

ЛЕТНЯЯ СЕССИЯ 2013

ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Примечание. Подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно рассказывать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях, или содержится в электронном конспекте, или если оно было оставлено в качестве упражнения.

БИЛЕТ №1

1. Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.

БИЛЕТ №2.

Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера. Постановка (геометрическая и аналитическая) и решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.

БИЛЕТ №3

Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума. Определение вариации функционала. Необходимое условие локального экстремума. Уравнение Эйлера. Лемма Лагранжа.

БИЛЕТ №4

Постановка классической изопериметрической задачи; постановка простейшей изопериметрической задачи; теорема Эйлера (с доказательством), принцип взаимности; решение классической изопериметрической задачи.

БИЛЕТ №5

Вариационная задача на условный экстремум: геометрическая и аналитическая постановка задачи о геодезических на сфере; постановка простейшей вариационной задачи на условный экстремум; теорема Лагранжа (с доказательством); решение задачи о геодезических на сфере.

БИЛЕТ №6

Вариационная задача с несколькими независимыми переменными. Вариационная задача с высшими производными.

БИЛЕТ №7

Вариационные задачи с подвижной границей. Естественные граничные условия (они же — условия трансверсальности).

БИЛЕТ №8

Уравнение $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$.

Постановка краевой задачи. Условия однозначной разрешимости (с доказательством). Описание совокупности решений в случае неоднозначной разрешимости.

БИЛЕТ №9

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$$

Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае однозначной разрешимости. Функция Грина.

БИЛЕТ №10

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$$

Сведение задачи (α, β, f) к задаче $(0, 0, \tilde{f})$.

Доказать, что функция Грина оператора в самосопряженной форме симметрична.

БИЛЕТ №11

Функция Грина $G(x, s)$:

- 1) Четыре ее свойства как функции от x при фиксированном $s \in (a, b)$. Однозначная определяемость $G(x, s)$ этими свойствами на $[a, b] \times (a, b)$.
- 2) $G(x, s)$ как обобщенная функция от x при фиксированном $s \in (a, b)$: какому дифференциальному уравнению она удовлетворяет?

БИЛЕТ №12

$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x)$:

Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае, когда однородная задача $(0, 0, 0)$ имеет нетривиальное решение. Условие разрешимости. Описание совокупности решений.

БИЛЕТ №13

Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному λ . Существование действительной собственной функции, соответствующей действительному λ . Ортогональность с весом собственных функций.

БИЛЕТ №14

Постановка задачи о собственных числах для оператора $Ly \equiv A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y$. Сведение к задаче Штурма-Лиувилля для самосопряженного оператора. Сформулировать основную теорему о собственных числах для оператора L .

БИЛЕТ №15

Задача Штурма-Лиувилля. Теорема об односторонней ограниченности множества действительных собственных значений (доказательство для случая $y(a) = y(b) = 0$).

БИЛЕТ №16

Эквивалентность задачи Штурма-Лиувилля интегральному уравнению с симметричным ядром:

I) случай $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля;

II) случай $\lambda = 0$ — собственное значение.

БИЛЕТ №17

Свойство интегральных операторов с действительным, непрерывным симметричным ядром (без доказательства). Как следствие, получить отсюда существование и действительность собственных значений и ортогональность с весом собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

БИЛЕТ №18

Свойство интегральных операторов с действительным, непрерывным симметричным ядром (без доказательства). Теорема о разложении по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (доказать), и как следствие получить бесконечность множества собственных значений.

Связь $\operatorname{sgn} A(x)$ с распределением собственных чисел на действительной оси.

БИЛЕТ №19

Система $\dot{X} = F(t, X)$. Формулировка теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных. Устойчивость по Ляпунову, неустойчивость, асимптотическая устойчивость: примеры. Лемма о достаточности проверки устойчивости лишь для одного τ .

БИЛЕТ №20

$\dot{X} = AX$, $A = \text{const}$ матрица $n \times n$.

Устойчивость нулевого решения в зависимости от расположения спектра на мнимой оси.

БИЛЕТ №21

Идея метода функций Ляпунова. Теорема об устойчивости по Ляпунову (с доказательством).

БИЛЕТ №22

1. Теорема об асимптотической устойчивости в терминах функции Ляпунова (с доказательством).

БИЛЕТ №23

Основное свойство решений автономных систем. Существование квадратичной функции Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$.

БИЛЕТ №24

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению положений равновесия автономных систем (с доказательством). Пример: маятник в вязкой жидкости.

БИЛЕТ №25

Основные свойства решений автономных систем. Фазовое пространство, движения, траектории. Три типа движений автономных систем.

БИЛЕТ №26

Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: узел, седло, фокус, центр, вырожденный узел. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия — сохранение типов грубых особых точек.

БИЛЕТ №27

Предельные циклы. Поведение траекторий в окрестности предельного цикла (с доказательством). Функция последования Пуанкаре. Понятие грубого предельного цикла. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы.

БИЛЕТ №28

Предельное поведение движений автономных систем в $\mathbb{R}^2$. Предельные точки и предельные множества, их свойства. Теорема о предельных множествах, содержащих точки, отличные от положения равновесия (без доказательства). Как следствие, получить теорему Пуанкаре — Бендиксона о существовании предельного цикла для автономных систем на плоскости.

БИЛЕТ №29

Теорема о предельных множествах, содержащих точки, отличные от положения равновесия (с доказательством).

БИЛЕТ №30

Теорема Лиувилля.

Как следствие, доказать, что у системы $\dot{X} = F(X)$, $F \in C^1(D)$, D — односвязная область, $\operatorname{div} F(X) > 0$ в D , нет циклов.

БИЛЕТ №31

Теорема о выпрямлении траекторий.

БИЛЕТ №32

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о числе независимых первых интегралов.

БИЛЕТ №33

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение первых интегралов для понижения порядка системы (теорема с доказательством).

БИЛЕТ №34

Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.