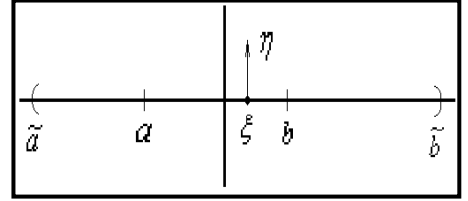


Краевые задачи.

(1) $Ly = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$, $A(x), B(x), C(x), f(x) \in C(\tilde{a}, \tilde{b})$, $A(x) \neq 0$ ни разу, все функции комплекснозначные.

$$(2) \begin{cases} l_1 y \equiv hy(a) + h' y'(a) = \alpha \\ l_2 y \equiv ky(b) + k' y'(b) = \beta \end{cases}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h, h', k, k', \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$



Определение: (α, β, f) - задачей называют задачу найти $y(x) \in (1)$, такое, что (2) верно.
 $(0, 0, 0)$ – задача имеет хоть одно решение, а именно $y(x) \equiv 0, x \in (\tilde{a}, \tilde{b})$.

Предложение 1:

1) L - линейный оператор, $y(x) \in C^2(\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow C(\tilde{a}, \tilde{b})$

2) l_1 и l_2 - линейные функционалы.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ на $(\tilde{a}, \tilde{b})$ - базис пространства всех непродолжаемых решений однородного уравнения и $\tilde{y}(x) \in \{f\}$ - некоторое фиксированное решение неоднородного уравнения, тогда для любого $y(x) \in \{f\}$ существует и притом единственная пара чисел $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in C^2$, таких, что (*): $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$. Если $f(x) \equiv 0$ на $(\tilde{a}, \tilde{b})$, то в представлении (*) $\tilde{y}(x) \equiv 0$

Предложение 1': Если $y(x) \in (\alpha, \beta, f)$ задаче, то в представлении (*) $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ есть решение

линейной алгебраической системы (3). (Для $(0, 0, 0)$ – задачи система (3) однородная).
 Верно и обратное.

Доказательство: подставим (*) в (2): $\begin{cases} l_1 y = c_1 l_1 y_1 + c_2 l_1 y_2 + l_1 \tilde{y} = \alpha \\ l_2 y = c_1 l_2 y_1 + c_2 l_2 y_2 + l_2 \tilde{y} = \beta \end{cases}$, следовательно,

(3): $\begin{pmatrix} l_1 y_1 & l_1 y_2 \\ l_2 y_1 & l_2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - l_1 \tilde{y} \\ \beta - l_2 \tilde{y} \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} l_1 y_1 & l_1 y_2 \\ l_2 y_1 & l_2 y_2 \end{pmatrix} = \Delta$ - зависит от $A, B, C, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix}$, но не от α, β, f . Обратно – читай справа налево.

Для $(0, 0, 0)$ – задачи получаем: $\begin{pmatrix} l_1 y_1 & l_1 y_2 \\ l_2 y_1 & l_2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (т.к. $\alpha = \beta = 0$ и $\tilde{y}(x) \equiv 0$).

Теорема 1: Следующие три утверждения эквивалентны:

- 1) $\Delta \neq 0$
- 2) любая (α, β, f) - задача имеет и только одно решение.
- 3) $(0, 0, 0)$ – задача имеет лишь $y(x) \equiv 0$.

Доказательство:

1) $\rightarrow$ 2): из $\Delta \neq 0$ следует, что для любой (α, β, f) - задачи существует, и притом единственная пара чисел $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in C^2 \in (3)$, следовательно, по предложению (1') существует, и притом единственная $y(x) \in (\alpha, \beta, f)$ - задаче.

2) $\rightarrow$ 3) : очевидно.

3) $\rightarrow$ 1) : Пусть $(0,0,0)$ – задача имеет лишь $y(x) \equiv 0$, тогда $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$, следовательно, однородная система (3) имеет лишь тривиальное решение $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, следовательно, $\Delta \neq 0$.

Предложение 2: Пусть $f(x) \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} 0$ и фиксируем точку $\xi \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, и пусть $(m, m') \neq (0,0)$, $m, m' \in C$, и $ly = my(\xi) + m' y'(\xi)$, тогда совокупность всех непродолжаемых решений однородного уравнения, удовлетворяющих условию: $ly = 0$ есть одномерное подпространство двумерного пространства всех непродолжаемых решений.

Доказательство: $ly = my(\xi) + m' y'(\xi) = 0$. Данному уравнению удовлетворяет пара чисел $(-m', m)$, ибо $m \cdot (-m') + m' \cdot m = 0$. Знаем, что $\exists! v(x) \in \{0\}$:
$$\begin{matrix} v(\xi) = -m' \\ v'(\xi) = m \end{matrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
 следовательно, $v(x) \neq 0$, $lv = 0$.

Очевидно, что для любого $c \in C$ $l(cv(x)) = 0$

Пусть $y(x) \in \{0\}$: $ly = 0$.
$$\begin{cases} my(\xi) + m' y'(\xi) = 0 \\ mv(\xi) + m' v'(\xi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} m & m' \\ v(\xi) & v'(\xi) \end{pmatrix} = 0 \text{ (т.к. } (m, m') \neq (0,0) \text{ - решение), но}$$

 $\det \begin{pmatrix} m & m' \\ v(\xi) & v'(\xi) \end{pmatrix} = W(\xi)$, следовательно, $y(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы. Т.к. $v(x) \neq 0$, то $y(x) = cv(x)$.

Теорема 2: Если $(0,0,0)$ – задача имеет $v(x) \neq 0, (\tilde{a}, \tilde{b})$, то

1) Все решения $(0,0,0)$ – задачи есть одномерное пространство решений однородного уравнения.

2) для каждой $f \in C(\tilde{a}, \tilde{b})$

а) $\exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in C^2 : (\alpha, \beta, f)$ не имеет ни одного решения.

б) $\exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in C^2 : (\alpha, \beta, f)$ имеет хоть одно решение $(U(x))$, при этом $\forall c \in C$

имеем $cv(x) + U(x) \in (\alpha, \beta, f)$ и обратно, для каждого решения $y(x)$ (α, β, f) - задачи существует единственное $c \in C$: $y(x) = cv(x) + U(x)$.

Доказательство:

1) $lv = 0$, $v \neq 0$, следовательно, по предложению 2, $cv(x)$ – все решения $y(x) \in \{0\}$, такие, что $l_1 y = 0$. По предложению (2) все решения $y(x) \in \{0\}$, $l_2 y = 0$ – одномерное пространство, $y(x) = cv(x)$. Таким образом, все решения $(0,0,0)$ –задачи есть $y(x) = cv(x)$.

2) а) из $v(x) \neq 0$ решение $(0,0,0)$ – задачи следует, что $\Delta = 0$, т.е. $\det \begin{pmatrix} l_1 y_1 & l_1 y_2 \\ l_2 y_1 & l_2 y_2 \end{pmatrix} = 0$,

тогда столбцы линейно зависимы, следовательно, существует $\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} \in C^2$ – линейно

независимый от столбцов (т.к. пространство C^2 двумерное). Берем $\alpha = \sigma + l_1 \tilde{y}$, $\beta = \tau + l_2 \tilde{y}$, тогда $c_1 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - l_1 \tilde{y} \\ \beta - l_2 \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$. Из выбора $\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$ следует: не существует $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, следовательно, не существует ни одного решения (3), тогда не существует ни одного решения (α, β, f) -задачи.

б) берем любое $U(x) \in \{f\}$. полагаем $\alpha = l_1 U$, $\beta = l_2 U \Rightarrow U(x) \in (\alpha, \beta, f)$ -задаче, пусть $U(x) \in (\alpha, \beta, f)$ -задаче, и $c \in C$ тогда $y(x) = cU(x) + U(x) \in (\alpha, \beta, f)$ -задаче, т.к. $\begin{matrix} l_1 y = cl_1 U + l_1 U = \alpha \\ l_2 y = \beta \end{matrix}$.

Обратно: Пусть $y(x) \in (\alpha, \beta, f)$ -задаче, тогда $\begin{cases} l_1(y - U) = 0 \\ l_2(y - U) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) - U(x) \in (0, 0, 0)$ -задаче, тогда $y(x) - U(x) = cU(x)$, т.е. $y(x) = cU(x) + U(x)$.

Сведение (α, β, f) -задачи к $(0, 0, \tilde{f})$ -задаче.

Лемма 1: (интерполяционный полином Лагранжа-Сильвестра) Пусть $a \neq b \in C$ и $(A, A'), (B, B') \in C$, тогда существует единственный полином не выше третьей степени $P_3(x)$:

$$\begin{matrix} P_3(a) = A & P'_3(a) = A' \\ P_3(b) = B & P'_3(b) = B' \end{matrix}$$

Доказательство: $P_3(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$

$$\begin{cases} p_0 + p_1 a + p_2 a^2 + p_3 a^3 = A = P_3(a) \\ p_1 + 2p_2 a + 3p_3 a^2 = A' = P'_3(a) \\ p_0 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 = B = P_3(b) \\ p_1 + 2p_2 b + 3p_3 b^2 = B' = P'_3(b) \end{cases} \text{ получили алгебраическую систему.}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & b & b^2 \end{pmatrix} = (b-a)^4 \neq 0, \text{ следовательно, } p_0, p_1, p_2, p_3 \text{ вычисляются однозначно.}$$

Замечание: вместо двух точек можно взять любой конечный набор точек и в любой точке задать $P(a_i), P'(a_i), \dots, P^{(k_i)}(a_i)$ - всего N условий. Тогда существует полином не выше степени $(N-1)$, удовлетворяющий всем условиям.

Лемма 2: Существует полином $P_3(x)$, не выше третьей степени (не единственный), такой что $l_1 P_3 = \alpha$, $l_2 P_3 = \beta$.

$l_1 P_3 = h P_3(a) + h' P'_3(a) = \alpha$, из $\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \neq 0$ следует, что существуют $A, A' : hA + h' A' = \alpha$.

Аналогично, существуют $B, B' : kB + k' B' = \beta$, A, A', B, B' вычисляются не однозначно, далее по лемме 1 следует существование $P_3(x)$: $\begin{matrix} P_3(a) = A & P'_3(a) = A' \\ P_3(b) = B & P'_3(b) = B' \end{matrix}$, следовательно,

$$l_1 P_3 = \alpha, \quad l_2 P_3 = \beta.$$

Предложение 3: Если $y(x), (\tilde{a}, \tilde{b}) \in (\alpha, \beta, f)$, то $y(x) - P_3(x) = \varphi(x) \in (0, 0, \tilde{f})$, где $\tilde{f} = f - LP_3$. Верно и обратное.

Доказательство: $L(y(x) - P_3(x)) = L(y(x)) - L(P_3(x)) = f(x) - L(P_3(x))$.

$$l_1 \varphi = l_1 y - l_1 P_3 = \alpha - \alpha = 0$$

$$l_2 \varphi = l_2 y - l_2 P_3 = \beta - \beta = 0$$

обратно: если $\varphi(x) \in (0, 0, f - L(P_3(x)))$, то $\varphi(x) + P_3(x) = y(x) \in (\alpha, \beta, f)$. Очевидно.

Следствие: Достаточно найти все решения $(0, 0, f - L(P_3))$ -задачи. Потом прибавив к любому решению $P_3(x)$ получим все решения (α, β, f) -задачи.

Решение задачи $(0, 0, f)$, в случае, когда задача $(0, 0, 0)$ имеет лишь тривиальное решение.

$$1) A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x), \quad A(x) \neq 0.$$

$$2) l_1 y = 0, \quad l_2 y = 0.$$

$$3) y'' + \frac{B(x)}{A(x)} y' + \frac{C(x)}{A(x)} y = \frac{f(x)}{A(x)} = F(x).$$

$$4) y'' + \frac{B(x)}{A(x)} y' + \frac{C(x)}{A(x)} y = 0.$$

Найдем специальный базис. Пусть $y_l(x)$ - решение уравнения 4), отличное от тождественного нуля, $l_1 y_l = 0$, $y_l(x)$ существует по предложению 2, тогда $l_2 y_l \neq 0$.

Пусть $y_r(x)$ - решение уравнения 4), отличное от тождественного нуля, $l_2 y_r = 0$, $y_r(x)$ существует по предложению 2, тогда $l_1 y_r \neq 0$. Утверждаем, что $y_l(x)$ и $y_r(x)$ линейно

независимые. (Пусть $c_1 y_l + c_2 y_r \equiv 0$, $l_1(c_1 y_l + c_2 y_r) = c_1 l_1 y_l + c_2 l_1 y_r = 0$. Из $l_1 y_l = 0$, $l_1 y_r \neq 0$ следует, что $c_2 = 0$. Аналогично, $c_1 = 0$.)

Лемма 1: (*) $\begin{cases} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0 \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = F(x) \end{cases}$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - базис однородного уравнения 4).

$$1) \text{ если } \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \in (*), \text{ то } y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \in (3).$$

$$2) \text{ Обратно: если } y(x) \in (3), \text{ то существует столбец } \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \in (*), \text{ такой, что:}$$

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Доказательство: 1) метод вариации произвольной постоянной.

2) проверить!

Замечание: из (*) следует, что $c'_1 = -\frac{y_2(x)}{W(x)} F(x)$, $c'_2 = \frac{y_1(x)}{W(x)} F(x)$.

Лемма 2: Пусть $ly = my(\xi) + m'y'(\xi)$, $\xi \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, $(m, m') \neq (0, 0)$ и пусть дифференцируемые в точке ξ функции $y_1, y_2, \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$, таковы, что $c_1'(\xi)y_1(\xi) + c_2'(\xi)y_2(\xi) = 0$ (5).

Рассмотрим $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, тогда $ly = c_1(\xi)ly_1 + c_2(\xi)ly_2$.

Доказательство: прямое вычисление и использование (5).

Решение задачи $(0, 0, f)$.

Любое решение уравнения (3) имеет вид: $y(x) = c_1(x)y_l(x) + c_2(x)y_r(x)$.

$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \in (*)$, где $y_1 = y_l, y_2 = y_r$ следовательно, $l_1y = c_1(a)l_1y_l + c_2(a)l_1y_r = 0$. Из

$l_1y_l = 0, l_1y_r \neq 0$ следует, что $c_2(a) = 0$, следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница,

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{y_l(s)}{W(s)} F(s) ds$$

$l_2y = c_1(b)l_2y_l + c_2(b)l_2y_r = 0$, получаем, что $c_1(b) = 0$, следовательно,

$$c_1(x) = \int_b^x -\frac{y_r(s)}{W(s)} F(s) ds = \int_x^b \frac{y_r(s)}{W(s)} F(s) ds.$$

Получаем, что: $y(x) = \int_x^b \frac{y_l(x)y_r(s)}{W(s)} F(s) ds + \int_a^x \frac{y_r(x)y_l(s)}{W(s)} F(s) ds$, следовательно,

$$y(x) = \int_a^x \frac{y_r(x)y_l(s)}{A(s)W(s)} f(s) ds + \int_x^b \frac{y_l(x)y_r(s)}{A(s)W(s)} f(s) ds, \quad x \in (\tilde{a}, \tilde{b}), f(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$$

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad x \in [a, b]. \quad G(x, s) -$$

функция Грина дифференциального оператора $Ly = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y$ с краевыми условиями:

$$l_1y = hy(a) + h'y'(a) = 0$$

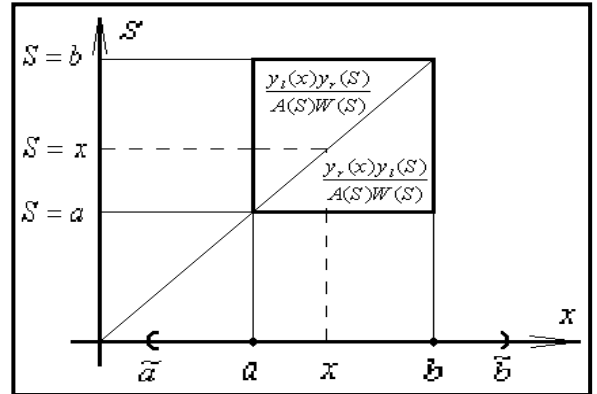
$$l_2y = ky(b) + k'y'(b) = 0.$$

(При условии, что $(0, 0, 0)$ задача имеет лишь тривиальное решение).

$$D = \{C - \text{значные } y(x) \in C^2[a, b] : l_1y = 0, l_2y = 0\}. \quad L : y(x) \in D \rightarrow Ly(x) = f(x) \in C([a, b]).$$

$$G(x, s) - \text{ядро интегрального оператора, обратного к } L : L^{-1}f = y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds.$$

$$G(x, s) \in C([a, b] \times [a, b]) \text{ (доказать!).}$$



Решение задачи $(0, 0, f)$, в случае, когда задача $(0, 0, 0)$ имеет решение $v(x)$, отличное от тривиального.

Теорема 3: Пусть известно, что существует $v(x) \neq 0 \in (0, 0, 0)$ -задаче, т.е. $Lv = 0, l_1v = 0, l_2v = 0$.

Предположим, что существует хоть одно $U(x) \in (0, 0, f)$, $f \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$, тогда

$$\int_a^b f(s)v(s) \frac{\exp\left(\int_a^s \frac{B(t)}{A(t)} dt\right)}{A(s)} ds = 0$$
 (ортогональность с весом $\frac{\exp\left(\int_a^s \frac{B(t)}{A(t)} dt\right)}{A(s)}$). Обратно: из

$$\int_a^b f(s)v(s) \frac{\exp\left(\int_a^s \frac{B(t)}{A(t)} dt\right)}{A(s)} ds = 0$$
 следует, что существует $U(x) \in (0,0,f)$. При этом все решения $(0,0,f)$ задачи имеют вид: $y(x) = c v(x) + U(x)$.

Доказательство: $y_1(x) = v(x)$, $y_2(x)$ - любое решение однородного уравнения, линейно независимое от $v(x)$, следовательно, для каждого решения $y(x) \in \{f\}$ существует $\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \in (*)$, что $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, $l_1 y_2 \neq 0$, т.к. если $l_1 y_2 = 0$, то по предложению 2 $y_2 = c v(x)$, противоречие. Аналогично, $l_2 y_2 \neq 0$.

Пусть $U(x)$ - некоторое решение $(0,0,f)$ - задачи. $U(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$.

$$0 = l_1 U = c_1(a)l_1 y_1 + c_2(a)l_1 y_2, \quad l_1 y_1 = 0, \quad l_1 y_2 \neq 0 \Leftrightarrow c_2(a) = 0 \Leftrightarrow c_2(x) = \int_a^x c_2'(s) ds = \int_a^x \frac{y_1(s)}{W(s)} F(s) ds.$$

$$0 = l_2 U = c_1(b)l_2 y_1 + c_2(b)l_2 y_2, \quad l_2 y_1 = 0, \quad l_2 y_2 \neq 0, \Leftrightarrow c_2(b) = 0, \Leftrightarrow \int_a^b \frac{y_1(s)}{W(s)} F(s) ds = 0. \quad (1)$$

Обратно: Пусть (1) есть. Построим $U(x)$, выбрав:

$$\left. \begin{aligned} c_1(x) &= \int_b^x -\frac{y_2(s)}{W(s)} F(s) ds \\ c_2(x) &= \int_a^x \frac{y_1(s)}{W(s)} F(s) ds \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \in (*), \text{ следовательно, } c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = U \in \{f\}.$$

$$\left. \begin{aligned} c_2(a) = 0 &\Rightarrow l_1 U = 0 \\ c_2(b) = 0 &\Rightarrow l_2 U = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(x) \in (0,0,f). \text{ Все остальные решения } (0,0,f) \text{ - задачи имеют вид}$$

$y(x) = c v(x) + U(x)$ по теореме 2.

$$\int_a^b \frac{y_1(s)}{W(a) \exp\left(\int_a^s -\frac{B(t)}{A(t)} dt\right)} \frac{f(s)}{A(s)} ds = 0, \quad W(a) \neq 0, \text{ следовательно, } \int_a^b \frac{f(s)y_1(s)}{A(s)} \exp\left(\int_a^s \frac{B(t)}{A(t)} dt\right) ds = 0.$$

Теорема доказана.

Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора.

(1) $Ly = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y$; $A, B, C \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$ - $\mathbb{R}$ значные функции, $A \neq 0$ ни разу.

(2) $l_1 y \equiv h y(a) + h' y'(a) = 0$, $\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h, h', k, k' \in \mathbb{R}$.
 $l_2 y \equiv k y(b) + k' y'(b) = 0$

$D(L) = \{y(x) \in C^2((\tilde{a}, \tilde{b})) \mid l_1 y = 0, l_2 y = 0\}$, $y(x)$ - C значное.

$D(L)$ - линейное пространство над $\mathbb{C}$. $L : D(L) \rightarrow C((\tilde{a}, \tilde{b}))$.

Определение: $\lambda \in C$ - собственное значение дифференциального оператора (1) с условиями (2), если существует $y(x) \in D(L)$, отличное от тождественно нулевого на $(\tilde{a}, \tilde{b})$, что $Ly = \lambda y$. Для матриц: $A_{n \times n} H = \lambda H$, $H \neq 0 \in C^n$.

Предложение 1: Если $\lambda \in C$ - собственное значение дифференциального оператора и $v(x)$ его собственная функция, то все остальные собственные функции, отвечающие этому собственному значению есть: $y(x) = c v(x)$, $c \in C \neq 0$.

Доказательство: следует из теоремы 2 части 1) для оператора $\tilde{L}y = Ly - \lambda y$.

Предложение 2: Если собственное значение λ действительное, то для него существует R -значная собственная функция $\tilde{y}(x) \neq 0$, а остальные $y(x) = c \tilde{y}(x)$, $c \neq 0$.

Доказательство: пусть $y(x) = u(x) + i v(x)$. Либо $u(x) \neq 0$, либо $v(x) \neq 0$. $Ly = \lambda y$. Выделяя реальную и мнимую части, получаем, что
$$\begin{matrix} Lu = \lambda u & Lv = \lambda v \\ l_1 u = l_2 u = 0 & \text{и} & l_1 v = l_2 v = 0 \end{matrix}$$
 следовательно, $U(x)$ либо $v(x)$ действительная собственная функция.

Предложение 3: Если $\lambda \neq \mu$ собственные значения дифференциального оператора и $y_\lambda(x)$, $y_\mu(x)$ - собственные функции, тогда
$$\int_a^b \left[y_\lambda(x) y_\mu \frac{1}{A(x)} \exp \left(\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)} dt \right) \right] dx = 0.$$

Доказательство: $Ly_\lambda = \lambda y_\lambda \Rightarrow (L - \lambda I)y_\lambda = 0$, т.е. $(0, 0, 0)$ - задача для оператора $(L - \lambda I)$ имеет $y_\lambda(x) \neq 0$. $Ly_\mu = \mu y_\mu \Leftrightarrow Ly_\mu - \lambda y_\mu = \mu y_\mu - \lambda y_\mu$, получаем

$(L - \lambda I)y_\mu(x) = (\mu - \lambda)y_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$, следовательно, $(0, 0, f)$ - задача имеет хоть одно решение

(а именно $y_\mu(x)$), следовательно,
$$\int_a^b \left[y_\lambda(x) (\mu - \lambda) y_\mu(x) \frac{1}{A(x)} \exp \left(\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)} dt \right) \right] dx = 0.$$

Сокращаем на $(\mu - \lambda) \neq 0$.

Приведение дифференциального оператора к самосопряженной форме.

(3) $Ly \equiv A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y$, $A(x) \neq 0$ ни разу, $A(x) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$, $B(x), C(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$,

A, B, C - R -значные. Если $B = A'$, то оператор $Ly \equiv A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y \equiv (A(x)y')' + C(x)y$ имеет самосопряженную форму. Умножим уравнение (3) на $\rho(x) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b})) \neq 0$ ни разу.

Получаем (4) $\rho Ly \equiv \rho A y'' + \rho B y' + \rho C y$. Подберем ρ так, чтобы $\rho B = (\rho A)'$, т.е.

$(\rho A)' = \frac{B}{A}(\rho A)$, следовательно, $\rho(x) = \frac{1}{A(x)} \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{B(t)}{A(t)} dt \right) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$, $x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, тогда (4)

примет вид: (4'): $\rho Ly = (p(x)y')' + q(x)y$, где
$$\begin{matrix} 0 < p(x) = A(x)\rho(x) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b})) \\ q(x) = C(x)\rho(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b})) \end{matrix}$$

$\text{sgn } \rho(x) = \text{sgn } A(x)$

Применение к задаче на собственные значения.

(1') $Ly \equiv A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = \lambda y$, $A(x) \in C^1(\tilde{a}, \tilde{b})$ ни разу $\neq 0$, $\lambda \in C$, $B(x), C(x) \in C(\tilde{a}, \tilde{b})$, $A(x), B(x), C(x)$ - R-значные. умножим (1') на $\rho(x)$, получим:

$$(1'') \tilde{L}y \equiv (p(x)y')' + q(x)y = \lambda \rho(x)y.$$

Следствие: если $y(x) \neq 0$ и $l_1 y = l_2 y = 0$, и $y(x) \in (1')$, то $y(x) \in (1'')$, и обратно: $\tilde{L}y = \lambda \rho(x)y$, т.е. если $\lambda, y(x)$ - собственное значение и собственная функция оператора L , то есть собственные значения и собственные функции пары операторов $\tilde{L}$ и $\rho(x)I$, I - тождественный оператор.

Задача Штурма – Лиувилля.

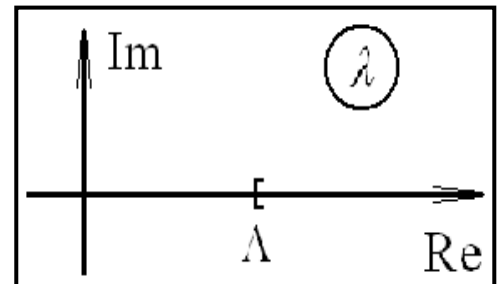
$$\begin{cases} \tilde{L}y \equiv ((p(x)y')' + q(x)y = \lambda \rho(x)y \\ l_1 y = hy(a) + h'y'(a) = 0 \\ l_2 y = ky(b) + k'y'(b) = 0 \end{cases}, \begin{cases} 0 < p \in C^1(\tilde{a}, \tilde{b}) \\ q \in C(\tilde{a}, \tilde{b}), R\text{-значн.} \\ 0 < \rho(x) \in C \end{cases}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h, h', k, k' \in R$$

Задача Штурма – Лиувилля: найти число $\lambda \in C$ и $y(x) \neq 0$ такое, что $\{$ верно. Тогда λ - собственное число задачи Штурма – Лиувилля, $y(x)$ - собственная функция задачи Ш-Л.

Теорема 1: существует $\Lambda \in R$, что все $\lambda \in [\Lambda, +\infty)$ не собственные значения задачи Штурма - Лиувилля.

Доказательство: для случая $\begin{cases} l_1 y = y(a) = 0 \\ l_2 y = y(b) = 0 \end{cases}$.

Пусть $\min_{[a,b]} \rho(x) = m > 0$
 $\max_{[a,b]} |q(x)| = M \geq 0$. Годится $\Lambda = \frac{M}{m}$.



Докажем, что $\lambda \geq \frac{M}{m}$ не собственное значение задачи Штурма - Лиувилля.

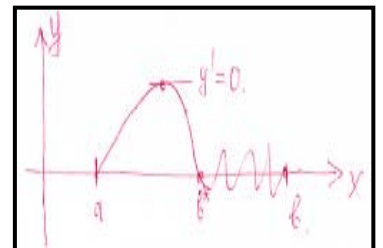
От противного: Пусть $\lambda \geq \frac{M}{m}$ - собственное значение, $\lambda \in R$, следовательно, по предложению 2 существует собственная функция $y(x) \neq 0$, $y(x)$ - R значная, $\frac{d}{dx}[p(x)y'] = [\lambda \rho(x) - q(x)]y = f(x)y$, $\lambda \geq \frac{M}{m}$, $\min \rho(x) = m$, $\max |q(x)| = M$, $\Rightarrow f(x) \geq 0$.

$y'(a) \neq 0$, ибо из $\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y(a) = 0 \end{cases}$ следует, что $y(x)$ тождественно нулевое.

Пусть $y'(a) > 0$ (иначе возьмем $-y(x)$). Пусть b^* первый ноль функции $y(x)$, $a < b^* \leq b$. Интегрируем от a до x :

$$p(x)y'(x) - p(a)y'(a) = \int_a^x f(t)y(t)dt. \text{ Т.к. } f(x) \underset{[a,b^*]}{\geq} 0, y(x) \underset{[a,b^*]}{\geq} 0, \text{ то}$$

$$\int_a^x \geq 0. \quad p(x) > 0, \text{ следовательно, } y'(x) \underset{[a,b^*]}{>} 0. \text{ Противоречие с}$$



$$y(a) = y(b^*) = 0.$$

Эквивалентность задачи Штурма – Лиувилля интегральному уравнению.

Лемма 1: для уравнения $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, $p(x) \in C^1 \neq 0$, $q(x) \in C(\tilde{a}, \tilde{b})$ имеем: $p(x)W(x) \equiv \text{const}$.

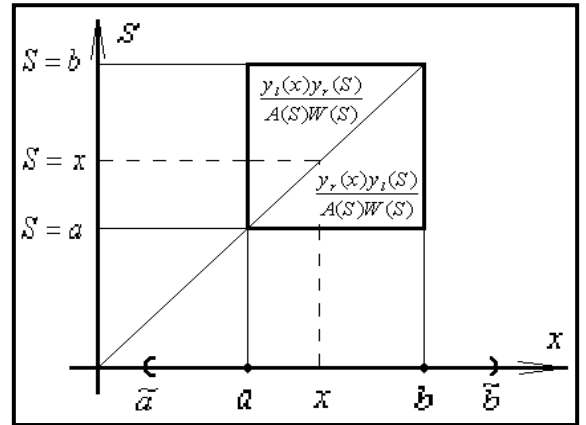
Доказательство:

$$y'' = -\frac{p'}{p}y' - \frac{q}{p}y \Rightarrow W' = -\frac{p'}{p}W \Leftrightarrow p'W + pW' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(pW) = 0 \Rightarrow pW = \text{const}$$

Следствие: для оператора $\begin{cases} Ly \equiv (p(x)y')' + q(x)y \\ l_1 y = l_2 y = 0 \end{cases}$ с условием $(0,0,0)$ задача имеет лишь

тривиальное решение имеем: $G(x, S) - R$ значная и $G(x, S) = G(S, x)$.

Доказательство: $hy_l(a) + h'y_l'(a) = 0$. Возьмем $y(a) = -h'$, $y'(a) = h$. Решением однородного уравнения второго порядка с действительными коэффициентами и действительными условиями Коши является действительная функция, т.е. $y_l(x) - R$ -значная. Аналогично, $y_r(x) - R$ -значная. $W(x)$ R -значных функций R -значен, следовательно, $G(x, S)$ R -значная. Берем две симметричные точки (x, S) в левом



$$\left. \begin{aligned} G(x, S) &= \frac{y_l(x)y_r(S)}{A(S)W(S)} \\ G(S, x) &= \frac{y_r(S)y_l(x)}{A(x)W(x)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &A(x) = p(x) \Rightarrow A(x)W(x) = p(x)W(x) = \text{const} = p(S)W(S) = A(S)W(S) \\ &\text{т.е. } A(x)W(x) = A(S)W(S) \\ &y_l(x)y_r(S) = y_r(S)y_l(x) \end{aligned} \Rightarrow G(x, S) = G(S, x)$$

Сведение задачи Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению.

(1) $Ly \equiv (p(x)y')' + q(x)y = \lambda \rho(x)y$, $p(x) > 0 \in C^1(\tilde{a}, \tilde{b})$, $q(x), \rho(x) \in C(\tilde{a}, \tilde{b})$, R -значные $\rho(x) > 0$.

(2) $\begin{matrix} l_1 y = 0 \\ l_2 y = 0 \end{matrix}$, $h, h', k, k' \in R$. (Волну над L убрали, т.е. пишем L вместо $\tilde{L}$).

Пусть $\lambda = 0$ не собственное значение задачи Штурма – Лиувилля, т.е. $(0,0,0)$ -задача имеет только тривиальное решение, следовательно, существует функция Грина $G(x, S) \in C([a, b] \times [a, b])$ - действительно значная, симметричная.

Лемма 2: Если $\lambda \neq 0$ и $y(x) \neq 0$ на $(\tilde{a}, \tilde{b})$ - собственное значение и собственная функция задачи Штурма – Лиувилля, т.е. (1) и (2) выполнено, то $y(x) \neq 0$ на $[a, b]$ и $y(x) \in (3)$:

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, S) \rho(S) y(S) dS, \quad x \in [a, b]. \text{ Верно и обратное: если } \lambda \neq 0 \text{ и}$$

$y(x) \neq 0 \in C([a, b])$ - решение интегрального уравнения (3), то λ - собственное значение и $y(x)$ собственная функция задачи Штурма – Лиувилля.

Доказательство: из $y(x) \neq 0$ на $(\tilde{a}, \tilde{b})$ следует, что $y(x) \neq 0$ на $[a, b]$. Далее,

$$\begin{cases} Ly = \lambda \rho(x)y = f(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b})) \\ l_1 y = l_2 y = 0 \end{cases}, \text{ следовательно, } y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \text{ т.е.}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, S) \rho(S) y(S) dS, \quad x \in [a, b].$$

Обратно: из $y(x) \neq 0 \in C([a, b]) \Rightarrow \lambda \rho(x) y(x) \in C([a, b])$. А тогда из (3) следует, что $Ly = \lambda \rho(x) y$ и $l_1 y = l_2 y = 0$, т.е. $y(x)$ собственная функция задачи Штурма – Лиувилля, λ - собственное значение. Лемма доказана.

Сведение к интегральному уравнению с симметричным ядром.

Умножим на $\sqrt{\rho(x)}$: $\sqrt{\rho(x)} y(x) = \lambda \int_a^b (G(x, S) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(S)}) (\sqrt{\rho(S)} y(S)) dS \Leftrightarrow$

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(x, S) z(S) dS \quad (4), \text{ где } z(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x), \quad K(x, S) = G(x, S) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(S)},$$

$K(x, S) = K(S, x) \in C([a, b] \times [a, b])$. Это доказывает следующую лемму.

Лемма 3: интегральное уравнение (3) эквивалентно интегральному уравнению с симметричным ядром (4), т.е. если $y(x) \neq 0, [a, b] \in (3)$, то $z(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x) \neq 0, [a, b] \in (4)$.

Верно и обратное: из $0 \neq z(x) \in C([a, b])$ решение (4), следует, что $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{\rho(x)}} \neq 0$ непр. решение (3).

Определение: Число $0 \neq \lambda \in C$ называется характеристическим числом интегрального оператора $\int_a^b K(x, S) z(S) dS$, если существует $0 \neq z(x) \in C([a, b])$, такое, что

$$\lambda \int_a^b K(x, S) z(S) dS = z(x), \quad x \in [a, b]. \text{ Очевидно, число } \frac{1}{\lambda} - \text{ собственное значение.}$$

Обратно: Если $\mu \neq 0 \in C$ - собственное значение и $z(x)$ - собственная функция, то $\lambda = \frac{1}{\mu}$ есть характеристическое число.

Лемма 3: (в терминах характеристических чисел). Пусть $\lambda = 0$ не собственное значение задачи Штурма – Лиувилля. Если $\lambda \neq 0 \in C$, $y(x) \neq 0, [a, b]$ - собственное значение и собственная функция задачи Штурма – Лиувилля, то λ и $z(x) = \sqrt{\rho} y$ являются характеристическим числом и собственной функцией интегрального оператора с ядром $K(x, S) = K(S, x)$.

Обратно: если $\lambda \neq 0 \in C$, $y(x) \neq 0, [a, b]$ - характеристическое число и собственная функция интегрального оператора с ядром $K(x, S) = K(S, x)$, то $\lambda \neq 0 \in C$, $y(x) = \frac{z}{\sqrt{\rho}} \neq 0, [a, b]$ - собственное значение и собственная функция задачи Штурма – Лиувилля.

Напоминание: свойства интегральных операторов с действительно значным, непрерывным, симметричным ядром.

Пусть $K(x, S)$ действительно значное, непрерывное, симметричное ядро, тогда:

- 1) существует хотя одно характеристическое число λ (их конечное, либо бесконечное множество; N – их количество, если их бесконечно, то $N = \infty$)
- 2) все характеристические числа лежат в комплексной плоскости на действительной оси.
- 3) В каждом конечном отрезке их конечное число. Так как характеристическое число $\lambda \neq 0$, то их можно упорядочить: $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$.
- 4) Каждому λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций и их можно выбрать действительно-значными.
- 5) Если $\lambda_k \neq \lambda_m$, то $\int_a^b z_k(x) z_m(x) dx = 0$ - ортогональность.
- 6) При каждом фиксированном λ_m проортонормируем по Грамму – Шмидту; получим $z_1, z_2, \dots, z_N, \dots$ (конечное число, либо бесконечное). $(z_k, z_m) = \delta_{km}$
- 7) Теорема Гильберта – Шмидта: каждая C - значная $z(x) \in C([a, b])$, принадлежащая образу интегрального оператора $(z(x) = \int_a^b K(x, S) f(S) dS, f(S) \in C([a, b]))$ разлагается в ряд: $z(x) = \sum_{n=1}^N c_n z_n(x)$. При $N = \infty$ ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$,

$$c_n = \int_a^b z(x) z_n(x) dx.$$

Следствия для задачи Штурма – Лиувилля:

- 1) существует хотя одно собственное значение λ (их конечное, либо бесконечное множество)
- 2) каждое собственное значение действительно.
- 3) В каждом конечном отрезке конечное количество собственных чисел. Так как все $\lambda \geq \Lambda$ не собственные значения (см. теорему 3), то их можно упорядочить: $\dots \lambda_n < \dots \lambda_2 < \lambda_1$, если $N = \infty$, то $\lambda_n \rightarrow -\infty$.
- 4) Каждому собственному числу соответствует одна действительная собственная функция $y(x)$, а остальные имеют вид: $c y(x)$, $0 \neq c \in C$.
- 5) Из $\int_a^b z_k(x) z_m(x) dx = \delta_{km}$ следует, что $\int_a^b y_k(x) y_m(x) \rho(x) dx = \delta_{km}$.
- 6) Разложение по собственным функциям: каждая C - значная $y(x) \in C^2([a, b])$ и удовлетворяющая условиям $l_1 y = 0$, $l_2 y = 0$ разлагается в ряд по собственным функциям: $y(x) = \sum_{n=1}^N c_n y_n(x)$, $c_n = \int_a^b y(x) y_n(x) \rho(x) dx$. Если $N = \infty$, то ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$

Доказательство 6): $Ly \equiv (p(x)y')' + q(x)y = f(x) \in C([a, b])$, $\lambda = 0$ не собственное значение, следовательно, $y(x) = \int_a^b G(x, S) f(S) dS \Leftrightarrow \sqrt{\rho(x)} y(x) = \int_a^b G(x, S) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(S)} \frac{f(S)}{\sqrt{\rho(S)}} dS$, по

теореме Гильберта – Шмидта $z(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x) = \sum_{n=1}^N c_n z_n(x)$ и если $N = \infty$, то сходимость

абсолютная и равномерная по $x \in [a, b]$. $c_n = \int_a^b \sqrt{\rho(x)} y(x) z_n(x) dx = \int_a^b y(x) y_n(x) \rho(x) dx$,

следовательно, $y(x)$ разлагается в ряд, $y(x) = \sum_{n=1}^N c_n \frac{z_n(x)}{\sqrt{\rho(x)}} = \sum_{n=1}^N c_n y_n(x)$. Из того, что

$\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \leq \frac{1}{m}$, где $m = \min \sqrt{\rho(x)}$ при $x \in [a, b]$ следует, что этот ряд тоже сходится

абсолютно и равномерно на $[a, b]$ если $N = \infty$

Следствие из 6): пусть $\lambda = 0$ не собственное значение задачи Штурма – Лиувилля, тогда множество всех собственных чисел бесконечно, т.е. $N = \infty$ и тогда

$-\infty \leftarrow \lambda_n \dots < \lambda_2 < \lambda_1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство: от противного. Пусть $N < \infty$, т.е.

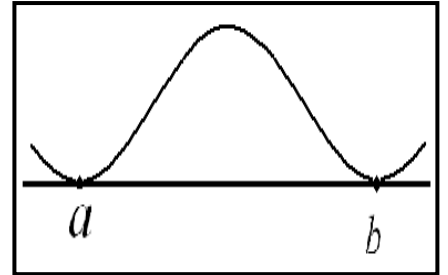
$y_1(x) \dots y_N(x)$ все собственные функции задачи Штурма –

Лиувилля. Построим полиномы $P_m(x) = (x-a)^m (x-b)^m$,

$m = 2, \dots, N+2$, всего $N+1$ полином,

$P_m(a) = P_m(b) = 0 \Rightarrow l_1 P_m = 0$
 $P'_m(a) = P'_m(b) = 0 \Rightarrow l_2 P_m = 0$, следовательно,

$P_m(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_N y_N(x)$, N - независимых функций. Противоречие. ($N+1$ линейно независимых векторов в N мерном пространстве).



$\lambda = 0$ собственное значение.

Если $\lambda = 0$ собственное значение, то $Ly = (p(x)y')' + q(x)y = 0 \cdot \rho(x)y(x) = 0$. Т.к. $\lambda = 0$ собственное значение, то $y(x) \neq 0$ на $(\tilde{a}, \tilde{b})$. $l_1 y = l_2 y = 0$, т.е. $(0, 0, 0)$ - задача имеет нетривиальное решение, тогда $G(x, S)$ не существует. Но Λ не собственное значение для L . Строим $\tilde{L} = L - \Lambda \rho(x)I$, т.е. $\tilde{L}y = Ly - \Lambda \rho(x)y$.

Если λ , $y(x) \neq 0 \in L$, то $\tilde{\lambda} = (\lambda - \Lambda)$, $y(x) \in \tilde{L}$.

Если $Ly = \lambda y$, то $\tilde{L}y = Ly - \Lambda \rho(x)y = (\lambda - \Lambda) \rho(x)y$.

И обратно: если $\tilde{\lambda}, y(x) \neq 0 \in \tilde{L}$, то $(\tilde{\lambda} + \Lambda) y(x) \in L$, следовательно, $\tilde{\lambda} = 0$ не собственное значение для $\tilde{L}$. Тогда существует $\tilde{G}(x, s)$ для $\tilde{L}$ и $-\infty \leftarrow \dots \tilde{\lambda}_2 < \tilde{\lambda}_1 \Rightarrow -\infty \leftarrow \dots \tilde{\lambda}_2 + \Lambda < \tilde{\lambda}_1 + \Lambda$ собственные числа для L и те же собственные функции $y_n(x)$ со всеми свойствами 1)-6).

Теорема Штурма – Лиувилля.

$Ly \equiv (p(x)y')' + q(x)y = \lambda \rho(x)y$

$l_1 y = l_2 y = 0$, $0 < p(x) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$, $0 < \rho(x) \& q(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$ – R -значные

- 1) Собственные числа задачи Штурма – Лиувилля существуют, все действительные и образуют последовательность $-\infty < \dots < \lambda_2 < \lambda_1$.
- 2) Для любого собственного числа λ_n существует действительная собственная функция $y_n(x)$, остальные - $cy_n(x)$, $0 \neq c \in C$, $\int_a^b y_k(x)y_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}$.
- 3) Любая C -значная функция $y(x) \in C^2([a,b])$, удовлетворяющая условиям $l_1 y = l_2 y = 0$, разлагается в ряд Фурье: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$. Ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$, $c_n = \int_a^b y(x)y_n(x)\rho(x)dx$.

Пример:

$$\left. \begin{aligned} Ly &\equiv y'' = \lambda y \\ l_1 y &\equiv y(0) = 0 \\ l_2 y &\equiv y(\pi) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_n(x) = \sin(nx), n \in N \Rightarrow \text{любая } y(x) \in C^2([a,b]), \text{ удовлетворяющая } \begin{aligned} l_1 y &= 0 \\ l_2 y &= 0 \end{aligned}$$

разлагается в ряд: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$, сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$.

Замечание 1: $y_n(x), [a,b]$ - собственная функция, следовательно существует единственная собственная функция $\tilde{y}_n(x), (\tilde{a}, \tilde{b}) \equiv y_n(x), [a,b]$.

Замечание 2:

$$\left. \begin{aligned} 0 < p(x), \rho(x) > 0, x \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \\ p(x) \in C^1(\tilde{a}, \tilde{b}) \end{aligned} \right\} \text{ достаточно, чтобы было выполнено на } [a,b].$$

Теорема (основная): $Ly \equiv A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y = \lambda y$. $A(x) \neq 0$ ни разу на $(\tilde{a}, \tilde{b})$, $A(x) \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$, $B(x), C(x) \in C((\tilde{a}, \tilde{b}))$, R -значные, $l_1 y = l_2 y = 0$, $k, k', h, h' \in R$, $[a,b] \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$, тогда:

- 1) Собственные числа существуют, все действительные и образуют последовательность:
 - а) если $A(x) > 0$, то $-\infty < \lambda_n \dots < \lambda_2 < \lambda_1, n \rightarrow +\infty$.
 - б) если $A(x) < 0$, то $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$.
- 2) Для любого собственного числа λ_n существует действительная собственная функция $y_n(x)$, остальные - $cy_n(x)$, $0 \neq c \in C$, $\int_a^b y_k(x)y_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}$, $\rho(x) = \frac{1}{A(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)} dt\right)$.
- 3) Любая C -значная функция $y(x) \in C^2([a,b])$, удовлетворяющая условиям $l_1 y = l_2 y = 0$, разлагается в ряд Фурье: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$. Ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$, $c_n = \int_a^b y(x)y_n(x)\rho(x)dx$.

Доказательство: следует из теоремы Штурма – Лиувилля.

Замечание 3: достаточно $A(x) \neq 0$ и $A(x) \in C^1(\quad)$ на $[a,b]$.

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных функций.

$$(1) \begin{cases} A(x)y'' + B(x)y' + [C(x) - \lambda]y = 0 \\ l_1 y = l_2 y = 0 \end{cases}.$$

Пусть $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$ образуют базис уравнения (1), т.к. множество всех решений $y(x)$ уравнения (1), таких что $l_1 y = 0$, есть одномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, то с учетом линейной независимости $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ получаем, что хоть одно из двух чисел $l_1 y_1(\cdot, \lambda)$ либо $l_1 y_2(\cdot, \lambda)$ отлично от нуля. Общее решение уравнения (1) имеет вид: $y(x) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda)$ и поэтому получаем:

$$\left. \begin{aligned} c_1 l_1 y_1(\cdot, \lambda) + c_2 l_1 y_2(\cdot, \lambda) &= 0 \\ c_1 l_2 y_1(\cdot, \lambda) + c_2 l_2 y_2(\cdot, \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} l_1 y_1(\cdot, \lambda) & l_1 y_2(\cdot, \lambda) \\ l_2 y_1(\cdot, \lambda) & l_2 y_2(\cdot, \lambda) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda - \text{собственное значение}.$$

Пусть λ - корень уравнения $\det \begin{pmatrix} l_1 y_1(\cdot, \lambda) & l_1 y_2(\cdot, \lambda) \\ l_2 y_1(\cdot, \lambda) & l_2 y_2(\cdot, \lambda) \end{pmatrix} = 0$. Первое уравнение линейной системы

удовлетворяется ненулевой парой: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 y_2(\cdot, \lambda) \\ l_1 y_1(\cdot, \lambda) \end{pmatrix}$. При таких $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ второе уравнение

принимает вид: $-l_1 y_2(\cdot, \lambda) \cdot l_2 y_1(\cdot, \lambda) + l_1 y_1(\cdot, \lambda) \cdot l_2 y_2(\cdot, \lambda) = \det(\lambda) = 0$, т.к. λ корень. Итак, собственная функция $y(x, \lambda)$ соответствующая собственному числу λ имеет вид:

$$y(x, \lambda) = -l_1 y_2(\cdot, \lambda) \cdot y_1(x, \lambda) + l_1 y_1(\cdot, \lambda) \cdot y_2(x, \lambda).$$