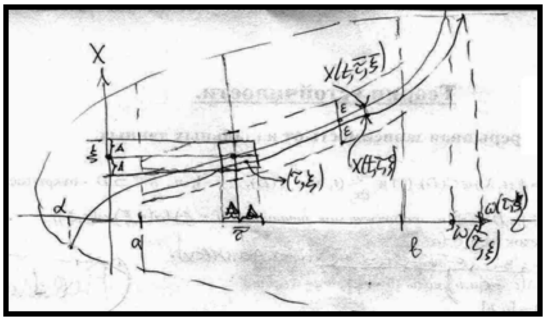
Теория устойчивости.

Непрерывная зависимость от начальных данных.

Дана система $\dot{X} = F(t,X) \in C(D)$ (1) и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,X) \in C(D),\ i,j-1,..n$; $R^{1+n} \supset D$ - открытое множество. $\forall(\tau,\xi) \in D \Rightarrow \exists!$ *непродолжаемое решение* $X(t,\tau,\xi),(\alpha(\tau,\xi),\omega(\tau,\xi))$.
Зафиксируем $(\bar{\tau},\bar{\xi}) \in D$ и отрезок $[a,b] \subset (\alpha,\omega)$.

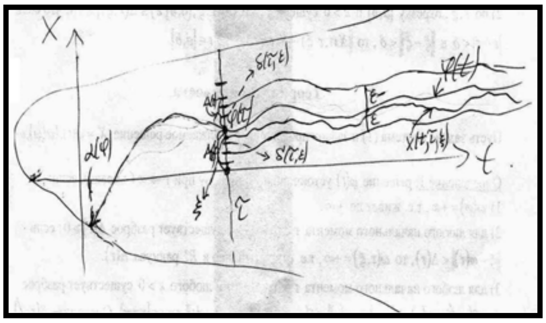
<u>Теорема 1</u>: (непрерывная зависимость решения от начальных данных)
$\exists\ 0 < \Delta(\bar{\tau},\bar{\xi},[a,b])$: *если* $\|\tau-\bar{\tau}\|, \|\xi-\bar{\xi}\| < \Delta$, *то* :
1) $(\alpha(\tau,\xi),\omega(\tau,\xi)) \supset [a,b]$.
2) по $\bar{\tau},\bar{\xi}$, отрезку $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta(\bar{\tau},\bar{\xi},[a,b],\varepsilon) \le \Delta(\bar{\tau},\bar{\xi},[a,b])$, такое что если $|\tau-\bar{\tau}| < \delta$ *и* $\|\xi-\bar{\xi}\| < \delta$, то
$\|X(t,\tau,\xi) - X(t,\bar{\tau},\bar{\xi})\| < \varepsilon, t \in [a,b]$.



Теория устойчивости.

Пусть задана система (1) и зафиксировано непродолжаемое решение $X = \varphi(t),(\alpha(\varphi),\omega(\varphi))$.

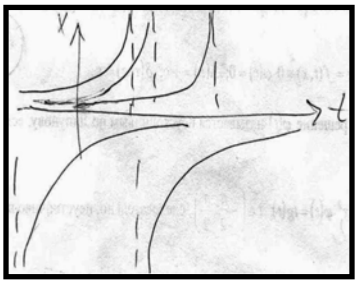
<u>Определение 1</u>: решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$ (вправо), если:
1) $\omega(\varphi) = +\infty$, т.е. живет до $+\infty$.
2) для любого начального момента $\tau \in (\alpha(\varphi),+\infty)$ существует разброс $\Delta(\tau) > 0$: если $\|\xi-\varphi(\tau)\| < \Delta(\tau)$, то $\omega(\tau,\xi) = +\infty$, т.е. открытый шар в R^n радиуса $\Delta(\tau)$.
3) для любого начального момента $\tau \in (\alpha(\varphi),+\infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует разброс $0 < \delta(\tau,\varepsilon) \le \Delta(\tau)$: если $\|\xi-\varphi(\tau)\| < \delta(\tau,\varepsilon)$, то $\|X(t,\tau,\xi)-\varphi(t)\| < \varepsilon, t \in [\tau,+\infty)$. Очевидно, $\delta(\tau,\varepsilon) \le \varepsilon$.



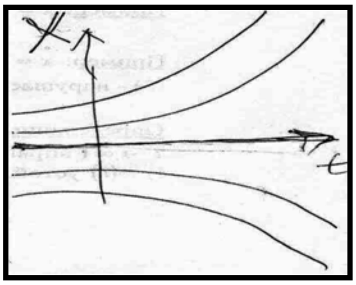
<u>Пример</u>: $n = 1$ $\dot{x} = f(t,x) \overset{R^2}{\equiv} 0$ $\varphi(t) = 0;$ $\Delta(\tau) = +\infty;$ $\delta(\tau,\varepsilon) = \varepsilon$.

<u>Определение 2</u>: решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым по Ляпунову, если нет 1), или 2), или 3).

<u>Пример</u>: $\dot{x} = 1 + x^2,\ \varphi(t) = tg(t),\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, следовательно, неустойчиво по Ляпунову (1) - нарушается).



Пример: $\dot{x} = x^2,\ \varphi(t) \equiv 0,\ t \in R$ неустойчиво по Ляпунову (2) - нарушается).



Пример: $\dot{x} = x\ \ x = c \cdot \exp(t),\ t \in R,\ \varphi(t) \equiv 0, (-\infty, +\infty),\ \Delta(\tau) = +\infty$ неустойчиво по Ляпунову (3) - нарушается). (возьми $\tau = 0;\ \varepsilon = 1 \Rightarrow$ *не* $\exists \delta(0,1) > 0$).

Определение 3: решение $\varphi(t), (\alpha(\varphi), +\infty)$ называется асимптотически устойчивым при $t \to \infty$ (вправо), если:

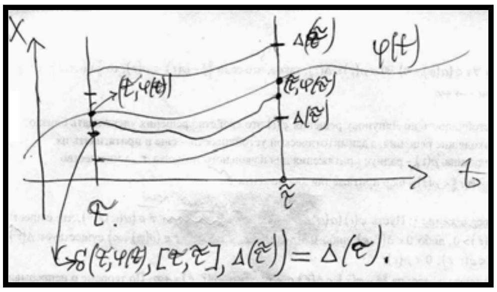
I) $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову, т.е. 1),2),3) выполнены.

II) $\forall \tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)\ \exists 0 < \rho(\tau) \le \Delta(\tau)$, такое, что если $\|\xi - \varphi(\tau)\| < \rho(\tau)$, то $\|X(t, \tau, \xi) - \varphi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Устойчивость по Ляпунову решения $\varphi(t)$ это свойство решения удерживать близко выходящие решения, а асимптотической устойчивости – еще и притягивать их. Величина $\rho(\tau)$ - радиус притяжения для начального момента $\tilde{\tau}$, а множество $\|\xi - \varphi(\tau)\| < \rho(\tau)$ - шар притяжения для момента $\tilde{\tau}$.

Предложение 1: Пусть $\varphi(t), (\alpha(\varphi), +\infty) \in (1)$. Если для некоторого $\tilde{\tau} \in (\alpha(\varphi), +\infty)$, существует $\Delta(\tilde{\tau}) > 0$, либо $0 < \delta(\tilde{\tau}, \varepsilon)$, либо $0 < \rho(\tilde{\tau})$, то для любого $\tau \in (a(\varphi), +\infty)$ существует $\Delta(\tau) > 0$, $0 < \delta(\tau, \varepsilon)$, $0 < \rho(\tau)$.

Доказательство: из $\|\xi - \varphi(\tilde{\tau})\| < \Delta(\tilde{\tau})$ следует, что $\omega(\tilde{\tau}, \xi) = +\infty$. По теореме о непрерывной зависимости от начальных данных, где $\left(\bar{\tau}, \bar{\xi}\right) = (\tau, \varphi(\tau)),\ [a,b] = [\tau, \tilde{\tau}],\ \varepsilon = \Delta(\tilde{\tau})$ существует $0 < \delta(\tau, \varphi(\tau), [\tau, \tilde{\tau}], \Delta(\tilde{\tau}))$, что из $\|\xi - \varphi(\tau)\| < \delta$ следует, что $\|x(t, \tau, \xi) - \varphi(t)\| < \Delta(\tilde{\tau}), [\tau, \tilde{\tau}]$, следовательно, $\Delta(\tau) \equiv \delta(\tau, \varphi(\tau), [\tau, \tilde{\tau}], \Delta(\tilde{\tau}))$. Остальное аналогично.



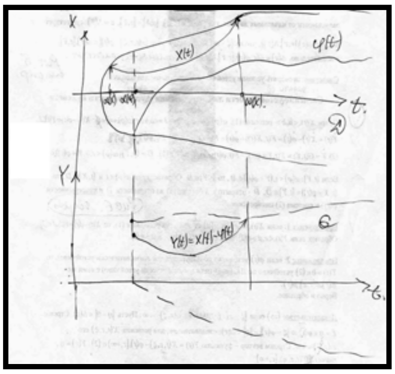
Следствие: проверять условие устойчивости достаточно для одного $\tilde{\tau}$.

Сведение задачи об устойчивости любого решения к задаче об устойчивости нулевого решения.

Пусть $X(t), <a,b>$ решение (1), $\alpha(\varphi) < b$. Введем $J = <a,b> \cap (\alpha(\varphi), +\infty) \ne 0$. $X(t) - \varphi(t) = Y(t), J$.

$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t) - \dot{\varphi}(t) = F(t, X(t)) - \dot{\varphi}(t) = F(t, Y(t) + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t))$.

(2) $\dot{Y} = G(t, Y) = F(t, Y + \varphi(t)) - F(t, \varphi(t)),\ Y(t) \overset{(\alpha, +\infty)}{\equiv} 0 \in (2)$. $\tilde{D} = \{(t, Y) \mid \alpha(\varphi) < t; (t, Y + \varphi(t)) \in D\}$.



Если $(t, Y) \in \widetilde{D}$, то $(t, (Y + \varphi(t))) \in D$. Обратно: если $(t, X) \in D$ *и* $\alpha(\varphi) < t$, то $(t, X - \varphi(t)) = (t, Y) \in \widetilde{D}$. $\widetilde{D}$ - открыто в R^{1+n} (следует из открытости D и непрерывности $\varphi(t)$) и система (2) пикаровская.

<u>Предложение 1</u>: если $X(t), <a, b>$ и $\alpha(\varphi) < b$ является решением (1), то $X(t) - \varphi(t) = Y(t), J \in (2)$. Обратно: если $Y(t), < c, d > \in (2)$, то $X(t) = Y(t) + \varphi(t), < c, d > \in (1)$.

<u>Предложение 2</u>: если $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво), то $Y(t) \equiv 0 \in (2)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво) с теми же $\Delta(\tau), \delta(\tau, \varepsilon), \rho(\tau)$.
Верно и обратное.
<u>Доказательство</u>: $(\Rightarrow)$ Пусть $\alpha(\varphi) < \tau$; если $\|\xi - \varphi(\tau)\| < \Delta(\tau)$, то $\omega(\tau, \xi) = +\infty$. Пусть $\|\eta - 0\| < \Delta(\tau)$. Строим $\xi = \eta + \varphi(\tau) \Rightarrow \|\xi - \varphi(\tau)\| = \|\eta\| < \Delta(\tau)$, следовательно, для решения $X(t, \tau, \xi)$ его $\omega(\tau, \zeta) = +\infty$. Строим вектор – функцию $Y(t) = X(t, \tau, \xi) - \varphi(t), [\tau, +\infty) \in (2)$. $Y(\tau) = \eta$, значит, $Y(t) = Y(t, \tau, \eta), [\tau, +\infty)$
$(\Leftarrow)$ аналогично.

Устойчивость в линейных системах.

(1) $\dot{X} = A(t)X + F(t),\ A(t), F(t) \in C((a, +\infty)),\ a_{ij}(t), f_i(t)\ - R$ значные, $X(t) \in R^n$.

<u>Предложение 1</u>: для любого непродолжаемого решения $\varphi(t), (a, +\infty) \in (1)$, соответствующая система (2) есть линейная однородная система $\dot{Y} = A(t)Y$ (т.е. $\dot{X} = A(t)X$).
<u>Доказательство</u>: $Y(t) = X(t) - \varphi(t) \in \{0\}$.

<u>Следствие</u>: если хоть одно $\varphi(t) \in (1)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво), то $Y(t) \equiv 0 \in (2)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво).

<u>Теорема 1</u>: если хоть одно $\varphi(t) \in (1)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво), то каждое $\psi(t) \in (1)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво).
<u>Доказательство</u>: $\varphi(t) \in (1)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво), следовательно, $Y(t) \equiv 0 \in (2)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво), следовательно, каждое $\psi(t) \in (1)$ устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво).

<u>Замечание</u>: система (1) устойчива по Ляпунову (или асимптотически устойчива) $\Leftrightarrow$ любое решение системы устойчиво по Ляпунову (или асимптотически устойчиво).

<u>Определение</u>: вектор-функция $X(t), (a, +\infty)$ называется ограниченной вправо, если существует $a < T$ и $M > 0$, что $\|x(t)\| \le M, [T, +\infty)$.

<u>Предложение 2</u>: если $X(t)\in C((a,+\infty))$ и ограничено вправо, то для любого $\tau\in(a,+\infty)$ существует $0<M(\tau):\left\|X(t)\right\|\le M(\tau),[\tau,+\infty)$.

<u>Доказательство</u>: существует $a<T\ \textit{и}\ M$, что $\|X(t)\|\le M,[T,+\infty)$ (из ограниченности). На $[\tau,T]$ $\|X(t)\|\le\widetilde{M}(\tau)$, т.к. $\|X(t)\|$ непрерывна на $[\tau,T]$. В качестве $M(\tau)$ возьмем $M(\tau)=\max\{\widetilde{M}(\tau),M\}$.

<u>Теорема 2</u>: если $X(t)\equiv 0\in(2)$ устойчиво по Ляпунову, то каждое решение $X(t)\in(2)$ ограничено вправо.
<u>Обратно</u>: если каждое решение $X(t)\in(2)$ ограничено вправо, то $X(t)\equiv 0\in(2)$ устойчиво по Ляпунову.

<u>Доказательство</u>:
$(\Rightarrow)$ $X(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, следовательно, для любого $\tau\ \textit{и}\ \varepsilon=1$ существует $0<\delta(\tau,1)$ такое, что если $\left\|\xi\right\|<\delta$, то $\left\|X(t,\tau,\xi)\right\|<1,[\tau,+\infty)$. Пусть $X(t),(a,+\infty)\in(2)$, существует $M>0$, что $\left\|\dfrac{X(\tau)}{M}\right\|<\delta(\tau,1)$, тогда $\widetilde{X}(t)=\dfrac{X(t)}{M}\in(2)$.

$\left\|\widetilde{X}(\tau)\right\|=\left\|\dfrac{X(\tau)}{M}\right\|<\delta(\tau,1)$, следовательно, $\left\|\widetilde{X}(t)\right\|<1,[\tau,+\infty)$, следовательно, $\left\|X(t)\right\|<M,[\tau,+\infty)$.

$(\Leftarrow)$ дано: любое $X(t)\in(2)$ ограничено вправо. Надо: $\forall\,\tau,\varepsilon>0\ \exists\ 0<\delta(\tau,\varepsilon)$: из $\|\xi\|<\delta$ следует, что $\left\|X(t,\tau,\xi)\right\|<\varepsilon,\ t\in[\tau,+\infty)$.
Фиксируем $\tau\in(a,+\infty)$. Строим $\Phi(t)$ - фундаментальную матрицу системы (2): $\Phi(t)=(X_1(t),X_2(t),...X_n(t)):\Phi(\tau)=E$. Тогда любое $X(t,\tau,\xi)=\Phi(t)\xi$. $\left\|X_i(t)\right\|\le M_i,[\tau,+\infty)$.
Пусть $M=\max\limits_i M_i$, тогда $\left\|X_i(t)\right\|\le M,[\tau,+\infty)$, следовательно,

$\|\Phi(t)\|\le\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\|X_i\|^2}\le M\sqrt{n},[\tau,+\infty)$. $\left\|X(t,\tau,\xi)\right\|=\left\|\Phi(t)\xi\right\|\le\left\|\Phi(t)\right\|\cdot\left\|\xi\right\|\le M\sqrt{n}\left\|\xi\right\|<\varepsilon$, следовательно, $\left\|\xi\right\|<\dfrac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}=\delta(\tau,\varepsilon)$.

<u>Следствие</u>: если существует хоть одно решение $X^*(t)\in(2)$ неограниченное вправо, то $X(t)\equiv 0$ не устойчиво по Ляпунову.

<u>Лемма</u>: пусть для системы (2) существует $0<\rho(\tau)$, т.е. из $\|\xi\|<\rho(\tau)$ следуют, что $X(t,\tau,\xi)\to 0\ \textit{при}\ t\to+\infty$, тогда любое $X(t)\to 0\ \textit{при}\ t\to+\infty$.
<u>Доказательство</u>: пусть $X(t)$ - любое решение системы (2), существует $M>0$, что $\left\|\dfrac{X(\tau)}{M}\right\|<\rho(\tau)$. Строим $\widetilde{X}(t)=\dfrac{X(t)}{M}$, т.к. $\widetilde{X}(0)<\rho(\tau)$, то $\widetilde{X}(t)\to 0$ при $t\to+\infty\Rightarrow X(t)\to 0$.

<u>Теорема 3</u>: $X(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво, следовательно, любое $X(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Верно и обратное.

Доказательство: $(\Rightarrow)\ \exists\rho(\tau)>0 \overset{лемма\ 3}{\Rightarrow}\ \forall\ X(t)\to 0$.
$(\Leftarrow)\ \forall\ X(t)\to 0$, следовательно, каждое решение ограничено вправо, следовательно, устойчиво по Ляпунову и $\rho(\tau)=+\infty$, следовательно, асимптотически устойчиво.

Следствие 2: если существует хоть одно $X(t)$, не стремящееся к нулю при $t\to+\infty$, то $X(t)\equiv 0$ не является асимптотически устойчивым.

Следствие 3: пусть $X_1(t)...X_n(t)$ - базис (не обязательно R^n значный) для (2). Если каждое $X_i(t)$ ограничено вправо, то $X(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову (если каждое $X_i(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, то $X(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво).

Доказательство: $\forall\ X(t)\ \exists!\ c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in C^n$, что $X(t)=c_1X_1(t)+\cdots c_nX_n(t)$.

Устойчивость в линейных системах с постоянной матрицей.

(1) $\dot{X}=AX$, $A_{n\times n}-R$ значная.
Лемма: пусть $\lambda\in C=\alpha+i\beta$ и $\alpha<0$. Рассмотрим
$X(t)=e^{\lambda t}\wp(t)=e^{\lambda t}\left(t^S P_S+\cdots+t^1P_1+P_0\right),\ P_l\in C^n, s\geq 0\in Z$, тогда $X(t)\to 0, t\to+\infty$.
Доказательство: очевидно.

Теорема 1: 1) если $\forall\ \operatorname{Re}\lambda_j<0$, то $X(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво.
2) если существует хоть одно $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, то $X(t)\equiv 0$ даже не устойчиво по Ляпунову.
Доказательство: 1) $X_1(t)...X_n(t)$ базис, каждое $s_j\leq n-1$.
Любое $X_j(t)=e^{\lambda_j t}\wp_j(t)$, следовательно, любое $X_j(t)\to 0$, следовательно, по лемме 3 $X(t)\equiv 0$ - асимптотически устойчиво.
2) пусть существует хоть один корень с $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, тогда существует $X_j(t)=e^{\lambda_j t}H_j$. Если $\lambda_j\in R$, то $\lambda_j>0$, следовательно, существует ненулевой собственный вектор $H_j\in R^n$, следовательно, неограниченно вправо, нет даже устойчивости по Ляпунову.
Пусть $\lambda_j=\alpha+i\beta,\ 0\neq\beta>0,\ \alpha>0$, тогда существует

$X_j(t)=e^{(\alpha+i\beta)t}H_j=e^{\alpha\cdot t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)\cdot\left(U+iV\right)$, где $\begin{matrix}U=\operatorname{Re}H_j\\ V=\operatorname{Im}H_j\end{matrix}$.

В базисе Жордана есть $\bar{H}$, тогда $U=\dfrac{H+\bar{H}}{2},\ V=\dfrac{H-\bar{H}}{2i}$, следовательно, линейно независимы. $\operatorname{Re}X_j(t)=e^{\alpha\cdot t}\left(\cos\beta t\cdot U-\sin\beta t\cdot V\right)$, существуют моменты времени $t_n\to+\infty$, что $\sin\beta t_n=0,\ \cos\beta t_n=1$, тогда $\operatorname{Re}X_j(t_n)$ неограниченно вправо, нет даже устойчивости по Ляпунову.

Теорема 2: пусть каждое $\operatorname{Re}\lambda_j\leq 0$ и существует хоть один корень $i\beta$ на мнимой оси, $0\neq\beta\in R$, тогда :

1) Если для всех корней на мнимой оси выполняется равенство $n-rang(A-i\beta_S I)=k_S$, где k_S кратность корня, то решение $X(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически.

2) Если существует хоть один $i\beta^*$, что $n-rang(A-i\beta^* I)<k^*$, то даже не устойчиво по Ляпунову.

<u>Доказательство</u>: 1) строим базис системы (1): $X_1(t)...X_n(t)$. Решение $X_j(t)=e^{(\alpha_j+i\beta_j)t}\wp_j(t)$ при $\alpha<0$ стремится к нулю, в частности ограничено вправо.

$(A-i\beta_S)H=0,\ H\neq 0$ имеет $n-rang(A-i\beta_S I)$ линейно независимых решений, $n-rang(A-i\beta_S I)=k_S$, следовательно, нет присоединенных векторов, следовательно, только $X_s(t)=e^{i\beta_s t}H$ - ограничено вправо, следовательно, $X(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. $H=U+iV$, U,V - линейно независимые. $\operatorname{Re}X_s(t)=\cos\beta_s t\cdot U-\sin\beta_s t\cdot V$ не стремится к нулю, асимптотической устойчивости нет.

2) пусть существует $i\beta^*$, что $n-rang(A-i\beta^* I)<k^*$, тогда собственных векторов меньше, чем k^*, тогда существует хоть один присоединенный вектор $H_{прис}$, существует $X(t)=e^{i\beta^* t}\left(t\cdot H_{собст}+H_{прис}\right),\ H_{собст}=U_1+iV_1,\ H_{прис}=U_2+iV_2$, тогда $\operatorname{Re}X(t)=\cos\beta^* t\cdot(tU_1+U_2)-\sin\beta^* t\cdot(tV_1+V_2)$. ($U_1,V_1$ - линейно-независимые, следовательно, $U_1\neq 0$ и $V_1\neq 0$). Существуют моменты времени $t_n\to+\infty$, что $\sin\beta^* t_n=0,\ \cos\beta^* t_n=1$, следовательно, $\operatorname{Re}X(t_n)\to\infty$ при $t_n\to+\infty$ - неограниченно вправо, следовательно, $X(t)\equiv 0$ даже не устойчиво по Ляпунову.

<u>Замечание</u>: (критерий Раусса - Гурвица)

$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_n>0,\ a_j\in R,\ a_0>0$

1) если каждая $\operatorname{Re}\lambda_j<0$, то каждая $a_j>0$ - необходимое условие.

2) Строим определитель Гурвица: $\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$. Каждый главный минор должен быть положителен $\Leftrightarrow\forall\operatorname{Re}\lambda_j<0$.

Метод функций Ляпунова.

(1) $\dot{X}=F(t,X)\in C(Ц)$ и существуют все $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,X)\in C(Ц)$.

$Ц=\left\{\ (t,X)\in R^{1+n}\mid t\in(a,+\infty),\|X\|<R>0\right\}$. $F(t,0)\overset{t}{\equiv}0\Leftrightarrow X(t)\equiv 0,(a,+\infty)$ - решение (1).

$V(X)\in C^1(B(0,<R)),\ X(t),(\alpha,\omega)$ - непродолжаемое решение. $V(X(t))=\upsilon(t)\in C^1((\alpha,\omega))$.

$$\frac{d\upsilon}{dt}(t)=\frac{d}{dt}V(X(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(X(t))\cdot\frac{dx_i}{dt}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(X(t))\cdot f_i(t,X(t))=\left(grad\,V(X(t)),F(t,X(t))\right).$$

Вводим $\dot{V}(t,X)=\left(grad\ V(X),F(t,X)\right)$. $\dot{V}(t,X)\in C(Ц)$ - полная производная функции $V(X)$ в силу системы (1), $V(X)$ - функция Ляпунова.

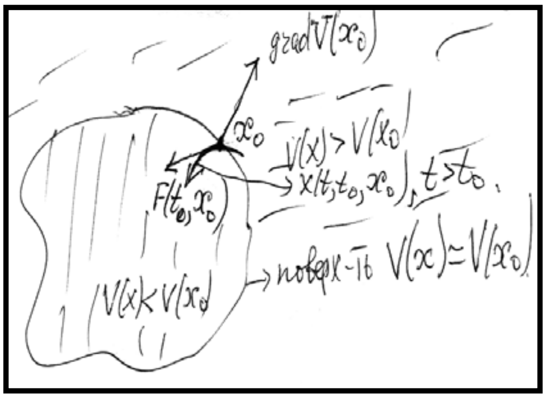
Свойства:

1) $\dot{V}(t,0)=0$, 2) строится прямо по $V(X)$ и $F(t,X)$ без знания решения системы, 3) $\dot{V}(t_0,X_0)=\dfrac{d}{dt}V(X(t,t_0,X_0))|_{t=t_0}$ - скорость изменения в момент t_0 функции Ляпунова вдоль решения, проходящего через (t_0, X_0).

Пусть оказалось, что $\dot{V}(t,X)<0,\ \ X\neq 0$, следовательно, $V(X)$ строго убывает, т.е. $V(X(t))<V(X(t_0))$ при $t>t_0$.

$\dot{V}(t,X)=\big(grad\ V(X),F(t,X)\big)<0$.

Идея метода функции Ляпунова – получать информацию о решении с помощью $V(X)$ без знания самого решения.



Теорема 1: (устойчивость по Ляпунову)
Пусть $V(X)\in C^1\big(B(0,<R)\big)$: $V(0)=0,\ V(X)>0\ при\ X\neq 0$ и пусть оказалось, что $\dot{V}(t,X)\leq 0,\ [\tau,+\infty),\|X\|<R$, тогда $X(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Лемма: в условиях теоремы 1 для каждого $0<r<R$ существует $0<\sigma(r)<r$, что если $\|\xi\|<\sigma(r)$, то $\omega(\tau,\xi)=+\infty$ и при этом $\|X(t,\tau,\xi\|<r,[\tau,+\infty)$.

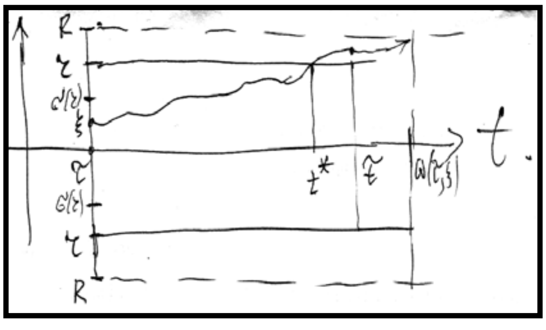
Доказательство: $S_r=\{X\in R^n \mid \ \|X\|=r\}$ - компакт в R^n .

$\min\limits_{X\in S_r}V(X)=V(X^*)=m(r)>0$, следовательно, $V(X)\geq m(r)$ при $\|X\|=r$, $V(0)=0$ и непрерывна, следовательно, по $\varepsilon=m(r)>0$ существует $0<\delta(m(r))<r$, что из $\|X\|<\delta(m(r))$ следует, что $V(X)\leq m(r)$. В качестве $\sigma(r)$ годится $\delta(m(r))$, т.е. из $\|\xi\|<\sigma(r)=\delta(m(r)),\xi\neq 0$ следует, что $X(t,\tau,\xi),[\tau,+\infty):X(\tau,\tau,\xi)=\xi$, $\|X(t,\tau,\xi)\|<r$.

Пусть $\|\xi\|<\delta(m(r))$, обозначим $X(t,\tau,\xi)\equiv X(t),[\tau,\omega(\tau,\xi))$. $V(X(t))=\upsilon(t)>0,\ \ X(t)\neq 0$.

$\dfrac{d}{dt}\upsilon(t)=\dfrac{d}{dt}V(X(t))=\dot{V}(t,X(t))\leq 0,\ \ t\in[\tau,\omega(\tau,\xi))$. Т.к. $\upsilon(\tau)=V(X(\tau))=V(\xi)<m(r)$ и $\upsilon(t)$ не растет, то $V(X(t))=\upsilon(t)<m(r),[\tau,\omega(\tau,\xi))$.

От противного: пусть существует $\tau<\tilde{\tau}<\omega(\tau,\xi)$, что $\|X(\tilde{\tau})\|\geq r$. $\|X(t)\|\in C([\tau,\omega)),\|X(\tau)\|=\|\xi\|<r$, следовательно, по теореме Коши, существует $\tau<t^*\leq\tilde{\tau}$, что $\|X(t^*)\|=r$. Тогда $V(X(t^*))=\upsilon(t^*)\geq m(r)$. Противоречие, следовательно, $\|X(t)\|<r,[\tau,\omega(\tau,\xi))$. Покажем, что $\omega(\tau,\xi)=+\infty$. От противного. Пусть $\omega(\tau,\xi)<+\infty$. Строим $\Gamma=\{\ (t,X)\mid t\in[\tau,\omega(\tau,\xi)],\|X\|\leq r\}$ - замкнутое ограниченное множество, содержащееся в



$Ц(R)$. По теореме о покидании компакта следует, что существует $\tau < t_+ < \omega(\tau,\xi)$, что $(t, X(t)) \notin \Gamma,\ [t_+,\omega] \subset [\tau, \omega(\tau,\xi)) \Rightarrow \|X(t)\| > r, t \in [t_+,\omega)$ противоречие, следовательно, $\omega(\tau,\xi) = +\infty$.

Из леммы следует доказательство теоремы об устойчивости по Ляпунову. (Проверить!)

<u>Теорема 2</u>: асимптотическая устойчивость. Пусть существует $V(X) \in C^1(B(0,< R))$, $V(0) = 0,\ V(X) > 0\ \textit{при}\ X \neq 0$, что $\dot{V}(t,X) \le -W(X),\ [\tau,+\infty), \| X \| < R$, где $W(X) \in C(B(0,< R))$, $W(0) = 0,\ W(X) > 0,\ X \neq 0$, $W(X)$ - подпорка, тогда $X(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство</u>: $\dot{V}(t,X) \le -W(X) \le 0$, следовательно, по теореме 1 устойчиво по Ляпунову. Надо $\rho(\tau) > 0$, что из $\|\xi\| < \rho(\tau)$ следует, что $X(t,\tau,\xi) \to 0,\ t \to +\infty$. Фиксируем $0 < \bar{r} < R$, тогда по лемме существует $0 < \sigma(\bar{r}) < \bar{r}$, что из $\|\xi\| < \sigma(\bar{r})$ следует, что $\omega(\tau,\xi) = +\infty$ и $\|X(t,\tau,\xi)\| < \bar{r}$. В качестве $\rho(\tau)$ годится $\sigma(\bar{r})$, т.е. надо из $\|\xi\| < \sigma(\bar{r})$ получить, что $\|X(t,\tau,\xi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Пусть $0 < \|\xi\| < \sigma(\bar{r}), X(t) \neq 0, [\tau,+\infty)$, следовательно, $V(X(t)) = \upsilon(t) \in C^1([\tau,+\infty))$, $\dfrac{d}{dt}v(t) = \dfrac{d}{dt}\upsilon(X(t)) = \dot{V}(t,X(t)) \le -W(X(t)) < 0$, следовательно, $\upsilon(t)$ строго монотонно убывает на $[\tau,+\infty)$. Возможны два случая:

1) существует $h > 0$, что $\upsilon(t) \to h,\ t \to +\infty$
2) $\upsilon(t) \to 0,\ t \to +\infty$.

Докажем, что 1) быть не может. От противного. Пусть $\upsilon(t) \to h > 0$, следовательно, $\upsilon(t) > h\ ,[\tau,+\infty)$, но из непрерывности функции Ляпунова в нуле по $h > 0$ существует $0 < \beta(h)$, что из $\|X\| < \beta(h)$ следует, что $V(X) < h$, следовательно, $0 < \beta(h) \le \|X(t)\| < \bar{r}$.

Строим $\Gamma = \{X \mid 0 < \beta(h) \le \|X\| \le \bar{r}\}$ компактно в R^n.

Существует $\min\limits_{X\in\Gamma} W(X) = W(X^*) > 0,\ \textit{т.к.}\ X^* \in \Gamma,\ \|X^*\| \ge \beta(h) \neq 0$. Следовательно, $\dfrac{d}{dt}\upsilon(t) = \dfrac{d}{dt}V(X(t)) = \dot{V}(t,X(t)) \le -W(X(t)) \le -W(X^*)$. Отсюда следует, что $\upsilon(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, но $\upsilon(t) > h$. Противоречие, поэтому, 1) нет, остается 2)
$V(X(t)) = \upsilon(t) \to 0,\ t \to +\infty$. Отсюда следует, что $X(t) \to 0,\ t \to +\infty$. (Проверить!)

<u>Лемма</u>: (об оценке решения)
$\dot{X} = AX,\ a_{ij} \in R$. Пусть каждое $\operatorname{Re}\lambda_j < \alpha$, тогда существует $M > 0$, общая для всех начальных $\xi \in R^n$, что $\|X(t,0,\xi)\| \le M\|\xi\|e^{\alpha t}, t \in [0,+\infty)$.

<u>Доказательство</u>: из $\forall \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha$ следует, что существует $\gamma > 0$, что $\forall \operatorname{Re}\lambda_j \le \alpha - \gamma$.

Существует базис $\Phi(t) = (X_1(t)...X_n(t))$, где $X_j(t) = e^{\lambda_j t}\{P_{s_j,j}t^{s_j} + \cdots + P_{1,j}t^1 + P_{0,j}\},\ n-1 \ge s_j \in N \cup \{0\}$.

$\left\|X_j(t)\right\| \le e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}\sum_{k=0}^{s_j}(\left\|P_{k,j}\right\|t^k)$. Очевидно, $\left\|P_{k,j}\right\| \le P > 0$, где $P = \max\limits_{k,j}\left\|P_{k,j}\right\|$, следовательно,

$\left\|X_j(t)\right\| \le e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}\cdot P\cdot\left\{t^{n-1}+t^{n-2}+\dots+1\right\},\ \max\operatorname{Re}\lambda_j \le \alpha-\gamma$, следовательно,

$\left\|X_j(t)\right\| \le e^{\alpha\cdot t}e^{-\gamma\cdot t}\cdot P\cdot\left\{t^{n-1}+t^{n-2}+\dots+1\right\}$. Существует $\widetilde{M} > 0 = \max\limits_{t\ge 0}\left\{e^{-\gamma t}\left(t^{n-1}+t^{n-2}+\dots+1\right)\right\}$,

$\Rightarrow \left\|X_j(t)\right\| \le e^{\alpha\cdot t}\cdot P\cdot\widetilde{M}$.

$\left\|\Phi(t)\right\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left\|X_j(t)\right\|^2} \le \sqrt{n}\cdot P\cdot\widetilde{M}\cdot e^{\alpha\cdot t}$. $X(t,0,\xi) = \Phi(t)\cdot C$, тогда $C = \Phi^{-1}(0)\xi$,

следовательно,

$\left\|X(t,0,\xi)\right\| \le \left\|\Phi(t)\right\|\cdot\left\|\Phi^{-1}(0)\right\|\cdot\left\|\xi\right\| \le \sqrt{n}\cdot P\cdot\widetilde{M}\cdot\left\|\Phi^{-1}(0)\right\|\cdot\left\|\xi\right\|\cdot e^{\alpha t} \le M\cdot\left\|\xi\right\|\cdot e^{\alpha t}, M = \sqrt{n}\cdot P\cdot\widetilde{M}\cdot\left\|\Phi^{-1}(0)\right\|$

Лемма: основное свойство решений автономной системы.

(1) $\dot{X} = F(X), X \in \widetilde{D} \subset R^n$ - не пустое, $F(X) - R^n$ значная вектор функция.

Пусть $X(t), < a,b > \in (1)$ и $c \in R$, тогда: 1) $\widetilde{X}(t) = X(t+c), < a-c, b-c > \in (1)$, 2) если $X(t), (\alpha,\omega)$ - непродолжаемое решение, то $\widetilde{X}(t) = X(t+c), < \alpha-c, \omega-c >$ тоже непродолжаемое решение.

Доказательство:

1) $\frac{d}{dt}\widetilde{X}(t) = \frac{d}{dt}(X(t+c)) = \dot{X}(t+c)\cdot 1 = F(X(t+c)) = F(\widetilde{X}(t))$.

2) Проверить! (От противного, с использованием 1).)

Квадратичная функция Ляпунова для линейных систем.

(1) $\dot{X} = AX,\ a_{ij} \in R$.

Лемма: Пусть каждая $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, тогда существует $V(X) = (SX, X)$;

$S^t = S,\ s_{ij} \in R,\ V(X) > 0,\ X \ne 0:\ \dot{V}_A(t,X) = -\left\|X\right\|^2$.

Доказательство: из $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ следует, что существует $\alpha > 0$, что $\forall\ \operatorname{Re}\lambda_j < \alpha$.

$\left\|X(t,o,x)\right\| \le M\cdot\left\|x\right\|\cdot e^{-\alpha\cdot t},\ t \ge 0$, следовательно, $\left\|X(t,o,x)\right\|^2 \le M^2\cdot\left\|x\right\|^2\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t},\ t \ge 0$. В качестве $V(x)$ возьмем: $V(x) = \int_0^\infty\left\|X(t,0,x)\right\|^2 dt \ \Rightarrow V(x) > 0,\ x \ne 0,\ V(0) = 0$.

Строим $\Phi(t) = (X_1(t),...X_n(t)),\ \Phi(0) = E,\ X_j(t) \in R^n$.

$\left\|X_j(t)\right\| \le M\cdot\left\|X_j(0)\right\|\cdot e^{-\alpha\cdot t} = M\cdot e^{-\alpha\cdot t},\ t \ge 0$. $X(t,0,x) = \Phi(t)\cdot x$, тогда

$V(x) = \int_0^\infty\left(\Phi(t)x, \Phi(t)x\right)dt = \int_0^\infty\left(\Phi^t(t)\Phi(t)x, x\right)dt = \int_0^\infty\left(\widetilde{S}(t)x, x\right)dt$. $\widetilde{S}(t)$ - симметрическая, т.е. $\widetilde{S}^t(t) = \widetilde{S}(t)$, следовательно, $\left(\widetilde{S}(t)x, x\right)$ - квадратичная форма.

$\widetilde{s}_{ij}(t) = \Phi^t(t)_{i,\bullet} \cdot \Phi(t)_{\bullet,j} = (\Phi(t)_{\bullet,i} \cdot \Phi(t)_{\bullet,j}) = (X_i(t), X_j(t))$.

$\left|\widetilde{s}_{ij}(t)\right| = \left|\left(X_i(t), X_j(t)\right)\right| \le \left\|X_i(t)\right\| \cdot \left\|X_j(t)\right\| \le M^2 e^{-2\alpha \cdot t},\ t \ge 0$, следовательно, существует

$\int_0^\infty \widetilde{s}_{ij}(t)dt = s_{ij},\ S = \{s_{ij}\},\ S^t = S,\ S = \int_0^\infty \Phi^/(t)\Phi(t)dt$.

$V(x) = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \widetilde{s}_{ij}(t)x_j)x_i\right]dt = \sum_{i,j=1}^n \left[\int_0^\infty \widetilde{s}_{ij}(t)x_i x_j dt\right] = \sum_{i,j=1}^n s_{ij}x_i x_j = (Sx, x) = \left(\left[\int_0^\infty \Phi^t(t)\Phi(t)dt\right]x, x\right)$ т.е.

$V(x) = (Sx, x)$ - квадратичная форма.

$\overset{\bullet}{V}_A(t_0, x_0) = \frac{d}{dt}V(X(t,t_0,x_0))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\left[\int_0^\infty \left\|X(s,0,X(t,t_0,x_0)\right\|^2 ds\right] =$

$= \left\{X(s+t) = \widetilde{X}(s) - \ \textit{решение автономной системы, если}\ X(s)\ \textit{решение}\right\} =$

$= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\left[\int_0^\infty \left\|X(s+t,t_0,x_0)\right\|^2 ds\right] = \left\{s+t=u,\ ds=du\right\} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\left[\int_t^\infty \left\|X(u,t_0,x_0\right\|^2 du\right] =$

$= -\left\|X(t,t_0,x_0\right\|^2|_{t=t_0} = -\left\|X(t_0,t_0,x_0\right\|^2 = -\left\|x_0\right\|^2$. *Лемма доказана.*

Теорема об устойчивости по первому приближению.

$\overset{\bullet}{X} = AX + F(t,X),\ F(t,X) \in C(Ц),\ \exists\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} C(Ц),\ A = \{a_{ij}\}_{n\times n} \in R,\ F(t,0) \overset{t}{\equiv} 0,\ \exists\ a < \tau\ и\ \gamma(x) \ge 0$

при $\|X\| > 0:\ \gamma(x) \overset{X\to 0}{\to} 0,\ Ц = \{t, X \mid t \in (a,+\infty), \|X\| < R > 0\}$

$\|F(t,X)\| \le \|X\|^1 \gamma(x),\ \tau \le t < +\infty,\ \|X\| < R, \Leftrightarrow \frac{\|F(t,X)\|}{\|X\|} \le \gamma(X),\ X \ne 0$, т.е $\|F(t,X)\| = o(\|X\|^1)$

равномерно по t, тогда существует $X(t) \equiv 0,\ (a,+\infty)$, при этом 1) если каждая $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, то $X(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво вправо.

2) если существует хоть одна $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, то $X(t) \equiv 0$ даже не устойчиво по Ляпунову.

<u>Доказательство</u>: в качестве $V(X) = (SX, X)$.

$\overset{\bullet}{V}_{AX+F}(t,X) = \left(grad\ V(X), AX + F(t,X)\right) = \left(grad\ V(X), AX\right) + \left(grad\ V(X), F(t,X)\right) =$

$= \overset{\bullet}{V}_{AX}(t,X) + \left(grad\ V(X), F(t,X)\right) = -\|X\|^2 + \left(grad\ V(X), F(t,X)\right)$

$\overset{\bullet}{V}_{AX+F}(t,X) \le -\|X\|^2 + \|grad\ V(X)\| \cdot \|F(t,X)\| \overset{t\ge\tau}{\le} -\|X\|^2 + 2\|S\| \cdot \|X\| \cdot \gamma(X) \cdot \|X\| \le -\|X\|^2\left(1 - 2\|S\| \cdot \gamma(X)\right),$

но $\gamma(X) \to 0$ *при* $X \to 0$, следовательно, существует $0 < r < R:\ \gamma(X) < \frac{1}{4\cdot\|S\|}$ при $\|X\| < r$,

тогда $\overset{\bullet}{V}_{AX+F}(t,X) \overset{t\ge\tau}{\le} -\|X\|^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\|X\|^2}{2} = -W(X)$ при $\|x\| < r$, следовательно, по теореме 2 асимптотическая устойчивость.

2) без доказательства.

Применение к устойчивости положения равновесия.

(1) $\dot{X} = F(X)$ - автономная система, $F(X) \in C^1(\widetilde{D})$, $\widetilde{D}$ открытое.
$D = \{(t, X) \mid t \in (-\infty, +\infty), X \in \widetilde{D}\}$. Пусть $F(X^*) = 0$, $X^* \in \widetilde{D}$, тогда X^* положение равновесия автономной системы, $X(t) = X^*$, $(-\infty, +\infty) \in (1)$ - стационарное уравнение.

Строим матрицу Якоби: $J(X^*) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{X = X^*} = A$.

<u>Теорема</u>: 1) если каждая $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то $X(t) = X^*$ асимптотически устойчиво вправо.
2) если существует $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то $X(t) = X^*$ даже не устойчиво по Ляпунову.

<u>Доказательство</u>: $X(t) - X^* = Y(t) \Rightarrow \dot{Y}(t) = \dot{X}(t) = F(X(t)) = F(Y(t) + X^*)$, следовательно, получаем систему (2): $\dot{Y} = F(Y + X^*) = G(Y) \in C^1(\widetilde{D} - X^*)$, где $\widetilde{D} - X^* = \{Y \in R^n \mid Y + X^* \in \widetilde{D}\}$- открытое.
$Y(t) \overset{(-\infty,+\infty)}{\equiv} 0 \in (2)$. По формуле Тейлора получаем: $F(Y + X^*) = F(X^*) + J(X^*)Y + \widetilde{F}(Y)$,
$\widetilde{F}(Y) = o\left(\|Y\|^1\right)$, т.е. $\gamma(Y) \equiv \dfrac{\|\widetilde{F}(Y)\|}{\|Y\|} \to 0$ при $\|Y\| \to 0$, находимся в условиях теоремы об устойчивости по первому приближению. Теорема доказана.

Маятник в вязкой жидкости.

$\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi} + b\sin\varphi = 0$, $a > 0$ - коэффициент вязкости, $0 < b = const(m, l, g)$.
$\begin{pmatrix} \varphi(t) = \varphi \\ \dot{\varphi}(t) = \omega \end{pmatrix} = X(t)$. $\left\{\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -b\sin\varphi - a\omega \end{pmatrix} \equiv F(X)\right.$. $X^* = \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \omega^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - положение равновесия.

$J(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. $\det\left(J(X^*) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0$. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. $a > 0,\ b > 0$,

следовательно, по критерию Раусса – Гурвица все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.