

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Примечание: подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно рассказывать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях, или содержится в электронном конспекте, или если оно было оставлено в качестве упражнения.

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Определение непродолжаемого решения, интегральной кривой. Постановка задачи Коши. Геометрический смысл. Теоремы Пеано и Пикара (формулировки и примеры).

2. Уравнения с разделяющимися переменными, разрешенные относительно производной. Теоремы о существовании и единственности решения (с доказательствами).

3. Уравнения с разделяющимися переменными в симметричной форме. Теоремы о существовании и единственности решения (с доказательством).

4. Общее поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах.

5. Интегрирующий множитель для однородного поля направлений. Уравнение Дарбу.

6. Доказательство теоремы Пикара: сведение к задаче о неподвижной точке интегрального оператора, точное описание банахового пространства, в котором действует этот оператор (§1.3 гл. 1 до Леммы 1.3.6 включительно).

7. Доказательство теоремы Пикара: §1.3 гл. 1 от Леммы 1.3.7 до конца.

8. Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Уравнение $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, сведение к системе. Теоремы Пеано и Пикара для систем и для уравнений n -го порядка.

9. Теорема о покидании компакта.

10. Теоремы о поведении непродолжаемых решений в «вертикальной полосе».

11. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

12. Теорема Уинтнера (формулировка и примеры). Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = A(t)X + F(t)$.

13. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Теорема об изоморфизме.
14. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства (весь материал §1.2 гл.3, но без доказательства формулы Лиувилля–Остроградского).
15. Формула Лиувилля–Остроградского для систем и уравнений n -го порядка.
16. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (для систем и для линейных уравнений n -го порядка).
17. Изоморфизм между пространствами непродолжаемых решений однородного уравнения и соответствующей системы. Теория линейного уравнения n -го порядка как следствие теории линейных систем.
18. Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам. Переформулировка основных теорем про вещественных линейные системы для комплексного случая.
19. Линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами, построение ФСР.
20. Частное решение линейного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами в случае квазиполиномиальной неоднородности.
21. Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A .
22. Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений.
23. Малые колебания систем со многими степенями свободы. Вынужденные колебания с неоднородностью в форме квазиполинома.
24. Периодические решения д.у.
25. Представление периодических решений линейных д.у. рядами Фурье; резонанс.
26. Класс гладкости решения соответствующий гладкости правой части системы.
27. Непрерывная зависимость решений системы от начальных данных и параметров.
28. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам. Уравнения в вариациях и постановка задачи Коши для производных решения по начальным данным и по параметрам.

29. Теорема о существовании и единственности периодического решения, стремящегося к периодическому решению порождающего (невозмущенного) уравнения. Применение к случаю линейного нерезонансного порождающего уравнения.

30. Существование аналитического решения задачи Коши для нелинейных аналитических систем и уравнений n -го порядка.

31. Построение решений с помощью степенных рядов: однородный случай.

32. Построение решений с помощью степенных рядов: неоднородный случай.

33. Уравнения с регулярной особой точкой и построение решений с помощью обобщенно-степенных рядов.