1. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+\cos n} z^n$.

1(2) Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^{n-\ln n}}$.

2. Разложить в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = |\sin x|$.

2(2). Разложить в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = \sin |x|$.

3. Найти все экстремумы функции $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z)$ на множестве $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}$. Является ли множество M многообразием?

3(2) Найти экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на множестве $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 3z = 6\}$. Является ли множество M многообразием?

5. Найти предел последовательности функций $f_n(x) = (\sin x)^n$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Равномерна ли сходимость?

5(2). Найти предел последовательности функций $f_n(x) = (\cos x)^n$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Равномерна ли сходимость?

Задача 2

Найти поточечный предел последовательности функций $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $x \in (0, \infty)$. Равномерна ли сходимость?

Задача 3

Найти поточечный предел последовательности функций $f_n(x) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{n})$, $x \in [1, \infty)$. Равномерна ли сходимость?

Задача 4

Найти поточечный предел последовательности функций $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $x \in [1, \infty)$. Равномерна ли сходимость?

Задача 5

Найти поточечный предел последовательности функций $f_n(x) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{n})$, $x \in (0, 202]$. Равномерна ли сходимость?

Задача 6

Найти поточечный предел последовательности функций $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $x \in (0, 202]$. Равномерна ли сходимость?

Задача 7

Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!} z^n$.

Задача 8

Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4}$ в точке $z = \frac{1-2i}{2}$?

Задача 9

Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n - \sin n}$ в точке $z = \frac{1+2i}{3}$?

Задача 10

Указать какую-нибудь точку z, лежащую на границе круга сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} z^n$, в которой ряд расходится.

Задача 11

Найти множество $Z \subset \mathbb{C}$ точек z, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + \cos n}{n^2} z^n$.

Задача 2

На границе множества $Z \subset \mathbb{C}$ точек z, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} z^n$ найти какие-нибудь точки, где ряд сходится и где расходится.

Задача 13

Найти множество $Z \subset \mathbb{C}$ точек z, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!} z^n$.

Задача 14

Доказать: множество $Z \subset \mathbb{C}$ точек z, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, открыто.

Задача 15

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задано уравнением $x^2+2(x+y)^2=1$. Найти точки $(p,q) \in \Gamma$, в окрестности которой y *нельзя* неявно выразить, как функцию от x.

Задача 16

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ задано уравнением $x^2+y^2-z^2=1$. Найти точки $(p,q,r) \in \Gamma$, в окрестности которых z *нельзя* неявно выразить, как функцию от (x,y).

Задача 17

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ задано уравнением $x^2+y^2-z^2=1$. Найти точки $(p,q,r) \in \Gamma$, в окрестности которых x *нельзя* неявно выразить, как функцию от (y,z).

Задача 18

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ задано уравнением $x^2+y^2-z^2=-1$. Найти точки $(p,q,r) \in \Gamma$, в окрестности которых x *нельзя* неявно выразить, как функцию от (y,z).

Задача 19

При каком значении C множество в $\mathbb{R}^3$, определяемое равенством $x^2+y^2-z^2=C$, не будет многообразием?

Задача 20

При каких значениях C множество в $\mathbb{R}^3$, определяемое равенством $x^2+y^2-Cz^2=C$, будет двумерным многообразием? одномерным многообразием?

Задача 23

Доказать, что пара пересекающихся прямых не является многообразием.

Задача 24

Доказать, что окружность является многообразием.

Задача 25

Какие из букв в слове «*многообразие*» являются многообразиями, а какие — нет?

Задача 26

Какая буква в слове «*многообразие*» является C^0-, но не C^1-многообразием?

Задача 27

Какие из букв в слове «*многообразие*» являются многообразиями без края?

Задача 34

Написать разложение в ряд Фурье функции $\sin^{15} x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Задача 35

Чему равна сумма ряда Фурье функции $|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, в точке $x = \pi$?

Задача 36

Чему равна сумма ряда Фурье функции $\operatorname{sgn}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, в точке $x = \pi$?

Задача 37

Используя предельные теоремы теории интеграла, найти

$$\lim_{n\to\infty} \int \sin^n x\, dx.$$

Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, вы-

яснить, на каких из указанных промежутков имеет место непрерывность интеграла $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}(1+\operatorname{arctg} x)dx$ по параметру α:
(i) $[0,1]$; (ii) $[1,2]$; (iii) $[2,+\infty)$; (iv) $[2,+\infty]$.

Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, выяснить, на каких из указанных промежутков имеет место непрерывность интеграла $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha x}(1+\operatorname{arctg} x)dx$ по параметру α:
(i) $[0,1]$; (ii) $[1,2]$; (iii) $[2,+\infty)$; (iv) $[2,+\infty]$.

Найти меру канторова множества (которое строится по классической схеме: отрезок $[0,1]$ делится на три части, средний открытый интервал $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ выбрасывается, затем каждый из оставшихся отрезков $[0,\frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3},0]$ делится на три части, средняя часть выбрасывается, и т.д.).

Задача 38

1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое (относительно одномерной меры Лебега $\mathscr{L}^1$) множество). Для числа $t > 0$ обозначим $E_t = \{tx : x \in E\}$. Доказать, что $\mathscr{L}^1(E_t) = t\mathscr{L}^1(E)$.

2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (относительно n-мерной меры Лебега) множество. Для числа $t > 0$ обозначим $E_t = \{(tx_1,\ldots,x_n) : (x_1,\ldots,x_n) \in E\}$. Доказать с помощью теоремы предыдущей задачи и теоремы Фубини, что $\mathscr{L}^n(E_t) = t\mathscr{L}^n(E)$.

3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (относительно n-мерной меры Лебега) множество. Для вектора $\boldsymbol{\tau} = (t_1,\ldots,t_n)$ с положи-

тельными компонентами $t_i > 0$ обозначим

$$E_{\boldsymbol{\tau}} = \{(t_1 x_1, t_2 x_2, \ldots, t_n x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in E\}.$$

Доказать с помощью теоремы предыдущей задачи и теоремы Фубини, что $\mathscr{L}^n(E_{\boldsymbol{\tau}}) = t_1 \ldots t_n \mathscr{L}^n(E)$.

4. Для параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$ обозначим через $\sigma_{\alpha\beta}$ меру Лебега $\mathscr{L}^2(E)$ плоского множества

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^\alpha + y^\beta < 1\}.$$

Используя предыдущую задачу, выразить через константу $\sigma_{\alpha\beta}$ меру $\mathscr{L}^2(E_t)$, где

$$E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^\alpha + y^\beta < t\}.$$

5. Используя формулу Кавальери–Лебега, найти значение интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_E \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} dx\, dy,$$

где, как и в прошлой задаче,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^\alpha + y^\beta < 1\}.$$

6. Выяснить, с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, в какой области изменения параметров интеграл $I(\alpha, \beta)$ конечен? непрерывен по α, β?

7. Используя формулу Кавальери–Лебега, найти значение интеграла

$$I(p, \alpha, \beta) = \int\limits_E \frac{1}{(x^\alpha + y^\beta)^p} dx\, dy,$$

где, как и в прошлых задачах,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^\alpha + y^\beta < 1\}.$$

Задача 39

1. Для вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с положительными компонентами $\alpha_i > 0$ положим

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n} < 1\},$$

и обозначим

$$\sigma_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathscr{L}^n(E).$$

Используя задачу 38_3, выразить через константу $\sigma_{\boldsymbol{\alpha}}$ меру $\mathscr{L}^n(E_t)$, где

$$E_t = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n} < t\}.$$

2. Используя формулу Кавальери–Лебега, найти значение интеграла

$$I(\boldsymbol{\alpha}) = \int\limits_E \frac{1}{x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n}} dx_1 \ldots dx_n,$$

где, как и в прошлой задаче,

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_n^{\alpha_n} < 1\}.$$

Выяснить, когда данный интеграл конечен.

Задача 40

1. Используя формулу Кавальери–Лебега, при $\alpha > 0$ найти значение n-мерного интеграла

$$I = \int\limits_{|x|<1} (1 - |x|^2)^\alpha \, dx = \int\limits_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1} (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} \, dx.$$

Задача 41

С помощью теоремы Фубини выразить объем n-мерного конуса

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 0,$$

$$0 \leq x_n \leq h$$

через объем единичного шара σ_n пространства $\mathbb{R}^n$.

Задача 42

Пусть $\varphi(x)$, $f(x)$ — неотрицательные измеримые функции, заданные на пространстве с мерой (X, μ). Обозначим

$$E_t(f) = \{x \in X : f(x) \geq t\}.$$

Доказать, что

$$\int\limits_X f(x)g(x)\,d\mu = \int\limits_0^\infty \left(\int_{E_t(f)} \varphi(x)\,d\mu \right) dt.$$

Задача 43

Пусть $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ — строго монотонная дифференцируемая функция на интервале $(0,1)$. Доказать равенство

$$\int\limits_{|x|\leq 1} \varphi(|x|)\,dx_1 \dots dx_n = n\sigma_n \int\limits_0^1 r^{n-1}\varphi(r)\,dr$$

здесь σ_n — объем единичного n-мерного шара)

Задача 44

Посчитать n-мерный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\dots dx_n$$

двумя способами: с помощью теоремы Фубини (используя формулу Эйлера–Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$), и с помощью формулы Кавальери–Лебега, и выразить таким образом объем единичного шара через одномерный интеграл от элементарных функций.

Задача 45

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ есть интегрируемая по Лебегу функция на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Положим $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Доказать, что функция F непрерывна на $[a,b]$.