Вопросы по математическому анализу (II курс, 3-ой семестр 2015-16)

Примечание. Если в билете указана некоторая теорема, то 'по умолчанию' она спрашивается с доказательством (если только в формулировке вопроса не оговорено противное).

1. Топологические свойства непрерывных отображений: гомеоморфность непрерывного инъективного отображения на компактном множестве (с доказательством), теорема Брауэра об инвариантности области (без доказательства), их следствия.
2. Диффеоморфизмы открытых множеств: определение, теорема о композиции. Теорема о диффеоморфности гомеоморфизма с невырожденным якобианом.
3. Теорема об обратной функции (только формулировка, без доказательства). Следствия из этой теоремы (о гладких отображениях класса C^r с невырожденным якобианом). Примеры глобальной и локальной инъективности. C^r-измоморфизмы и C^r-вложения.
4. Теорема о неявной функции (с доказательством). Примеры: уравнение состояния газа, двойной математический маятник.
5. Аналитическое доказательство теоремы Лагранжа о необходимом признаке условного экстремума.
6. Понятие о гладких отображениях произвольных подмножеств (не обязательно открытых) в $\mathbb{R}^n$. Диффеоморфизмы. C^r–изоморфность произвольных (не обязательно открытых) подмножеств в $\mathbb{R}^n$.
7. Теорема о ранге. Теорема о зависимости функций.
8. Лемма Морса.
9. Системы координат и параметризация множеств. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. Оператор Лапласа в полярных координатах.
10. Определение элементарного многообразия. Роль содержащихся в определении условий, их геометрический смысл. Простейшие примеры и контрпримеры.
11. Определение многообразия. Теорема об изоморфности окрестности каждой точки многообразия (полу)интервалу.
12. Внутренние и краевые точки многообразия. Теорема об инвариантности понятий многообразия и края при изоморфизмах. Вычисление края многообразия с помощью допустимых параметризаций.
13. Является ли край многообразия также многообразием? Если да, то

какой размерности, и чему равен его край ("край от края")?
14. Теорема о задании многообразия системой уравнений.
15. Теорема о задании многообразия системой уравнений и неравенств.
16. Кинематическое определение касательных векторов ко множеству $M \subset \mathbb{R}^n$. Касательное пространство и контингенция: определения, базовые свойства, примеры.
17. Поведение касательных пространств при гладком отображении: определение дифференциала гладкого отображения $f : M \to N$ на касательных векторах ко множеству M, корректность, основные свойства.
18. Касательное пространство к многообразию и его краю.
19. Касательное пространство многообразий, заданных системой уравнений (неравенств). Ортогонали.
20. Необходимые признаки условного экстремума: теорема Ферма, теорема о множителях Лагранжа.
21. Достаточный признак условного экстремума. Примеры.
22. Группа $SL(n)$ — гладкое многообразие. Группа $SO(n)$ — гладкое многообразие. Вычисление размерности этих многообразий и их касательных пространств.
23. Какие элементы группы $SL(n)$ ближайшие к нулевой матрице?
24. Поточечная сходимость последовательности функций. Проблема ее коммутирования с основными операциями анализа (дифференцирование, интегрирование, предел в точке). Контрпримеры.
25. Определение равномерной сходимости. Критерий Коши.
26. Пространство ограниченных функций. Супремум-норма (='равномерная норма'). Критерий равномерной сходимости. Полнота пространства ограниченных функций относительно супремум-нормы.
27. Теорема о перестановочности предельного перехода (='Теорема о повторных пределах').
28. Теорема о непрерывности предельной функции. Полнота пространства непрерывных функций относительно равномерной нормы.
29. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла (в случае равномерной сходимости).
30. Предельный переход и дифференцирование (при наличии равномерной сходимости): одномерный и многомерный случаи.
31. Равномерная сходимость функциональных рядов: критерий Коши, признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
32. Неравенство Абеля. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

33. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности функций.
34. Степенные ряды. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда на отрезке.
35. Радиус сходимости степенного ряда и формулы для его вычисления. Области равномерной сходимости и расходимости степенного ряда.
36. Аналитические функции комплексного переменного. Теорема о почленном дифференцировании степенных рядов. Вещественная и комплексная дифференцируемость аналитических функций, их согласованность. Комплексная производная.
37. "Ортогональностьбазиса"Фурье. Конечные тригонометрические полиномы, интегральные формулы для их коэффициентов. Формальное определение ряда Фурье для интегрируемых функций и постановка вопроса о его сходимости. Комплексная форма частичных сумм ряда Фурье. Примеры.
38. Класс кусочно-гладких периодических функций. Теорема Римана–Лебега о сходимости к нулю при $n \to \infty$ последовательности чисел $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos(nx+\varphi)\,dx$, равномерные оценки.
39. Формулы суммы последовательности косинусов. Ядро Дирихле, его свойства. Представление частичной суммы ряда Фурье с помощью ядра Дирихле.
40. Теорема о поточечной и равномерной сходимости рядов Фурье в классе кусочно-гладких периодических функций.
41. Коэффициенты ряда Фурье для производной f'. Равенство Парсеваля.
42. Вывод изопериметрического свойства окружности из равенства Парсеваля.
43. Теорема Фейера о равномерной сходимости усредненных рядов Фурье к непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса о возможности равномерного приближения непрерывных функций полиномами.
44. Мера и измеримые множества: определения, примеры, теорема об измеримости конечных объединений и пересечений измеримых множеств.
45. Теорема об измеримости счетного объединения попарно-непересекающихся измеримых множеств; счетная аддитивность меры данного объединения.
46. Пример неизмеримого множества.
47. Измеримость счетного объединения и пересечения семейства измери-

мых множеств (не обязательно непересекающихся).
48. Монотонные последовательности измеримых множеств: формулы для меры предельного множества.
49. Определение σ-алгебры множеств. Система измеримых множеств как пример σ-алгебры. Определение борелевской σ-алгебры. Регулярные и борелевские меры, меры Радона. Критерий Каратеодори для борелевских мер (без доказательства).
50. Теорема о том, что любое измеримое относительно меры Радона множество можно с нулевой точностью аппроксимировать борелевскими множествами.
51. Теорема о том, что любое измеримое относительно меры Радона множество можно с ε-точностью аппроксимировать открытыми и замкнутыми множествами.
52. Определение измеримых функций. Теорема о сохранении свойства измеримости при базовых операциях анализа (сумма, произведение функций, верхняя и нижняя грани, предельный переход).
53. Характеристические функции измеримых множеств. Представление произвольной неотрицательной измеримой функции в виде суммы ряда характеристических функций.
54. Теорема Егорова о поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей.
55. Теорема Урысона о продолжении непрерывных функций, заданных на замкнутых подмножествах (формулировка в общем случае; доказательство для частного случая).
56. Теорема Лузина об аппроксимации измеримых функций непрерывными.
57. Определение интеграла для простых (ступенчатых) функций. Интегрируемые и суммируемые простые функции.
58. Определение нижнего и верхнего интеграла для произвольной функции. Интегрируемые и суммируемые функции, их свойства, взаимосвязь с измеримостью.
59. Счетная аддитивность интеграла по множеству.
60. Теорема Фату.
61. Теорема Леви для неотрицательных функций.
62. Теорема Леви для знакопеременных функций. Теорема Леви для рядов.
63. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (мажорируемая сходимость).

64. Связь интегральной и поточечной сходимости.
65. Неравенство Чебышева. Теорема о равенстве нулю п.в. неотрицательной измеримой функции с нулевым интегралом.
66. Теорема Фубини. Пример несовпадения повторных интегралов.
67. Мера Лебега на вещественной прямой. Вычисление меры Лебега для отрезка. Определение меры Лебега в многомерном случае на основе теоремы Фубини. Мера Лебега n-мерных интервалов.
68. Вычисление интеграла Эйлера–Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ на основе теоремы Фубини.
69. Формула Кавальери–Лебега.
70. Абсолютная непрерывность интеграла.
71. Интегралы, зависящие от параметра: непрерывность, дифференцируемость (устанавливаемые на основе теоремы Лебега о мажорируемой сходимости).
72. Несобственные интегралы, зависящие от параметра: определение, критерий Коши, непрерывность, дифференцируемость.
73. Вторая теорема о среднем. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
74. Вычисление интеграла Дирихле $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\,dx$. Области значений параметра, где функция $I(\alpha)$ непрерывна; дифференцируема.
75. Вычисление интеграла Лапласа $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$. Области значений параметра, где функция $I(\alpha)$ непрерывна; дифференцируема.