$, образованный первыми двумя столбцами. Он равен $x(y - v) - y(x - u) = uy - vx$. Данный минор зануляется, когда вектора (x, y) и (u, v) линейно зависимы, т.е. когда оба груза лежат на одной прямой. Действительно, в этом случае нетрудно проверить, что даже локально нельзя выразить (x, y) через (u, v) . А именно, если мы сдвинем второй груз вдоль той же самой прямой на какое-то расстояние по направлению к первому грузу, то у того появится два варианта для смещения (две точки, лежащие симметрично по левую и по правую стороны от указанной прямой, соединяющей точки подвеса и второго груза). В остальных случаях, в соответствии с теоремой о неявной функции, локально положение первого груза (x, y) однозначно и гладко восстанавливается по положению второго груза (u, v) . Впрочем, глобально такой однозначности нет (в силу все той же симметрии).

3) Менее очевидны варианты с остальными парами. Например, посчитаем минор $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, u)}$, образованный вторым и третьим столбцами. Он равен $y(u - x)$. Следовательно, когда $y \neq 0 \neq u - x$, то локально можно выразить (y, u) через (x, v) с помощью гладкой функции, а вот если $y = 0$ или $u = x$, то возможность такого однозначного гладкого выражения сомнительна. И в самом деле, при $y = 0 \neq x - u$ можно, оставляя неизменной координату v , сдвинуть первый груз в одну из двух точек, симметрично расположенных относительно прямой $y = 0$. У обеих точек сдвига координата x одинаковая (вследствие симметрии), а координата v второго груза, повторимся, может остаться неизменной (это означает, что второй груз движется по прямой $v = \text{const}$). Таким образом, система может принимать два разных положения при одинаковых значениях (x, v) (причем локально сколь угодно близких к начальному положению), что и следовало ожидать. Рекомендуются разобрать оставшиеся ситуации с $x = u$, а также оставшиеся пары координат.

§4 Правило множителей Лагранжа для поиска условного экстремума

В данном параграфе дается чисто аналитическое доказательство правила множителей Лагранжа для поиска условного экстремума. Другое доказательство (геометрическое, основанное на технике работы с многообразиями) будет дано в параграфе §4 второй главы.

ТЕОРЕМА 1.4.1 (Необходимый признак условного экстремума). Пусть $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое множество, и пусть $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^k , $k \geq 1$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Предположим, что множество $M = \{z \in W : f(z) = 0\}$ непусто, и что некоторая C^1 -гладкая функция $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ достигает локального минимума в точке $z_* \in M$ на множестве M , т.е.¹

$$\exists r > 0 \forall z \in M \quad |z - z_*| < r \Rightarrow h(z) \geq h(z_*). \quad (1.14)$$

Тогда, если выполнено условие регулярности

$$\text{rank } f'(p, q) = m, \quad (1.15)$$

¹Это так называемый *условный экстремум*, т.е. при условии $f(z) = 0$.

то найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такие, что функция $\tilde{h}(z) = h(z) - \lambda_1 f_1(z) - \dots - \lambda_m f_m(z)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{h}'(z_*) = 0, \quad (1.16)$$

т.е. все частные производные функции $\tilde{h}$ в точке z_* равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем представлять переменную $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ в виде $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Аналогично, $z_* = (p, q)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0, \quad (1.17)$$

где через $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначена квадратная $m \times m$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, m$. Тогда по теореме о неявной функции найдутся окрестности U, V точек p, q соответственно и C^k -гладкая функция $g : U \rightarrow V$ такие, что множество $(U \times V) \cap M$ совпадает с графиком функции g , т.е.

$$\forall (x, y) \in U \times V \quad [f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)]. \quad (1.18)$$

Рассмотрим функцию $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$, вычисляемую по формуле $\omega(x) = h(x, g(x))$. Тогда по построению функция ω будет C^1 -гладкой, причем p является точкой локального минимума для ω :

$$\exists r > 0 \forall x \in U \quad |x - p| < r \Rightarrow \omega(x) \geq \omega(p). \quad (1.19)$$

Тогда по теореме Ферма имеем $\frac{\partial \omega}{\partial x}(p) = 0$, где через $\frac{\partial \omega}{\partial x}(p)$ обозначен вектор пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из частных производных $\frac{\partial \omega}{\partial x}(p) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)$. Напомним, что по теореме о неявной функции 1.3.1 производные функции g вычисляются по формуле

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \quad \forall x \in U, \quad (1.20)$$

где через $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ обозначены соответствующие матрицы Якоби (матрицы частных производных) размерности $m \times n$, $m \times m$ и $m \times n$ соответственно. Тогда по формулам для производных сложной функции $\omega(x) = h(x, g(x))$ получаем

$$0 = \frac{\partial \omega}{\partial x}(p) = \frac{\partial h}{\partial x}(p, q) + \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) \frac{\partial g}{\partial x}(p) = \frac{\partial h}{\partial x}(p, q) - \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(p, q). \quad (1.21)$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \right]^{-1}.$$

Поскольку матрица $\frac{\partial h}{\partial y}$ имеет размерность $1 \times m$, а матрица $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \right]^{-1}$ — соответственно размерность $m \times m$, то их произведение λ имеет размерность $1 \times m$, т.е. является вектор-строкой пространства $\mathbb{R}^m$: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Тогда формула (1.21) предстанет в виде

$$0 = \frac{\partial \omega}{\partial x}(p) = \frac{\partial h}{\partial x}(p, q) - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(p, q) = \frac{\partial h}{\partial x}(p, q) - \frac{\partial(\lambda \cdot f)}{\partial x}(p, q). \quad (1.22)$$

Введем в рассмотрение новую функцию $\tilde{h}(z) = h(z) - \lambda \cdot f(z) = h(z) - \lambda_1 f_1(z) - \dots - \lambda_m f_m(z)$. Тогда формула (1.22) означает, что

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}(p, q) = 0. \quad (1.23)$$

По построению,

$$\tilde{h}(x, y) = h(x, y) - \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \right]^{-1} f(x, y).$$

Дифференцируя это равенство по y , получаем прямым вычислением

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(p, q) = \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) - \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) = \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) - \frac{\partial h}{\partial y}(p, q) = 0. \quad (1.24)$$

Равенства (1.23)–(1.24) приводят нас к искомой формуле (1.16), т.е. все частные производные функции $\tilde{h}$ в точке (p, q) равны нулю, что и требовалось доказать. $\square$

§5 Теорема о ранге. Функциональная независимость набора отображений.

ТЕОРЕМА 1.5.1 (Теорема о ранге). Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r -гладкая функция, $r \geq 1$, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что ранг матрицы Якоби этого отображения постоянен: $\text{rank } f'(x) = k$ для всех $x \in \Omega$. Тогда для каждой точки $p \in \Omega$ и $q = f(p)$ найдутся открытые окрестности $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$, $V \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^m}(q)$, шар $B \subset \mathbb{R}^n$ и C^r -диффеоморфизмы $\varphi : B \rightarrow U$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $U = \varphi(B)$, $f(U) \subset V$, и композиция $\psi \circ f \circ \varphi$ вычисляется по простейшей формуле

$$\psi(f(\varphi(u))) = (u_1, \dots, u_k, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-k \text{ раз}})$$

для всех $u = (u_1, \dots, u_n) \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $f = (f_1, \dots, f_m)$ удовлетворяет предположениям теоремы. Зафиксируем точку $p \in \Omega$. По условию, у матрицы Якоби $f'(p)$ имеется $k \times k$ -минор, у которого детерминант невырожден. Можно считать, не умаляя общности, что это минор, состоящий из первых k строк и k столбцов $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j=1,\dots,k}$.

Рассмотрим отображение $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемое формулой $\tilde{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n)$. По построению, имеем $\det \tilde{f}'(p) \neq 0$. Следовательно, найдется окрестность $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ такая, что $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, т.е. $\tilde{f}(U)$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обратное отображение $\varphi : \tilde{f}(U) \rightarrow U$, $\varphi = \tilde{f}^{-1}$, является C^r -гладким. Не умаляя общности, можно считать, что $\tilde{f}(U)$ является шаром B в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь композицию $g = f \circ \varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^m$. По построению, т.к. $\tilde{f}(\varphi(x)) \equiv x$ для всех $x \in B$, то имеем

$$g(x) = (x_1, \dots, x_k, g_{k+1}(x), \dots, g_m(x)) \quad \forall x \in B, \quad (1.25)$$

где $g_i(x) := f_i(\varphi(x))$. По теореме о производной композиции, матрица Якоби $g'(x)$ вычисляется как произведение матриц $g'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Поскольку $\det \varphi'(x) \neq 0$ в B , то в силу известных из алгебры фактов

$$\text{rank } g'(x) \equiv \text{rank } f'(\varphi(x)) = k \quad \forall x \in B. \quad (1.26)$$

С другой стороны, вследствие формулы (1.25) матрица Якоби $g'(x)$ имеет вид

$$g' = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \frac{\partial(g_{k+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} & \frac{\partial(g_{k+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

где через E_k обозначена единичная $k \times k$ матрица, а через $\frac{\partial(g_{k+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}$ — соответствующая $(m-k) \times (n-k)$ матрица с элементами $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{i=k+1, \dots, m \\ j=k+1, \dots, n}}$. Теперь очевидно, что равенства (1.26)–(1.27) приводят к тождеству $\frac{\partial(g_{k+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} = 0$, т.е.

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall x \in B, \quad i = k+1, \dots, m, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Поэтому g_i при $i > k$ **НЕ** зависят от $x_{k+1}, \dots, x_n$, т.е. имеет место представление

$$g_i(x) = g_i(x_1, \dots, x_k) \quad \forall x \in B, \quad i = k+1, \dots, m.$$

В итоге имеем, получаем

$$\forall x \in B \quad f_i(\varphi(x)) = \begin{cases} x_i, & i = 1, \dots, k; \\ g_i(x_1, \dots, x_k), & i = k+1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.28)$$

Рассмотрим теперь C^r -диффеоморфизм $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) : B \cap \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемый формулой

$$\psi_i(y) = \begin{cases} y_i, & i = 1, \dots, k; \\ y_i - g_i(y_1, \dots, y_k), & i = k+1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.29)$$

Легко проверяется, что отображение ψ обратимо и C^r -гладко,

$$\psi_i^{-1}(y) = \begin{cases} y_i, & i = 1, \dots, k; \\ y_i + g_i(y_1, \dots, y_k), & i = k+1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.30)$$

так что это в самом деле диффеоморфизм. Из формул (1.28)–(1.29), очевидно, вытекает, что

$$\psi(f(\varphi(x))) = (x_1, \dots, x_k, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-k \text{ раз}}).$$

Теорема доказана. $\square$

Попутно нами была установлена следующая полезная

ТЕОРЕМА 1.5.2 (Теорема о зависимости функций). Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r -гладкая функция, $r \geq 1$, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что ранг матрицы Якоби этого отображения постоянен: $\text{rank } f'(x) = k$ для всех $x \in \Omega$. Тогда для каждой точки $p \in \Omega$ найдется ее открытая окрестность $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ и C^r -гладкие функции g_i , $i = k+1, \dots, m$, зависящие от k переменных, такие, что после (возможной) перенумерации компонент f_i имеют место тождества

$$f_i(x) = g_i(f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad \forall x \in U, \quad i = k+1, \dots, m. \quad (1.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно просто повторить ход доказательства теоремы о ранге до формулы (1.28) включительно, и воспользоваться тем фактом, что построенное там отображение φ — диффеоморфизм, т.е. оно взаимно-однозначно. $\square$

Теорема 1.5.2 порождает естественный вопрос: а когда набор функций **не** является зависимым в функциональном смысле, т.е. когда одни функции нельзя выразить через другие? Чтобы ответить на этот вопрос, нам понадобится

ТЕОРЕМА 1.5.3 (Теорема о локальном наложении). Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r -гладкая функция, $r \geq 1$, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что ранг матрицы Якоби этого отображения постоянен: $\text{rank } f'(x) = m$ для всех $x \in \Omega$. Тогда множество $f(\Omega)$ открыто в $\mathbb{R}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные точки $p \in \Omega$ и соответствующее значение $q = f(p)$. По теореме о ранге 1.5.1 найдутся открытые окрестности $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$, $V \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^m}(q)$, шар $B \subset \mathbb{R}^n$ и C^r -диффеоморфизмы $\varphi : B \rightarrow U$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $U = \varphi(B)$, и композиция $\psi \circ f \circ \varphi$ вычисляется по простейшей формуле

$$\psi(f(\varphi(u))) = (u_1, \dots, u_m)$$

для всех $u = (u_1, \dots, u_n) \in B$. Таким образом, множество $\psi \circ f \circ \varphi(B)$ представляет собой открытый шар $\tilde{B}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ того же радиуса, что и B . Тогда имеем $f(U) = \psi^{-1}(\tilde{B})$. Так как ψ — диффеоморфизм, и шар $\tilde{B}$ открыт в $\mathbb{R}^m$, то множество $f(U)$ также будет открыто в $\mathbb{R}^m$. Следовательно, $f(U)$ является открытой окрестностью точки $q = f(p)$. Таким образом, нами показано, что для каждой точки $q \in f(\Omega)$ найдется открытая (в $\mathbb{R}^m$) окрестность этой точки, содержащаяся в $f(\Omega)$. Значит, множество $f(\Omega)$ открыто в $\mathbb{R}^m$. $\square$

Теперь Теорема 1.5.2 естественным образом дополняется следующим фактом.

ТЕОРЕМА 1.5.4 (Теорема о независимости функций). Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r -гладкая функция, $r \geq 1$, заданная на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что ранг матрицы Якоби этого отображения постоянен: $\text{rank } f'(x) = m$ для всех $x \in \Omega$. Тогда для каждой точки $p \in \Omega$ и для любой открытой окрестности $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ отображения $f_1, \dots, f_m$ функционально независимы, т.е. **не** существует функции функции g , зависящей от $(m-1)$ -й переменной, такой, что после (возможной) перенумерации компонент f_i имеют место тождества

$$f_m(x) = g(f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) \quad \forall x \in U. \quad (1.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. найдется у точки $p \in \Omega$ найдется открытая окрестность U и функция $g : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для всех $x \in U$ выполнено тождество (1.32). Но тогда справедливо включение $f(U) \subset \text{graph } g$, где символом $\text{graph } g$ обозначен график функции g , т.е. $\text{graph } g = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_m = g(y_1, \dots, y_{m-1})\}$. Очевидно, что внутренность множества $\text{graph } g$ (относительно $\mathbb{R}^m$) пуста. Но это противоречит тому факту, что $f(U)$ представляет собой открытое множество (по предыдущей теореме 1.5.3). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы о независимости. $\square$

§6 Криволинейные системы координат

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется C^r -гладким вложением, если оно является изоморфизмом на свой образ, т.е. если $f : X \rightarrow f(X)$ представляет собой C^r -гладкий изоморфизм. В этих терминах теорему 2.1.7 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.6.1 (Теорема о локальном вложении). Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^r -гладкое отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Предположим, что $\text{rank } f'(x) = k$ для всех $x \in \Omega$. Тогда f является локальным вложением, т.е. для каждой точки $p \in \Omega$ найдется ее открытая окрестность $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^k}(p)$ такая, что сужение $f|_U$ представляет собой C^r -гладкий изоморфизм множества U на множество $V = f(U)$.

Следующее определение играет важную роль в многочисленных приложениях анализа.

Определение 1.6.2. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^k$, и X — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда сюръективное C^r -гладкое отображение $f : \Omega \rightarrow X$ называется *гладкой параметризацией* множества X . При этом координаты точки $u = (u_1, \dots, u_k) \in \Omega$ называются *параметрами* точки $f(u)$. Если же f является вложением Ω в X , то обратное отображение $f^{-1} : X \rightarrow \Omega$ называется *системой координат* на X , а значения $(u_1, \dots, u_k) = f^{-1}(x)$ называют *координатами* точки x .

Рассмотрим классические примеры координатных систем.

1. Полярная система координат. Обозначим $\Omega = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$. Сюръективное отображение $f = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, вычисляемое по правилу

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad (1.33)$$

называется *полярной параметризацией* проколотой плоскости $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Вычислим якобиан отображения f . Имеем

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Нетрудно посчитать, что

$$\det f'(r, \varphi) = r > 0 \quad \forall (r, \varphi) \in \Omega. \quad (1.35)$$

Отсюда по Теореме 1.6.1 вытекает, что f является локальным вложением. Согласно Следствию 1.2.6, для всякого открытого множества $U \subset \Omega$, такого, что сужение $f|_U$ инъективно, множество $V = f(U)$ также будет открытым в $\mathbb{R}^2$, и отображение $f : U \rightarrow V = f(U)$ является C^r -гладким диффеоморфизмом. Тогда $f^{-1} : V \rightarrow U$ представляет собой некоторую систему координат, которую называют *полярной системой координат* на множестве V . Например, в качестве U можно взять множество $U = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\}$, тогда $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$ — плоскость с разрезом. Нетрудно проверить, что для этой пары множеств полярные координаты (компоненты обратного отображения $(r, \varphi) = f^{-1}(x, y)$) задаются формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y < 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

для всех $(x, y) \in V$.

Упражнение 1.6.3. Вычислить полярные координаты (компоненты обратного отображения $(r, \varphi) = f^{-1}(x, y)$) для пары множеств $U = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\}$ и $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 0\}$.

2. Цилиндрическая система координат в трехмерном пространстве. Обозначим $\Omega = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r > 0\}$. Отображение $f = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, вычисляемое по правилу

$$f(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad (1.37)$$

называется *цилиндрической параметризацией* трехмерного пространства с вырезанной осью O_z : $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Вычислим якобиан отображения f . Имеем

$$f'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Нетрудно посчитать, что

$$\det f'(r, \varphi, z) = r > 0 \quad \forall (r, \varphi, z) \in \Omega. \quad (1.39)$$

Отсюда по Теореме 1.6.1 вытекает, что f является локальным вложением. Согласно Следствию 1.2.6, для всякого открытого множества $U \subset \Omega$, такого, что сужение $f|_U$ инъективно, множество $V = f(U)$ также будет открытым в $\mathbb{R}^3$, и отображение $f : U \rightarrow V = f(U)$ является C^r -гладким диффеоморфизмом. Тогда $f^{-1} : V \rightarrow U$ представляет собой некоторую систему координат, которую называют *цилиндрической системой координат* на множестве V . Например, в качестве U можно взять множество $U = \{(r, \varphi, z) : r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$, тогда $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ — пространство, из которого вырезали полуплоскость. Формулы для цилиндрических координат $((r, \varphi, z) = f^{-1}(x, y, z))$ вполне аналогичны предыдущим формулам для полярных координат (1.36), поэтому мы их опускаем.

3. Сферическая система координат в трехмерном пространстве. Обозначим $\Omega = \{(r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$. Отображение $f = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, вычисляемое по правилу

$$f(r, \varphi, \psi) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi), \quad (1.40)$$

называется *сферической параметризацией* трехмерного пространства с вырезанной осью O_z : $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Вычислим якобиан отображения f . Имеем

$$f'(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Нетрудно посчитать, что

$$\det f'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \psi > 0 \quad \forall (r, \varphi, \psi) \in \Omega. \quad (1.42)$$

Отсюда по Теореме 1.6.1 вытекает, что f является локальным вложением. Согласно Следствию 1.2.6, для всякого открытого множества $U \subset \Omega$, такого, что сужение $f|_U$ инъективно, множество $V = f(U)$ также будет открытым в $\mathbb{R}^3$, и отображение $f : U \rightarrow V = f(U)$ является C^r -гладким диффеоморфизмом. Тогда $f^{-1} : V \rightarrow U$ представляет собой некоторую систему координат, которую называют *сферической системой координат* на множестве V . Например, в качестве U можно взять множество $U = \{(r, \varphi, z) : r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$, тогда $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ — пространство, из которого вырезали полуплоскость. Прямым вычислением проверяется тождество $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а формулы для нахождения угловых координат $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ предоставляются учащимся в качестве упражнения.

4. Сферическая система координат в многомерном пространстве. Определим отображения $g_n(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ по индукционному правилу:

$$g_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$g_n(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) = \begin{pmatrix} g_{n-1}(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-3}) \cos \psi_{n-2} \\ r \sin \psi_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

здесь $g_{n-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ — отображение, определенное на предыдущем шаге.

Таким образом,

$$g_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ — полярная параметризация плоскости,}$$

$$g_3(r, \varphi, \psi_1) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \psi_1 \\ r \sin \varphi \cos \psi_1 \\ r \sin \psi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ — сферическая параметризация,}$$

$$g_4(r, \varphi, \psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\ r \sin \varphi \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\ r \sin \psi_1 \cos \psi_2 \\ r \sin \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ — четырехмерная сферическая параметризация,}$$

и т.д. По индукции легко проверяется формула $|g_n(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})| = r$.

Упражнение 1.6.4. Докажите, что для якобиана $J_n = \det g'_n$ введенных выше отображений справедлива индукционная формула

$$J_n(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) = r J_{n-1} \cos^{n-2} \psi_{n-1}. \quad (1.43)$$

Обозначим $\Omega = \{(r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) \in \mathbb{R}^n : r > 0, \psi_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, \dots, n-2\}$. Согласно формуле (1.43),

$$\det g'_n(w) \neq 0 \quad \text{для всех } w \in \Omega. \quad (1.44)$$

Отсюда по Теореме 1.6.1 вытекает, что g_n является локальным вложением, причем

$$g_n(\Omega) = \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = 0\} \text{ —}$$

это n -мерное пространство с вырезом $(n-2)$ -мерного подпространства.

Согласно Следствию 1.2.6, для всякого открытого множества $U \subset \Omega$, такого, что сужение $f|_U$ инъективно, множество $V = f(U)$ также будет открытым в $\mathbb{R}^n$, и отображение $f : U \rightarrow V = f(U)$ является C^r -гладким диффеоморфизмом. Тогда $f^{-1} : V \rightarrow U$ представляет собой некоторую систему координат, которую называют *n-мерной сферической системой координат* на множестве V . Например, в качестве U можно взять множество

$$U = \left\{ (r, \varphi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) \in \mathbb{R}^n : r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), \psi_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), i = 1, \dots, n-2 \right\},$$

тогда $V = \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ — пространство, из которого вырезали $(n-2)$ -мерную полуплоскость.

§6.1 Оператор Лапласа в полярных координатах

Пусть $g(x, y)$ — C^2 -гладкая функция двух переменных, определенная на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^2$.

Оператор Лапласа Δg , имеющий фундаментальное значение для математической физики, определяется по формуле

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Предположим теперь, что $V \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, и имеется диффеоморфизм $U \ni (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in V$ (полярная параметризация). Посчитаем оператор Лапласа в новой системе координат. Матрица Якоби $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ была посчитана выше (см. формулу (1.34)):

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Обозначим указанную матрицу через A . Очевидно, $\det A = r$, и по формулам Крамера нетрудно выписать обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

По Теореме о дифференциале обратной функции, матрица A^{-1} является матрицей Якоби обратного отображения $\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}$, т.е.

$$\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Это означает, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi. \quad (1.47)$$

Тогда для произвольной гладкой функции $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ по теореме о производной сложной функции имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial \varphi}; \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial \varphi}. \quad (1.49)$$

Применяя эти формулы два раза к функции g , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{2}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \varphi}.\end{aligned}$$

Если сложить два последних тождества, то половина слагаемых уничтожится, и получится красивое соотношение

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}. \quad (1.50)$$

Данная формула имеет важные применения в математической физике (теории дифференциальных уравнений с частными производными).

§7 Лемма Морса

ТЕОРЕМА 1.7.1. Пусть $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ — C^r -гладкая функция, $r \geq 3$, заданная на шаре $B = B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad (1.51)$$

и

$$\det f''(0) \neq 0, \quad (1.52)$$

где через $f''(0)$ мы обозначили $n \times n$ симметричную матрицу Гессе $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))_{i,j=1,\dots,n}$. Тогда найдется число $\delta > 0$, индекс $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ и C^{r-2} гладкий диффеоморфизм $\varphi : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi(0) = 0$ и

$$f(\varphi(u)) = u_1^2 + \dots + u_k^2 - u_{k+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (1.53)$$

для всех $u = (u_1, \dots, u_n) \in B_\delta(0)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится интересная сама по себе

ТЕОРЕМА 1.7.2 (Лемма Адамара). Пусть $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ — C^r -гладкая функция, заданная на шаре $B = B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что

$$g(0) = 0. \quad (1.54)$$

Тогда найдутся функции $g_i : B \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^{r-1} , $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \quad (1.55)$$

для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$, причем

$$g_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) \quad (1.56)$$

для всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения леммы. Для $x \in B$ зададим функцию одного переменного $\psi(t)$, $t \in [0, 1]$, по правилу $\psi(t) = g(tx)$. Тогда $\psi(0) = 0$ (см. (1.54)), $\psi(1) = g(x)$, и по формуле Ньютона-Лейбница

$$\psi(1) = \int_0^1 \psi'(t) dt \stackrel{\text{Формула производной сложной функции}}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx) dt.$$

Теперь искомая формула (1.55) получается, если положить $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx) dt$. При этом

очевидно, что $g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0)$, т.е. требование (1.56) также выполнено. Лемма Адамара доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ МОРСА. Пусть выполнены предположения леммы. По лемме Адамара из условия $f(0) = 0$ сразу же получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x), \quad (1.57)$$

где $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \stackrel{(1.51)}{=} 0$. Применяя снова лемму Адамара к $f_i(x)$, преобразуем формулу (1.57) к виду

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x) \quad (1.58)$$

для всех $x \in B$, где функции $h_{ij}(x)$ C^{r-2} -гладкие и $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

Итак, наша задача — найти замену координат $u = u(x)$, в которой бы формула (1.58) принимала бы диагональный вид (1.53). Построение будем вести по индукции. Предположим, что на k - шаге найдена замена координат $x = \varphi(u)$, $\varphi(0) = 0$, для которой справедливо представление

$$f(u) = \pm u_1^2 \pm u_2^2 + \dots \pm u_{k-1}^2 + \sum_{i=k}^n \sum_{j=k}^n u_i u_j h_{ij}(u) \quad (1.59)$$

(для удобства мы обозначаем старым символом $f(u)$ возникающую после указанной замены $x = \varphi(u)$ функцию $f(\varphi(u))$ и т.п.), где функции $h_{ij}(u)$ являются C^{r-2} -гладкими, и матрица $H(u) = (h_{ij}(u))_{i,j=k,\dots,n}$ невырождена и симметрична, $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(0)$. (Заметим, что база индукции ($k = 1$) вытекает из формулы (1.58) и предположения (1.52).) Вследствие невырожденности матрицы H с помощью линейной замены координат можно всегда добиться того, чтобы $h_{kk}(0) \neq 0$. Выделим из формулы (1.59) все слагаемые, где встречается u_k :

$$h_{kk}(u) u_k^2 + 2u_k \sum_{j=k+1}^n u_j h_{kj}(u). \quad (1.60)$$

Рассмотрим замену координат

$$v_i = u_i \quad \text{при } i \neq k; \quad v_k = \sigma u_k + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n u_j h_{kj}(u), \quad (1.61)$$

где $\sigma = \sigma(u) = \sqrt{|h_{kk}(u)|}$. После этой замены сумма в (1.60) принимает вид

$$\pm v_k^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{j=k+1}^n v_j h_{kj} \right)^2$$

(знак перед v_k^2 совпадает со знаком h_{kk}), поэтому формула (1.59) преобразуется в

$$f(v) = \pm v_1^2 \pm v_2^2 + \cdots \pm v_{k-1}^2 \pm v_k^2 + \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n v_i v_j \tilde{h}_{ij}(v). \quad (1.62)$$

Осталось проверить, что замена (1.61) является диффеоморфизмом в окрестности начала координат. В самом деле, у соответствующей матрица Якоби $\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \big|_{u=0}$ все строки, за исключением k -й, совпадают со строками единичной матрицы, а k -я строка имеет вид

$$(\overbrace{0, \dots, 0}^{k-1 \text{ раз}}, \sigma, *).$$

Очевидно, что детерминант этой матрицы совпадает с $\sigma \neq 0$. Таким образом координатное преобразование $v = v(u)$ по теореме об обратной функции представляет собой диффеоморфизм в окрестности начала координат, $v(0) = 0$, и, в силу (1.59), (1.62) мы успешно совершили индукционный переход от $k-1$ к k , поэтому по принципу математической индукции Лемма Морса полностью доказана. $\square$

Глава 2

Многообразия

§1 Определение многообразия, его край и внутренность

Пусть U — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется C^r -гладким (или, как еще говорят, f принадлежит классу гладкости C^r), $r \geq 1$, если все его частные производные непрерывны и являются C^{r-1} -гладкими функциями; при этом функция называется C^0 -гладкой, если она непрерывна.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется C^r -гладким, если найдется открытое множество $U \supset X$, $U \subset \mathbb{R}^n$, и C^r гладкое отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что $\tilde{f}|_X \equiv f$ (т.е. $\tilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$).

Легко видеть, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть имеются непустые множества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и $Z \subset \mathbb{R}^l$. Тогда, если отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ принадлежат классу гладкости C^r , то и их композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ также принадлежит классу гладкости C^r .

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется C^r -изоморфизмом (или диффеоморфизмом), если оно C^r -гладкое, и у него существует обратное отображение $g : Y \rightarrow X$, которое также принадлежит классу гладкости C^r . (Напомним, что отображение $g : Y \rightarrow X$ называется обратным к отображению $f : X \rightarrow Y$, если $g \circ f = \text{id}_X$ и $f \circ g = \text{id}_Y$.) При этом C^0 -гладкие изоморфизмы называют еще *гомеоморфизмами* (т.е., отображение $f : X \rightarrow Y$ гомеоморфизм, если оно само и обратное к нему непрерывны).

Множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ называют C^r -изоморфными, если между ними существует C^r -гладкий изоморфизм $f : X \rightarrow Y$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. Отношение C^r -изоморфности между множествами рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Множество $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^k$ (декартово произведение k открытых интервалов) будем называть k -мерным интервалом. Соответственно, множество $[a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^k$ (декартово произведение k промежутков, первый из них — полуоткрытый, а остальные — открытые) называется k -мерным полуинтервалом.

Определение 2.1.3. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называют C^r -гладким элементарным многообразием размерности k , где $k \leq n$, если существует k -мерный интервал или полуинтервал $U \subset \mathbb{R}^k$ и отображение $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса гладкости C^r такие, что $M = \Phi(U)$ и

(i) существует обратное отображение $\Phi^{-1} : M \rightarrow U$, которое непрерывно;

(ii) ранг матрицы Якоби $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ максимальный, т.е. равен k .

Отображение Φ называется *допустимой параметризацией* (или просто *параметризацией*), а переменные $u = (u^1, \dots, u^k)$ — *локальными координатами* многообразия M .

Пример 2.1.4 (Кривая в $\mathbb{R}^3$). Пусть $U = (a, b)$ и отображение $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ класса C^1 удовлетворяет условиям (i)–(ii). Тогда $M = \Phi((a, b))$ — кривая в $\mathbb{R}^3$. Поясним геометрический смысл налагаемых условий. Гладкость нужна для того, чтобы существовал касательный вектор в каждой точке кривой, т.е. чтобы можно было дифференцировать все компоненты вектор-функции $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$. Обратимость отображения Φ гарантирует отсутствие самопересечений. Из непрерывности же обратного отображения следует, что кривая локально в окрестности каждой точки "походит" на некоторый отрезок, тем самым исключаются ситуации а la узел "восьмерка" и т.п. Рассмотрим, к примеру отображение $\Phi^1(u) = \sin u$, $\Phi^2(u) = \sin 2u$, $u \in (-\pi, \pi)$. Легко видеть, что в окрестности начала координат множество $M = \Phi((-\pi, \pi))$ представляет собой объединение двух отрезков, пересекающихся в одной точке (крест; в целом же кривая M гомеоморфна "восьмерке"). В частности, имеем

$$\lim_{u \rightarrow \pi} \Phi(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = \lim_{u \rightarrow -\pi} \Phi(u) = (0, 0).$$

Тем самым, точки с далеко отстоящими значениями параметра (когда u вблизи 0 или вблизи $\pm\pi$) лежат рядом друг с другом — возле начала координат, это означает отсутствие непрерывности обратного отображения, и такая ситуация для многообразия недопустима.

Условие максимальности ранга в одномерном случае означает, что скорость движения по кривой всегда ненулевая, т.е. движение по кривой никогда не замирает. В самом деле, если точка в процессе движения "затормозит" до остановки, то она может "немного подумать" и пойти в другую сторону, тем самым нарушится гладкость движения. Рассмотрим, к примеру, кривую, $x = \Phi^1(u) = u^3$, $y = \Phi^2(u) = u^2$. Тогда для точек кривой имеет место соотношение $y = x^{2/3}$. Нетрудно видеть, что такая кривая имеет вертикальный "пик" в начале координат (изобразите!), тем самым налицо нарушение гладкости. Если же взять кривую, $x = \Phi^1(u) = u^3$, $y = \Phi^2(u) = |u|^3$, то порождающие ее функции будут C^2 -гладкими (проверьте!), однако сама кривая представляет собой график функции $y = |x|$, так что в начале координат имеется "уголок", и о гладкости этой кривой говорить не приходится, а все потому, что при значении параметра $u = 0$ нарушено условие максимальности ранга: $[\Phi^1(u)]'_{u=0} = [\Phi^2(u)]'_{u=0} = 0$.

Пример 2.1.5 (График функции). График любой C^1 -гладкой функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ является гладким одномерным многообразием $\mathbb{R}^{n+1}$. Действительно, тогда имеем $M = \{(u, f(u)) : u \in (a, b)\}$, и в качестве Φ можно взять отображение $\Phi(u) := (u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Имеем $\Phi'(u) = (1, f'(u)) \neq 0$, тем самым условие (ii) выполнено. Инъективность отображения Φ очевидна. Осталось проверить непрерывность обратного отображения. Она вытекает из того, что первая координата точек кривой — сам параметр u : если параметры (=первые координаты) двух точек различны, то и сами точки различны, а близость точек влечет и близость их первых координат (=параметров)¹

¹Формально процедуру доказательства непрерывности обратного отображения можно провести следующим образом. Обозначим $G = \Phi^{-1}$. Воспользуемся критерием Гейне и возьмем произвольную сходящуюся последовательность точек $M \ni x_k \rightarrow x_0 \in M$. Тогда по определению множества M найдутся значения параметра u_k такие, что $x_k = \Phi(u_k) = (u_k, f(u_k))$. Из сходимости $x_k \rightarrow x_0$ сразу же вытекает сходимость проекций $u_k \rightarrow u_0$, следовательно. С другой стороны, по определению обратной функции $u_k = G(x_k)$. Тем самым установлено, что $G(x_k) \rightarrow x_0$ при условии $x_k \rightarrow x_0 \in M$, $x_k \in M$. А это как раз означает непрерывность обратного отображения $G = \Phi^{-1}$.

Частный случай из примера (2.1.5) носит на самом деле достаточно общий характер: локально многообразие всегда представляет собой график некоторой функции.

Пусть $p \in M \subset \mathbb{R}^n$. Окрестностью точки p в M будем отныне называть всякое открытое относительно M множество F , содержащее p , соответствующее обозначение $F \in \mathcal{N}_M(p)$. Это означает, что $p \in F = M \cap U$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется k -мерным многообразием класса гладкости C^r , если у каждой его точки $p \in M$ найдется окрестность $F \in \mathcal{N}_M(p)$, представляющая собой элементарное k -мерное многообразие класса гладкости C^r ; параметризации этого элементарного многообразия называются также (локальными) параметризациями исходного M , иногда эти параметризации называют также картами многообразия M .

ТЕОРЕМА 2.1.6. *Непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является k -мерным многообразием класса гладкости C^r , если и только если у каждой его точки $p \in M$ существует ее окрестность в M , C^r -изоморфная k -мерному интервалу или полуинтервалу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Leftarrow$ Проводится использованием формулы для производной (т.е. матрицы Якоби) композиции $(g \circ f)'(x) = g'(x) \cdot f'(x)$. В самом деле, пусть у каждой точки $p \in M$ найдется ее открытая относительно M окрестность $U \in \mathcal{N}_M(\mathbb{R}^n)$, (полу)интервал $I \subset \mathbb{R}^k$ и C^r -диффеоморфизм $\varphi : I \rightarrow U$, $\varphi(I) = U$. По определению диффеоморфизма, обратное отображение $\psi = \varphi^{-1} : U \rightarrow I$ также является C^r -гладким, т.е. найдется открытое в $\mathbb{R}^n$ множество V и отображение $\tilde{\psi} : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ такие, что $U = M \cap V$ и $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ для всех $x \in U$. В частности, имеем $\tilde{\psi}(\varphi(x)) \equiv x$ для всех $x \in I$. Вследствие теоремы о дифференциале композиции функций (которую мы доказывали для гладких отображений открытых множеств) имеет место формула $\tilde{\psi}'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv E$, где символами $\tilde{\psi}'(\varphi(x))$ и $\varphi'(x)$ обозначены соответствующие матрицы Якоби, а E — единичная матрица пространства $\mathbb{R}^k$. Поскольку ранг E равен k , то ранг каждого из сомножителей $\tilde{\psi}'(\varphi(x))$ и $\varphi'(x)$ не меньше k , следовательно, ранг $\varphi'(x)$ равен k для всех $x \in I$. Непрерывность $\psi = \varphi^{-1}$ вытекает из непрерывности $\tilde{\psi}$. Налицо выполнение обоих условий (i)–(ii) из определения элементарного k -мерного многообразия в применении к множеству $U = \varphi(I)$ с параметризацией φ , и вследствие произвольности точки $p \in M$, само M также представляет собой k -мерное многообразие.

$\Rightarrow$ Пусть M представляет собой элементарное k -мерное многообразие, т.е. найдется (полу)интервал $I \subset \mathbb{R}^k$ и C^r -отображение $f : I \rightarrow M$ такие, что $\text{rang } f'(x) \equiv k$ на I и обратное отображение $f^{-1} : M \rightarrow I$ существует и непрерывно. Требуется установить, что f^{-1} также является C^r -гладким. Здесь вся сложность в том, что f^{-1} пока что определено **НЕ** на открытом множестве в $\mathbb{R}^n$. Требуется преодолеть эту трудность. Для этого зафиксируем произвольно точку $p \in I$ и $q = f(p) \in M$. По теореме о ранге, найдутся открытое множество $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^k}(p)$, $V \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(q)$, шар $B \subset \mathbb{R}^k$ и C^r -диффеоморфизмы $\varphi : B \rightarrow U$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $U = \varphi(B)$, $f(U) \subset V$ и композиция $\psi \circ f \circ \varphi$ вычисляется по простейшей формуле

$$\psi(f(\varphi(u))) = (u_1, \dots, u_k, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-k \text{ раз}})$$

для всех $u = (u_1, \dots, u_k) \in B$.

Тогда для каждой точки $x \in f(U) \cap V$ можно вычислить значение обратной функции $f^{-1}(x)$ по формуле $f^{-1}(x) = \varphi(\text{Pr}_{\mathbb{R}^k}(\psi(x)))$, где через $\text{Pr}_{\mathbb{R}^k}(y)$ обозначена проекция $y = (y_1, \dots, y_n)$ на соответствующее k -мерное подпространство $\text{Pr}_{\mathbb{R}^k}(y) = (y_1, \dots, y_k)$. Поскольку функция $\varphi(\text{Pr}_{\mathbb{R}^k}(\psi(x)))$ представляет собой C^r -гладкое отображение открытых

множеств евклидовых пространств (как композиция гладких функций), гладкость f^{-1} установлена, следовательно, f — диффеоморфизм. Теорема полностью доказана. $\square$

Фактически, при доказательстве последней теоремы (импликация $\Rightarrow$) было установлено следующее важное утверждение:

ТЕОРЕМА 2.1.7 (Теорема о локальном вложении). Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^r -гладкое отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Предположим, что $\text{rank } f'(p) = k$ для некоторой точки $p \in \Omega$. Тогда найдется ее открытая окрестность $U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^k}(p)$ такая, что сужение $f|_U$ представляет собой C^r -гладкий изоморфизм множества U на множество $V = f(U)$.

Пусть M — k -мерное многообразие класса гладкости C^r . Говорят, что точка $p \in M$ является *внутренней* точкой M , если найдется k -мерный интервал $I \subset \mathbb{R}^k$ и допустимая параметризация $f : I \rightarrow M$ такая, что $p \in f(I)$. Нетрудно показать, что точка $p \in M$ является внутренней точкой многообразия M тогда и только тогда, когда у нее найдется окрестность в M , C^r -изоморфная интервалу в $\mathbb{R}^k$. Множество всех внутренних точек многообразия M будем обозначать M° . Точки многообразия M , не являющиеся внутренними, называются *краевыми*, множество всех краевых точек обозначается символом ∂M , таким образом,

$$\partial M = M \setminus M^\circ. \quad (2.1)$$

Вследствие принятых определений, у каждой краевой точки $p \in \partial M$ найдется окрестность в M , C^r -изоморфная некоторому полуинтервалу в $\mathbb{R}^k$.

ЛЕММА 2.1.8 (Об открытых частях многообразия). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — непустое k -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда всякое открытое в M множество F также является k -мерным многообразием, причем $\partial F = F \cap \partial M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основано на том факте, что пересечение двух открытых в M окрестностей точки $p \in M$ представляет собой снова открытую окрестность точки p в M . $\square$

ТЕОРЕМА 2.1.9 (Об инвариантности понятий многообразия и края при изоморфизмах). Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие класса гладкости C^r , и $\varphi : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ — изоморфизм класса гладкости C^r . Тогда Y также является C^r -гладким k -мерным многообразием, причем $\partial Y = \varphi(\partial X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко выводится из Теорем 2.1.2–2.1.6 и Леммы 2.1.8. $\square$

ТЕОРЕМА 2.1.10. Пусть $I = [a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$ — k -мерный полуинтервал в пространстве $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$\partial I = I \cap \text{fr}_{\mathbb{R}^k} I = \{a_1\} \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k). \quad (2.2)$$

Напомним, что символом $\text{fr}_X E$ обозначается граница множества E в пространстве X (см. формулу (3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $F = I \cap \text{fr} I = \{a_1\} \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$ (как обычно, мы пишем сокращенно fr вместо $\text{fr}_{\mathbb{R}^k}$ и т.п., когда понятно, о каком объемлющем пространстве идет речь). Тогда вследствие данных определений, $\partial I \subset F$ (в самом деле, если $x \in I \setminus F$, то $x \in \text{Int } I \subset I^\circ$). Осталось проверить обратное включение

$$\partial I \supset F. \quad (2.3)$$

Предположим, что оно неверно, тогда найдется точка $p \in F \setminus \partial I = F \cap I^\circ$. Это означает, что найдется k -мерный интервал $J \subset \mathbb{R}^k$ и C^r -гладкий изоморфизм $h : J \rightarrow G$, где $G = h(J)$ — (открытая) окрестность точки p в I . Поскольку интервал J представляет собой открытое множество в $\mathbb{R}^k$, по теореме Брауэра 1.1.2 об инвариантности области множество G также открыто в $\mathbb{R}^k$. Однако это противоречит имеющимся включениям $p \in G \subset I$ и $p \in F = I \cap \text{fr } I$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.11. Пусть M — k -мерное многообразие класса гладкости C^r . Тогда для любой допустимой параметризации $g : J \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ справедлива формула

$$g(\partial J) = g(J \cap \text{fr } J) = g(J) \cap \partial M. \quad (2.4)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.12. Пусть M — k -мерное многообразие класса гладкости C^r . Тогда его край ∂M является C^r -гладким $(k - 1)$ -мерным многообразием без края.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \partial M$. Возьмем произвольную допустимую параметризацию $g : J \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ такую, что $p \in g(J)$. В силу принятых определений $g(J)$ является открытым в M множеством, следовательно, множество $G := g(J) \cap \partial M$ открыто в ∂M . Тогда G является открытой окрестностью точки p в ∂M . По формуле (2.4) справедливы равенства

$$g(J \cap \text{fr } J) = G. \quad (2.5)$$

Очевидно, что множество $J \cap \text{fr } J$ изоморфно $(k - 1)$ -мерному интервалу (см. формулу (2.2)). Следовательно, по формуле (2.4) множество G изоморфно (C^r -гладко) некоторому $(k - 1)$ -мерному интервалу. Это означает, ввиду произвольности точки $p \in \partial M$ и Леммы 2.1.6, что множество ∂M является $(k - 1)$ -мерным C^r -гладким многообразием без края. $\square$

Следующее определение играет важную роль при задании многообразий системой уравнений и неравенств.

Определение 2.1.13. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение (система функций) $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *регулярным в точке* $p \in \Omega$, если вектора $\nabla f_i(p)$ линейно независимы (т.е. $\text{rank } f'(p) = m$, здесь $\text{rank } f'(p)$ — это ранг $m \times n$ матрицы Якоби $f'(p)$ отображения f в точке p , строками которой являются градиенты $\nabla f_i(p) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p))$, $i = 1, \dots, m$).

ТЕОРЕМА 2.1.14 (О задании многообразия системой уравнений). Пусть имеет-ся открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и C^r -гладкое отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, регулярное в каждой точке $z \in \Omega$. Тогда, если множество решений системы

$$M = \{z \in \Omega : f(z) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m\} = \{z \in \Omega : f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\} \quad (2.6)$$

непусто, то оно представляет собой $(n - m)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$ без края.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k = n - m$. Точку $z \in \mathbb{R}^n$ будем представлять в виде $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$. Пусть $z_0 = (p, q) \in M$, где соответственно $p \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{R}^m$. Поскольку $\text{rank } f'(z_0) = m$, то в матрице Якоби $f'(z_0)$ имеется минор $(m \times m$ -матрица), у которой определитель отличен от нуля. Сделав перенумерацию координат, если необходимо, мы можем считать, не умаляя общности, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0, \quad (2.7)$$

где через $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначена квадратная $m \times m$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, m$. Тогда по теореме о неявной функции 1.3.1 найдется окрестности U, V точек p, q соответственно и C^r -гладкая функция $g : U \rightarrow V$ такие, что множество $(U \times V) \cap M$ совпадает с графиком функции g , т.е.

$$\forall (x, y) \in U \times V \quad [f(x, y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow y = g(x)]. \quad (2.8)$$

Таким образом, отображение $\varphi : U \rightarrow \Omega$, действующее по правилу $\varphi(x) = (x, g(x))$, является допустимой параметризацией множества M , и $\varphi(U) = (U \times V) \cap M$ представляет собой открытую в M окрестность точки $z_0 = (p, q)$. Ввиду произвольности точки $z_0 \in M$, теорема 2.1.14 доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2.1.15 (О задании многообразия системой уравнений и неравенств). Пусть имеется открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и C^r -гладкое отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, регулярное в каждой точке $z \in \Omega$. Тогда, если множество решений системы

$$M = \{z \in \Omega : f_1(z) \geq 0, f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\} \quad (2.9)$$

непусто, то оно представляет собой $(n - m + 1)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, причем его краем является множество

$$\partial M = \{z \in \Omega : f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k = n - m$. Точку $z \in \mathbb{R}^n$ будем представлять в виде $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$. Пусть $(p, q) \in M$, где соответственно $p \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$f_1(p, q) = 0. \quad (2.11)$$

Поскольку $\text{rank } f'(p, q) = m$, то в матрице Якоби $f'(p, q)$ имеется минор $(m \times m)$ -матрица, у которой определитель отличен от нуля. Сделав перенумерацию координат, если необходимо, мы можем считать, не умаляя общности, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0, \quad (2.12)$$

где через $\frac{\partial f}{\partial y}$ обозначена квадратная $m \times m$ матрица с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, m$.

Рассмотрим отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое по формуле $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. Нетрудно видеть, что квадратная $n \times n$ матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

где через E обозначена единичная $k \times k$ матрица, а через 0 — нулевая $k \times m$ матрица. Отсюда $\det \varphi'(p, q) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(p, q) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции, найдется шар $B = B_\delta(p, q)$ такой, что множество $\varphi(B)$ открыто и сужение $\varphi : B \rightarrow \varphi(B)$ является диффеоморфизмом, т.е. оно биективно и обратное к нему отображение $\varphi^{-1} : \varphi(B) \rightarrow B$ также C^r -гладкое. Обозначим $\psi = \varphi^{-1}$. По построению, $\varphi(p, q) = (p, \mathbf{0})$, здесь $\mathbf{0}$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда найдется число $t > 0$ и k -мерный интервал Q с центром в p такие, что $Q \times (-t, t)^m \subset \varphi(B)$. Обозначим

$$W = Q \times (-t, t)^m = \{(x, \tau_1, \dots, \tau_m) : x \in Q, \tau_i \in (-t, t), i = 1, \dots, m\}.$$

По построению, W является n -мерным (открытым) интервалом с центром в точке $(p, \mathbf{0})$, следовательно, по теореме Брауэра множество $\psi(W)$ является открытой окрестностью точки $(p, q) = \psi(p, \mathbf{0})$. Тогда

(*) множество $M \cap \psi(W)$ является открытой окрестностью точки (p, q) в M .

Более того, для $(x, \boldsymbol{\tau}) = (x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in W$ справедливы равенства

$$(x, \boldsymbol{\tau}) = \varphi(\psi(x, \boldsymbol{\tau})) = (x, f(\psi(x, \boldsymbol{\tau}))),$$

следовательно, $\boldsymbol{\tau} = f(\psi(x, \boldsymbol{\tau}))$, т.е.

$$\tau_i = f_i(\psi(x, \tau_1, \dots, \tau_m)) \quad \forall (x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in W, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Обозначим

$$U = Q \times [0, t) \times \{0\}^{m-1} = \{(x, \tau, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-1 \text{ раз}}) : x \in Q, \tau \in [0, t)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

По построению, $U \subset W$, и по формуле (2.14) имеем

$$\tau = f_1(\psi(x, \tau, \bar{\mathbf{0}})), \quad 0 = f_i(\psi(x, \tau, \bar{\mathbf{0}})) \quad \forall (x, \tau, \bar{\mathbf{0}}) \in U, \quad i = 2, \dots, m, \quad (2.15)$$

здесь через $\bar{\mathbf{0}}$ обозначен нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Поскольку по построению $\psi(W) \subset \Omega$, то из равенств (2.15) вытекает, что

$$\psi(x, \tau, \bar{\mathbf{0}}) \in M \quad \forall (x, \tau, \bar{\mathbf{0}}) \in U \quad (2.16)$$

Далее, если $(x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in W$ и $\psi(x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in M$, то, опять-таки по формуле (2.14) и в силу определения множества M имеем $\tau_1 \in [0, t)$, $\tau_2 = \dots = \tau_m = 0$, т.е. $(x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in U$. Таким образом, получаем

$$\forall (x, \boldsymbol{\tau}) = (x, \tau_1, \dots, \tau_m) \in W \quad [\psi(x, \boldsymbol{\tau}) \in M \Leftrightarrow (x, \boldsymbol{\tau}) \in U],$$

другими словами

$$\psi(U) = M \cap \psi(W),$$

и, по свойству (*), множество $\psi(U)$ является открытой окрестностью точки (p, q) в M . Итак, мы доказали, что для каждой точки $(p, q) \in M$, удовлетворяющей условию (2.11), найдется ее открытая окрестность, C^r -диффеоморфная некоторому $(k+1)$ -мерному полуинтервалу U . Аналогично (и с очевидными упрощениями) проверяется, что для каждой точки $(p, q) \in M$, удовлетворяющей строгому неравенству

$$f_1(p, q) > 0, \quad (2.17)$$

найдется ее открытая окрестность, C^r -диффеоморфная некоторому $(k+1)$ -мерному интервалу U . Тем самым утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

§2 Касательное пространство

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество, и $p \in M$. Будем говорить, что вектор $v \in \mathbb{R}^n$ является касательным к множеству M в точке p , если найдется функция $\gamma : T \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ такая, что $\gamma(0) = p$ и

$$\gamma'(0) = \lim_{T \ni t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = v. \quad (2.18)$$

Напомним, что запись " $T \ni t \rightarrow 0$ " означает, что $t \rightarrow 0 \mid (T \setminus \{0\})$, т.е. t стремится к нулю по "проколотому" множеству $T \setminus \{0\}$. Поэтому здесь обязательно предполагается, что 0 есть предельная точка множества $T \setminus \{0\}$, т.е.

$$0 \in \text{Cl}(T \setminus \{0\}). \quad (2.19)$$

Совокупность всех касательных векторов ко множеству M в точке p обозначается символом $T_p M$. Иногда удобно и геометрически более наглядно использовать множество $\text{Cont}_p M := p + T_p M$, которое носит название *контингенция* множества M в точке p , или, в просторечии, *касательная*.

ТЕОРЕМА 2.2.1 (Свойства касательного пространства). Пусть M — непустое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой точки $p \in M$ справедливы следующие утверждения:

- (i)_t $\mathbf{0} \in T_p M$, где через $\mathbf{0}$ обозначен нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^n$.
- (ii)_t Множество $T_p M$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$.
- (iii)_t Множество $T_p M$ представляет собой конус в $\mathbb{R}^n$, т.е. если $v \in T_p M$, то $\alpha v \in T_p M$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
- (vi)_t Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ единичной длины $|v| = 1$ принадлежит пространству $T_p M$ в том и только том случае, если найдется последовательность точек $x_j \in M$ таких, что $x_j \neq p$, $x_j \rightarrow p$ при $j \rightarrow \infty$, и $\frac{x_j - p}{|x_j - p|} \rightarrow v$ при $j \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предоставляется учащимся в качестве несложного упражнения. $\square$

На следующем шаге при изучении касательных пространств нам предстоит выяснить, как они преобразуются при гладких отображениях. Именно, пусть M — непустое множество в $\mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса гладкости C^r , и пусть $p \in M$. Обозначим $q = f(p)$, $N = f(M)$. Требуется определить действие дифференциала $df(p)$ на касательном пространстве $T_p M$. Тонкость здесь в том, что, говоря формально, дифференциал $df(p)$ определен *неоднозначно*, а именно, он зависит от *способа расширения* отображения f . Напомним, что по определению гладких отображений, найдется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и гладкое отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $U \supset M$ и

$$\tilde{f}(x) \equiv f(x) \quad \forall x \in M. \quad (2.20)$$

Тогда по обычному правилу определен дифференциал (линейное отображение) $d\tilde{f}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Разумеется, он зависит от выбора $\tilde{f}$, и при одном и том же отображении $f : M \rightarrow N$ могут быть *разные* дифференциалы $d\tilde{f}(p)$. Однако, по счастливому стечению обстоятельств, на касательном пространстве $T_p M$ действие дифференциала **не зависит** от способа расширения f , поэтому можно определить

$$df(p) \langle v \rangle = d\tilde{f}(p) \langle v \rangle \quad \text{для } v \in T_p M. \quad (2.21)$$

ТЕОРЕМА 2.2.2 (Поведение касательных пространств при гладком отображении). Пусть M — непустое множество в $\mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса гладкости C^r , и пусть $p \in M$. Обозначим $q = f(p)$, $N = f(M)$. Тогда определенный выше дифференциал $df(p)$ переводит касательное пространство $T_p M$ в $T_q N$, причем отображение $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$ не зависит от способа расширения f (до отображения $\tilde{f} : U \supset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$), т.е. данное определение (2.21) корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы и $f : M \rightarrow N$ — некоторое отображение класса гладкости C^r . По определению гладких отображений, найдется открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и C^r -гладкое отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $U \supset M$ и выполнено тождество (2.20). Тогда по обычному правилу определен дифференциал (линейное отображение) $d\tilde{f}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Возьмем теперь произвольный вектор $v \in T_p M$. Тогда найдется множество $T \subset \mathbb{R}$ со свойством (2.19) и функция $\gamma : T \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ такие, что

$$\gamma'(0) = v. \quad (2.22)$$

Рассмотрим функцию $\varsigma : T \rightarrow N$, определяемую по формуле

$$\varsigma(t) = f(\gamma(t)) \stackrel{(2.20)}{=} \tilde{f}(\gamma(t)). \quad (2.23)$$

Поскольку отображение $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ гладкое, то по правилу дифференцирования композиции функция $\varsigma(t)$ дифференцируема при $t = 0$ и

$$\varsigma'(0) = d\tilde{f}(\gamma(0))\langle \gamma'(0) \rangle = d\tilde{f}(p)\langle v \rangle. \quad (2.24)$$

Тогда, учитывая равенство $\varsigma(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = q$, по определению касательного пространства $T_q N$ получаем, что $\varsigma'(0) \in T_q N$. Таким образом (см. (2.24)), доказано утверждение

$$\forall v \in T_p M \quad d\tilde{f}(p)\langle v \rangle \in T_q N, \quad (2.25)$$

причем по построению значение $d\tilde{f}(p)\langle v \rangle = \varsigma'(0)$ зависит *только* от f (см. (2.23)), т.е. это значение не зависит от способа расширения $\tilde{f}$ отображения f . Теорема полностью доказана. $\square$

Из доказанной теоремы и известных свойств дифференциала вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2.3. Определенный выше дифференциал $df(p)$ гладкого отображения $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N \subset \mathbb{R}^m$ обладает следующими свойствами:

(d1). Отображение $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ линейно, т.е. оно является сужением на $T_p M$ некоторого линейного отображения $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

(d2). Дифференциал тождественного отображения также является тождественным отображением.

(d3). Дифференциал композиции представляет собой композицию дифференциалов, т.е. для гладкого отображения $g : N \rightarrow L \subset \mathbb{R}^l$ имеет место равенство

$$d(g \circ f)|_p = dg(f(p)) \circ df(p). \quad (2.26)$$

(d4) Если $f : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм класса гладкости C^r , $N = f(M)$, то для всякой точки $p \in M$ и $q = f(p)$ дифференциал $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$ является биективным преобразованием (линейным изоморфизмом), причем обратным к нему является отображение $df^{-1}(q) : T_q N \rightarrow T_p M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается только лишь свойство (d4), т.к. все остальные легко следуют из определений и ранее установленных свойств "классических" дифференциалов отображений открытых множеств. Итак, проверим (d4). Пусть выполнены соответствующие предположения, т.е. $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N \subset \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм класса гладкости C^r , $N = f(M)$, $p \in M$ и $q = f(p)$. Тогда по определению диффеоморфизма само отображение f является C^r -гладким, и существует обратное к нему отображение $f^{-1} : N \rightarrow M$, также C^r -гладкое. Тогда способом, указанным при доказательстве предыдущей теоремы 2.2.2, можно определить отображения касательных пространств $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$ и $df^{-1}(q) : T_q N \rightarrow T_p M$. По определению обратного отображения, имеют место тождества

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_N,$$

здесь id_X — тождественное отображение пространства X . Тогда по свойству (d3) и (d1) справедливы тождества

$$df^{-1}(q) \circ df(p) = \text{id}_{T_p M}, \quad df(p) \circ df^{-1}(q) = \text{id}_{T_q N}.$$

Это и означает, что отображения $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$ и $df^{-1}(q) : T_q N \rightarrow T_p M$ взаимно обратные. Теорема полностью доказана. $\square$

Напомним, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется k -мерным *подпространством* пространства $\mathbb{R}^n$, если найдется система из k линейно-независимых векторов $v_1, \dots, v_k \subset X$ таких, что $X = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k : t_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k\}$. Аналогично, X называется k -мерным *полупространством*, если найдется система из k линейно-независимых векторов $v_1, \dots, v_k \subset X$ таких, что $X = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k : t_1 \geq 0, t_i \in \mathbb{R}, i = 2, \dots, k\}$. Таким образом, k -мерное полупространство линейно изоморфно множеству $\mathbb{R}_+^k = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \geq 0\}$.

ТЕОРЕМА 2.2.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерное многообразие класса C^r , $r \geq 1$. Тогда, если $p \in M \setminus \partial M$, то $T_p M$ является линейным k -мерным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$, а если $p \in \partial M$, то $T_p M$ представляет собой k -мерное полупространство в $\mathbb{R}^n$, причем

$$\partial T_p M = T_p(\partial M). \quad (2.27)$$

При этом соответствующие линейные изоморфизмы порождаются дифференциалами $d\varphi(p) : \mathbb{R}^k(\mathbb{R}_+^k) \rightarrow T_p M$ допустимых C^r -гладких параметризаций $\varphi : Q \rightarrow M$, $\varphi(Q) \in \mathcal{N}_M(p)$, где Q — соответственно k -мерный интервал или полуинтервал пространства $\mathbb{R}^k$.

§3 Касательное пространство многообразий, заданных системой уравнений (неравенств)

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть M — многообразие из теоремы 2.1.14, заданное системой уравнений (2.6). Тогда для каждой точки $p \in M$ справедливо равенство

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n : df_1(p)\langle v \rangle = df_2\langle v \rangle = \dots = df_m\langle v \rangle = 0\}. \quad (2.28)$$

Если же M — многообразие с краем из Теоремы (2.1.15), то для него справедлива формула

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n : df_1(p)\langle v \rangle \geq 0, df_2\langle v \rangle = \dots = df_m\langle v \rangle = 0\}. \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяется свойство (2.26) композиции дифференциалов. $\square$

Будем говорить, что вектор u ортогонален множеству $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in S$, обозначается $u \perp T_p S$, если $u \cdot v = 0$ для всех $v \in T_p S$. Совокупность всех векторов $u \in \mathbb{R}^n$, ортогональных S в точке p , называется ортогональю (или нормалью) к S в точке p , и обозначается символом $(T_p S)^\perp$. Легко проверить, что нормаль к линейному подпространству размерности k , сама является линейным подпространством размерности $(n - k)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. Пусть M — многообразие из теоремы 2.1.14, заданное системой уравнений (2.6). Тогда для каждой точки $p \in M$

$$(T_p M)^\perp = \{\lambda_1 \nabla f_1(p) + \cdots + \lambda_m \nabla f_m(p) : \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m\}, \quad (2.30)$$

т.е. градиенты $\nabla f_i(p)$ образуют базис нормали $(T_p S)^\perp$.

§4 Признаки условного экстремума

ТЕОРЕМА 2.4.1 (Теорема Ферма). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие класса гладкости C^r , $r \geq 1$, и пусть функция $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ достигает локального экстремума в точке $p \in M$. Тогда либо $p \in \partial M$, либо $\nabla h(p) \in (T_p M)^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, для определенности, что $p \in M \setminus (\partial M)$ представляет собой точку локального минимума, т.е. найдется открытый шар $B = B_\rho(p)$ с центром в p такой, что $h(x) \geq h(p)$ для всех $x \in M \cap B$. Обозначим $M' = M \cap B$ — по построению, это открытое подмножество многообразия M . Тогда $T_p M = T_p M'$ представляет собой k -мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, где $k = \dim M$. Как хорошо известно, (линейное) векторное подпространство под действием линейного отображения переходит снова в векторное подпространство (возможно, меньшей размерности), поэтому $dh(p)(T_p M)$ представляет собой линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. По построению,

$$dh(p)(T_p M) \subset T_{h(p)} h(M') \subset T_{h(p)}([h(p), +\infty)) = \mathbb{R}_+ = [0, \infty).$$

Единственное подпространство, содержащееся в $\mathbb{R}_+$ — это нулевое подпространство, поэтому $dh(p)(T_p M) = \{0\}$, т.е.

$$dh(p) \langle v \rangle = \nabla h(p) \cdot v = 0 \quad \forall v \in T_p M.$$

Следовательно, $\nabla h \perp T_p M$. Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2.4.2 (О множителях Лагранжа). Пусть M — многообразие из теоремы 2.1.14, т.е.

$$M = \{z \in \Omega : f_1(z) = f_2(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}, \quad (2.31)$$

где Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем градиенты $\nabla f_1(z), \dots, \nabla f_m(z)$ линейно независимы в каждой точке $z \in \Omega$. Предположим, что функция $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ достигает локального экстремума в точке $p \in M$. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\nabla h(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \cdots + \lambda_m \nabla f_m(p). \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по Теореме 2.1.14 M представляет собой многообразие без края, то вследствие теоремы Ферма 2.4.1, справедливо включение $\nabla h(p) \in (T_p M)^\perp$. Но тогда по формуле 2.30 найдутся $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, для которых выполнено искомое равенство (2.32). Теорема Лагранжа доказана. $\square$

Таким образом, в предположениях доказанной теоремы, функция $\tilde{h}(z) = h(z) - \lambda_1 f_1(z) - \dots - \lambda_m f_m(z)$ удовлетворяет условию

$$\nabla \tilde{h}(p) = 0, \quad (2.33)$$

т.е. все частные производные функции $\tilde{h}$ в точке p равны нулю. Отметим, что по построению $\tilde{h}(z) \equiv h(z)$ для всех $z \in M$, т.е. p является точкой условного экстремума как для h , так и для $\tilde{h}$. Получается, что для функции $\tilde{h}$ выполнено "обычное" утверждение теоремы Ферма (градиент в экстремальной точке зануляется).

Отметим также, что построенная функция $\tilde{h}(z) = h(z) - \lambda_1 f_1(z) - \dots - \lambda_m f_m(z)$ часто называется *функцией Лагранжа*. Доказанная теорема дает рецепт поиска "подозрительных" точек, которые могут оказаться точками экстремума (это критические точки функции Лагранжа). Следующая теорема в некоторых случаях позволяет удостовериться, что эти "подозрительные" точки в самом деле являются экстремальными.

ТЕОРЕМА 2.4.3 (Достаточный признак условного экстремума). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие, p — внутренняя его точка, и пусть $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая C^2 -гладкая функция, имеющая нулевой дифференциал² в точке $p \in M$, т.е.

$$\nabla h(p) = 0. \quad (2.34)$$

Предположим, далее, что

$$H(v) > 0 \quad \forall v \in T_p M \setminus \{0\}, \quad (2.35)$$

где $H(v)$ — гессиан (квадратичная форма, порожденная симметричной матрицей вторых производных) функции h в точке p . Тогда точка p является точкой локального минимума для функции h на M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Допустим, что ее заключение неверно. Тогда найдется последовательность точек $z_j \in M$ таких, что $z_j \neq p$,

$$z_j \rightarrow p \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (2.36)$$

и

$$h(z_j) \leq h(p) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

Не умаляя общности, можно считать, что $h(p) = 0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$h(z_j) = H(z_j - p) + o(|z_j - p|^2) \leq 0 \quad (2.38)$$

(здесь мы учли равенство нулю первого дифференциала h в точке p). Обозначим $t_j = |z_j - p|$, $v_j = \frac{z_j - p}{|z_j - p|}$. Тогда

$$|v_j| \equiv 1 \quad (2.39)$$

²Обычно в качестве h берется функция Лагранжа $\tilde{h}$, см. предыдущую теорему.

и $t_j^2[H(v_j) + o(1)] \leq 0$, деля последнее равенство на t_j^2 , получаем

$$H(v_j) + o(1) \leq 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Поскольку последовательность векторов v_j равномерно ограничена, то из нее можно по теореме Вейерштрасса выделить сходящуюся подпоследовательность $v_j \rightarrow v_*$. Переходя к пределу в соотношениях (2.39)–(2.40), получаем

$$|v_*| = 1; \quad H(v_*) \leq 0. \quad (2.41)$$

По построению и по теореме 2.2.1 (vi)_t справедливо включение $v_* \in T_p M$. Последнее включение, вместе с формулой (2.41), вступает в противоречие с предположением (2.35). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Теоремы 2.4.2 и 2.4.3 дают некий рецепт поиска точек условного экстремума функции h на многообразии M (без края), заданном системой уравнений (2.31). А именно, нужно сначала найти точки $p \in M$ такие, что выполнено равенство $\nabla h(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(p)$ — это будут "подозрительные" точки, т.к. для них выполнено необходимое условие экстремума. Затем для каждой такой "подозрительной" точки нужно выписать функцию Лагранжа $\tilde{h}(z) = h(z) - \lambda_1 f_1(z) - \dots - \lambda_m f_m(z)$, для нее выполняется условие $\nabla \tilde{h}(p) = 0$ (ср. с (2.34)), причем $\tilde{h}(z) \equiv h(z)$ для всех $z \in M$, т.е. задачи поиска условного экстремума для функций h и $\tilde{h}$ на M равносильны. Наконец, нужно посчитать гессиан (матрицу вторых производных) H функции $\tilde{h}$, и попробовать применить критерий из прошлой теоремы 2.4.3 (при этом для вычисления касательного пространства $T_p M$ служит формула (2.28)).

Пример 2.4.4. I. Найдем точки условного экстремума функции $h(x, y) = xy$ при условии $x + y = 1$. Здесь условие связи³ задается функцией $f(x, y) = x + y$, соответственно, функция Лагранжа имеет вид $L = h - \lambda f = xy - \lambda(x + y)$. Запишем необходимое условие локального экстремума, в соответствии с Теоремой 1.4.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0; \\ f(x, y) = x + y = 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Мы видим, что решением этой системы является точка $x_* = y_* = \frac{1}{2}$. Соответственно, $\lambda = \frac{1}{2}$, $L = xy - \frac{1}{2}(x + y)$. Найдем пространство $T_p M$ из предыдущей теоремы. Для вектора $v = (v_1, v_2)$ имеем $df\langle v \rangle = v_1 + v_2$, поэтому $T_p M = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1 = -v_2\}$. Матрица Гессе функции L имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

соответственно, ее действие на вектор $v = (v_1, v_2) \in T_p M$ вычисляется по формуле

$$H(v) = (v_1, v_2) H \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 v_2 = -2v_1^2 < 0$$

³В Теореме 1.4.1 фигурировало условие связи $f(x, y) = 0$, а в данном случае оно задается соотношением $f(x, y) = 1$. Это различие несущественно, т.к. сдвиг функции на константу не влияет на нахождение производных и на поиск экстремума.

при $v \neq 0$, значит, найденная точка $x_* = y_* = \frac{1}{2}$ является точкой локального максимума. Нетрудно проверить, что этот максимум будет и глобальным.

II. Найдем точки условного экстремума функции $h(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Функция Лагранжа имеет вид $L = h - \lambda f = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2)$. Запишем необходимое условие локального экстремума, в соответствии с Теоремой 1.4.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{a} - 2\lambda x = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{b} - 2\lambda y = 0; \\ f(x, y) = x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (2.44)$$

Из первых двух равенств получаем дополнительное соотношение $\frac{1}{xa} = \frac{1}{yb}$, откуда $x = \frac{b}{a}y$, и по третьему уравнению получаем $x^2 + y^2 = y^2(1 + \frac{b^2}{a^2}) = y^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1$. Обозначим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. У приведенной системы уравнений два решения: $y = \pm \frac{a}{c}$, $x = \pm \frac{b}{c}$, соответственно $\lambda = \pm \frac{c}{2ab}$. Легко видеть также, что знак гессиана у функции L совпадает со знаком $-\lambda$, поэтому при $\lambda > 0$ будет точка максимума, а при $\lambda < 0$ — соответственно точка минимума.

III. Найдем точки условного экстремума функции $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$. Функция Лагранжа имеет вид $L = h - \lambda f = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})$. Запишем необходимое условие локального экстремума, в соответствии с Теоремой 1.4.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0; \\ 2z - 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

У этой системы три основных решения

III(a). $\lambda = a^2$, $y = z = 0$, $x = a$. Тогда функция Лагранжа имеет вид $L = (1 - \frac{a^2}{b^2})y^2 + (1 - \frac{a^2}{c^2})z^2$. Поскольку в критической точке для вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ имеем $df\langle v \rangle = \frac{2v_1}{a}$, то легко видеть, что соответствующее пространство $T_p M$ определяется соотношением $T_p M = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 0\}$. Очевидно, на этом пространстве гессиан функции L (который совпадает с точностью до множителя с самой этой функцией) отрицателен. Поэтому указанная точка есть точка максимума для L .

III(b). $\lambda = b^2$, $x = z = 0$, $y = b$. Тогда функция Лагранжа имеет вид $L = (1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + (1 - \frac{b^2}{c^2})z^2$. Поскольку в критической точке для вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ имеем $df\langle v \rangle = \frac{2v_2}{b}$, то легко видеть, что соответствующее пространство $T_p M$ определяется соотношением $T_p M = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_2 = 0\}$. Поскольку L представляет собой квадратичную форму, для ее гессиана $H(v)$ справедливо равенство $H(v) = 2L(v)$. На пространстве $T_p M$ квадратичная форма L принимает как положительные, так и отрицательные значения (т.к. один из ее коэффициентов $(1 - \frac{b^2}{a^2})$ положителен, а другой $(1 - \frac{b^2}{c^2})$ отрицателен). Поэтому данная точка **НЕ** является точкой локального экстремума.

III(c). $\lambda = c^2$, $x = y = 0$, $z = c$. Тогда функция Лагранжа имеет вид $L = (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + (1 - \frac{c^2}{b^2})y^2$. Поскольку в критической точке для вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ имеем $df\langle v \rangle = \frac{2v_3}{c}$, то легко видеть, что соответствующее пространство $T_p M$ определяется соотношением $T_p M = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_3 = 0\}$. Очевидно, на этом пространстве гессиан функции L (который совпадает с точностью до множителя с самой этой функцией) положителен. Поэтому указанная точка есть точка минимума для L .

Остальные критические точки отличаются от выписанных только знаками, а поскольку исследуемая функция четна по всем переменным, то тип критической точки не меняется при перемене знака одной из координат.

Глава 3

Поточечная и равномерная сходимость

§1 Основные определения. Теорема о повторных пределах

Пусть имеется последовательность функций $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на множестве S . Говорят, что последовательность f_n сходится *поточечно* к функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in S \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (3.1)$$

Переписывая это на языке ε - δ , имеем:

$$\forall x \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : (\mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \quad (3.2)$$

Однако часто поточечной сходимости бывает недостаточно для сохранения важных для анализа свойств функций.

Пример 3.1.1. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$, заданных на интервале $S = [0, 1]$. Легко видеть (проверьте!), что эта последовательность функций сходится поточечно к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Однако, предельная функция не является непрерывной.

Упражнение 3.1.2. 1) Докажите, что функция $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является поточечным пределом всюду сходящейся последовательности *непрерывных* функций $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то функция $f(x)$ не может быть разрывной в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. **Указание.** Это вытекает из теоремы Бэра о множествах первой категории.

2) Из первого утверждения выведите, что производная f' всюду дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не может быть разрывной в каждой точке. **Указание.** Имеет место равенство

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Если ставить вопрос более общо, то возникает проблема коммутирования базовых операций анализа (взятие предела, дифференцирование, интегрирование) и поточечного предела. А именно, требуется выяснить, в каком случае, при выполнении условия (3.1), справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p|S} f(x); \quad (3.4)$$

$$f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x); \quad (3.5)$$

$$\int_S f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f(x) dx \quad ? \quad (3.6)$$

Все эти равенства можно перетолковать в виде коммутирования операции взятия поточечного предела с другими операциями анализа, например, формула (3.4) равносильна равенству повторных пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow p|S} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (3.7)$$

Вообще говоря, соотношения (3.4)–(3.7) могут нарушаться, как показывают следующие контрпримеры.

Пример 3.1.3. Рассмотрим опять последовательность функций $f_n(x) = x^n$, заданных на интервале $S = [0, 1]$, которая сходится к разрывной функции $f(x)$, определяемой формулой (3.3). В качестве p возьмем точку $p = 1$. Тогда $\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) = 1$, соответственно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) = 1$, однако $\lim_{S \ni x \rightarrow p} f(x) = 0 \neq 1$, т.е. соотношения (3.4), (3.7) нарушаются.

Пример 3.1.4. Возьмем последовательность функций $f_n(x) = \arctg(nx)$. Все эти функции непрерывны, и $f_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Нетрудно проверить также, что

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, снова соотношения (3.4), (3.7) нарушаются в точке $p = 0$.

Пример 3.1.5. Теперь рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg(nx)$, заданных на $\mathbb{R}$. Легко видеть (см. предыдущий пример, что $f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ для всех $x \in S$. В то же время,

$$f'_n(x) = \frac{1}{(1 + n^2 x^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 1 \neq f'(0) = 0$. Тем самым нарушено соотношение (3.5) при $x = 0$.

Пример 3.1.6 (“Бегущая волна”). Рассмотрим опять последовательность функций $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$, заданных на интервале $S = [0, 1]$. Легко проверить, что эта последовательность функций сходится поточечно к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$. В то же время

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 e^{-n^2 x^2} d(n^2 x^2) \stackrel{\text{замена } y = n^2 x^2}{=} \int_{y=0}^{y=n^2} e^{-y} dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-y} dy = 1.$$

Здесь, как видно, нарушено соотношение (3.6) (т.к. $1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$).

Итак, для выполнения искоемых коммутационных формул (3.4)–(3.7) требуется наложить более сильное условие, чем просто поточечная сходимость.

Пусть E — банахово¹ пространство (т.е. полное нормированное векторное пространство) над полем $\Lambda = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, норма вектора $y \in E$ будет обозначаться через $|y|$. Следующее определение играет ключевую роль в данной главе.

Определение 3.1.7. Говорят, что последовательность функций $f_n : S \rightarrow E$ *сходится равномерно* к функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначается $f_n \rightrightarrows f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : (\mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S). \quad (3.8)$$

Очень полезно сравнить это определение с (3.2). Фактически, оно отличается только перестановкой квантора " $\forall x \in S$ ", да еще тем, что номер N , начиная с которого имеет место ε -близость $f_n(x)$ к f , в случае равномерной сходимости зависит **только** от ε и **НЕ** зависит от x ; один и тот же номер годится сразу для *всех* точек $x \in S$. Это приводит к далеко идущим последствиям. Но сначала требуется установить некоторые базовые свойства равномерной сходимости.

ТЕОРЕМА 3.1.8 (Критерий Коши). Последовательность функций $f_n : S \rightarrow E$ *сходится равномерно* к функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольно точку $x \in S$ и рассмотрим последовательность значений $f_n(x)$. Из условия (3.9) легко выводится, что последовательность эта фундаментальная. В силу полноты пространства E найдется элемент $a \in E$ такой, что имеет место сходимость $f_n(x) \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $a = f(x)$. Зафиксируем теперь произвольно $\varepsilon > 0$ и возьмем натуральное число $N = N(\varepsilon)$ из (3.9). Возьмем также произвольно $n \geq N$. Переходя в неравенстве (3.9) к пределу при $m \rightarrow \infty$ (и фиксированном n), получаем, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Так как последняя оценка имеет место для всех $n \geq N$ и для всех $x \in S$, ввиду произвольности ε , заключаем, что имеет место равномерная сходимость $f_n \rightrightarrows f$ на S . Теорема доказана. $\square$

Имеется более компактная и удобная форма записи равномерной сходимости. Обозначим через $\mathcal{F}(S, E)$ пространство всех ограниченных функций из S в E , т.е. $f : S \rightarrow E \in \mathcal{F}(S, E) \Leftrightarrow \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$.

Упражнение 3.1.9. Убедитесь, что множество функций $\mathcal{F}(S, E)$ образует векторное пространство над полем Λ ², т.е. $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(S, E) \Rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{F}(S, E) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$.

¹Для простоты можно при первом чтении предполагать всюду, что $E = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, это не влияет на суть дела: результаты и доказательства в общем случае ничем не отличаются.

²Напомним, что $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — поле, над которым задано векторное пространство E , где лежат значения $f(x)$ функции f .

На пространстве ограниченных функций задается *супремум норма* (или ее еще называют *равномерная норма*):

$$\forall f \in \mathcal{F}(S, E) \quad \|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S} |f(x)|. \quad (3.10)$$

Упражнение 3.1.10. Убедитесь, что $\|f\|$ действительно является нормой в пространстве $\mathcal{F}(S, E)$, т.е. выполнены условия

- (i) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \forall f \in \mathcal{F}(S, \Lambda)$ (положительная однородность);
- (ii) $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(S, \Lambda)$ (неравенство треугольника).

ТЕОРЕМА 3.1.11 (Критерий равномерной сходимости). Последовательность функций $f_n : S \rightarrow E$ сходится равномерно к функции $f : S \rightarrow E$ в том и только том случае, когда $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению, $f_n \rightrightarrows f$ в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : (\mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in S). \quad (3.11)$$

Нетрудно проверить, что $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in S$ тогда и только тогда, когда

$$\|f_n - f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Тем самым можно переписать определение (3.11) в следующем эквивалентном виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : (\mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon). \quad (3.12)$$

Однако последняя формула эквивалентна сходимости $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана. $\square$

Из Теорем 3.1.11 и 3.1.8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1.12. Если E — банахово пространство, и S — произвольное множество, то пространство $\mathcal{F}(S, E)$ ограниченных функций из S в E с равномерной нормой $\|\cdot\|$ также является банаховым.

Теперь, после приведенных определений и техники, мы можем ответить на первый из поставленных в этом разделе вопросов о перестановочности предельного перехода (см. (3.4)).

ТЕОРЕМА 3.1.13 (Теорема о перестановочности предельного перехода). Пусть имеется множество $S \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) , последовательность функций $f_n : S \rightarrow E$ и точка $p \in \text{Cl}_X S$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует предел $\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x)$. Предположим, что последовательность f_n равномерно сходится к функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ на S . Тогда существует предел $\lim_{x \rightarrow p|S} f(x)$, причем выполнено равенство (3.4), т.е.

$$\lim_{x \rightarrow p|S} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) \right]. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. По определению равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : (\mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in S). \quad (3.14)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, соответствующий параметр $N = N(\varepsilon)$, и произвольный номер $n \geq N(\varepsilon)$. Рассмотрим функцию $f_n(x)$ и обозначим $a_n = \lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x)$. По определению сходимости в точке,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : |f_n(x) - a_n| < \epsilon \quad \forall x \in S \cap B_\delta(p) = \{x \in S : \rho(p, x) < \delta\}. \quad (3.15)$$

Возьмем в последнем утверждении $\epsilon = \varepsilon$ (напомним, что ε мы уже зафиксировали ранее), тогда из неравенств (3.14)–(3.15) и неравенства треугольника немедленно вытекает, что

$$|f(x) - a_n| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in S \cap B_\delta(p). \quad (3.16)$$

Отсюда, в частности, получаем, что

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a_n| + |f(y) - a_n| \leq 4\varepsilon \quad \forall x, y \in S \cap B_\delta(p). \quad (3.17)$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, по критерию Коши для предела функций получаем, что существует искомый предел $A = \lim_{x \rightarrow p|S} f(x)$. С другой стороны, переходя к пределу при $x \rightarrow p$ в оценке (3.16), получаем $|A - a_n| \leq 2\varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 3.1.14 (О непрерывности предельной функции). Пусть имеется множество $S \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) и последовательность непрерывных функций $f_n : S \rightarrow E$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ на S . Тогда предельная функция f также непрерывна на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно точку $p \in S$. По определению непрерывности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) = f_n(p). \quad (3.18)$$

Поскольку последовательность f_n сходится равномерно к f на S , а значит, и поточечно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p). \quad (3.19)$$

С другой стороны, из доказанного ранее равенства (3.13) вытекает

$$\lim_{x \rightarrow p|S} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow p|S} f_n(x) \right] \stackrel{(3.18)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(p)] \stackrel{(3.19)}{=} f(p). \quad (3.20)$$

Однако установленное равенство $\lim_{x \rightarrow p|S} f(x) = f(p)$ для всех $p \in S$ означает непрерывность функции f на S . Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.15 (О полноте пространства непрерывных функций). Пусть имеется множество $S \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) . Тогда пространство $C(S, E)$ всех непрерывных функций из S в E с равномерной нормой $\|\cdot\|$ является банаховым³.

³Точнее, $C(X, E)$ является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $\mathcal{F}(S, E)$ ограниченных функций.

Настало время разобраться со вторым и третьим вопросами — о перестановочности предельного перехода и операций дифференцирования–интегрирования (см. (3.5)–(3.6)). Начнем с интегрирования — как это ни странным может показаться, здесь формулировка результата получается проще и естественней.

ТЕОРЕМА 3.1.16 (О предельном переходе под знаком интеграла). Пусть имеется последовательность функций $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на конечном интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и интегрируемых на нем по Ньютону (в принятых ранее обозначениях, $f_n \in N([a, b])$). Предположим, что последовательность f_n равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции f . Тогда $f \in N([a, b])$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится следующее свойство интеграла, доказанное в прошлом семестре:

(*) если функция $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Ньютону на промежутке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и $|g(x)| \leq c$ в основном на $[\alpha, \beta]$, то $\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \right| \leq c(\beta - \alpha)$.

Используя обозначения данного параграфа, можно переписать это свойство в виде:

$$g \in N([\alpha, \beta]) \Rightarrow \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right| \leq \|g\| \cdot (\beta - \alpha). \quad (3.22)$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 3.1.16. Пусть выполнены ее предположения. Возьмем первообразные F_n функций f_n . По определению, F_n суть непрерывные на $[a, b]$ функции и существует такое не более чем счетное множество $\mathcal{T} \subset [a, b]$, что

$$F'_n(x) = f_n(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \mathcal{T}. \quad (3.23)$$

Так как первообразные определяются с точностью до прибавления константы, можем считать, не умаляя общности, что $F_n(a) \equiv 0$ для всех n , тогда

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt. \quad (3.24)$$

По определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_{\varepsilon} : \mathbb{N} \ni n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon, \quad (3.25)$$

в частности, по неравенству треугольника

$$\|f_n - f_m\| \leq 2\varepsilon \quad \forall n, m \geq N_{\varepsilon}. \quad (3.26)$$

Тогда по свойству (3.22),

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq 2\varepsilon(x - a) \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n, m \geq N_{\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Тогда

$$\|F_n - F_m\| \leq 2\varepsilon(b - a) \quad \forall n, m \geq N_{\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Это означает, опять-таки по критерию Коши, что последовательность функций F_n равномерно сходится к некоторой функции $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем по предыдущей теореме 3.1.14 функция F непрерывна.

Возьмем теперь и зафиксируем произвольную точку $p \in (a, b) \setminus \mathcal{T}$. Зададим функции G_n, G на "проколоте" множестве $[a, b] \setminus \{p\}$ по правилу

$$G_n(x) = \frac{F_n(x) - F_n(p)}{x - p}, \quad G(x) = \frac{F(x) - F(p)}{x - p}.$$

Для $n, m > N_\varepsilon$ и $x \in [a, b] \setminus \{p\}$ имеем

$$|G_n(x) - G_m(x)| = \frac{\left| \int_p^x [f_n(t) - f_m(t)] dt \right|}{|x - p|} \stackrel{(3.26)}{\leq} \frac{\left| \int_p^x 2\varepsilon dt \right|}{|x - p|} = 2\varepsilon. \quad (3.29)$$

Следовательно, по критерию Коши последовательность функций $G_n(x)$ равномерно сходится на множестве $[a, b] \setminus \{p\}$ к некоторой функции, обозначим ее Φ . Поскольку по построению поточечно $G_n(x) \rightarrow G(x)$ в каждой точке $x \in [a, b] \setminus \{p\}$, то указанный равномерный предел Φ совпадает с функцией G , т.е.

$$G_n \Rightarrow G \quad \text{на } [a, b] \setminus \{p\}. \quad (3.30)$$

Поскольку $p \notin \mathcal{T}$, то по построению

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow p} G_n(x) \stackrel{\text{определение производной}}{=} F'_n(p) \stackrel{(3.23)}{=} f_n(p). \quad (3.31)$$

Поскольку последовательность f_n сходится равномерно к f , а значит, и поточечно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p). \quad (3.32)$$

Тогда из сходимостей (3.30)–(3.32) и из доказанной ранее теоремы о перестановочности предельного перехода 3.1.13 вытекает

$$\lim_{x \rightarrow p} G(x) \stackrel{\text{Теорема 3.1.13}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow p} G_n(x) \right] \stackrel{(3.31)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(p)] \stackrel{(3.32)}{=} f(p). \quad (3.33)$$

Следовательно, по определению дифференцируемости, существует производная $\lim_{x \rightarrow p} G(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = F'(p) = f(p).$$

Итак, мы доказали, что

$$F_n \Rightarrow F \quad \text{на } [a, b], \quad (3.34)$$

функция F непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в каждой точке $x \in [a, b] \setminus \mathcal{T}$, т.е. в основном, причем $F'(x) = f(x)$ для $x \in [a, b] \setminus \mathcal{T}$. Значит, F есть первообразная f на $[a, b]$. По определению интеграла (формула Ньютона–Лейбница),

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{(3.34)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(b) - F_n(a)] \stackrel{\text{формула Н.-Л.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.35)$$

Теорема полностью доказана. $\square$

Фактически, в процессе доказательства последней теоремы было установлено следующее утверждение (дающее ответ на последний из поставленных в начале параграфа трех вопросов — о перестановочности предельного перехода и дифференцирования (см. (3.5)).

ТЕОРЕМА 3.1.17 (Предельный переход и дифференцирование). Пусть имеется последовательность непрерывных функций $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на конечном интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$, и дифференцируемых в основном на $[a, b]$, т.е. найдется такое не более чем счетное множество $\mathcal{T}$, что конечная производная $F'_n(x)$ определена в каждой точке $x \in [a, b] \setminus \mathcal{T}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что последовательность производных F'_n равномерно сходится на $[a, b] \setminus \mathcal{T}$ к некоторой функции g . Тогда, если последовательность самих функций F_n сходится хотя бы в одной точке, то $F_n \rightrightarrows F$ на $[a, b]$, где $F(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, причем $F'(x) = g(x)$ для всех $x \in [a, b] \setminus \mathcal{T}$.

Теорема 3.1.17 допускает обобщение на многомерный случай. Для этого напомним один факт из прошлого семестра.

ЛЕММА 3.1.18 (Оценка приращения). Если Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, дифференцируемая "в основном" на Ω , причем производные (матрицы Якоби) удовлетворяют неравенству

$$|F'(x)| := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

в основном на Ω , то F удовлетворяет условию Липшица с той же самой константой ε , т.е. $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon|x - y|$ для всех $x, y \in \Omega$.

Для проверки этой леммы, напомним, следует зафиксировать пару точек $x, y \in \Omega$ и рассмотреть функцию одной переменной $g(t) = F(x + tv)$, где $v = \frac{y-x}{|y-x|}$, $|v| = 1$, и убедиться, что эта функция будет ε -липшицева по t . В самом деле, обозначив $z = x + tv$, имеем

$$\begin{aligned} [g'(t)]^2 &= \sum_{i=1}^m (g'_i(t))^2 \text{ производная сложной функции } = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(z)}{\partial x_j} v_j \right)^2 \leq \\ &\stackrel{\text{неравенство Гельдера}}{\leq} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_i(z)}{\partial x_j} \right|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j^2 \right) \stackrel{|v|=1}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_i(z)}{\partial x_j} \right|^2 = |F'(x + tv)|^2 \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

С помощью этой леммы, следуя ходу доказательства Теорем 3.1.16–3.1.17, можно получить следующий их многомерный аналог.

ТЕОРЕМА 3.1.19 (Предельный переход и дифференцирование). Пусть имеется последовательность непрерывных функций $F_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданных на ограниченном открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и дифференцируемых в основном на Ω , т.е. найдется такое не более чем счетное множество $\mathcal{T}$, что дифференциал $dF_n(x)$ определен в каждой точке $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что последовательность производных (матриц Якоби) $F'_n(x)$ равномерно сходится на $\Omega \setminus \mathcal{T}$ к некоторой функции g . Тогда, если последовательность самих функций F_n сходится хотя бы в одной точке, то $F_n \rightrightarrows F$ на Ω , где $F(x)$ — непрерывная на Ω функция, причем $F'(x) = g(x)$ для всех $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При проверке данной теоремы нужно просто заменить ссылку на свойство (*) из доказательства теоремы 3.1.16 ссылкой на лемму 3.1.18, и далее повторяя аргументы доказательства теоремы 3.1.16 с очевидными изменениями и пользуясь тем фактом, что наш основной инструмент, теорема о перестановочности пределов 3.1.13, работает для метрических пространств любых размерностей. $\square$

Теорию равномерной сходимости естественным образом можно перенести и на случай *функциональных рядов*. Именно, пусть $\varphi_n : S \rightarrow E$ — семейство функций. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ сходится равномерно, если равномерно сходится последовательность частичных сумм $\sum_{n=0}^m \varphi_n(x)$ при $m \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3.1.20 (Критерий Коши сходимости ряда). Пусть имеется набор функций $\varphi_n : S \rightarrow E$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ сходится равномерно на S в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq N \quad \left| \sum_{i=n}^m \varphi_i(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in S. \quad (3.36)$$

Отсюда легко вытекает

ТЕОРЕМА 3.1.21 (Признак Вейерштрасса мажорантной сходимости). Пусть имеется набор функций $\varphi_n : S \rightarrow E$ и числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. Тогда, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ сходится и справедлива оценка $|\varphi_n(x)| \leq \alpha_n$ для всех $x \in S$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ сходится равномерно на S .

Напомним следующую очень полезную оценку.

ЛЕММА 3.1.22 (Неравенство Абеля). Пусть имеется монотонная последовательность чисел $u_n \in \mathbb{R}$ и векторов $v_n \in E$. Тогда при $m \geq n$

$$\left| \sum_{i=n}^m u_i v_i \right| \leq M(|u_n| + |u_m - u_n|), \quad (3.37)$$

где $M = \max_{k \in \{n, \dots, m\}} \left| \sum_{i=k}^m v_i \right|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| u_n v_n + \dots + u_m v_m \right| \stackrel{\text{раскрытие скобок, приведение подобных}}{=} \\ & = \left| u_n(v_n + \dots + v_m) + (u_{n+1} - u_n)(v_{n+1} + \dots + v_m) + \dots + (u_{m-1} - u_{m-2})(v_{m-1} + v_m) + (u_m - u_{m-1})v_m \right| \\ & \leq |u_n| \cdot |v_n + \dots + v_m| + |u_{n+1} - u_n| \cdot |v_{n+1} + \dots + v_m| + \dots + |u_{m-1} - u_{m-2}| \cdot |v_{m-1} + v_m| + |u_m - u_{m-1}| \cdot |v_m| \\ & \stackrel{\text{определение } M}{\leq} M(|u_n| + |u_{n+1} - u_n| + \dots + |u_m - u_{m-1}|) \stackrel{\text{монотонность } u_n}{=} M(|u_n| + |u_m - u_n|) \\ & . \end{aligned} \quad \square$$

Отсюда легко вытекают

ТЕОРЕМА 3.1.23 (Признак Дирихле равномерной сходимости). Пусть имеется набор функций $u_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_n : S \rightarrow E$ таких, что

- (i) при каждом $x \in S$ последовательность чисел $u_n(x)$ монотонна (по n);
- (ii) последовательность функций $u_n(x)$ равномерно стремится к нулю;

(iii) частичные суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ равномерно ограничены, т.е. найдется константа $M > 0$ такая, что $\left| \sum_{n=0}^m v_n(x) \right| \leq M$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $x \in S$.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить основные определения, критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов 3.1.20, и неравенство Абеля для числовых рядов (3.37). $\square$

Можно сделать некоторое перераспределение нагрузки: ослабить условия на функции u_n и ужесточить условия на функции v_n .

ТЕОРЕМА 3.1.24 (Признак Абеля равномерной сходимости). Пусть имеется набор функций $u_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ и $v_n : S \rightarrow E$ таких, что

- (i) при каждом $x \in S$ последовательность чисел $u_n(x)$ монотонна (по n);
- (ii) последовательность функций $u_n(x)$ равномерно ограничена, т.е. найдется число $C > 0$ такое, что $|u_n(x)| \leq C$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in S$;

- (iii) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на S .

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем случае, нужно применить основные определения, критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов 3.1.20, и неравенство Абеля для числовых рядов (3.37). $\square$

Имеет место красивая

ТЕОРЕМА 3.1.25 (Теорема Дини). Пусть имеется последовательность непрерывных функций $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$, заданных на компактном метрическом пространстве (K, ρ) . Предположим, что последовательность f_n поточечно и монотонно сходится на K к некоторой функции f (т.е. для каждой точки $x \in K$ последовательность чисел $f_n(x)$ монотонно стремится к $f(x)$). Тогда если все функции f_n и f непрерывны, то $f_n \Rightarrow f$ на K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Возьмем и зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Докажем сначала следующее предварительное утверждение.

- (*) Для каждой точки $x \in K$ найдется число $\delta = \delta_x > 0$ и номер $N = N_x$ такие, что

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x) \quad \forall n \geq N_x, \quad (3.38)$$

где, напомним, $B_{\delta}(x)$ означает *открытый* шар в пространстве K с центром в x и радиуса δ : $B_{\delta}(x) = \{y \in K : \rho(y, x) < \delta\}$.

В самом деле, возьмем номер N такой, что

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.39)$$

(существование такого номера N вытекает из поточечной сходимости). Также выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\forall y \in B_{\delta}(x) \quad |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.40)$$

(существование такого параметра δ вытекает из непрерывности обеих функций f_N и f). Тогда в силу неравенства треугольника

$$|f_N(y) - f(y)| \leq |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \stackrel{(3.39)-(3.40)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (3.41)$$

для всех $y \in B_\delta(x)$. Наконец, из монотонности последовательности $f_n(y)$ вытекает оценка $|f_n(y) - f(y)| \leq |f_N(y) - f(y)|$ для всех $n \geq N$ и $y \in K$, откуда и из формулы (3.41) получаем

$$\forall y \in B_\delta(x) \quad \forall n \geq N \quad |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon. \quad (3.42)$$

Искомое неравенство (3.38) доказано.

Теперь для каждой точки $x \in K$ возьмем соответствующий шар $B_{\delta_x}(x)$ и номер N_x со свойством (3.38). Ясно, что совокупность всех этих открытых шаров покрывает все пространство K (т.к. каждая точка $x \in K$ является центром одного из указанных шаров). По определению компактности, найдется конечное подпокрытие множества K этими шарами, т.е. конечная совокупность точек $x_i \in K$, чисел $\delta_i > 0$ и номеров $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, M$, таких, что

$$\bigcup_{i=1}^M B_{\delta_i}(x_i) \supset K \quad (3.43)$$

и по построению

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_i}(x_i) \quad \forall n \geq N_i \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (3.44)$$

Из формул (3.43)–(3.44) немедленно вытекает, что

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in K \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad (3.45)$$

где обозначено $N_\varepsilon = \max_{i=1, \dots, M} N_i$. Последняя формула, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, означает равномерную искомую равномерную сходимость $f_n \Rightarrow f$ на K . Теорема Дини полностью доказана. $\square$

§2 Степенные ряды комплексного переменного

В этом разделе E — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 3.2.1 (Теорема Абеля). Если ряд $c_n \in E$ суммируем, то ряд функций $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ равномерно суммируем на отрезке $[0, 1]$, и, стало быть, его сумма является непрерывной функцией на этом отрезке

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема мгновенно вытекает из признака Абеля 3.1.24. С другой стороны, ее можно доказать и непосредственно. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что

$$\left| \sum_{n=k}^m c_n \right| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall k, m \geq N. \quad (3.46)$$

Тогда вследствие неравенства Абеля (3.37) получаем

$$\left| \sum_{n=k}^m t^n c_n \right| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.47)$$

Следовательно, по критерию Коши 3.1.20 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$. $\square$

Ниже обозначаем через z комплексную переменную $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Применением установленной теоремы Абеля с помощью подходящей замены переменной можно доказать следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2. Пусть $a_n \in E$, и ряд функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_*$. Тогда этот ряд равномерно сходится на отрезке $[0, z_*]$, и, стало быть, его сумма является непрерывной функцией на этом отрезке

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c_n = a_n z_*^n$. По условию, этот ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда, если точка z лежит на отрезке $[0, z_*]$, то имеет место формула $z = tz_*$, где $t \in [0, 1]$. Поэтому $\sum_{n=k}^m a_n z^n = \sum_{n=k}^m c_n t^n$, а последний ряд равномерно сходится при $t \in [0, 1]$ по предыдущей теореме 3.2.1. $\square$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — произвольный степенной ряд, где $a_n \in E$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Величина $R \in [0, +\infty]$, определяемая равенством

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{|a_n|}^{\frac{1}{n}}, \quad (3.48)$$

называется *радиусом сходимости* данного степенного ряда. Имеет место

ЛЕММА 3.2.3. В принятых обозначениях,

$$R = \sup\{r \geq 0 : \text{последовательность } |a_n| r^n \text{ ограничена}\} \quad (3.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\rho = \sup\{r \geq 0 : \text{последовательность } |a_n| r^n \text{ ограничена}\}. \quad (3.50)$$

Пусть число $r \geq 0$ таково, что последовательность $|a_n| r^n$ ограничена, т.е. найдется $M > 0$ такое, что $|a_n| r^n \leq M$. Тогда $|a_n|^{\frac{1}{n}} r \leq M^{\frac{1}{n}}$. Беря верхний предел от обеих частей данного неравенства, получаем $\frac{r}{R} \leq 1$, т.е. $r \leq R$. Отсюда по определению (3.50) вытекает, что $\rho \leq R$.

Пусть теперь $r > \rho$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{|a_n|} r^n = \infty$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{|a_n|}^{\frac{1}{n}} r \geq 1$. С другой стороны, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{|a_n|}^{\frac{1}{n}} r = \frac{r}{R}$, и из последних двух формул имеем $\frac{r}{R} \geq 1$. Ввиду произвольности $r > \rho$ заключаем, что $\rho \geq R$. Таким образом, искомое соотношение $\rho = R$ доказано. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2.4. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с комплексным переменным $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и коэффициентами $a_n \in E$ равномерно сходится в каждом из кругов $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ при $r < R$, где R — радиус сходимости этого ряда, посчитанный по формуле (3.48). Кроме того, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ при $|z| > R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала вторую часть теоремы. Если $|z| > R$, то, по Лемме 3.2.3 последовательность чисел $|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z|^n$ неограниченна, поэтому и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится.

Теперь перейдем к первой части теоремы. Зафиксируем $r \in (0, R)$. Возьмем еще дополнительный параметр $r_* \in (r, R)$. Тогда по Лемме 3.2.3 последовательность $|a_n| \cdot r_*^n$ ограничена, т.е. найдется $M > 0$ такое, что $|a_n| \cdot r_*^n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|a_n r^n| \leq M \frac{r^n}{r_*^n} = M q^n,$$

где $q = \frac{r}{r_*} < 1$. Тем самым в круге $|z| \leq r$ общий член ряда $a_n z^n$ мажорируется сходящимся числовым рядом (геометрической прогрессией): $|a_n z^n| \leq M q^n$. Значит, по теореме Вейерштрасса 3.1.21 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится равномерно. $\square$

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ можно (пока еще формально) выписать ряд из производных: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$. Законность этой операции почленного дифференцирования оправдывается следующим результатом, который играет ключевую роль в теории функций комплексного переменного.

ТЕОРЕМА 3.2.5. Пусть функция $f : B_R(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow E$, определенная на круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, порождается степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с комплексным переменным $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и коэффициентами $a_n \in E$, где R — радиус сходимости ряда. Тогда функция f непрерывно дифференцируема в указанном круге, причем

$$df(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} dz, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (3.52)$$

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, постараемся уяснить специфику ее содержания. Речь в ней идет о двух интересных феноменах. Во-первых, она говорит о том, что степенной ряд от комплексного переменного можно почленно дифференцировать (т.е. производная ряда равна сумме ряда производных). Во-вторых, она дает важное указание на структуру дифференциала таких функций (называемых в литературе *аналитическими*). Именно, если бы f была функцией *одной* переменной, можно было бы написать по-привычному

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

(т.е. производная ряда равна сумме ряда производных). Но функция f здесь зависит от *двух* вещественных переменных, x и y , поэтому, вообще говоря, ее матрица Якоби должна состоять из *двух* частных производных

$$f'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \in E \times E.$$

Однако, поскольку обе этих частных производных, как выяснится далее, отличаются друг от друга лишь умножением на мнимую единицу

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (3.53)$$

то удобно ассоциировать $f'(z)$ лишь с одной из них, т.е. полагать

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (3.54)$$

и тогда будет верна красивая формула

$$df(z) = f'(z) dz. \quad (3.55)$$

В чем же прелесть этой формулы? С одной стороны, она ничем не отличается от формулы для дифференциала функции *одной* переменной. С другой стороны, в данном случае она в точности так же справедлива, если считать функцию f зависящей от *двух* вещественных переменных (как оно и есть в действительности). В самом деле, по обычным правилам для функций двух переменных,

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \stackrel{(3.53)}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + i \frac{\partial f}{\partial x} dy = \frac{\partial f}{\partial x} (x + i dy) = \frac{\partial f}{\partial x} dz \stackrel{\text{соглашение (3.54)}}{=} f'(z) dz. \quad (3.56)$$

Сказанное станет более понятно по ходу доказательства данной фундаментальной теоремы⁴, которое для удобства разбивается на несколько шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ШАГ 1. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1$, то применяя формулу (3.48), получаем следующее утверждение:

У рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ одинаковый радиус сходимости R .

ШАГ 2. Теперь нужно выяснить характер дифференцируемости полиномов, зависящих от комплексного переменного. Обозначим через α_n функцию $\alpha_n : \mathbb{C} \rightarrow E$, вычисляемую по правилу $\alpha_n(z) = a_n z^n$. На этом шаге нам требуется доказать тождества

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = n a_n z^{n-1} = -i \frac{\partial \alpha_n}{\partial y}, \quad (3.57)$$

$$d\alpha_n = n a_n z^{n-1} dz, \quad (3.58)$$

где $dz = dx + i dy$.

⁴См. также Следствие 3.2.7, где дается более простая и естественная интерпретация формулы (3.54).

Проверим выписанные равенства. Имеем $\alpha_n(x, y) = (x + iy)^n$. Отсюда прямым вычислением получаем формулы (3.57). По определению дифференциала, $d\alpha_n = \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} dy$. Из этой формулы и из (3.57) получаем

$$d\alpha_n = n a_n z^{n-1} dx + \left(\frac{1}{-i}\right) n a_n z^{n-1} dy = n a_n z^{n-1} (dx + i dy) = n a_n z^{n-1} dz.$$

ШАГ 3 (ПОЧЛЕННАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ). Из утверждения шагов 1–2 и из Теоремы 3.2.4 вытекает, что ряд из частных производных $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ равномерно сходится в каждом из кругов $B_r(0)$ при $r < R$. Тогда, по теореме 3.1.19 получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \right) \stackrel{\text{Теорема 3.1.19}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial x} \stackrel{(3.57)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (3.59)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \right) \stackrel{\text{Теорема 3.1.19}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial y} \stackrel{(3.57)}{=} i \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \stackrel{(3.59)}{=} i \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.60)$$

Тем самым теорема 3.2.5 полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2.6. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема внутри круга сходимости данного ряда.

Это следствие вытекает из того, что в теореме 3.2.5 радиус сходимости у рядов для функции f и ее производных один и тот же.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.7. В условиях Теоремы 3.2.5, для каждого $z \in B_R(0)$ имеет место сходимость

$$\frac{f(z+v) - f(z)}{v} \xrightarrow{\mathbb{C} \ni v \rightarrow 0} f'(z), \quad (3.61)$$

где по соглашению (3.54) обозначено $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению дифференциала

$$dz \langle v \rangle = v \quad \forall v \in \mathbb{C}. \quad (3.62)$$

Тогда

$$f(z+v) - f(z) \stackrel{\text{опред. дифф-ла}}{=} df(z) \langle v \rangle + o(|v|) \stackrel{(3.54)-(3.55)}{=} f'(z) dz \langle v \rangle + o(|v|) \stackrel{(3.62)}{=} f'(z) \cdot v + o(|v|), \quad (3.63)$$

откуда мгновенно вытекает искомая формула (3.61). $\square$

Доказанное следствие означает, что аналитические функции (представимые в виде суммы степенного ряда) дифференцируемы не только в обычном "вещественном", но и в "комплексном" смысле, т.е. они дифференцируемы по комплексному переменному.

§3 Ряды Фурье

В конечномерном пространстве всякий вектор можно разложить по базису. Особенно простые и элегантные формулы получаются для коэффициентов разложения в случае, когда базис ортонормированный. Нечто подобное наблюдается и в функциональных пространствах. Однако, поскольку пространства эти бесконечномерны, то и базис представляет собой счетный набор функций, и разложение идет в бесконечные ряды.

В качестве базиса удобно брать следующие наборы функций: $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и их комплексный аналог e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$. Эти наборы функций обладают следующими преимуществами: 2π -периодичность, полнота (это свойство будет описано в следующих разделах), и ортонормированность относительно скалярного произведения $\langle f, g \rangle = \int_T f(x) \overline{g(x)} dx$ (где $\overline{g(x)}$, напомним, означает комплексное сопряжение к величине $g(x)$), как явствует из следующей леммы.

ЛЕММА 3.3.1. Пусть T представляет собой интервал вида $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, где α — произвольное (фиксированное) число из $\mathbb{R}$. Тогда

$$\int_T \cos kx \cdot \sin mx \, dx = 0, \quad (3.64)$$

$$\int_T \sin^2 kx \, dx = \pi \quad \text{при } k \in \mathbb{N}, \quad \int_T \cos^2 kx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{при } k \in \mathbb{N}, \\ 2\pi, & \text{при } k = 0, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\int_T e^{ikx} \overline{e^{imx}} \, dx = \int_T e^{ikx} e^{-imx} \, dx = \int_T e^{i(k-m)x} \, dx = 2\pi \delta_{mk}, \quad (3.66)$$

где δ_{km} , как обычно, обозначает символ Кронекера $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.2. Пусть функция $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ представляет из себя (конечный) тригонометрический полином: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$. Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \sin kx \, dx. \quad (3.67)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.3. Всякий тригонометрический полином $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$ однозначно можно представить в комплексном виде

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (3.68)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_T f(x) e^{-ikx} \, dx = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & \text{при } k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & \text{при } k < 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая на отрезке T функция. Тогда, как следует из формулы интегрирования по частям, каждая из функций $f(x) \cos kx$, $f(x) \sin kx$ также будет интегрируема, и можно написать формальный ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$, где числа a_k, b_k задаются формулами (3.67). Этот ряд называется *ряд Фурье для функции f* . Если $f(x)$ представляет собой конечный тригонометрический полином, то указанный ряд также будет конечен и совпадет с самой функцией $f(x)$, как явствует из приведенных следствий. Основной вопрос данного раздела состоит в следующем: в общем случае какие условия нужно наложить на функцию $f(x)$, чтобы выписанный ряд к ней сходилась?

Прежде чем отправиться в дальнейшее плавание по морю красивых тригонометрических соотношений, сделаем одно предварительное наблюдение. Всякий тригонометрический ряд является 2π -периодической функцией. Однако, чтобы определить коэффициенты a_k, b_k по формулам (3.67), периодичности f не требуется, достаточно, чтобы она была лишь интегрируема на отрезке T длиной 2π . Например, ряд Фурье для функции $f(x) = x$ на отрезке $T = [0, 2\pi]$ принципиально не может сходиться к $f(x)$ на *всем* отрезке $[0, 2\pi]$, т.к. сумма этого ряда заведомо представляет собой 2π -периодическую функцию, а в нашем случае $f(0) \neq f(2\pi)$. В то же время, если взять произвольную непрерывную на отрезке $T = [0, 2\pi]$ функцию $f(x)$, то ее можно продолжить с полуинтервала $[0, 2\pi)$ на все $\mathbb{R}$ по правилу периодичности

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2\pi); \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Построенная новая функция $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ будет "автоматически" 2π -периодической, но при этом может утратиться свойство непрерывности, поскольку в общем случае $\tilde{f}(2\pi) = f(0) \neq f(2\pi)$. Скажем, если $f(x) = x$ на $[0, 2\pi]$, то $\tilde{f}(x) = 2\pi \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\}$, где символом $\{t\}$ обозначена дробная часть числа t . Итак, чтобы не упускать из рассмотрения важные функции типа $f(x) = x$, нужно сразу же договориться изучать ряды Фурье не только для гладких, но и для *кусочно гладких* функций.

Именно, будем говорить, что функция $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит классу Φ , если она, во-первых, кусочно-гладкая, т.е. найдется *конечный* набор точек $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f \subset T$ такой, что на каждом из открытых интервалов в $T \setminus \mathcal{T}$ функция f принадлежит C^1 , и, во-вторых, ее производная f' (определенная на $T \setminus \mathcal{T}$) равномерно ограничена, т.е. для некоторого $L = L_f > 0$ имеем $|f'(x)| \leq L$ при всех $x \in T \setminus \mathcal{T}$. По построению, функции этого класса имеют лишь конечное число точек разрыва. Ясно, что любую функцию $f \in \Phi$ можно по описанному выше правилу 2π -периодичности определить на всем множестве $\mathbb{R}$, и у полученной 2π -периодической функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ множество "плохих" точек $\mathcal{T}$ (в окрестностях которых f не C^1 -гладкая) не более чем счетно, однако пересечение $\mathcal{T}$ с любым ограниченным интервалом всегда *конечно*. Функции построенного класса обладают следующим набором полезных свойств.

ЛЕММА 3.3.4. *Любая функция $f \in \Phi$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}} |f'(x)|$ на каждом из промежутков, не содержащих точек разрыва f . Далее, $\forall p \in \mathbb{R}$ существуют односторонние пределы $f_+(p) := \lim_{x \rightarrow p+0} f(x)$ и $f_-(p) := \lim_{x \rightarrow p-0} f(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. □

Теперь мы в состоянии сформулировать основную теорему данного раздела.

ТЕОРЕМА 3.3.5. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная функция класса Φ . Тогда ее ряд Фурье в каждой точке $p \in \mathbb{R}$ сходится к величине $\frac{1}{2}(f_+(p) + f_-(p))$ (см. Лемму 3.3.4). В частности, ряд Фурье сходится к $f(p)$ в каждой точке $p \in \mathbb{R}$ непрерывности функции f . Более того, на каждом замкнутом промежутке, не содержащем точек разрыва функции f , ряд Фурье сходится к f равномерно.

Чтобы подготовить почву для доказательства данной теоремы, нам потребуется рассмотреть ниже несколько тригонометрических сюжетов, которые любопытны и сами по себе.

ЛЕММА 3.3.6. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — 2π -периодическая функция. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad (3.70)$$

т.е. интеграл по отрезку $T = [\alpha, 2\pi + \alpha]$ не зависит от α .

ЛЕММА 3.3.7 (Теорема Римана–Лебега). Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \in \Phi$. Тогда для произвольного замкнутого промежутка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и для любого фиксированного параметра $\varphi \in \mathbb{R}$ имеют место сходимости

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sin(n + \varphi)t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \cos(n + \varphi)t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения леммы. Разбивая интервал $[\alpha, \beta]$, если нужно, на конечное число подинтервалов, внутри которых f непрерывна, можно свести дело к случаю, когда функция f непрерывна на всем замкнутом промежутке $[\alpha, \beta]$ (непрерывность f в концевых точках α, β может быть достигнута с использованием леммы 3.3.4). Заметим, что по определению класса Φ производная f' непрерывна в основном на $[\alpha, \beta]$ и ограничена, значит, она также интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Тогда по формуле интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sin(n + \varphi)t dt &= -\frac{1}{n + \varphi} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) d \cos(n + \varphi)t = \\ &= \frac{1}{n + \varphi} \left[-f(t) \cos(n + \varphi)t \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \cos(n + \varphi)t dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

(последняя сходимость вытекает из ограниченности производной $f'(t)$, которая гарантируется принадлежностью $f \in \Phi$). Утверждение для $\cos(n + \varphi)t$ доказывается аналогично. $\square$

Замечание 3.3.8. Анализ доказательства Леммы 3.3.7 показывает, что справедлива оценка

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sin(n + \varphi)t dt \right| \leq 2 \frac{M + \Sigma}{n + \varphi} + \frac{L(\beta - \alpha)}{n + \varphi}, \quad (3.73)$$

где $M = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|$, $L = \sup_{x \in [\alpha, \beta] \setminus \mathcal{T}} |f'(x)|$, и Σ — это сумма "скачков" (=величина разрыва=разность между пределами слева и справа в точке разрыва) у функции f на промежутке $[\alpha, \beta]$.

ЛЕММА 3.3.9. *Справедливо следующее тригонометрическое тождество:*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (3.74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $q = e^{ix}$. По формуле суммы геометрической прогрессии,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikx} &= \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1) \cdot (e^{-ix} - 1)}{|e^{ix} - 1|^2} = \\ &= \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{-ix} + 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Возьмем вещественную часть от этой суммы. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} (\cos nx - \cos(n+1)x + 1 - \cos x) \text{ формула разности косинусов} = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} (2 \sin \frac{x}{2} \sin(n + \frac{1}{2})x + 2 \sin^2 \frac{x}{2}) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

что равносильно искомой формуле (3.74). $\square$

Для интегрируемой функции $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим через $S_n f$ сумму первых n слагаемых ее ряда Фурье

$$S_n f(p) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kp + b_k \sin kp], \quad (3.75)$$

где a_k, b_k вычисляются по формулам (3.67). (Иногда будем писать сокращенно S_n вместо $S_n f$, если из контекста понятно, о какой именно функции f идет речь).

ЛЕММА 3.3.10. *Пусть $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная интегрируемая на отрезке $T = [\alpha, \alpha + 2\pi]$ функция. Тогда*

$$S_n f(p) = \int_T f(t) D_n(t - p) dt, \quad (3.76)$$

где символом $D_n(t)$ обозначена правая часть формулы (3.74), деленная на π :

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad (3.77)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (3.75) получаем

$$\begin{aligned}
 S_n f(p) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kp + b_k \sin kp] \stackrel{\text{определение } a_k, b_k \text{ см. (3.67)}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) dt + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\cos kp \int_T f(t) \cos kt dt + \sin kp \int_T f(t) \sin kt dt \right] = \\
 &\frac{1}{2\pi} \int_T f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_T f(t) [\cos kp \cos kt + \sin kp \sin kt] dt \stackrel{\text{формула разности косинусов}}{=} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_T f(t) \cos k(t-p) dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \sum_{k=1}^n \cos k(t-p) dt \stackrel{(3.74)}{=} \int_T f(t) D_n(t-p) dt
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

□

Функция $D_n(t)$, определяемая формулой (3.77), называется *ядром Дирихле*. Исследуем его свойства.

ЛЕММА 3.3.11. (i) $D_n(t)$ представляет собой четную 2π -функцию:

$$D_n(t) \equiv D_n(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.79}$$

;

(ii) Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1. \tag{3.80}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (i) немедленно вытекает из формулы (3.77). Докажем пункт (ii). Для постоянной функции $f(t) \equiv 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим соответствующую сумму $S_n(t)$ первых n слагаемых ее ряда Фурье. Разумеется, по формулам (3.67) немедленно получаем, что здесь $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ при $k \geq 1$, так что $S_n(t) \equiv 1$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, по формуле (3.76) получаем, что

$$1 = S_n f(0) \stackrel{(3.76)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt \stackrel{(3.79)}{=} 2 \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt \stackrel{\text{ibid.}}{=} 2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt. \tag{3.81}$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.5. Пусть выполнены предположения теоремы. Зафиксируем точку $p \in \mathbb{R}$. Координатным сдвигом (заменой переменной $g(t) = f(p+t)$) можно свести дело к случаю, когда $p = 0$. Возьмем соответствующие значения $f_{\pm}(0)$ из Леммы 3.3.4 и число $\delta > 0$ такое, что

$$\text{промежутки } [-\delta, 0) \text{ и } (0, \delta] \text{ не содержат точек разрыва функции } f \tag{3.82}$$

(напомним, что имеется лишь конечно число точек разрыва на всяком конечном интервале, так что при малом δ они перестанут попадать в указанные промежутки). Тогда из условия липшицевости Леммы 3.3.4 получаем, что

$$|f(t) - f_+(0)| \leq Lt, \quad |f(-t) - f_-(0)| \leq Lt \quad \forall t \in (0, \delta]. \tag{3.83}$$

Из свойств (i)–(ii) Леммы 3.3.11 вытекает, что

$$\int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2}. \quad (3.84)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{f_+(0)+f_-(0)}{2} - S_n f(0) \stackrel{(3.76)}{=} \frac{f_+(0)+f_-(0)}{2} - \int_T f(t) D_n(t-p) dt \stackrel{(3.84)}{=} \\ &= \int_{-\pi}^0 [f_-(0) - f(t)] D_n(t) dt + \int_0^{\pi} [f_+(0) - f(t)] D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} [f_-(0) - f(t)] D_n(t) dt + \int_{-\delta}^0 [f_-(0) - f(t)] D_n(t) dt + \\ &+ \int_0^{\delta} [f_+(0) - f(t)] D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} [f_+(0) - f(t)] D_n(t) dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где через I_j обозначены соответствующие интегралы. Оценим их по отдельности. Имеем

$$|I_1| = \left| \int_{-\pi}^{-\delta} [f_-(0) - f(t)] D_n(t) dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f_-(0) - f(t)}{\sin t/2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \quad (3.86)$$

Ясно, что функция $\frac{f_-(0)-f(t)}{\sin t/2}$ на отрезке $[-\pi, -\delta]$ принадлежит классу Φ (она кусочно гладкая, и ее производная равномерно ограничена на своей области определения внутри $[-\pi, -\delta]$). Поэтому по Лемме 3.3.7 получаем, что для любого фиксированного $\delta \in (0, \pi)$ имеет место сходимость

$$I_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.87)$$

Теперь оценим I_2 . Легко видеть (проверьте!), что $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{1}{\pi}|t|$ для⁵ всех $t \in [-\pi, 0)$.

Отсюда и из условия Липшица (3.83) вытекает, что $\left| \frac{f_-(0)-f(t)}{\sin t/2} \right| \leq \pi L$ при $t \in (-\delta, 0)$, следовательно,

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta}^0 \frac{f_-(0) - f(t)}{\sin t/2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \leq \frac{1}{2} L \int_{-\delta}^0 |\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t| dt \leq \frac{1}{2} L \delta. \quad (3.88)$$

Аналогично получаем, что для любого фиксированного $\delta \in (0, \pi)$ имеет место сходимость

$$I_4 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.89)$$

и оценка

$$|I_3| = \frac{1}{2} L \delta \quad (3.90)$$

с некоторой постоянной $L > 0$ (не зависящей от δ).

⁵Указанное неравенство вытекает из того факта, что $\frac{\sin t}{t}$ представляет собой убывающую функцию на отрезке $(0, \frac{\pi}{2}]$, и потому $\frac{\sin t}{t} \leq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. В свою очередь, монотонное убывание функции $\frac{\sin t}{t}$ на отрезке $(0, \frac{\pi}{2})$ является следствием классического неравенства $t < \operatorname{tg} t$ при $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Возьмем теперь произвольно $\varepsilon > 0$. Уменьшим теперь, если нужно, параметр $\delta \in (0, \pi)$ до такой степени, чтобы, кроме условия (3.82), выполнялось также неравенство $\frac{1}{2}L\delta < \frac{1}{4}\varepsilon$. Далее, по формулам (3.87), (3.89) найдется номер $N = N_{\varepsilon, \delta} > 0$ такой, что $|I_4| + |I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$. Тогда $|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| < \varepsilon$ при $n \geq N$, что, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и оценки (3.85), равносильно искомой $\frac{f_+(0)+f_-(0)}{2} - S_n f(0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 0$.

Осталось доказать только последнее утверждение, про равномерную сходимость на промежутках $I = [a, b]$, не содержащих точек разрыва. Поскольку точек разрыва лишь конечное число, найдется положительный параметр $\sigma > 0$ такой, что промежуток $[a - \sigma, b + \sigma]$ также не содержит точек разрыва функции f . Тогда на всем этом промежутке f удовлетворяет условию Липшица с константой L . Далее, если $p = 0 \in I$, то можно повторить все предыдущие рассуждения. Для того, чтобы была справедлива искомая оценка $|f(p) - S_n f(p)| < \varepsilon$, достаточно, чтобы $\frac{1}{2}L\delta < \frac{1}{4}\varepsilon$ и $|I_4| + |I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, и чтобы δ удовлетворяло условию (3.82). Но последнее условие выполняется для всех $\delta < \sigma$. Выберем и зафиксируем $\delta \in (0, \sigma)$ так, чтобы $\frac{1}{2}L\delta < \frac{1}{4}\varepsilon$. Тогда требуемой малости интегралов I_1, I_4 можно добиться с помощью Замечания 3.3.8 при всех достаточно больших номерах $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ независимо от точки $p \in I$, что обеспечивает искомую равномерную сходимость. $\square$

Операции нахождения ряда Фурье и дифференцирования коммутируют между собой в случае регулярных функций, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 3.3.12. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная (2π -периодическая) функция класса Фурье Φ . Тогда ряд Фурье у производной f' совпадает с рядом из производных ряда Фурье исходной функции f , т.е.

$$c_k(f') = ik c_k(f) \quad \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a_k(f') = -k b_k(f), \quad b_k(f') = k a_k(f) \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (3.91)$$

$$c_0(f') = a_0(f') = 0. \quad (3.92)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы, функция f является (обобщенной) первообразной к f' , так что $f' \in N([a, b])$ (т.е. f' интегрируема по Ньютону на отрезке $[a, b]$). Остается посчитать коэффициенты Фурье по правилам (3.67)–(3.69) для функции f' , применяя формулу интегрирования по частям. $\square$

ТЕОРЕМА 3.3.13 (Равенство Парсеваля). Пусть f, g суть непрерывные функции класса Фурье Φ . Тогда справедливы тождества

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) \cdot \overline{c_k(g)} = \pi \left[\frac{a_0(f) \overline{a_0(g)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cdot \overline{a_k(g)} + b_k(f) \cdot \overline{b_k(g)}) \right], \quad (3.93)$$

где символом $\bar{c}$, как и принято, обозначается комплексное сопряженное к числу $c \in \mathbb{C}$.

Замечание 3.3.14. На самом деле равенство Парсеваля верно для любой пары непрерывных функций f, g , заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$. Более того, можно доказать (см. [3, глава VII, §3]), что оно верно для любой пары $f, g \in L_2([-\pi, \pi])$, здесь $L_2([-\pi, \pi])$ — пространство измеримых функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$ (об измеримости и интегрируемости по Лебегу см. следующую главу).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.3.5 имеем $S_n(f) \rightrightarrows f$, $S_n(g) \rightrightarrows g$ на отрезке $T = [-\pi, \pi]$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} \rightrightarrows f \cdot \bar{g}$, следовательно, по теореме 3.1.16 имеют место

сходимости интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (3.94)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt} \right] \cdot \left[\sum_{m=-n}^n \overline{c_m(g)} e^{-imt} \right] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n c_k(f) \overline{c_m(g)} e^{ikt} e^{-imt} dt \stackrel{(3.66)}{=} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} c_k(f) \cdot \overline{c_k(g)} dt = 2\pi \sum_{k=-n}^n c_k(f) \cdot \overline{c_k(g)}. \end{aligned}$$

Второе равенство в (3.93) доказывается аналогично. $\square$

§3.1 Теорема Фейера о равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации.

ТЕОРЕМА 3.3.15. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная 2π -периодическая функция. Обозначим через $\tilde{S}_n(x)$ усреднение первых n сумм Фурье:

$$\tilde{S}_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n}, \quad (3.95)$$

где, напомним, $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$, и коэффициенты Фурье a_k, b_k вычисляются по обычным формулам (3.67). Тогда на всем $\mathbb{R}$ имеет место равномерная сходимость

$$\tilde{S}_n(x) \Rightarrow f(x) \quad (3.96)$$

при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего вычислим $\tilde{S}_n(p)$ в точке $p \in \mathbb{R}$. По Лемме 3.3.10 получаем

$$\tilde{S}_n(p) \stackrel{(3.76)-(3.77)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{[\sin \frac{1}{2}(t-p) + \sin \frac{3}{2}(t-p) + \cdots + \sin(n - \frac{1}{2})(t-p)]}{2n\pi \sin \frac{1}{2}(t-p)} dt. \quad (3.97)$$

Теперь ясно, что для вычисления $\tilde{S}_n(p)$ надо научиться считать суммы вида $\sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin(n - \frac{1}{2})t$. Умножим здесь все слагаемые на $2 \sin \frac{1}{2}t$ и поделим на него же. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \sin(m + \frac{1}{2})t &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sum_{m=0}^{n-1} 2 \sin \frac{1}{2}t \sin(m + \frac{1}{2})t = \\ &\stackrel{\text{ф-ла разности косинусов}}{=} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sum_{m=0}^{n-1} [\cos mt - \cos(m+1)t] = \frac{1 - \cos nt}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в формулу (3.97), получаем

$$\tilde{S}_n(p) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-p)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-p)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathcal{F}_n(t-p) dt, \quad (3.98)$$

где обозначено $\mathcal{F}_n(t) := \frac{\sin^2 \frac{n}{2}t}{2\pi n \sin^2 \frac{1}{2}t}$. Данную функцию называют еще *ядром Фейера*. Исследуем некоторые ее свойства:

- (i) Функция $\mathcal{F}_n(t)$ неотрицательна и четна: $\mathcal{F}_n(t) \equiv \mathcal{F}_n(-t)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Имеет место тождество

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t) dt = 1. \quad (3.99)$$

- (iii) Для каждого (фиксированного) $\delta > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\mathcal{F}_n(t) \rightrightarrows 0 \quad \text{на множестве } [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]. \quad (3.100)$$

Докажем перечисленные свойства. Первое сразу же вытекает из определения функции $\mathcal{F}_n(t)$. Для проверки второго тождества применим уже доказанную формулу (3.98) для простейшего случая $f(x) \equiv 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $S_n(x) \equiv 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $\tilde{S}_n(x) \equiv 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\tilde{S}_n(0) = 1$, тогда формула (3.98) принимает вид

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t) dt, \quad (3.101)$$

что и требовалось доказать.

Проверим свойство (iii). Зафиксируем $\delta \in (0, \pi)$. Поскольку $\sin \frac{1}{2}t$ является возрастающей функцией на промежутке $[\delta, \pi]$, имеем $\sin \frac{1}{2}t \geq \sin \frac{\delta}{2} > 0$ для всех $t \in [\delta, \pi]$, аналогично, $|\sin \frac{1}{2}t| \geq \sin \frac{\delta}{2} > 0$ для всех $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Тогда по определению функции $\mathcal{F}_n(t)$ получаем

$$|\mathcal{F}_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.102)$$

для всех $t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, откуда вытекает искомая равномерная сходимость (3.100).

Теперь все готово для завершающего этапа доказательства теоремы. Оценим разность $f(p) - \tilde{S}_n(p)$. Не умаляя общности, можно считать, что $p = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f(0) - \tilde{S}_n(0) &\stackrel{(3.98)}{=} f(0) - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathcal{F}_n(t) dt \stackrel{(3.99)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} [f(0) - f(t)] \mathcal{F}_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} [f(0) - f(t)] \mathcal{F}_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} [f(0) - f(t)] \mathcal{F}_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} [f(0) - f(t)] \mathcal{F}_n(t) dt = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (3.103)$$

где через I_j обозначены соответствующие интегралы. Оценим их по отдельности. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(t)$ непрерывна и 2π -периодична на $\mathbb{R}$, она будет равномерно непрерывна на всем $\mathbb{R}$, и, выбирая параметр δ достаточно малым (но по-прежнему фиксированным!), можно добиться, чтобы

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{для всех } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ при } |t_1 - t_2| < \delta. \quad (3.104)$$

Тогда

$$|I_2| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(0) - f(t)| \mathcal{F}_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \mathcal{F}_n(t) dt \stackrel{(3.101)}{\leq} \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (3.105)$$

Теперь оценим I_1 . Имеем

$$|I_1| = \left| \int_{-\pi}^{-\delta} [f(0) - f(t)] \mathcal{F}_n(t) dt \right| \stackrel{(3.102)}{\leq} 2M(\pi - \delta) \frac{1}{2\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (3.106)$$

где через M обозначен максимум $M = \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$. Поэтому $I_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Аналогично, $I_3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, $|I_1| + |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших номерах $n \geq N(\varepsilon, \delta)$. С учетом предыдущей оценки (3.105) получаем, что $|I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon$ при достаточно больших номерах $n \geq N(\varepsilon, \delta)$. Тем самым сходимость $f(0) - \tilde{S}_n(0) \rightarrow 0$ доказана.

Осталось проверить равномерную сходимость, т.е. что полученные нами оценки не зависят от выбора точки p . В самом деле, очевидно, что выбор δ в формуле (3.104) (который обеспечивал малость интеграла I_2 в (3.105)), не зависел от точки p (см. (3.104)). Аналогично, оценка на I_1 в (3.106) также не зависела от p (а только от δ). Таким образом, $|f(p) - \tilde{S}_n(p)| < \varepsilon$ во всех точках $p \in \mathbb{R}$ и при всех $n \geq N = N(\varepsilon, \delta)$, где N не зависит от p , тем самым равномерная сходимость $\tilde{S}_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$ окончательно установлена. $\square$

Из этой теоремы вытекает, в частности, что всякую непрерывную функцию 2π -периодическую функцию можно равномерно приблизить на $\mathbb{R}$ тригонометрическими полиномами. Ясно также, что всякую непрерывную функцию, заданную на отрезке $[\alpha, \beta]$ при

$$-\pi < \alpha < \beta < \pi, \quad (3.107)$$

можно продолжить на весь отрезок $[-\pi, \pi]$, так что эта продолженная функция станет уже периодической. Отсюда вытекает, что всякую непрерывную функцию, заданную на отрезке $[\alpha, \beta]$ при выполнении условия (3.107), можно равномерно приблизить тригонометрическими полиномами. В свою очередь, тригонометрические полиномы по формуле Тэйлора можно равномерно приблизить с любой наперед заданной точностью обычными полиномами. Тем самым установлена знаменитая

ТЕОРЕМА 3.3.16 (Теорема Вейерштрасса). Пусть $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, заданная на конечном промежутке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется полином $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (3.108)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если границы интервала α, β удовлетворяют условию (3.107), то данная теорема следует из аргументов, высказанных перед ее формулировкой. Общий случай (с произвольными α, β) сводится к только что разобранному линейной заменой переменной. $\square$

§3.2 Дополнение: изопериметрическое неравенство

Рассмотрим следующую классическую задачу Дидоны. Пусть имеется замкнутая кривая γ длины $\leq 2\pi$, ограничивающая выпуклую плоскую область. Требуется найти, какова может быть максимальная площадь этой области.

У этой древней задачи (относящейся, по современной классификации, к вариационному исчислению), неожиданно имеется простое и элегантное решение на основе теории рядов Фурье.

Сначала напомним некоторые определения и обозначения.

Параметризованной кривой в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется непрерывное отображение $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданное на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и непостоянное ни на каком подинтервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$. Говорят, что параметризации $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ являются *эквивалентными*, или, другими словами, что они порождают одну и ту же кривую, если найдется строго монотонная функция $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ такая, что $f(t) \equiv g(\psi(t))$ для всех $t \in [a, b]$. Говорят также, что f и g являются разными параметризациями одной и той же *ориентированной кривой*, если указанная функция ψ является строго возрастающей.

Таким образом, кривая (ориентированная кривая) является классом эквивалентности всевозможных параметризаций по введенному только что отношению.

В интересующем нас частном случае, речь будет идти о гладких плоских кривых (одномерных многообразиях). Точки плоскости будем отождествлять с комплексными числами $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. Предположим, не умаляя общности, что выпуклая область, ограниченная замкнутой гладкой кривой, содержит начало координат. Тогда эта кривая может быть задана C^1 -гладкой функцией $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ с условием

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \gamma(\beta) \quad (\text{замкнутость кривой}); \\ |\gamma'(t)| &\neq 0 \quad \text{при } t \in [\alpha, \beta] \quad (\text{условие, гарантирующее гладкость}). \\ \det(\gamma(t), \gamma'(t)) &> 0 \end{aligned} \tag{3.109}$$

здесь символом $(\gamma(t), \gamma'(t))$ обозначена 2×2 матрица, столбцами которой являются вектора $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$, а последнее равенство справедливо при условии, что область остается слева при обходе вдоль кривой γ , т.е. выбрана стандартная ориентация кривой. Напомним, что площадь области $\mathcal{D}_\gamma$, ограниченной этой кривой (конечно, при условии ее гладкости) может быть вычислена по правилу

$$S(\mathcal{D}_\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma(t) \times \gamma'(t)| dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt, \tag{3.110}$$

здесь символом $\gamma(t) \times \gamma'(t)$ обозначено векторное произведение соответствующих векторов. С другой стороны, длина кривой находится по классической формуле

$$\ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt. \tag{3.111}$$

Задача получает существенное упрощение, если воспользоваться *естественной параметризацией* кривой γ , когда в качестве параметра выступает длина дуги кривой.

ЛЕММА 3.3.17. Пусть имеется C^1 -гладкая кривая $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ длиной 2π . Тогда у нее имеется естественная параметризация, т.е. найдется C^1 -гладкая возрастающая функция $t(s)$ такая, что $t(0) = \alpha$, $t(2\pi) = \beta$, и

$$|[\gamma(t(s))]'_s| \equiv 1 \quad \forall s \in [0, 2\pi]. \quad (3.112)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $t \in [\alpha, \beta]$ обозначим

$$s(t) = \ell(\gamma|_{[\alpha, t]}) = \int_{\alpha}^t |\gamma'(\tau)| d\tau.$$

Ясно, что $s : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 2\pi]$ является гладкой возрастающей функцией, $s(\alpha) = 0$, $s(\beta) = 2\pi$, причем $s'(t) = |\gamma'(t)| \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ (см. (3.109₂)). Значит, $s(t)$ будет строго возрастающей функцией, и существует гладкое обратное отображение $t(s)$, $s \in [0, 2\pi]$ со свойствами $t(0) = \alpha$, $t(2\pi) = \beta$, причем

$$t'(s) = \frac{1}{|\gamma'_t(t(s))|} \quad (3.113)$$

для всех $s \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$|[\gamma(t(s))]'_s| \stackrel{\text{производная сложн. ф-ии}}{=} |\gamma'_t(t(s)) \cdot t'(s)| = |\gamma'_t(t(s))| \cdot |t'(s)| \stackrel{(3.113)}{=} |\gamma'_t(t(s))| \cdot \frac{1}{|\gamma'_t(t(s))|} = 1.$$

□

ТЕОРЕМА 3.3.18. Пусть имеется замкнутая гладкая выпуклая кривая γ длиной 2π . Тогда площадь области $\mathcal{D}_\gamma$, ограниченной этой кривой, не превосходит числа π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Поскольку ни площадь, ни длина кривой не зависят от параметризации, ввиду леммы 3.3.17, не умаляя общности, можно считать, что гладкая кривая $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ натурально параметризована:

$$|\gamma'(t)| \equiv 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi], \quad (3.114)$$

и, кроме того, выполнены условия (3.109) для $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$. По формуле (3.109₁) справедливо равенство $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, т.е. γ является 2π периодической функцией, а потому ее можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\gamma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-int}. \quad (3.115)$$

По условию, функция $\gamma'(t)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и ее коэффициенты Фурье вычисляются по формуле (3.91)

$$c_n(\gamma') = in \cdot c_n. \quad (3.116)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля (3.93) (см. также Замечание 3.3.14), примененного к ситуации $f = g = \gamma'$, справедливо тождество

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |in c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2. \quad (3.117)$$

Отсюда, с учетом предположения об естественной параметризации (3.114), получаем

$$2\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2. \quad (3.118)$$

Возьмем теперь два произвольных комплексных числа $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{Im}(z_2 \cdot \bar{z}_1) = \operatorname{Im}[(c + id)(a - ib)] = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\det(\gamma(t), \gamma'(t)) = \operatorname{Im}(\gamma'(t) \cdot \overline{\gamma(t)}).$$

Тогда по формуле для площади фигуры (3.110), вновь применяя равенство Парсеваля (3.93) для пары функций $f = \gamma'(t)$, $g = \gamma(t)$, получаем

$$S(\mathcal{D}_\gamma) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \gamma'(t) \cdot \overline{\gamma(t)} dt \right] \stackrel{\text{рав-во Парсев.}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i n c_n \cdot \bar{c}_n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2. \quad (3.119)$$

Так как для всякого целого числа n справедливо неравенство

$$n \leq n^2, \quad (3.120)$$

то из формул (3.118)–(3.119) вытекает, что

$$S(\mathcal{D}_\gamma) \leq \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi. \quad (3.121)$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.3.19. Оценка в теореме 3.3.18 является точной — она достигается на единичной окружности. Это легко видеть и из приведенного доказательства: используемое там неравенство (3.120) обращается в равенство если и только если $n = 0, 1$, т.е. равенство в (3.121) достигается в том и только том случае, когда $c_n = 0$ при $n \neq 0, 1$. Но кривая, параметризованная формулой $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it} = c_0 + c_1 (\cos t + i \sin t)$, представляет собой, как нетрудно видеть, окружность.

Глава 4

Мера и интеграл

§1 Меры и измеримые множества

Пусть X — некоторое множество. Символом 2^X обозначается множество всех подмножеств множества X .

Функция $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ называется *мерой*, если выполнены два условия:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) для любого семейства множеств $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (4.1)$$

Из этого определения очевидно, что $\mu(A) \leq \mu(B)$ при $A \subset B$.

Следующее определение является ключевым для теории меры.

Определение 4.1.1. Множество $A \subset X$ называется *измеримым*¹, если для всякого множества $B \subset X$ справедливо равенство

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \quad (4.2)$$

В данном разделе символом $\bar{A}$ будем обозначать дополнение $\bar{A} = X \setminus A$. Тогда формулу (4.2) можно переписать в виде

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap \bar{A}). \quad (4.3)$$

Отсюда видно, что

$$\text{множество } A \text{ измеримо} \Leftrightarrow \text{его дополнение } \bar{A} \text{ измеримо.} \quad (4.4)$$

Упражнение 4.1.2. Докажите следующие утверждения:

$$\left[\text{множество } A \text{ измеримо, } \mu(A) < \infty \text{ и } B \supset A \right] \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A). \quad (4.5)$$

$$\left[\text{множество } A \text{ измеримо, } \mu(A \setminus C) = \mu(C \setminus A) = 0 \right] \Rightarrow \text{множество } C \text{ измеримо.} \quad (4.6)$$

¹Иногда, если параллельно ведется работа с несколькими мерами, уточняют, что множество A является μ -измеримым.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Если множества A_1, A_2 измеримы, то их объединение $A_1 \cup A_2$ и пересечение $A_1 \cap A_2$ также измеримы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множества A_1, A_2 измеримы, и B — произвольное множество, лежащее в X . По определению измеримости (см. (4.2)), требуется показать, что

$$\mu(B) = \mu[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)] + \mu(B \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$\alpha = B \cap A_1 \cap \bar{A}_2, \quad \beta = B \cap A_1 \cap A_2, \quad \gamma = B \cap A_2 \cap \bar{A}_1, \quad \delta = B \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2.$$

Легко видеть, что все эти множества попарно непересекающиеся. Далее, символами $\alpha\beta$ будем обозначать объединение соответствующих множеств: $\alpha\beta = \alpha \cup \beta$, $\alpha\beta\gamma = \alpha \cup \beta \cup \gamma$, и т.д. Тогда справедливы очевидные равенства

$$\begin{aligned} B &= \alpha\beta\gamma\delta; \\ B \cap A_1 &= \alpha\beta, \quad B \cap A_2 = \beta\gamma; \\ (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) &= \alpha\beta\gamma. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, на языке принятых обозначений искомое равенство (4.7) можно переписать в виде

$$\mu(B) = \mu(\alpha\beta\gamma) + \mu(\delta). \quad (4.9)$$

Вследствие измеримости множества A_1 справедливы равенства

$$\mu(\alpha\beta\gamma) = \mu(\alpha\beta\gamma \cap A_1) + \mu(\alpha\beta\gamma \cap \bar{A}_1) = \mu(\alpha\beta) + \mu(\gamma), \quad (4.10)$$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \cap \bar{A}_1) = \mu(\alpha\beta) + \mu(\gamma\delta). \quad (4.11)$$

Аналогично, вследствие измеримости множества A_2 имеем равенства

$$\mu(\alpha\beta) = \mu(\alpha\beta \cap A_2) + \mu(\alpha\beta \cap \bar{A}_2) = \mu(\beta) + \mu(\alpha). \quad (4.12)$$

$$\mu(\gamma\delta) = \mu(\gamma\delta \cap \bar{A}_2) + \mu(\gamma\delta \cap A_2) = \mu(\gamma) + \mu(\delta). \quad (4.13)$$

Из равенств (4.10), (4.12) вытекает, что

$$\mu(\alpha\beta\gamma) = \mu(\alpha) + \mu(\beta) + \mu(\gamma), \quad (4.14)$$

а из равенств (4.11)–(4.13) — что

$$\mu(B) = \mu(\alpha) + \mu(\beta) + \mu(\gamma) + \mu(\delta). \quad (4.15)$$

В итоге получаем, что с другой стороны, вследствие измеримости множества A_1 имеем

$$\mu(\alpha) + \mu(\beta) + \mu(\gamma) + \mu(\delta) = \mu(B) \stackrel{(4.1)}{\leq} \mu(\alpha\beta\gamma) + \mu(\delta) \stackrel{(4.14)}{=} \mu(\alpha) + \mu(\beta) + \mu(\gamma) + \mu(\delta). \quad (4.16)$$

Поскольку крайние элементы этой цепочки соотношений совпали, находящееся посреди неравенство должно с необходимостью обратиться в равенство, т.е. $\mu(B) = \mu(\alpha\beta\gamma) + \mu(\delta)$, что означает справедливость искоемых формул (4.7), (4.9). Измеримость множества $A_1 \cup A_2$ доказана.

Теперь измеримость пересечения $A_1 \cap A_2$ вытекает из только что доказанного факта, свойства (4.4) и законов де Моргана:

$$A_1, A_2 \text{ измеримы} \Rightarrow \overline{A_1}, \overline{A_2} \text{ измеримы} \Rightarrow \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cap A_2} \text{ измеримо} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \text{ измеримо.} \quad (4.17)$$

□

ТЕОРЕМА 4.1.4. Если множества A_k , $k \in \mathbb{N}$, измеримы и попарно не пересекаются, т.е.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad (4.18)$$

то их объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ также измеримо и имеет место формула

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad (4.19)$$

(ср. с (4.1)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим $A_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Возьмем и зафиксируем произвольное множество B , лежащее в X . Для проверки измеримости требуется показать, что

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_{\infty}) + \mu(B \setminus A_{\infty}). \quad (4.20)$$

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$B_n = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right).$$

Применяя определение измеримости к множеству A_n , получаем получаем имеем

$$\mu(B_n) = \mu(B_n \cap A_n) + \mu(B_n \setminus A_n) \stackrel{\text{определение } B_n, \text{ условие (4.18)}}{=} \mu(B \cap A_n) + \mu(B_{n-1}).$$

Отсюда по индукции легко доказать, что

$$\mu(B_n) = \mu(B \cap A_n) + \mu(B \cap A_{n-1}) + \cdots + \mu(B \cap A_1). \quad (4.21)$$

Отсюда, поскольку $B \cap A_{\infty} \supset B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем неравенство

$$\mu(B \cap A_{\infty}) \geq \mu(B_n) = \sum_{k=1}^n \mu(B \cap A_k). \quad (4.22)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\mu(B \cap A_{\infty}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k). \quad (4.23)$$

С другой стороны, т.к. по построению $B \cap A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap A_k)$, вследствие (4.1) получаем

$$\mu(B \cap A_\infty) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k). \quad (4.24)$$

Соединяя вместе два последних неравенства, приходим к важному тождеству

$$\mu(B \cap A_\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k). \quad (4.25)$$

Поскольку конечное объединение множеств $C_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ измеримо и содержится в A_∞ , имеем

$$\mu(B) = \mu(B \cap C_n) + \mu(B \setminus C_n) \geq \mu(B \cap C_n) + \mu(B \setminus A_\infty) \stackrel{(4.21)}{=} \mu(B \setminus A_\infty) + \sum_{k=1}^n \mu(B \cap A_k). \quad (4.26)$$

Снова переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\mu(B) \geq \mu(B \setminus A_\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) \stackrel{(4.25)}{=} \mu(B \setminus A_\infty) + \mu(B \cap A_\infty). \quad (4.27)$$

С другой стороны, вследствие определения меры $\mu(B) \leq \mu(B \setminus A_\infty) + \mu(B \cap A_\infty)$. Из последних двух неравенств вытекает справедливость искомой формулы $\mu(B) = \mu(B \setminus A_\infty) + \mu(B \cap A_\infty)$. Ввиду произвольности множества B измеримость множества A_∞ доказана. Другая искомая формула, равенство (4.19), с очевидностью вытекает из уже доказанного соотношения (4.25), если в нем положить $B = X$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.1.5. Если множества A_k , $k \in \mathbb{N}$, измеримы, то их объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ также измеримы.

Замечание 4.1.6. В сформулированном утверждении, в отличие от Теоремы 4.1.4, не предполагается, что множества A_k попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множества A_k , $k \in \mathbb{N}$, измеримы. Обозначим $C_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Далее, положим $D_1 = A_1$, $D_n = C_n \setminus C_{n-1}$ при $n \geq 2$. Очевидно, что

$$C_n = \bigcup_{k=1}^n D_k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k. \quad (4.28)$$

С другой стороны, очевидно, что множества D_k попарно не пересекаются и все они измеримы (по Теореме 4.1.3), поэтому по Теореме 4.1.4 множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ также измеримо.

Отсюда, с учетом (4.28), немедленно вытекает измеримость множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Измеримость пересечения снова вытекает из свойства (4.4) и законов де Моргана:

$$A_k \text{ измеримы} \Rightarrow \overline{A_k} \text{ измеримы} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} \text{ измеримо} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \text{ измеримо.} \quad (4.29)$$

□

ТЕОРЕМА 4.1.7. Пусть имеется семейство измеримых множеств A_k , $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $A_k \subset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k); \quad (4.30)$$

(ii) если $\mu(A_1) < \infty$ и выполнено условие $A_k \supset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \quad (4.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что выполнены предположения в (i). Обозначим $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ для $k \geq 2$. Тогда, очевидно, множества B_k попарно не пересекаются, и справедлива формула

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k. \quad (4.32)$$

В частности,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k. \quad (4.33)$$

По Теореме 4.1.4, примененной к семейству попарно непересекающихся измеримых множеств B_k , имеем

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \stackrel{\text{Теорема 4.1.4}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \stackrel{(4.32)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad (4.34)$$

Тогда с учетом (4.33) искомая формула (4.30) доказана.

Предположим теперь, что выполнены предположения в (ii). Обозначим $C_k = A_1 \setminus A_k$. Тогда все C_k оказываются измеримыми множествами, и выполнено условие

$$C_k \subset C_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.35)$$

Значит, по уже доказанному утверждению в (i)

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n). \quad (4.36)$$

В силу измеримости множества A_n имеем

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_n) + \mu(A_1 \setminus A_n) \stackrel{\text{предположение (ii) } A_1 \supset A_n, \text{ определение } C_n = A_1 \setminus A_n}{=} \mu(A_n) + \mu(C_n),$$

другими словами,

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

Поэтому формулу (4.36) можно переписать в виде

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)] = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad (4.37)$$

С другой стороны, очевидно по построению, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$, т.е.

$$\mu\left[A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right] = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad (4.38)$$

Из измеримости множества $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ легко выводится также, что

$$\mu(A_1) = \mu\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right] + \mu\left[A_1 \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right], \quad (4.39)$$

значит, можно переписать формулу (4.38) в виде

$$\mu(A_1) - \mu\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \quad (4.40)$$

что равносильно искомому равенству (4.31). Теорема 4.1.7 полностью доказана. $\square$

Определение 4.1.8. Система $\mathcal{A}$ подмножеств множества X (т.е. $\mathcal{A} \subset 2^X$) называется σ -алгеброй, когда выполнены следующие условия:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;
- 2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$;
- 3) если $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Борелевской σ -алгеброй в $\mathbb{R}^m$ называется наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$.

Из формулы (4.4) и Следствия 4.1.5 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 4.1.9. Если (X, μ) — пространство с мерой, то совокупность измеримых множеств образует σ -алгебру.

Мера $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ называется

(i) *регулярной*, если для каждого множества $A \subset X$ найдется измеримое множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$;

(ii) *мерой Бореля*, если все борелевские множества измеримы;

(iii) *регулярной мерой Бореля*, если для каждого множества $A \subset X$ найдется борелевское множество $B \supset A$ такое, что $\mu(A) = \mu(B)$;

(iv) *мерой Радона*, если μ представляет собой регулярную меру Бореля и $\mu(K) < \infty$ для всех компактных множеств $K \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание 4.1.10. Здесь и в дальнейшем, когда говорится о борелевских множествах и мерах, неявно предполагается, что в роли объемлющего пространства X выступает некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^m$.

Для множества $A \subset X$ символом $\mu|_A = \mu_A$ будем обозначать сужение меры μ на множество A , т.е. $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$.

ТЕОРЕМА 4.1.11. Если мера μ — регулярная мера Бореля, и множество A — измеримо, причем $\mu(A) < \infty$, то найдется борелевское множество $B \supset A$ такое, что $\mu(B \setminus A) = 0$. Кроме того, $\mu|_A$ — мера Радона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. По определению регулярной меры Бореля, найдется борелевское множество B такое,

$$B \supset A \quad \text{и} \quad \mu(B) = \mu(A). \quad (4.41)$$

Отсюда по формуле (4.5) получаем, что

$$\mu(B \setminus A) = 0. \quad (4.42)$$

Докажем последнее утверждение о том, что $\mu|_A$ — мера Радона. В силу измеримости множества A и свойств (4.41)–(4.42) для каждого множества $T \subset X$ имеем

$$\mu(T \cap B) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap B \setminus A) \stackrel{(4.42)}{=} \mu(T \cap A).$$

Это означает, что $\mu|_A \equiv \mu|_B$, таким образом, достаточно доказать, что $\nu := \mu|_B$ является мерой Радона.

По построению, $\nu(X) = \mu(B) < \infty$, поэтому фактически остается только доказать, что ν также является регулярной мерой Бореля. Возьмем произвольное множество $E \subset X$. По условию теоремы, найдется борелевское множество C такое, что

$$C \supset E \cap B \quad \text{и} \quad \mu(C) = \mu(E \cap B). \quad (4.43)$$

Далее, обозначим $D = C \cup \overline{B}$. Тогда $D \supset E \cap \overline{B}$ и $D \supset E \cap B$, следовательно,

$$D \supset E. \quad (4.44)$$

В силу монотонности меры, имеем неравенства

$$\mu(D \cap B) = \mu(C \cap B) \leq \mu(C) = \mu(E \cap B) \leq \mu(D \cap B). \quad (4.45)$$

Значит, все неравенства в последней цепочке соотношений должны обратиться в равенства, т.е. $\mu(E \cap B) = \mu(D \cap B)$, что может быть записано в виде $\nu(E) = \nu(D)$. Так как построенное множество $D \supset E$ — борелевское, а множество $E \subset X$ было взято произвольно, то борелевская регулярность меры ν установлена, и теорема полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.1.12. Если мера μ — мера Радона, и множество A измеримо, то найдутся борелевские множества B, D такие, что

$$D \subset A \subset B \quad \text{и} \quad \mu(B \setminus D) = 0. \quad (4.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Докажем сначала, что найдется борелевское множество такое, что

$$B \supset A \quad \text{и} \quad \mu(B \setminus A) = 0. \quad (4.47)$$

Объемлющее пространство $X = \mathbb{R}^m$ представим в виде счетного объединения $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ шаров $C_n = \{x \in X : |x| \leq n\}$. Обозначим $A_n = A \cap C_n$. Тогда каждое из множеств A_n измеримо и имеет конечную меру, поэтому по Теореме 4.1.11 найдется борелевское множество $B_n \supset A_n$ такое, что

$$\mu(B_n \setminus A_n) = 0. \quad (4.48)$$

Обозначим $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $B \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ и

$$\mu(B \setminus A) = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A)\right] \leq \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0. \quad (4.49)$$

Утверждение (4.47) про множество B доказано.

Применим это утверждение к измеримому множеству $\bar{A}$. Тогда найдется борелевское множество $C \supset \bar{A}$ такое, что $\mu(C \setminus \bar{A}) = 0$. Эти соотношения можно переписать в следующем виде: $A \supset \bar{C}$ и $\mu(A \setminus \bar{C}) = 0$. Обозначим $D = \bar{C}$. Тогда множество D является борелевским, $D \subset A$ и $\mu(B \setminus D) \leq \mu(B \setminus A) + \mu(A \setminus D) = 0$. Искомое утверждение (4.46) доказано. $\square$

Теперь выясним вопрос об аппроксимации открытыми и замкнутыми множествами.

ТЕОРЕМА 4.1.13. Пусть μ — мера Бореля, и B — борелевское множество. Тогда

- (i) если $\mu(B) < \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $C \subset B$ такое, что $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$;
- (ii) если μ — мера Радона, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U \supset B$ такое, что $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Рассмотрим сначала утверждение (i), когда $\mu(B) < \infty$. Положим $\nu = \mu|_B$ и обозначим через $\mathcal{A}$ семейство всех борелевских множеств $E \subset X$ таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество C и открытое множество U такие, что

$$C \subset E \subset U \quad \text{и} \quad \nu(U \setminus C) < \varepsilon. \quad (4.50)$$

Ясно, что $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$. Докажем, что в действительности $\mathcal{A}$ представляет собой σ -алгебру.

ШАГ 1. $\mathcal{A}$ содержит в себе все открытые множества. В самом деле, пусть U — открытое множество. Тогда нетрудно построить последовательность расширяющихся замкнутых множеств $C_n \subset U$ таких², что $C_n \subset C_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = U$. Тогда по Теореме 4.1.7 (i) получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(C_n) = \nu(U) < \infty$, поэтому для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших номерах $n \geq N_\varepsilon$ будет справедливо неравенство $\nu(U \setminus C_n) = \nu(U) - \nu(C_n) < \varepsilon$.

²Можно взять, в частности, $C_n = \{x \in U : \text{dist}(x, \bar{U}) := \inf_{z \in X \setminus U} |z - x| \geq \frac{1}{n}\}$.

ШАГ 2. $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$. В самом деле, возьмем произвольно $A \in \mathcal{A}$ и параметр $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся открытое множество $U \supset A$ и замкнутое множество $C \subset A$ такие, что $\nu(U \setminus C) < \varepsilon$. Очевидно, что $U \setminus C = U \cap \overline{C} = \overline{C} \cap \overline{U} = \overline{C} \setminus \overline{U}$, поэтому

$$\nu(\overline{C} \setminus \overline{U}) < \varepsilon.$$

Ясно также, что множество $\overline{C}$ является открытым, а множество $\overline{U}$ — замкнутым, и выполнены включения $\overline{U} \subset \overline{A} \subset \overline{C}$. Следовательно $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

ШАГ 3. Если $A_k \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$. В самом деле, зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и возьмем открытые множества U_k и замкнутые C_k такие, что

$$C_k \subset A_k \subset U_k$$

и

$$\nu(U_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{4^k}.$$

Положим $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ и $\tilde{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. По построению,

$$\nu(U \setminus \tilde{C}) = \nu\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus \tilde{C})\right] \leq \nu\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus C_k)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(U_k \setminus C_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4^k} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.51)$$

Далее, имеем

$$U \setminus \tilde{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[U \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k \right],$$

причем последовательность множеств $U \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k$ убывающая (относительно n). Поэтому по Теореме 4.1.7 (ii) имеем

$$\nu(U \setminus \tilde{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left[U \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k \right] \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.52)$$

Следовательно, $\nu\left[U \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k \right] < \frac{\varepsilon}{2}$ при некотором (достаточно большом) n . Тогда множество $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$ является замкнутым, справедливы включения

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset U,$$

и $\nu(U \setminus C) < \varepsilon$. Тем самым $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Из доказанных на шагах 1–3 утверждений вытекает, что $\mathcal{A}$ является σ -алгеброй, содержащей все открытые множества. Стало быть, $\mathcal{A}$ содержит в себе все борелевские множества, в частности, $B \in \mathcal{A}$, и утверждение (i) доказано.

Докажем теперь утверждение (ii). Пусть B — произвольное борелевское множество (теперь уже необязательно выполнено условие $\mu(B) < \infty$). Обозначим через D_k последовательность расширяющихся шаров $D_k = \{x \in X : |x| < k\}$, соответственно, $\nu_k = \mu|_{D_k}$,

$B_k = B \cap D_k$. Тогда, по утверждению, установленному в ходе доказательства пункта (i), для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется открытое множество U_k такое, что $U_k \supset B_k$ и $\nu_k(U_k \setminus B_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^k}$. Ясно также, что множество $\tilde{U}_k = U_k \cap D_k$ также является открытым, и для него выполнены те же соотношения $\tilde{U}_k \supset B_k$ и $\nu_k(\tilde{U}_k \setminus B_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^k}$. Но теперь, поскольку $\tilde{U}_k \subset D_k$, последнее соотношение можно переписать в более сильной форме: $\mu(\tilde{U}_k \setminus B_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^k}$. Обозначим $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{U}_k$. Ясно, что

$$U \setminus B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tilde{U}_k \setminus B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tilde{U}_k \setminus B_k). \quad (4.53)$$

Тогда

$$\mu(U \setminus B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{U}_k \setminus B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4^k} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.54)$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, теорема полностью доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.1.14. Пусть μ — мера Радона, и B — борелевское множество. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество U и замкнутое множество C такие, что

$$C \subset B \subset U \quad \text{и} \quad \mu(U \setminus C) < \varepsilon. \quad (4.55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Тогда оба множества $B, \bar{B}$ — борелевские. Из предыдущей теоремы 4.1.13 (ii), примененной к каждому из этих множеств B и $\bar{B}$ вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытые множества U, V такие, что $U \supset B$, $V \supset \bar{B}$, и $\mu(U \setminus B) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\mu(V \setminus \bar{B}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\bar{V}$ — замкнутое множество, причем справедливы соотношения: $\bar{V} \subset \bar{\bar{B}} = B$, $\mu(B \setminus \bar{V}) = \mu(V \setminus \bar{B}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Теперь для замкнутого множества $C = \bar{V}$ имеем нужные соотношения: $C \subset B$ и $\mu(U \setminus C) \leq \mu(U \setminus B) + \mu(B \setminus C) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$. Следствие полностью доказано. $\square$

ТЕОРЕМА 4.1.15. Пусть μ — мера Радона. Тогда

(i) для любого множества $A \subset X$ справедлива формула

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : \text{множество } U \text{ открыто и } U \supset A\}. \quad (4.56)$$

(ii) если множество $A \subset X$ является μ -измеримым, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество C и открытое множество U такие, что

$$C \subset A \subset U \quad \text{и} \quad \mu(U \setminus C) < \varepsilon. \quad (4.57)$$

Кроме того,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \text{множество } K \text{ компактно и } K \subset A\}. \quad (4.58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — мера Радона и $A \subset X = \mathbb{R}^m$. Докажем сначала утверждение (i). Поскольку μ является регулярной мерой Бореля, то найдется борелевское множество B такое, что $B \supset A$ и $\mu(B) = \mu(A)$. Но тогда по теореме 4.1.13 (ii) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U \supset B$ такое, что $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\mu(B) \leq \mu(U) = \mu(B) + \mu(U \setminus B) < \mu(B) + \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, утверждение (4.56) доказано.

Теперь докажем (ii). Пусть множество A измеримо. Возьмем борелевское множество $B \supset A \supset D$ такое, что $\mu(B \setminus D) = 0$ (наличие таких множеств гарантировано Теоремой 4.1.12). Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. В силу Следствия 4.1.14, примененного к борелевским множествам B и D , найдутся открытое множество $U \supset B$ и замкнутое множество $C \subset D$ такие, что $\mu(U \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\mu(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\mu(U \setminus C) \leq \mu(U \setminus B) + \mu(B \setminus D) + \mu(D \setminus C) < \varepsilon$. Утверждение (4.57) доказано.

Осталось проверить формулу (4.58). Возьмем произвольно $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Возьмем теперь замкнутое множество $C \subset A$ со свойством $\mu(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) = \mu(C) + \mu(A \setminus C) < \mu(C) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.59)$$

Множество C можно представить в виде счетного объединения $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ компактных множеств $C_k = \{x \in C : |x| \leq k\}$. Ясно, что $C_k \subset C_{k+1}$, т.е. эта последовательность расширяющаяся. Поэтому по Теореме 4.1.7 (i) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) = \mu(C) \stackrel{(4.59)}{>} \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ теорема полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.1.16 (Критерий Каратеодори). Пусть μ — мера на пространстве $X = \mathbb{R}^m$. Предположим, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любой пары множеств $A, B \subset X$ таких, что $\text{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} |a - b| > 0$. Тогда μ — мера Бореля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\square$

§2 Измеримые функции

Пусть Y — топологическое пространство, X — некоторое множество, и μ — мера на X .

Определение 4.2.1. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется μ -измеримой, если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $f^{-1}(U)$ является μ -измеримым.

Иногда, при одновременной работе с несколькими мерами, употребляют уточняющие термины и говорят про μ -измеримые функции и множества.

Замечание 4.2.2. Если функция $f : X \rightarrow Y$ измерима, то для любого борелевского множества $B \subset X$ множество $f^{-1}(B)$ — измеримо. В самом деле, совокупность множеств $\{A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ измеримо}\}$ образует σ -алгебру, которая, в силу определения 4.2.1, содержит в себе все открытые множества. Значит, эта σ -алгебра содержит в себе и все борелевские множества.

Упражнение 4.2.3. Докажите, что для функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) функция f измерима;
- (ii) для любого интервала вида $U = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, множество $f^{-1}(U)$ — измеримо;
- (iii) для любого интервала вида $U = [a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, множество $f^{-1}(U)$ — измеримо³.

³**Указание** Нужно проверить, что любой открытый интервал может быть составлен из интервалов указанного вида применением операций счетного объединения, пересечения, дополнения.

ТЕОРЕМА 4.2.4. (i) Если функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, то измеримыми будут также функции $|f|$, λf для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.

(ii) Если функции $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, то измеримыми будут также функции $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$, $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы. Докажем, что функция $h = \max(f, g)$ измерима. Возьмем произвольно открытый интервал $U = (a, +\infty)$. Очевидно, что

$$h(x) > a \Leftrightarrow f(x) > a \text{ или } g(x) > a.$$

Таким образом,

$$h^{-1}(U) = f^{-1}((a, +\infty)) \cup g^{-1}((a, +\infty)),$$

откуда легко следует измеримость множества $h^{-1}(U)$, что, ввиду произвольности интервала $U = (a, +\infty)$, влечет измеримость функции h .

Докажем теперь, что их сумма $h(x) := f(x) + g(x)$ также является измеримой функцией. Снова зафиксируем открытый интервал $U = (a, +\infty)$. Возьмем произвольную точку x такую, что

$$h(x) = f(x) + g(x) > a. \quad (4.60)$$

Обозначим $t = f(x)$. Тогда $g(x) > a - t$. Возьмем рациональное число $\tau < t$ настолько близко к t , чтобы по-прежнему выполнялось неравенство $g(x) > a - \tau$. Тогда имеем $f(x) > \tau$ и $g(x) > a - \tau$.

Итак, мы доказали, что для каждой точки x , удовлетворяющей условию (4.60), справедливо утверждение:

$$\text{найдется число рациональное } \tau \in \mathbb{Q} \text{ такое, что } f(x) > \tau \text{ и } g(x) > a - \tau. \quad (4.61)$$

С другой стороны, очевидно, что из (4.61), в свою очередь, следует (4.60), т.е. (4.61) $\Leftrightarrow$ (4.60). Тем самым установлена формула

$$h^{-1}(U) = \bigcup_{\tau \in \mathbb{Q}} [f^{-1}((\tau, +\infty)) \cap g^{-1}((a - \tau, +\infty))].$$

Отсюда и из измеримости функций f, g легко следует измеримость множества $h^{-1}(U)$, что, ввиду произвольности интервала $U = (a, +\infty)$, влечет измеримость функции h .

Теперь, предполагая измеримость функций $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, проверим измеримость $h(x) = \inf_k f_k(x)$. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$h(x) \geq a \Leftrightarrow [f_k(x) \geq a \quad \forall k \in \mathbb{N}].$$

Поэтому для $U = [a, +\infty)$ справедливо равенство

$$h^{-1}(U) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_k^{-1}([a, +\infty)),$$

откуда вытекает измеримость множества $h^{-1}(U)$, и, следовательно, измеримость функции h .

Наконец, предполагая измеримость функций $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, проверим измеримость $h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Обозначим $h_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$. По доказанному в прошлом пункте, все функции $h_n(x)$ измеримы. Очевидно, что последовательность функций $h_n(x)$ возрастающая, поэтому для любого $x \in X$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$ (см. материал первого семестра, определение нижнего предела). Из возрастания последовательности $h_n(x)$ вытекает, что

$$h(x) \leq a \Leftrightarrow [h_n(x) \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}].$$

Поэтому для $U = (-\infty, a]$ справедливо равенство

$$h^{-1}(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} h_n^{-1}(U),$$

откуда вытекает измеримость множества $h^{-1}(U)$, и, следовательно, измеримость функции h . $\square$

Пусть X — множество, μ — мера на нем, и пусть указано некоторое свойство $P(x)$ точек множества X . Будем говорить, что это свойство выполняется μ -почти всюду, если найдется множество E нулевой меры $\mu(E) = 0$ такое, что $P(x)$ выполнено для всех $x \in X \setminus E$.

Упражнение 4.2.5. Докажите, что если функция $f : X \rightarrow Y$ измерима, и если $f(x) = g(x)$ почти всюду на X , то функция $g : X \rightarrow Y$ также измерима⁴.

Из Теоремы 4.2.4 (ii) и упражнения 4.2.5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.2.6. Если функции $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и сходятся поточечно $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$ для почти всех $x \in X$, то предельная функция $f(x)$ также является измеримой.

Пусть $A \subset X$. Символом χ_A будем обозначать характеристическую функцию множества A , вычисляемую по правилу

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \overline{A}. \end{cases}$$

Оказывается, любую измеримую функцию можно разложить в сумму простейших — характеристических функций.

ТЕОРЕМА 4.2.7. Если функция $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ измерима, то найдется последовательность измеримых множеств $A_k \subset X$ таких, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x). \quad (4.62)$$

Доказательство. Положим $A_1 = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$. Далее, если уже определены множества $A_1, \dots, A_n$, то полагаем

$$A_{n+1} := \left\{ x \in X : f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \geq \frac{1}{n+1} \right\}.$$

⁴**Указание:** воспользуйтесь определением измеримых функций и свойством (4.6).

Из этого определения по индукции легко устанавливается следующее неравенство

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \quad \forall x \in X. \quad (4.63)$$

Теперь, если $f(x) = \infty$, то $x \in A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. С другой стороны, если $f(x) \neq \infty$, то найдется подпоследовательность натуральных чисел $n_m \rightarrow \infty$ такая, что $x \notin A_{n_m+1}$, т.е.

$$0 \stackrel{(4.63)}{\leq} f(x) - \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \stackrel{\text{Определение } A_{n_m+1}}{<} \frac{1}{n_m + 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из того факта, что все функции $f(x)$, χ_{A_k} неотрицательны, вытекает искомая формула (4.62). $\square$

§2.1 Теоремы Лузина и Егорова

ТЕОРЕМА 4.2.8 (Теорема Егорова). Пусть μ — мера на пространстве X , множество $A \subset X$ измеримо и конечной меры, $\mu(A) < \infty$, и пусть имеется последовательность измеримых функций $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ для почти всех $x \in A$. Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется измеримое множество $E \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus E) < \delta$ и f_k сходится к функции f равномерно $f_k \Rightarrow f$ на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Выкидывая из A множество нулевой меры, можно считать, не умаляя общности, что

$$f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in A. \quad (4.64)$$

Согласно Следствию 4.2.6, функция f является измеримой. Возьмем убывающую последовательность положительных чисел ε_i таких, что $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Зафиксируем на время индекс i . Зададим множества

$$A_{n,i} := \{x \in A : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon_i \quad \forall k \geq n\}. \quad (4.65)$$

По построению, эта последовательность множеств является расширяющейся по n , т.е.

$$A_{n,i} \subset A_{n+1,i} \quad (4.66)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Из предположения (4.64) вытекает, что каждая точка $x \in A$ попадет в $A_{n,i}$ для достаточно больших номеров n , т.е.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,i}. \quad (4.67)$$

Тогда по теореме 4.1.7 (i) имеем

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n,i}), \quad (4.68)$$

откуда в силу предположения о конечности $\mu(A) < \infty$ имеем

$$\mu(A \setminus A_{n,i}) = \mu(A) - \mu(A_{n,i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.69)$$

Следовательно, найдется номер $n = n_i$ такой, что

$$\mu(A \setminus A_{n,i}) < \frac{\delta}{4^i}. \quad (4.70)$$

По построению, в силу определения (4.65) получаем, что

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon_i \quad \forall x \in A_{n,i} \quad \forall k \geq n_i. \quad (4.71)$$

Теперь обозначим

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{n_i,i}. \quad (4.72)$$

Тогда имеем

$$\mu(A \setminus E) = \mu\left[A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{n_i,i}\right)\right] = \mu\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus A_{n_i,i})\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \setminus A_{n_i,i}) \stackrel{(4.70)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{4^i} = \frac{\delta}{3}. \quad (4.73)$$

С другой стороны, т.к. любая точка $x \in E$ принадлежит каждому из множеств $A_{n_i,i}$ при всех $i \in \mathbb{N}$, вследствие (4.71) имеем

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon_i \quad \forall x \in E \quad \forall k \geq n_i. \quad (4.74)$$

Последнее свойство, ввиду предположения $\varepsilon_i \rightarrow 0$, равносильно искомой равномерной сходимости $f_k \rightrightarrows f$ на E . $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующий классический факт, который нередко служит удобным инструментом.

ТЕОРЕМА 4.2.9 (Теорема Урысона). Пусть E — замкнутое множество в $X = \mathbb{R}^m$, и пусть функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда эту функцию можно непрерывно распространить на все объемлющее пространство, т.е. существует непрерывная функция $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x) = \tilde{f}(x) \quad \text{для всех } x \in E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы не приводим здесь полного красивого доказательства этой теоремы (интересующиеся читатели могут ознакомиться с ним по книге [7, §1.2]). Докажем эту теорему лишь для простейшего частного случая⁵, когда f устроена следующим образом: найдутся компактное множество $K \subset X$ и открытое множество $U \supset K$ такие, что $E = K \cup \bar{U}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K; \\ 0, & x \in \bar{U}. \end{cases} \quad (4.75)$$

Задача состоит в том, чтобы доопределить функцию f в точках остаточного множества $X \setminus E = U \setminus K$ с сохранением свойства непрерывности.

⁵Именно этот частный случай и понадобится нам ниже при доказательстве следующей теоремы.

Для $x \in X$ обозначим $\text{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} |x - y|$. Легко проверяется (использованием элементарных свойств компактных множеств), что

$$\delta := \inf_{x \in \bar{U}} \text{dist}(x, K) > 0,$$

отсюда получаем в частности следующее неравенство:

$$\text{dist}(x, K) \geq \delta \quad \forall x \in \bar{U}. \quad (4.76)$$

Теперь положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x \in K; \\ 1 - \frac{1}{\delta} \text{dist}(x, K), & \text{если } 0 < \text{dist}(x, K) < \delta; \\ 0, & \text{если } \text{dist}(x, K) \geq \delta. \end{cases}$$

Из этого определения и оценки (4.76) немедленно вытекает, что $\tilde{f}(x) = 0$ для всех $x \in \bar{U}$, поэтому

$$f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in E = K \cup \bar{U}. \quad (4.77)$$

Из неравенства треугольника нетрудно вывести, что функция $x \mapsto \text{dist}(x, K)$ является 1-липшицевой (т.е. $|\text{dist}(x, K) - \text{dist}(y, K)| \leq |x - y|$), в частности, эта функция заведомо непрерывна. Отсюда и из теоремы о композиции непрерывных функций легко вытекает непрерывность функции $\tilde{f}$. Теорема 4.2.9 для выбранного случая (4.75) доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2.10 (Теорема Лузина: предварительный вариант). Пусть μ — регулярная мера Бореля на $X = \mathbb{R}^m$, множество $A \subset X$ и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, причем $\mu(A) < \infty$. Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется компактное множество $K \subset A$ такое, что $\mu(A \setminus K) < \delta$ и сужение $f|_K$ функции f на множество K непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Тогда по Теореме 4.1.11 мера $\nu = \mu|_A$ является мерой Радона. Поскольку $\mu(A \setminus K) = \nu(A \setminus K)$ для любого $K \subset X$, то можно, заменив исходную меру μ на ν , считать без потери общности, что сама мера μ — мера Радона, причем

$$\mu(X) < \infty. \quad (4.78)$$

Дальнейший ход доказательства разбивается на несколько шагов.

ШАГ 1. Положим

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0), \quad (4.79)$$

тогда обе функции f_+ , f_- измеримы, неотрицательны, причем имеют место тождества

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-. \quad (4.80)$$

Достаточно доказать утверждение теоремы Лузина для каждой из этих неотрицательных функций f_+ и f_- . Поэтому ниже будем предполагать, без потери общности, что

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (4.81)$$

ШАГ 2. Рассмотрим сначала случай характеристической функции

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B; \\ 0, & x \in \overline{B}, \end{cases}$$

где B — некоторое измеримое множество. Тогда по теореме 4.1.15 и ввиду предположения (4.78) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество U и компактное множество K такие, что

$$K \subset B \subset U \quad \text{и} \quad \mu(U \setminus K) < \varepsilon. \quad (4.82)$$

Положим $E = K \cup \overline{U}$ и зададим функцию $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in K; \\ 0, & x \in \overline{U}. \end{cases}$$

По построению, т.к. $\overline{B} \supset \overline{U}$, получаем, что

$$h(x) = \chi_B(x) \quad \forall x \in E. \quad (4.83)$$

Легко видеть, что множество E замкнуто и функция h непрерывна на E . Поэтому по теореме Урысона 4.2.9 ее можно непрерывно распространить на все пространство X , т.е. существует непрерывная функция $\tilde{h} : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{h}(x) = h(x)$ для всех $x \in E$. Тогда с учетом (4.83) получаем, что

$$\tilde{h}(x) = \chi_B(x) \quad \forall x \in E, \quad (4.84)$$

и

$$\mu(X \setminus E) = \mu[X \setminus (K \cup \overline{U})] = \mu[U \setminus K] \stackrel{(4.82)}{\leq} \varepsilon. \quad (4.85)$$

ШАГ 3. Возьмем теперь произвольную неотрицательную измеримую функцию $f : X \rightarrow [0, +\infty)$. По Теореме 4.2.7 найдется последовательность измеримых множеств $A_k \subset X$ таких, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x). \quad (4.86)$$

для всех $x \in X$. Обозначим $h_k(x) = \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$. Тогда по доказанному на Шаге 2, найдется непрерывная функция $\tilde{h}_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ и замкнутое множество $E_k \subset X$ такие, что

$$\tilde{h}_k(x) = h_k(x) \quad \forall x \in E_k, \quad (4.87)$$

и

$$\mu(X \setminus E_k) < \frac{\delta}{4^k}. \quad (4.88)$$

Положим $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$, тогда

$$\mu(X \setminus E) = \mu\left[X \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right] = \mu\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_k)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus E_k) \stackrel{(4.88)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{4^k} = \frac{\delta}{3}. \quad (4.89)$$

Множество E измеримо, $\mu(E) < \infty$ и по построению,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k(x) \quad (4.90)$$

для всех $x \in E$. Тогда по уже доказанной теореме Егорова найдется компактное множество $K \subset E$ такое, что

$$\mu(E \setminus K) < \frac{\delta}{3} \quad (4.91)$$

и ряд (4.90) сходится равномерно на K . Поскольку все функции $\tilde{h}_k$ непрерывны, то и функция $f(x)$ будет непрерывной на K , как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2.11 (Теорема Лузина). Пусть μ — мера Радона на $X = \mathbb{R}^m$, и пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима. Тогда для всякого $\delta > 0$ найдется замкнутое множество $E \subset X$ и непрерывная функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\mu(X \setminus E) < \delta$ и

$$f(x) = g(x) \quad \text{для всех } x \in E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Возьмем расширяющуюся последовательность открытых шаров $B_n = \{x \in X : |x| < n\}$. Эти множества ограничены, поэтому $\mu(B_n) < \infty$ и для каждого из них по Теореме 4.2.10 найдется открытое множество $U_n \subset B_n$ такое, что

$$\mu(U_n) < \frac{\delta}{4^n}. \quad (4.92)$$

и

$$\text{функция } f|_{B_n \setminus U_n} \text{ непрерывна.} \quad (4.93)$$

Положим $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, $E = X \setminus U$. Тогда по построению имеем

$$\mu(X \setminus E) = \mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \frac{\delta}{3}. \quad (4.94)$$

и

$$\text{функция } f|_E \text{ непрерывна.} \quad (4.95)$$

По теореме Урысона 4.2.9 найдется непрерывная функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x) = g(x) \quad \text{для всех } x \in E. \quad (4.96)$$

Таким образом, теорема Лузина полностью доказана. $\square$

§3 Интеграл и предельные теоремы

Определение интеграла вводится поэтапно.

Простой функцией называется измеримая функция с не более чем счетным множеством значений из $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Такая функция представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x), \quad (4.97)$$

где A_k суть измеримые множества, причем $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (такие семейства попарно непересекающихся множеств называются *дизъюнктными*).

Для неотрицательной простой функции, задаваемой формулой (4.97), положим

$$\int f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \mu(A_k). \quad (4.98)$$

Поскольку все слагаемые этого ряда неотрицательные, его сумма определена⁶ (хотя может принимать и бесконечные значения).

Далее, если простая функция f знакопеременна, то ее можно представить в виде разности $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, где

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0), \quad (4.99)$$

тогда обе функции f_+ , f_- измеримы, неотрицательны, причем имеют место тождества

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \quad (4.100)$$

Определение 4.3.1. Простая функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *интегрируемой*, если хотя бы один из интегралов $\int f_+(x) d\mu$ или $\int f_-(x) d\mu$ конечен, тогда полагаем

$$\int f(x) d\mu = \int f_+(x) d\mu - \int f_-(x) d\mu. \quad (4.101)$$

(Легко видеть, что если оба интеграла $\int f_+(x) d\mu$, $\int f_-(x) d\mu$ бесконечны, то в разности (4.101) имеет место неопределенность $\infty - \infty$.)

Определение 4.3.2. Простая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *суммируемой*, если оба интеграла $\int f_+(x) d\mu$ и $\int f_-(x) d\mu$ конечны. В частности, для суммируемой функции f по формуле (4.100) получаем

$$\int |f(x)| d\mu < \infty. \quad (4.102)$$

Множество *интегрируемых простых функций* обозначим символом $\text{Step}(X, \mathbb{R})$. Для сокращения будем писать $f \leq g$, если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in X$ и т.д.

Теперь перейдем к определению интеграла для произвольной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. *Верхним интегралом* от функции f называется величина

$$\int^* f(x) d\mu = \inf \left\{ \int g(x) d\mu : g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}), f \leq g \right\}. \quad (4.103)$$

Аналогично, *нижним интегралом* от функции f называется величина

$$\int_* f(x) d\mu = \sup \left\{ \int g(x) d\mu : g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}), g \leq f \right\}. \quad (4.104)$$

Определение 4.3.3. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой*, если ее верхний и нижний интегралы совпадают. В таком случае полагают

$$\int f(x) d\mu = \int^* f(x) d\mu = \int_* f(x) d\mu. \quad (4.105)$$

Интегрируемая функция называется *суммируемой*, если значение ее интеграла конечно, т.е. $\int f(x) d\mu \in \mathbb{R}$.

⁶При вычислении ряда в (4.98) мы считаем, что $\infty \cdot 0 = 0$, т.е. если $t_k = \infty$ и $\mu(A_k) = 0$, то $t_k \mu(A_k) = 0$.

Центральной частью данного параграфа (и всего курса теории интеграла) являются так называемые *предельные теоремы*, но, чтобы перейти к ним, необходимо сначала сделать некоторые несложные технические приготовления.

ТЕОРЕМА 4.3.4. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) *всякая интегрируемая функция измерима;*
- (ii) *всякая измеримая неотрицательная функция $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ интегрируема;*
- (iii) *если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то и каждая из функций f_+ , f_- интегрируема, причем хотя бы один из интегралов $\int f_+(x) d\mu$ или $\int f_-(x) d\mu$ конечен;*
- (iv) *если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема, то и функция $|f|$ также суммируема, т.е. $\int |f(x)| d\mu < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Для множества $A \subset X$ определим

$$\int_A f(x) d\mu := \int_X f(x) \cdot \chi_A(x) d\mu.$$

Аналогично определяются верхний и нижний интегралы $\int_A^* f(x) d\mu$, $\int_{*A} f(x) d\mu$ и т.д.

ТЕОРЕМА 4.3.5. *Пусть имеется (конечный или счетный) набор измеримых множеств B_j таких, что*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j \quad (4.106)$$

(в этом случае говорят, что B_j является дизъюнктным семейством множеств). Тогда для всякой простой интегрируемой функции $g \in \text{Step}(X, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\int_{\bigcup_j B_j} g(x) d\mu = \sum_j \int_{B_j} g(x) d\mu. \quad (4.107)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предоставляется читателю в качестве упражнения. □

СЛЕДСТВИЕ 4.3.6. *Пусть имеется (конечный или счетный) набор измеримых множеств B_j таких, что*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j. \quad (4.108)$$

Тогда для всякой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\int_{\bigcup_j^* B_j} g(x) d\mu = \sum_j \int_{B_j}^* g(x) d\mu, \quad \int_{\bigcup_j^* B_j} f(x) d\mu = \sum_j \int_{*B_j} f(x) d\mu. \quad (4.109)$$

Если же функция f интегрируема, то для нее справедливо аналогичное равенство

$$\int_{\bigcup_j B_j} f(x) d\mu = \sum_j \int_{B_j} f(x) d\mu. \quad (4.110)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предоставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Теперь наконец-то все приготовления окончены, и можно перейти к доказательству предельных теорем, которые служат мощным инструментом во многих разделах анализа и его приложений.

ТЕОРЕМА 4.3.7 (Теорема Фату). Пусть имеется последовательность неотрицательных измеримых функций $f_j : X \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда

$$\int \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.111)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим $f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$.

Функция $f(x)$ неотрицательная и измеримая (см. Теорему 4.2.4 (ii)). Возьмем произвольную простую неотрицательную измеримую функцию $g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}_+)$ такую, что

$$g \leq f. \quad (4.112)$$

Тогда g представима в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x), \quad (4.113)$$

где $t_k \in (0, +\infty)$ и все множества A_k измеримы. Возьмем произвольно число $s \in (0, 1)$ и зафиксируем его. Тогда по построению

$$sg(x) < \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A_k. \quad (4.114)$$

Обозначим $B_{k,l} = \{x \in A_k : f_j(x) \geq sg(x) \quad \forall j \geq l\}$. Из формулы (4.114) вытекает, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_{k,l}. \quad (4.115)$$

По построению, $B_{k,l} \subset B_{k,l+1}$. Поэтому по Теореме 4.1.7 (i)

$$\mu(A_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(B_{k,l}). \quad (4.116)$$

Из последней формулы, ввиду неравенства $sg(x) \leq f_j(x)$ для всех $j \geq l$, $x \in B_{k,l}$ получаем, что

$$\begin{aligned} s \int_{A_k} g(x) d\mu &= s t_k \mu(A_k) = s \lim_{l \rightarrow \infty} t_k \mu(B_{k,l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{B_{k,l}} s g(x) d\mu \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{k,l}} f_j(x) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{A_k} f_j(x) d\mu. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} s \int g(x) d\mu &\stackrel{(4.110)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} s \int_{A_k} g(x) d\mu \stackrel{(4.117)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{A_k} f_j(x) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f_j(x) d\mu = \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f_j(x) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Поскольку последнее неравенство верно для любого $s < 1$, заключаем из него, что

$$\int g(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.119)$$

А так как последняя оценка справедлива для всех $g \in \text{Step}(X, \mathbb{R}_+)$ при условии $g \leq f$, делаем вывод, что

$$\int_* f(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.120)$$

Окончательно, ввиду интегрируемости функции f (см. Теорему 4.3.4), заключаем, что

$$\int f(x) d\mu = \int_* f(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.121)$$

Теорема Фату полностью доказана. $\square$

Когда же в теореме Фату можно знак неравенства заменить на равенство? Следующие две теоремы, Леви и Лебега, указывают важные случаи, когда такая замена возможна.

ТЕОРЕМА 4.3.8 (Теорема Леви). Пусть имеется возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций $f_j : X \rightarrow [0, +\infty)$, $f_j \leq f_{j+1}$. Тогда

$$\int \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.122)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ (этот предел существует, т.к. последовательность функций f_j возрастающая). Тогда функция $f(x)$ тоже неотрицательная и измеримая (см. Теорему 4.2.4 (ii)). По Теореме 4.3.4 все функции f_j и f интегрируемы. Более того, по Теореме Фату 4.3.7 справедлива оценка

$$\int f(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu \quad (4.123)$$

(предел в правой части существует, т.к. последовательность функций f_j возрастающая, следовательно, и последовательность интегралов $\int f_j(x) d\mu$ тоже возрастающая).

С другой стороны, по построению и в силу условия возрастания f_j имеем

$$f \geq f_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\int f(x) d\mu \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.124)$$

Из неравенств (4.123)–(4.124) мгновенно вытекает искомое равенство (4.122). Теорема Беппо Леви полностью доказана. $\square$

Из последней теоремы можно извлечь ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 4.3.9 (теорема Леви для знакопеременных функций). Пусть имеется возрастающая последовательность измеримых функций $f_j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f_j \leq f_{j+1}$. Предположим, что функция f_1 интегрируема, причем

$$\int f_1(x) d\mu > -\infty. \quad (4.125)$$

Тогда

$$\int \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.126)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность функций $g_j = f_j - f_1$. Эти функции неотрицательны и измеримы, и последовательность g_j является возрастающей. Обозначим $g(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x)$. Тогда по теореме Леви

$$\int g(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j(x) d\mu. \quad (4.127)$$

С другой стороны, по построению $g_j = f_j - f_1$, поэтому $g = f - f_1$, где обозначено $f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$. Следовательно, формулу (4.127) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int g(x) d\mu &= \int [f(x) - f_1(x)] d\mu \stackrel{(4.125)}{=} \int f(x) d\mu - \int f_1(x) d\mu \stackrel{(4.127)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int [f_j(x) - f_1(x)] d\mu = \\ &\stackrel{(4.125)}{=} - \int f_1(x) d\mu + \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu, \end{aligned} \quad (4.128)$$

откуда получаем искомое равенство

$$\int f(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.129)$$

□

СЛЕДСТВИЕ 4.3.10 (теорема Леви для рядов). Пусть имеется последовательность неотрицательных измеримых функций $f_j : X \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.130)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предоставляется читателю в качестве упражнения⁷. □

ТЕОРЕМА 4.3.11 (Теорема Лебега). Пусть имеется последовательность измеримых функций $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, причем эта последовательность поточечно сходящаяся:

$$\forall x \in X \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x).$$

⁷**Указание.** Нужно применить теорему Леви 4.3.8 для последовательности частичных сумм $g_k(x) = \sum_{j=1}^k f_j(x)$.

Предположим, далее, что найдется **суммируемая** функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$|f_j(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X. \quad (4.131)$$

Тогда

$$\int \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu. \quad (4.132)$$

Замечание 4.3.12. Если сходящаяся последовательность функций, удовлетворяет условию (4.131), то говорят, что имеет место *мажорируемая* сходимость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Обозначим $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$.

Тогда все функции $f_j(x)$ и $f(x)$ также суммируемы. Обозначим

$$g_j(x) := 2g(x) - |f_j(x) - f(x)|.$$

По теореме Фату 4.3.7, примененной к последовательности неотрицательных измеримых функций g_j , имеем

$$\begin{aligned} \int \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) d\mu &= \int 2g(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int [2g(x) - |f_j(x) - f(x)|] d\mu = \\ &= \int 2g(x) d\mu - \lim_{j \rightarrow \infty} \int |f_j(x) - f(x)| d\mu \leq \int 2g(x) d\mu. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Следовательно, все знаки неравенств в последней формуле обращаются в равенства, в частности,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |f_j(x) - f(x)| d\mu = 0. \quad (4.134)$$

Имеем несложную цепочку неравенств

$$f(x) - |f_j(x) - f(x)| \leq f_j(x) \leq f(x) + |f_j(x) - f(x)|. \quad (4.135)$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int [f(x) - |f_j(x) - f(x)|] d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int [f(x) + |f_j(x) - f(x)|] d\mu. \quad (4.136)$$

Но по формуле (4.134) левая и правая части указанной цепочки неравенств совпадает с $\int f(x) d\mu$. Следовательно,

$$\int f(x) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) d\mu, \quad (4.137)$$

что и требовалось доказать. $\square$

Вообще говоря, сходимость в интегральной норме $\int |f_j(x) - f(x)| d\mu \rightarrow 0$ еще не влечет поточечную сходимость. Однако, в случае интегральной сходимости всегда можно выбрать почти всюду сходящуюся подпоследовательность, этому полезному факту посвящено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3.13 (Об интегральной и поточечной сходимости). Пусть имеется последовательность измеримых функций $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, причем найдется измеримая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |f_j(x) - f(x)| d\mu = 0. \quad (4.138)$$

Тогда найдется подпоследовательность f_{j_k} такая, что

$$f_{j_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{для п.в. } x \in X. \quad (4.139)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Возьмем возрастающую подпоследовательность индексов j_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{j_k}(x) - f(x)| d\mu < \infty \quad (4.140)$$

(такую подпоследовательность j_k можно найти за счет условия (4.138)).

Тогда по Теореме Леви для рядов 4.3.10 имеем

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_k}(x) - f(x)| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{j_k}(x) - f(x)| d\mu \stackrel{(4.140)}{<} \infty. \quad (4.141)$$

Отсюда заключаем, что сумма $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_k}(x) - f(x)|$ конечна для п.в. $x \in X$. Значит, $|f_{j_k}(x) - f(x)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для п.в. $x \in X$. $\square$

§3.1 Неравенство Чебышева

ТЕОРЕМА 4.3.14 (Неравенство Чебышева). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть неотрицательная функция $f : X \rightarrow [0, \infty]$ суммируема. Тогда для каждого положительного числа $\lambda > 0$ справедлива оценка

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int f(x) d\mu. \quad (4.142)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $F = \{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$. Справедлива очевидная цепочка неравенств

$$\int f(x) d\mu \geq \int_F f(x) d\mu \geq \int_F \lambda d\mu = \lambda \int \chi_F(x) d\mu = \lambda \mu(F).$$

$\square$

ТЕОРЕМА 4.3.15. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема. Тогда множество $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ является σ -конечным⁸. Далее,

$$\int |f(x)| d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x \in X. \quad (4.143)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема. Тогда функция $|f(x)|$ также суммируема. По неравенству Чебышева, для каждого натурального числа k множество $F_k = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ имеет конечную меру. Очевидно, что

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k. \quad (4.144)$$

⁸То есть оно представимо в виде счетного объединения измеримых множеств конечной меры

Далее, если $\int |f(x)| d\mu = 0$, то, вновь по неравенству Чебышева мера каждого из множеств F_k равна нулю, поэтому по формуле (4.144) получаем $\mu \left[\{x \in X : f(x) \neq 0\} \right] = 0$.

Доказательство последнего утверждения (импликация $\Leftarrow$ в формуле (4.143) предоставляется читателю в качестве несложного упражнения (на определение интеграла через простые функции). $\square$

В следующем параграфе нам понадобится следующее понятие. Функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется σ -конечной, если каждая из функций f_+ и f_- может быть представлена как сумма почти всюду сходящегося ряда, состоящего из суммируемых функций.

Упражнение 4.3.16. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ является σ -конечной. Тогда множество $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ является σ -конечным.

§4 Теорема Фубини

Пусть имеются два пространства (X, μ) и (Y, ν) с мерами μ и ν соответственно.

Тогда для множества $E \subset X \times Y$ полагаем по определению

$$\mu \times \nu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \nu(B_j) : \begin{array}{l} A_j \subset X, B_j \subset Y \text{ суть измеримые множества,} \\ \text{причем } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j. \end{array} \right\} \quad (4.145)$$

Для удобства будем использовать следующие обозначения. Если $E \subset X \times Y$ и $x \in X$, то полагаем

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

Ясно, что $E_x \subset Y$. Аналогично, при $y \in Y$ полагаем

$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

По построению, $E_y \subset X$.

Следующая теорема итальянского математика Фубини носит фундаментальный характер (она, в частности, играет ключевую роль в построении классического интеграла Лебега).

ТЕОРЕМА 4.4.1 (Теорема Фубини). Пусть имеются два пространства (X, μ) , (Y, ν) с мерами μ и ν соответственно. Тогда для функции множеств $\mu \times \nu(\cdot)$, определенной по формуле (4.145), справедливы следующие утверждения

(i) $\mu \times \nu$ является регулярной мерой (даже если сами исходные меры μ и ν нерегулярны!);

(ii) для любой пары измеримых множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ множество $A \times B$ будет $\mu \times \nu$ -измеримым, более того,

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B); \quad (4.146)$$

(iii) если множество $E \subset X \times Y$ измеримо и σ -конечно относительно меры $\mu \times \nu$, то множество E_x является ν -измеримым для μ -почти всех $x \in X$, и функция $X \ni x \mapsto \nu(E_x)$

является μ -измеримой; аналогично, множество E_y является μ -измеримым для ν -почти всех $y \in Y$, и функция $Y \ni y \mapsto \mu(E_y)$ является ν -измеримой, при этом

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu_x = \int_Y \mu(E_y) d\nu_y \quad (4.147)$$

(iv) если функция $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема и σ -конечна⁹ относительно меры $\mu \times \nu$, то функция $f(x, \cdot)$ является ν -измеримой для μ -почти всех $x \in X$, и функция $X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu_y$ является μ -интегрируемой; аналогично, функция $f(\cdot, y)$ является μ -измеримой для ν -почти всех $y \in Y$, и функция $Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu_x$ является ν -интегрируемой; при этом

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \times \nu = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu_y \right] d\mu_x = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu_x \right] d\nu_y. \quad (4.148)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Субаддитивность функции $\mu \times \nu$, т.е. выполнение для произвольного набора множеств $F_i \subset X \times Y$ неравенства

$$\mu \times \nu \left(\bigcup_i F_i \right) \leq \sum_i \mu \times \nu(F_i),$$

доказывается очень легко и оставляется читателю в качестве упражнения. Таким образом, $\mu \times \nu$ является мерой.

Обозначим теперь

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} F \subset X \times Y : \text{множество } F_x \text{ является } \nu\text{-измеримым для } \mu\text{-почти всех } x \in X, \\ \text{и функция } X \ni x \mapsto \nu(F_x) \text{ является } \mu\text{-измеримой;} \\ \text{аналогично, множество } F_y \text{ является } \mu\text{-измеримым для } \nu\text{-почти всех } y \in Y, \\ \text{и функция } Y \ni y \mapsto \mu(F_y) \text{ является } \nu\text{-измеримой, при этом} \\ \int_X \nu(F_x) d\mu_x = \int_Y \mu(F_y) d\nu_y \end{array} \right\}. \quad (4.149)$$

Для $F \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(F) = \int_X \nu(F_x) d\mu_x = \int_Y \mu(F_y) d\nu_y. \quad (4.150)$$

Ниже нам придется работать со следующими семействами "элементарных" множеств:

$$\mathcal{P}_0 = \{A \times B : A \subset X, B \subset Y \text{ суть измеримые множества}\},$$

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j : A_j \times B_j \in \mathcal{P}_0 \right\}, \quad \mathcal{P}_2 = \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j : F_j \in \mathcal{P}_1 \right\}.$$

Дальнейший ход доказательства разбивается на ряд шагов.

⁹Определение σ -конечности функции f см. в предыдущем параграфе

ШАГ 1. Если $A \times B \in \mathcal{P}_0$, то $A \times B \in \mathcal{F}$ и $\rho(F) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

ШАГ 2. Если $E_i \in \mathcal{F}$, причем $E_i \cap E_j = \emptyset$ (т.е. если E_i образуют *дизъюнктное* семейство множеств), то $\bigcup_i E_i \in \mathcal{F}$, причем $\rho\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \rho(E_i)$.

Данное утверждение доказывается сначала для конечных сумм множеств прямым вычислением. Последующий переход к бесконечному объединению множеств осуществляется применением теоремы Леви (в самом деле, подынтегральные функции в формуле (4.150) для $F = F_k = \bigcup_{i=1}^k E_i$ будут монотонно возрастать по k).

ШАГ 3. Если имеется объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$, причем $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$, то найдется *дизъюнктное* семейство множеств $A'_i \times B'_i \in \mathcal{P}_0$ (т.е. они попарно не пересекаются) такое, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \times B'_i$.

В самом деле, положим $F_k = \bigcup_{i=1}^k A_i \times B_i$. Ясно, что $F_k \subset F_{k+1}$ (возрастающая последовательность множеств). Поэтому множества $D_k = F_k \setminus F_{k-1}$ не пересекаются. Легко видеть, что каждое из множеств D_k можно представить в виде конечного дизъюнктного объединения множеств вида $A'_j \times B'_j$. Проиллюстрируем это на простом примере:

$$A_2 \times B_2 \setminus A_1 \times B_1 = \left[(A_2 \setminus A_1) \times (B_1 \cap B_2) \right] \cup \left[(A_2 \cap A_1) \times (B_2 \setminus B_1) \right] \cup \left[(A_2 \setminus A_1) \times (B_2 \setminus B_1) \right].$$

Из Шагов 1–3 делаем следующее важное заключение:

ШАГ 4. Если $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathcal{F}$. Другими словами, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$.

ШАГ 5. Для каждого множества $F \subset X \times Y$ справедлива формула

$$\mu \times \nu(F) = \inf \{ \rho(G) : G \in \mathcal{P}_1, G \supset F \}. \quad (4.151)$$

Докажем последнее утверждение. Возьмем множества $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$ такие, что $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i).$$

Поскольку $\mu \times \nu(F)$ является инфимумом выражений, стоящих в правой части последнего равенства, то заключаем, что

$$\mu \times \nu(F) \geq \inf \{ \rho(G) : G \in \mathcal{P}_1, G \supset F \}. \quad (4.152)$$

С другой стороны, для всякого набора множеств $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$ таких, что $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \in \mathcal{F}$, по утверждению Шага 3 найдется дизъюнктный набор множеств $A'_i \times B'_i \in \mathcal{P}_0$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \times B'_i$. Тогда имеем

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) = \rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \times B'_i\right) \stackrel{\text{Шаг 2}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A'_i \times B'_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A'_i) \cdot \nu(B'_i) \geq \mu \times \nu(F)$$

(последнее неравенство вытекает из определения $\mu \times \nu(F)$ и того факта, что $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \times B'_i$). Значит,

$$\mu \times \nu(F) \leq \inf \{ \rho(G) : G \in \mathcal{P}_1, G \supset F \}. \quad (4.153)$$

Формулы (4.152)–(4.153) приводят нас к искомому равенству (4.151).

ШАГ 6. Если $A \times B \in \mathcal{P}_0$, то

$$\mu \times \nu(A \times B) = \rho(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B). \quad (4.154)$$

В самом деле, из определения $\mu \times \nu(E)$ немедленно заключаем, что

$$\mu \times \nu(A \times B) \leq \mu(A) \cdot \nu(B). \quad (4.155)$$

С другой стороны, в силу очевидной монотонности $\rho(E) \leq \rho(G)$ при $E \subset G$ и в силу (4.151) имеем

$$\mu \times \nu(A \times B) = \inf \{ \rho(G) : G \in \mathcal{P}_1, G \supset A \times B \} \geq \rho(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B). \quad (4.156)$$

Формулы (4.155)–(4.156) приводят нас к искомому равенству (4.154).

ШАГ 7. Если $A \times B \in \mathcal{P}_0$, то множество $A \times B$ является $\mu \times \nu$ -измеримым.

В самом деле, возьмем произвольное множество $T \subset X \times Y$. Возьмем также произвольное дизъюнктивное семейство множеств $A_i \times B_i \in \mathcal{P}_0$ таких, что

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i. \quad (4.157)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) &\stackrel{\text{Шаг 2}}{=} \rho\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) \setminus (A \times B)\right] + \rho\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) \cap (A \times B)\right] \geq \\ &\stackrel{\text{Шаг 5}}{\geq} \mu \times \nu\left[T \setminus (A \times B)\right] + \mu \times \nu\left[T \cap (A \times B)\right]. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Поскольку ввиду Шага 5 справедливо равенство

$$\mu \times \nu(T) = \inf \left\{ \rho\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i\right) : T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \right\},$$

то из неравенства (4.158) заключаем, что

$$\mu \times \nu(T) \geq \mu \times \nu[T \setminus (A \times B)] + \mu \times \nu[T \cap (A \times B)],$$

откуда ввиду произвольности $T \subset X \times Y$ вытекает искомая измеримость множества $A \times B$.

Из Шага 7 немедленно получаем, что

ШАГ 8. Если $F \in \mathcal{P}_1$ или $F \in \mathcal{P}_2$, то F является $\mu \times \nu$ -измеримым.

ШАГ 9. Если $F \in \mathcal{F}$, то $\rho(F) \leq \mu \times \nu(F)$. Данное утверждение следует из монотонности функции ρ и из Шага 5.

ШАГ 10. Пусть теперь $F \subset X \times Y$ — произвольное множество. Тогда найдется $G \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}$ такое, что

$$\rho(G) = \mu \times \nu(G) = \mu \times \nu(F). \quad (4.159)$$

В самом деле, если $\mu \times \nu(F) = \infty$, то достаточно взять $G = X \times Y$. Предположим теперь, что $\mu \times \nu(F) < \infty$. Возьмем тогда множества $G_j \in \mathcal{P}_1$ такие, что $F \subset G_j$ и

$$\mu \times \nu(F) \leq \rho(G_j) \leq \mu \times \nu(F) + \frac{1}{j}$$

(наличие таких множеств гарантируется Шагом 5). Обозначим $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$ и $F_k = \bigcap_{j=1}^k G_j$. Прямым вычислением нетрудно убедиться, что все F_k также лежат в $\mathcal{P}_1$, поэтому $F_k \in \mathcal{F}$ (см. Шаг 4). Справедливо очевидное равенство $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_k$, причем F_k образуют монотонно убывающую последовательность: $F_k \supset F_{k+1}$. С другой стороны, т.к. $F \subset F_k \subset G_k$, то имеем

$$\mu \times \nu(F) \leq \rho(F_k) \leq \rho(G_k) \leq \mu \times \nu(F) + \frac{1}{k}.$$

Тогда по теореме Леви¹⁰ получаем, что

$$\rho(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(G_k) = \mu \times \nu(F) \leq \mu \times \nu(G)$$

(последнее неравенство вытекает из включения $F \subset G$). С другой стороны, т.к. $F_k \supset G$, $F_k \in \mathcal{P}_1$, то

$$\mu \times \nu(G) \leq \inf_k \rho(F_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F_k) = \mu \times \nu(F).$$

Из последних двух цепочек соотношений вытекает искомая формула (4.159).

ШАГ 11. Возьмем теперь произвольное $\mu \times \nu$ -измеримое множество $F \subset X \times Y$ такое, что $\mu \times \nu(F) < \infty$. Тогда утверждается, что

$$F \in \mathcal{F} \quad \text{и} \quad \rho(F) = \mu \times \nu(F). \quad (4.160)$$

В самом деле, возьмем множество $G \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}$ из Шага 10, т.е. $G \supset F$ и $\mu \times \nu(G) = \mu \times \nu(F) = \rho(G)$. Предположим сначала, что

$$\mu \times \nu(F) = 0. \quad (4.161)$$

Тогда $\rho(G) = 0$, и, по формулам (4.150), (4.143) получаем, что

$$\nu(G_x) = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x \in X; \quad \mu(G_y) = 0 \quad \text{для } \nu\text{-п.в. } y \in Y. \quad (4.162)$$

Отсюда ввиду включения $F \subset G$ с очевидностью вытекает, что

$$\nu(F_x) = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x \in X; \quad \mu(F_y) = 0 \quad \text{для } \nu\text{-п.в. } y \in Y, \quad (4.163)$$

т.е. $F \in \mathcal{F}$ и $\rho(F) = \mu \times \nu(F) = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\mu \times \nu(F) \in \mathbb{R}$. Тогда $\mu \times \nu(G \setminus F) = 0$, и, по доказанному только что, $G \setminus F \in \mathcal{F}$ и $\rho(G \setminus F) = 0$, т.е.

$$\nu[(G \setminus F)_x] = 0 \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x \in X; \quad \mu[(G \setminus F)_y] = 0 \quad \text{для } \nu\text{-п.в. } y \in Y. \quad (4.164)$$

¹⁰Здесь опять применяется теорема Леви в виде Следствия 4.3.9, только там надо поменять знаки, чтобы получить утверждения для **убывающих** последовательностей функций.

Тогда, поскольку $G \in \mathcal{F}$ (см. (4.149)), имеем

$$\begin{aligned} & \text{множество } F_x \text{ является } \nu\text{-измеримым для } \mu\text{-почти всех } x \in X, \\ & \text{и функция } X \ni x \mapsto \nu(F_x) = \nu(G_x) \text{ является } \mu\text{-измеримой;} \\ & \text{аналогично, множество } F_y \text{ является } \mu\text{-измеримым для } \nu\text{-почти всех } y \in Y, \\ & \text{и функция } Y \ni y \mapsto \mu(F_y) = \mu(G_y) \text{ является } \nu\text{-измеримой, при этом} \\ & \int_X \nu(F_x) d\mu_x = \int_X \nu(G_x) d\mu_x = \int_Y \mu(G_y) d\nu_y = \int_Y \mu(F_y) d\nu_y. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Отсюда заключаем, что $F \in \mathcal{F}$ и $\rho(F) = \mu \times \nu(F)$, т.е. выполнена искомая формула (4.160).

ШАГ 12. Утверждается, что формула (4.160) выполнена также для каждого σ -конечного $\mu \times \nu$ -измеримого множества $F \subset X \times Y$. В самом деле, такое множество можно представить в виде объединения $F = \bigcup_j F_j$ расширяющейся последовательности множеств $F_j \subset F_{j+1}$, где каждое F_j измеримо и $\mu \times \nu(F_j) < \infty$. Тогда по доказанному на предыдущем шаге имеем $F_j \in \mathcal{F}$ и

$$\rho(F_j) = \mu \times \nu(F_j). \quad (4.166)$$

В силу свойств расширяющейся последовательности измеримых множеств справедливо предельное соотношение

$$\mu \times \nu(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu \times \nu(F_j). \quad (4.167)$$

С другой стороны, последовательности измеримых функций $X \ni x \mapsto \nu(F_{j_x})$ и $Y \ni y \mapsto \mu(F_{j_y})$ являются возрастающими, поэтому по теореме Б.Леви

$$\rho(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(F_j). \quad (4.168)$$

В итоге получаем, что $F \in \mathcal{F}$ и $\rho(F) = \mu \times \nu(F)$ (последнее равенство вытекает из (4.166)–(4.168)).

ШАГ 13. На этом последнем шаге докажем последнее утверждение (iv) теоремы Фубини 4.4.1. Пусть функция $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема (относительно меры $\mu \times \nu$) и σ -конечна. Достаточно рассмотреть случай $f \geq 0$. Если $f = \chi_F$, т.е. если f совпадает с характеристической функцией некоторого множества F , то искомая формула (4.148) следует из предыдущего шага. Общий случай для f сводится к случаю характеристических функций с помощью представления $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$ (см. Теорему 4.2.7), где каждое из множеств A_k является σ -конечным (см. Упражнение 4.3.16). $\square$

§4.1 Мера Лебега

Определение 4.4.2. Мера Лебега $\mathcal{L}^1$ на прямой $\mathbb{R}$ определяется следующим образом. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$\mathcal{L}^1(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\}. \quad (4.169)$$

ЛЕММА 4.4.3. Для отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\mathcal{L}^1([a, b]) = b - a. \quad (4.170)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Неравенство

$$\mathcal{L}^1(E) \leq b - a \quad (4.171)$$

очевидно из определения меры Лебега. Докажем обратное неравенство.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В соответствии с определением, найдется семейство множеств $C_j \subset \mathbb{R}$, покрывающих E , $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \supset E$, и таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j < \mathcal{L}^1(E) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.172)$$

Возьмем вместо C_j их выпуклые оболочки $\text{Conv } C_j = \{tx + (1-t)y : x, y \in C_j, t \in [0, 1]\}$. Тогда все эти выпуклые оболочки являются промежутками, их диаметр совпадает с диаметром C_j , и их объединение по-прежнему покрывает множество E . Поэтому можно считать, не умаляя общности, что

$$\text{все } C_j \text{ являются промежутками.} \quad (4.173)$$

Далее возьмем **открытый** промежуток $D_j = (\alpha_j, \beta_j)$ такой, что $D_j \subset C_j$ и $\text{diam } D_j = \beta_j - \alpha_j \leq \text{diam } C_j + \frac{\varepsilon}{4j}$. Тогда по-прежнему D_j будут покрывать E , $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset E$, и справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } D_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\text{diam } C_j + \frac{\varepsilon}{4j} \right) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \stackrel{(4.172)}{<} \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon. \quad (4.174)$$

Поскольку D_j суть открытые промежутки, и покрываемый ими отрезок $[a, b]$ компактен, по теореме Бореля–Лебега найдется конечно подпокрытие. Можно считать, не умаляя общности, что это подпокрытие образовано интервалами D_j с первыми N номерами:

$$\bigcup_{j=1}^N D_j \supset E. \quad (4.175)$$

Рассмотрим характеристические функции $\chi_{D_j}(x)$ и $\chi_E(x)$. Формулу (4.175) на языке характеристических функций можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^N \chi_{D_j}(x) \geq \chi_E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.176)$$

Очевидно, что все эти функции интегрируемы по Ньютону. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^N \chi_{D_j}(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_j}(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\alpha_j}^{\beta_j} dx = \sum_{j=1}^N (\beta_j - \alpha_j) \stackrel{(4.176)}{\geq} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) dx = b - a. \quad (4.177)$$

Соединяя вместе полученные оценки, заключаем, что

$$\mathcal{L}^1(E) \stackrel{(4.171)}{\leq} b - a \stackrel{(4.177)}{\leq} \sum_{j=1}^N \text{diam } D_j \stackrel{(4.174)}{\leq} \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon. \quad (4.178)$$

□

Определение 4.4.4. Мерой Лебега $\mathcal{L}^n$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ называется произведение мер $\underbrace{\mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1}_{n \text{ раз}}$, вычисляемое согласно теореме Фубини.

Можно определить меру Лебега $\mathcal{L}^n$ и индуктивно: $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1$.

Далее n -мерным интервалом в $\mathbb{R}^n$ будем называть множество

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

ТЕОРЕМА 4.4.5. Для всякого n -мерного интервала $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ справедлива формула

$$\mathcal{L}^n(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n). \quad (4.179)$$

Более того, для каждого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) : I_k \subset \mathbb{R}^n \text{ суть } n\text{-мерные интервалы,} \right. \\ \left. \text{причем } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k. \right\} \quad (4.180)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.179) мгновенно вытекает из Теоремы Фубини 4.4.1 (ii) и равенства

$$\mathcal{L}^1([a, b]) = b - a, \quad (4.181)$$

доказанного в предыдущей теореме 4.4.3. Формула (4.180) вытекает из определения меры Лебега 4.4.4, определения произведения мер 4.145 и из все того же равенства (4.181). Подробности оставляются читателю в качестве упражнения. □

Для удобства, в дальнейшем интеграл по мере Лебега $\int f(x) d\mathcal{L}_x^1$ будем обозначать символом $\int f(x) dx$ и т.д.

Пример 4.4.6. Обозначим $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Вычислим двойной интеграл $I = \int_{\mathbb{R}_+^2} x e^{-x^2 y^2} e^{-x^2} d\mathcal{L}^2$. По формуле равенства двойного интеграла повторным (4.148) получаем

$$I = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} e^{-x^2} dy \right] dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} e^{-x^2} dx \right] dy. \quad (4.182)$$

Вычислим каждый из повторных интегралов по-отдельности. Имеем

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} e^{-x^2} dy \right] dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} dy \right] dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2 y^2} d(xy) \right] dx \\ \stackrel{t=xy}{=} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \right] dx = J^2, \quad (4.183)$$

где через J обозначен интеграл Эйлера-Пуассона

$$J = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

С другой стороны, правый интеграл в равенстве (4.182) можно вычислить "до числа":

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} e^{-x^2} dx \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2(y^2+1)} dx^2 \right] dy \stackrel{t=x^2(y^2+1)}{=} \quad (4.184)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1} \left[\int_0^{\infty} e^{-t} dt \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{\pi}{2}$$

Приравнявая интегралы в (4.183)–(4.184), получаем классическую формулу для интеграла Эйлера–Пуассона:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.185)$$

§4.2 Формула Кавальери–Лебега

В качестве приложения теоремы Фубини возникает следующая изящная формула, которая по сути своей применялась Кавальери еще во времена средневековой математики. Эта формула позволяет, в частности, свести любой многомерный интеграл к интегралу Ньютона по прямой.

ТЕОРЕМА 4.4.7 (Формула Кавальери–Лебега). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ — неотрицательная измеримая функция. Тогда

$$\int_X f(x) d\mu = \int_0^{\infty} \mu\{x \in X : f(x) > t\} dt. \quad (4.186)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда функция f суммируема. Тогда измеримое множество $\{x \in X : |f(x)| > 0\}$ является σ -конечным. Беря сужение меры μ на указанное множество, можно считать, не умаляя общности, что само исходное пространство X является σ -конечным.

Возьмем в качестве пространства Y полупрямую $Y = [0, +\infty)$, и пусть $\nu = \mathcal{L}^1|_Y$ (т.е. ν — сужение меры Лебега на луч $[0, +\infty)$). Определим функцию $g(x, t)$ на множестве $X \times Y$ по правилу:

$$g(x, t) = \begin{cases} 1, & t < f(x); \\ 0, & t \geq f(x). \end{cases} \quad (4.187)$$

Для числа $t \in Y$ обозначим $F_t = \{x \in X : f(x) > t\}$. Тогда формулу (4.187) можно переписать следующем эквивалентном виде:

$$g(x, t) = \begin{cases} 1, & x \in F_t; \\ 0, & x \notin F_t. \end{cases} \quad (4.188)$$

Легко видеть, по построению, что функция $g(x, t)$ измерима относительно меры $\lambda = \mu \times \nu$. Значит, эта функция и интегрируема по данной мере. Более того, т.к. по сделанным

предположениям пространство X является σ -конечным, то и функция $g(t, x)$ является σ -конечной относительно меры λ . Поэтому к ней можно применить теорему Фубини 4.4.1. По формуле (4.148) (равенство двойного интеграла повторному) получаем

$$\int_{X \times Y} g(x, t) d\mu \times \nu = \int_X \left[\int_Y g(x, t) d\nu_t \right] d\mu_x = \int_Y \left[\int_X g(x, t) d\mu_x \right] d\nu_t. \quad (4.189)$$

Вычислим каждый из повторных интегралов по-отдельности. Имеем

$$\int_X \left[\int_Y g(x, t) d\nu_t \right] d\mu_x \stackrel{(4.187)}{=} \int_X \left[\int_0^{f(x)} 1 d\nu_t \right] d\mu_x = \int_X f(x) d\mu_x. \quad (4.190)$$

С другой стороны,

$$\int_Y \left[\int_X g(x, t) d\mu_x \right] d\nu_t \stackrel{(4.188)}{=} \int_Y \left[\int_X \chi_{F_t}(x) d\mu_x \right] d\nu_t = \int_Y \mu(F_t) d\nu_t = \int_0^\infty \mu(F_t) dt \quad (4.191)$$

(в последнем равенстве мы пользуемся тем обстоятельством, что функция $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mu(F_t)$ монотонная (невозрастающая), поэтому ее интеграл по мере совпадает с изученным ранее интегралом Ньютона). Приравнявая интегралы в (4.190)–(4.191), получаем искомую формулу (4.186). $\square$

Упражнение 4.4.8. Используя формулу Кавальери–Лебега, покажите, что для всякой неотрицательной измеримой функции $f : X \rightarrow [0, +\infty]$, заданной на пространстве X с мерой μ , и для каждого числа $p > 0$ справедлива формула

$$\int_X f^p(x) d\mu = p \int_0^\infty \tau^{p-1} \mu\{x \in X : f(x) > \tau\} d\tau. \quad (4.192)$$

Из формулы Кавальери–Лебега легко выводится следующее важное свойство.

ТЕОРЕМА 4.4.9 (Абсолютная непрерывность интеграла). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого измеримого множества $E \subset X$ удовлетворяющего условию $\mu(E) < \delta$, справедливо неравенство

$$\int_E |f(x)| d\mu < \varepsilon. \quad (4.193)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая функция. Чтобы доказать утверждение теоремы, согласно критерию Гейне, достаточно проверить, что для всякой последовательности измеримых множеств $E_n \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\mu(E_n) < \frac{1}{n}, \quad (4.194)$$

имеет место сходимость

$$\int_{E_n} |f(x)| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.195)$$

Возьмем произвольную последовательность измеримых множеств E_n с указанным свойством (4.194). Рассмотрим соответствующую последовательность функций $f_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x)$. Для $t > 0$ положим

$$\begin{aligned} g(t) &= \mu\{x \in X : |f(x)| > t\}, \\ g_n(t) &= \mu\{x \in E_n : |f(x)| > t\}. \end{aligned}$$

По формуле Кавальери–Лебега имеем

$$\int_X |f(x)| d\mu = \int_0^\infty g(t) dt < \infty, \quad (4.196)$$

$$\int_X |f_n(x)| d\mu = \int_{E_n} |f(x)| d\mu = \int_0^\infty g_n(t) dt. \quad (4.197)$$

Из предположения $\mu(E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и очевидного неравенства $g_n(t) \leq \mu(E_n)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ вытекает сходимость

$$g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall t \in (0, +\infty). \quad (4.198)$$

Очевидно также, что

$$g_n(t) \leq g(t) \quad \forall t \in (0, +\infty). \quad (4.199)$$

Тогда из последних двух формул и из суммируемости функции $g(t)$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости вытекает соотношение

$$\int_0^\infty g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

которое, в силу равенств (4.197), равносильно искомой сходимости (4.195). $\square$

§5 Интегралы, зависящие от параметра

В данном параграфе будут рассмотрены приложения теорем о предельном переходе под знаком интеграла (прежде всего, теоремы Лебега) к вопросам непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра.

Если (X, μ) — пространство с мерой, то символом $\tilde{\forall} x \in X$ будем обозначать фразу "для μ -почти всех $x \in X$ ".

ТЕОРЕМА 4.5.1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, и пусть $f : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, обладающая следующими свойствами.

(i) для каждого $\alpha \in U$ функция $X \ni x \mapsto f(x, \alpha)$ переменной $x \in X$ является измеримой;

(ii) найдется суммируемая функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x) \quad \tilde{\forall} x \in X \quad \forall \alpha \in U, \quad (4.200)$$

(iii) для μ -почти всех $x \in X$ функция $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ является непрерывной.

Тогда функция $U \ni \alpha \mapsto \int_X f(x, \alpha) d\mu_x$ является непрерывной на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Обозначим $I(\alpha) := \int_X f(x, \alpha) d\mu$. Нужно доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна. Воспользуемся критерием непрерывности Гейне. Зафиксируем $\alpha_0 \in U$ и рассмотрим последовательность $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_n \in U$. Обозначим $f_n(x) := f(x, \alpha_n)$, $f_0(x) := f(x, \alpha_0)$. Тогда последовательность $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ состоит из измеримых функций и $|f_n(x)| \leq g(x)$ для всех $x \in X$. Вследствие условия непрерывности по параметру (iii) имеет место сходимость

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in X. \quad (4.201)$$

Налицо выполнение всех условий теоремы Лебега 4.3.11 о мажорируемой сходимости. По этой теореме

$$\int f(x) d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu. \quad (4.202)$$

Другими словами,

$$I(\alpha_n) \rightarrow I(\alpha_0) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4.203)$$

Ввиду произвольности последовательности $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ и критерия Гейне, теорема полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.5.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое связное множество (область), и пусть $f : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, обладающая следующими свойствами.

- (i) для каждого $\alpha \in U$ функция $X \ni x \mapsto f(x, \alpha)$ переменной $x \in X$ является измеримой;
- (ii) найдется $\alpha_0 \in U$ такое, что функция $X \ni x \mapsto f(x, \alpha_0)$ является суммируемой.
- (iii) для μ -почти всех $x \in X$ функция $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ является непрерывно дифференцируемой.
- (iv) найдется суммируемая функция $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \in U, \quad (4.204)$$

где через

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha_m} \right) \quad (4.205)$$

обозначена соответствующая $1 \times m$ матрица Якоби (градиент) отображения $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$.

Тогда для каждого $\alpha \in U$ функция $X \ni x \mapsto f(x, \alpha)$ является μ -суммируемой; далее, функция $I(\alpha) := \int_X f(x, \alpha) d\mu_x$ является непрерывно дифференцируемой на U , причем справедлива формула

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu. \quad (4.206)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения доказываемой теоремы. Ввиду элементарных свойств связных открытых множество достаточно доказать утверждение теоремы только для случая, когда $U = B(\alpha_0, \rho)$ есть шар в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Выкидывая из X множество нулевой меры, если необходимо (это совершенно не влияет на измеримость и интегрируемость рассматриваемых функций и т.д.) можно считать, не умаляя общности, что свойства (iii)–(iv) выполнены для всех $x \in X$, более того, что функция $g(x)$ конечна также для всех $x \in X$.

Зафиксируем $x \in X$. Тогда по свойству (iii) функция $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ будет непрерывно дифференцируемой на шаре U , причем $|\nabla_\alpha f(x, \alpha)| \leq g(x)$ для всех $\alpha \in U$. Тогда по дифференциальной оценке приращения (см. Лемму 3.1.18) имеем

$$|f(x, \alpha) - f(x, \beta)| \leq g(x)|\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in U. \quad (4.207)$$

Поскольку точка $x \in X$ была зафиксирована произвольно, отсюда и из неравенства треугольника мы получаем, в частности, что

$$|f(x, \alpha)| \leq |f(x, \alpha_0)| + g(x)\rho \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \in U. \quad (4.208)$$

Из последней оценки, из измеримости функций $X \ni x \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}$ и суммируемости функций $f(x, \alpha_0)$ и $g(x)$ вытекает суммируемость $f(x, \alpha)$ при каждом фиксированном α . Таким образом, можно определить вещественнозначную функцию

$$I(\alpha) := \int_X f(x, \alpha) d\mu_x.$$

Зафиксируем теперь $\alpha \in U$ и рассмотрим вектора вида $\alpha_n = \alpha + \varepsilon_n \mathbf{v}$, где $\varepsilon_n > 0$ — произвольная последовательность положительных чисел со сходимостью $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ — фиксированный вектор единичной длины. Положим

$$h_n(x) := \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha)}{\varepsilon_n}. \quad (4.209)$$

Тогда по формуле (4.207) имеем

$$|h_n(x)| \leq g(x). \quad (4.210)$$

Поскольку для каждого фиксированного $x \in X$ функция $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ будет непрерывно дифференцируемой на шаре U , по определению дифференцируемости и градиента имеем

$$h_n(x) = \frac{f(x, \alpha + \varepsilon_n \mathbf{v}) - f(x, \alpha)}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4.211)$$

где, напомним, символом $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ обозначена соответствующая $1 \times m$ матрица Якоби (градиент) отображения $U \ni \alpha \mapsto f(x, \alpha)$ (см. (4.205)), точка $\cdot$ — это скалярное произведение, а символом $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \mathbf{v}}$ обозначена соответствующая частная производная функции $f(x, \cdot)$ по направлению $\mathbf{v}$.

Для последовательности функций $h_n(x)$ налицо выполнение всех условий теоремы Лебега 4.3.11 о мажорируемой сходимости. По этой теореме имеем

$$\int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \mathbf{v}} d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) d\mu \stackrel{\text{Теорема Лебега}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(x) d\mu \stackrel{(4.209)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(\alpha + \varepsilon_n \mathbf{v}) - I(\alpha)}{\varepsilon_n}. \quad (4.212)$$

Это означает, ввиду произвольности последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и критерия Гейне, что

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \mathbf{v}} = \int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \mathbf{v}} d\mu = \left[\int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu \right] \cdot \mathbf{v}. \quad (4.213)$$

В силу предыдущей теоремы 4.5.1 и непрерывности при каждом фиксированном $x \in X$ функции $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \mathbf{v}}$ (которая вытекает из предположения (iii) доказываемой теоремы) получаем, что все частные производные $\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \mathbf{v}}$ непрерывны на U . Отсюда вытекает непрерывная дифференцируемость функции $I(\alpha)$ и искомая формула (4.206). $\square$

§6 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Напомним вначале очень полезную теорему о перестановочности пределов в случае равномерной сходимости. Для удобства, в случае метрического пространства X символом $|x - y|_X$ будет обозначаться расстояние в пространстве X между точками x, y .

ТЕОРЕМА 4.6.1 (О перестановочности повторных пределов). Пусть X, Y — метрические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$, $p \in \text{Cl } A$, $q \in \text{Cl } B$, и пусть дана функция $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что имеют место поточечные сходимости

$$\forall a \in A \quad F(a, b) \xrightarrow{b \rightarrow q} h(a), \quad (4.214)$$

$$\forall b \in B \quad F(a, b) \xrightarrow{a \rightarrow p} g(b), \quad (4.215)$$

где $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторые функции. Предположим, далее, что одна из этих сходимостей (4.214) равномерна относительно $a \in A$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |F(a, b) - h(a)| < \varepsilon \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B(q, \delta) = \{x \in B : |q - x|_Y < \delta\}. \quad (4.216)$$

Тогда другая сходимость (4.215) также равномерна, причем справедливо равенство

$$\lim_{b \rightarrow q} g(b) = \lim_{a \rightarrow p} h(a) \quad (4.217)$$

(указанные пределы обязательно существуют).

Ключевое равенство (4.217) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{b \rightarrow q} \lim_{a \rightarrow p} F(a, b) = \lim_{a \rightarrow p} \lim_{b \rightarrow q} F(a, b). \quad (4.218)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема фактически является переформулировкой теоремы 3.1.13 о перестановочности предельного перехода у равномерно сходящейся последовательности. (При этом роли у новой и старой теоремы перераспределяются следующим образом: $A = S$, $B = \mathbb{N}$, $q = \infty$ и т.д.) Поскольку никаких существенных отличий у доказательства новой теоремы нет, здесь оно опускается. $\square$

Зафиксируем теперь интервал $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$ (допускается $\omega = +\infty$). Предположим, что функция $f : (c, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу на каждом промежутке (c, b) при $b < \omega$ (но может быть не интегрируема на всем интервале (c, ω)). Говорят, что *несобственный интеграл* $\int_c^\omega f(x) dx$ сходится в точке ω , если существует конечный предел

$$\int_c^\omega f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^b f(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.219)$$

Предположим, далее, что функция $f = f(x, \alpha)$ зависит от параметра $\alpha \in A$. Тогда говорят, что несобственный интеграл $\int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$, если сходимость в формуле (4.219) равномерна по α , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists d \in (c, \omega) \quad \left| I(\alpha) - \int_c^b f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b \in (d, \omega) \quad \forall \alpha \in A. \quad (4.220)$$

где через $I(\alpha)$ обозначено значение соответствующего несобственного интеграла $I(\alpha) = \int_c^\omega f(x, \alpha) dx$. Поскольку несобственный интеграл $I(\alpha)$ не всегда поддается вычислению в явном виде, полезно применять критерий Коши:

ТЕОРЕМА 4.6.2 (Критерий Коши сходимости несобственных интегралов). Пусть $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$, A — некоторое множество, и пусть имеется функция $f : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что для любого $\alpha \in A$ и каждого $b \in (c, \omega)$ функция $f(\cdot, \alpha)$ интегрируема по Лебегу на интервале (c, b) . Тогда несобственный интеграл $\int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$ в том и только том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists d \in (c, \omega) \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (d, \omega) \quad \forall \alpha \in A. \quad (4.221)$$

ТЕОРЕМА 4.6.3 (О непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое множество, и пусть имеется функция $f : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) при каждом $b \in (c, \omega)$ функция $f(x, \alpha)$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 4.5.1 о непрерывности по параметру интеграла Лебега для пространств $X = (c, b)$ и $U = A$;

(2) несобственный интеграл $\int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$.

Тогда функция $I(\alpha) := \int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ непрерывна на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Тогда в силу условия (2) величина $I(\alpha)$ определена для всех $\alpha \in A$. Требуется проверить непрерывность этой функции по α . Зададим функцию $F : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для $b \in (c, \omega)$, $\alpha \in A$

$$F(b, \alpha) = \int_c^b f(x, \alpha) dx. \quad (4.222)$$

Зафиксируем какую-нибудь точку $\alpha_0 \in A$. Проверим, что для функции $F(b, \alpha)$ выполняются все условия абстрактной теоремы 4.6.1 о равенстве смешанных пределов с $B = (c, \omega)$, $p = \alpha_0$, $q = \omega$. В самом деле,

$$\forall \alpha \in A \quad \lim_{b \rightarrow \omega} F(b, \alpha) = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^b f(x, \alpha) dx = \int_c^\omega f(x, \alpha) dx = I(\alpha), \quad (4.223)$$

$$\forall b \in B \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(b, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_c^b f(x, \alpha) dx = \int_c^b f(x, \alpha_0) dx, \quad (4.224)$$

последний предельный переход оправдан в силу теоремы 4.5.1 о непрерывности по параметру интеграла Лебега и предположения (1) доказываемой теоремы 4.6.3. Далее, в силу предположения (2) доказываемой теоремы сходимость (4.223) равномерна по $\alpha \in A$. Поэтому по формуле перестановочности пределов (4.217) с учетом информации о поточечных пределах (4.223)–(4.224) получаем

$$\lim_{A \ni \alpha \rightarrow \alpha_0} I(\alpha) = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^b f(x, \alpha_0) dx \stackrel{\text{опред. несобств. инт-ла}}{=} \int_c^\omega f(x, \alpha_0) dx = I(\alpha_0). \quad (4.225)$$

Ввиду произвольности точки $\alpha_0 \in A$ непрерывность функции $I(\alpha)$ полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4.6.4 (О дифференцируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ — открытое связное множество (область), и пусть имеется функция $f : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) при каждом $b \in (c, \omega)$ функция $f(x, \alpha)$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) теоремы 4.5.2 о дифференцируемости по параметру интеграла Лебега для пространств $X = (c, b)$ и $U = A$;

(2) несобственный интеграл $\int_c^\omega \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$;

(3) найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что несобственный интеграл $\int_c^\omega f(x, \alpha_0) dx$ сходится в точке ω .

Тогда несобственный интеграл $I(\alpha) := \int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ также сходится в ω (локально равномерно по α), кроме того, функция $I(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на A , причем справедлива формула

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_c^\omega \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \quad (4.226)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены предположения теоремы. Не умаляя общности, можно считать, что A является шаром: $A = B(\alpha_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - \alpha_0| < r\}$ (такое допущение оправдано, т.к. в открытом связном множестве от одной точки к другой всегда можно добраться по цепочке перекрывающихся по соседству шаров).

Для $b_1, b_2 \in (c, \omega)$ и $\alpha \in A$ обозначим

$$I(b_1, b_2, \alpha) := \int_{b_1}^{b_2} f(x, \alpha) dx. \quad (4.227)$$

Тогда в силу предположения (1) доказываемой теоремы для каждой фиксированной пары значений $b_1, b_2 \in (c, \omega)$ функция $I(b_1, b_2, \alpha)$ непрерывно дифференцируема по $\alpha \in A$,

причем справедлива формула

$$\frac{\partial I(b_1, b_2, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \quad (4.228)$$

Из предположения (3) доказываемой теоремы (о сходимости при $\alpha = \alpha_0$) и критерия Коши вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon \in (c, \omega) \quad \left| I(b_1, b_2, \alpha_0) \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (\delta, \omega). \quad (4.229)$$

Аналогично, из предположения (2) доказываемой теоремы (о равномерной сходимости) и критерия Коши (4.6.2) вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d = d_\varepsilon \in (\delta, \omega) \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (d, \omega) \quad \forall \alpha \in A. \quad (4.230)$$

Это означает, с учетом тождества (4.228), что

$$\left| \frac{\partial I(b_1, b_2, \alpha)}{\partial \alpha} \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (d, \omega) \quad \forall \alpha \in A. \quad (4.231)$$

Тогда по дифференциальной оценке приращения (см. Лемму 3.1.18) имеем

$$|I(b_1, b_2, \alpha) - I(b_1, b_2, \beta)| \leq \varepsilon |\alpha - \beta| \quad \forall \alpha, \beta \in A \quad \forall b_1, b_2 \in (d, \omega). \quad (4.232)$$

Теперь из (4.229), (4.232) и неравенства треугольника получаем, что

$$|I(b_1, b_2, \alpha)| \leq |I(b_1, b_2, \alpha_0)| + \varepsilon |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon + \varepsilon r = (1+r)\varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (d, \omega) \quad \forall \alpha \in A. \quad (4.233)$$

Из последней оценки и соответствующих определений немедленно вытекает, что несобственный интеграл $\int_c^\omega f(x, \alpha) dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$. Таким образом, можно определить числовую функцию

$$I(\alpha) := \int_c^\omega f(x, \alpha) dx.$$

Зафиксируем теперь $\tilde{\alpha} \in U$ и рассмотрим вектора вида $\alpha_n = \tilde{\alpha} + \varepsilon_n \mathbf{v}$, где $\varepsilon_n > 0$ — произвольная последовательность положительных чисел со сходимостью $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ — фиксированный вектор единичной длины. Для $b \in (c, \omega)$ положим

$$I(b, \alpha) := \int_c^b f(x, \alpha) dx. \quad (4.234)$$

Тогда в силу предположения (1) доказываемой теоремы для каждого фиксированного b функция $I(b, \alpha)$ непрерывно дифференцируема по $\alpha \in A$, причем справедлива формула

$$\frac{\partial I(b, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_c^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx. \quad (4.235)$$

Теперь обозначим

$$F(\alpha_n, b) := \frac{I(b, \alpha_n) - I(b, \tilde{\alpha})}{\varepsilon_n}. \quad (4.236)$$

Из утверждения (4.235) и определения частных производных немедленно вытекает, что

$$F(\alpha_n, b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial I(b, \tilde{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial I(b, \tilde{\alpha})}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{v} = \left[\int_c^b \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \alpha} dx \right] \cdot \mathbf{v} = \int_c^b \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} dx. \quad (4.237)$$

для каждого фиксированного $b \in (c, \omega)$. С другой стороны, при фиксированном n получаем

$$\lim_{b \rightarrow \omega} F(\alpha_n, b) = \lim_{b \rightarrow \omega} \frac{I(b, \alpha_n) - I(b, \tilde{\alpha})}{\varepsilon_n} = \frac{I(\alpha_n) - I(\tilde{\alpha})}{\varepsilon_n}. \quad (4.238)$$

В силу оценки (4.232) имеем

$$|F(\alpha_n, b_1) - F(\alpha_n, b_2)| = \frac{|I(b_1, \alpha_n) - I(b_1, \tilde{\alpha}) - I(b_2, \alpha_n) + I(b_2, \tilde{\alpha})|}{|\alpha_n - \tilde{\alpha}|} \leq \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (d_\varepsilon, \omega). \quad (4.239)$$

Это означает, по критерию Коши, что сходимость в формуле (4.238) равномерна относительно α_n . Тогда можно применить абстрактную теорему 4.6.1 о равенстве смешанных пределов с $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = (c, \omega)$, $p = \tilde{\alpha}$, $q = \omega$. По формуле перестановочности пределов (4.217) с учетом информации о поточечных пределах (4.237)–(4.238) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(\alpha_n) - I(\tilde{\alpha})}{\varepsilon_n} = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^b \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} dx \stackrel{\text{опред. несобств. инт-ла}}{=} \int_c^\omega \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} dx. \quad (4.240)$$

Так как, по построению, $\alpha_n = \tilde{\alpha} + \varepsilon_n \mathbf{v}$, то, ввиду произвольности последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0+$, определения частных производных и критерия Гейне получаем, что

$$\frac{\partial I(\tilde{\alpha})}{\partial \mathbf{v}} = \int_c^\omega \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{v} dx = \left[\int_c^\omega \frac{\partial f(x, \tilde{\alpha})}{\partial \alpha} dx \right] \cdot \mathbf{v}. \quad (4.241)$$

Из предыдущей теоремы 4.6.3 вытекает, что все частные производные $\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \mathbf{v}}$ непрерывны на A . Отсюда следует непрерывная дифференцируемость функции $I(\alpha)$ и искомая формула (4.226). $\square$

Чтобы найти содержательные и интересные примеры для применения доказанных теорем, нам понадобится вспомнить следующий классический факт.

ТЕОРЕМА 4.6.5 (Вторая теорема о среднем). Пусть функции $v(x)$ и $u(x)v(x)$ интегрируемы по Лебегу на промежутке $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$, причем функция $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является убывающей и неотрицательной. Тогда найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = u(a+0) \int_a^\xi v(x) dx. \quad (4.242)$$

Эта теорема была доказана в прошлом семестре для случая интеграла Ньютона; доказательство для интеграла Лебега проводится аналогично, даже с некоторыми упрощениями.

Из теоремы о среднем легко выводится

ТЕОРЕМА 4.6.6 (Признак Абеля равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра). Пусть $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое множество, и пусть имеются функция $u : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $v : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) при каждом $\alpha \in A$ функция $u(x, \alpha)$ монотонна (по x);
- (ii) функция $u(x, \alpha)$ равномерно ограничена, т.е. найдется число $C > 0$ такое, что $|u(x, \alpha)| \leq C$ для любого $x \in (c, \omega)$ и всех $\alpha \in A$.
- (iii) несобственный интеграл $\int_c^\omega v(x, \alpha) dx$ сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$.

Тогда несобственный интеграл $\int_c^\omega u(x, \alpha) \cdot v(x, \alpha) dx$ также сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить основные определения, критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов 4.6.2, и вторую теорему о среднем (4.6.5). $\square$

Можно сделать некоторое перераспределение нагрузки: ослабить условия на функцию v и ужесточить условия на функцию u .

ТЕОРЕМА 4.6.7 (Признак Дирихле равномерной сходимости). Пусть $(c, \omega) \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое множество, и пусть имеются функция $u : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $v : (c, \omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) при каждом $\alpha \in A$ функция $u(x, \alpha)$ монотонна (по x);
- (ii) при каждом $\alpha \in A$ функция $u(x, \alpha)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \omega$, причем это стремление равномерно относительно $\alpha \in A$.

(iii) функция $u(x)$ и интегралы $\int_c^b v(x) dx$ равномерно ограничены, т.е. найдется число $C > 0$ такое, что $|u(b)| + \left| \int_c^b v(x) dx \right| \leq C$ для любого $b \in (c, \omega)$ и всех $\alpha \in A$.

Тогда несобственный интеграл $\int_c^\omega u(x, \alpha) \cdot v(x, \alpha) dx$ также сходится в точке ω равномерно по $\alpha \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем случае, нужно применить основные определения, критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов 4.6.2, и вторую теорему о среднем (4.6.5). $\square$

Упражнение 4.6.8. Применяя сформулированные теоремы, доказать непрерывность на замкнутом множестве $\alpha \in [0, +\infty)$ и непрерывную дифференцируемость на открытом множестве $\alpha \in (0, +\infty)$ несобственного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Вычислить значение этого интеграла. **Примечание.** Следует сначала понять, в какой точке, при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$, интеграл становится несобственным.

Литература

- [1] Демидович Б. П., Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
- [2] Дятлов Г.В., Основы математического анализа для студентов-физиков. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2015, ч.1–8.
- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.Н., Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для вузов. — 6-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 624 с.
- [4] Решетняк Ю.Г., Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. Ч. 1, кн. 1–2; Ч. 2, кн. 1–2.
- [5] Фихтенгольц Г. М., Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. I и II.
- [6] Шведов И. А., Компактный курс математического анализа. Ч. 1–3. Новосибирский гос. ун-т., 2003.
- [7] Эванс Л.К., Гариэпи Р.Ф., Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.