ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

Н. А. Евсеев

ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Новосибирск
2016

Оглавление

Предисловие

Цель данного пособия — помочь студентам Китайско-российского института, специализирующимся по направлению «физика», изучить основы комплексного анализа.

В первой главе кратко приводятся алгебраические и геометрические свойства комплексных чисел. Рассматриваются некоторые топологические понятия, которые необходимы для успешного освоения курса.

Вторая глава посвящена функциям комплексного. Вводится понятие голоморфной функции. Изучаются геометрические свойства некоторых отображений.

В третьей главе излагается теория комплексного интеграла, прежде всего теорема Коши и интегральная формула Коши.

В четвёртой главе изучаются ряды Тейлора и Лорана, и классификация изолированных особых точек голоморфной функции.

В пятой главе приводится понятие вычета и основные приёмы вычисления интегралов с помощь вычетов.

По каждой теме помещены задания для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев приводятся указания.

В заключении каждой главы приводится список ключевых математических терминов с переводом на китайский язык. Подбор терминов для словаря осуществил В. А. Александров, перевод на китайский язык — Ван Цян (王强).

Данное пособие является изложением центральной части курса «Комплексный анализ». Вводная часть этого курса, посвящённая комплексным числам, представлена в [2]. При подготовке курса, и в частности данного пособия, автор основывался на двух работах [9] и [1]. Основными источниками для задач послужили [4] и [6]. Также использовались [3, 5, 7, 8, 10].

Стоит упомянуть, что для китайского читателя будет полезно иметь книги [12] и [11], вторая из которых является переводом [8].

Новосибирск – Харбин, 2015

Глава 1

Начальные сведения

1.1 Комплексные числа

Напомним, что комплексные числа можно определить как множество упорядоченных пар вещественных чисел

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad z = x + iy,$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Действительная часть $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть $\operatorname{Im} z = y$.

Множество $\mathbb{C}$ снабжено операцией сложения

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и операцией умножения

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Для каждого числа $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное по сложению число $-z$ такое, что $z + (-z) = 0$. Для каждого числа $z \neq 0$ существует обратное по умножению число $\dfrac{1}{z}$ такое, что $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$. Имеет место формула

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для модуля комплексного числа выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0;\\
&|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n;\\
&\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \text{при } z_2 \neq 0;\\
&|\operatorname{Re} z| \leq |z| \text{ и } |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \qquad (|x| \leq |z| \text{ и } |y| \leq |z|);\\
&|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \qquad (|z| \leq |x| + |y|);\\
&|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{(неравенство треугольника)};\\
&||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Число $\bar{z} = x - iy$ называется ***сопряжённым***, к $z = x + iy$. При этом справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;\\
&\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;\\
&\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};\\
&\bar{\bar{z}} = z;\\
&z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad (z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2);\\
&z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}};\\
&z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad \text{ и } \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;
\end{aligned}$$

Особо отметим следующее свойство

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{1.2}$$

Бесконечно удалённая точка

Введём понятие *расширенной комплексной плоскости*, состоящей из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удалённого элемента — ***бесконечно удалённой точки*** $z = \infty$. Отметим, что аргумент комплексного числа ∞ не определён, так же как и его действительная и мнимая часть.

Для комплексного числа ∞ полагают следующие алгебраические свойства:

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0} = \infty;$$

$$z + \infty = \infty, z - \infty = \infty;$$

$$z \cdot \infty = \infty, \quad \text{при } z \neq 0;$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \text{при } z \neq \infty, \quad \text{а операции}$$

$$\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} - \text{лишены смысла.}$$

Отметим, что так как $\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$, то операция $\frac{0}{0}$ также не определена.

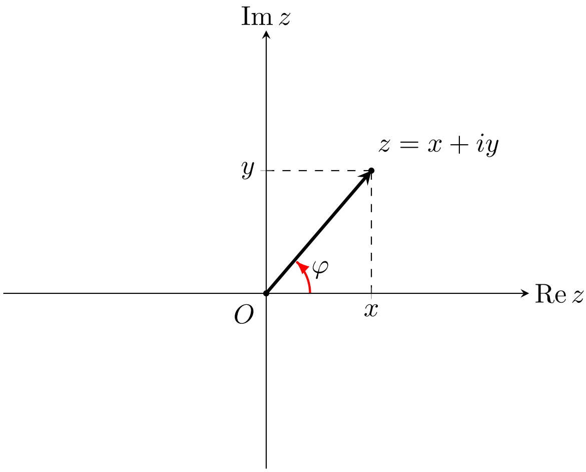
1.2 Комплексная плоскость

Каждый вектор (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно отождествить с комплексным числом $z = x + iy$. Любой вектор на плоскости полностью определяется своей длиной и углом с положительным направлением оси Ox. Модуль комплексного числа

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

это длина вектора (x, y), а аргумент $\varphi = \arg z$ комплексного числа z это угол с положительным направлением оси Ox, при этом

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi.$$



Отсюда можно вывести тригонометрическую запись

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Напомним формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.3}$$

и показательную запись комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Заметим, что выражение (1.3) можно воспринимать как определение комплексной экспоненты:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Другим геометрическим представлением комплексных чисел является сфера Римана. Рассмотрим сферу, задаваемую уравнением

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Каждой точке M на сфере сопоставляется комплексное число z. Сфера Римана и комплексная плоскость связаны по средствам стереографической проекции.

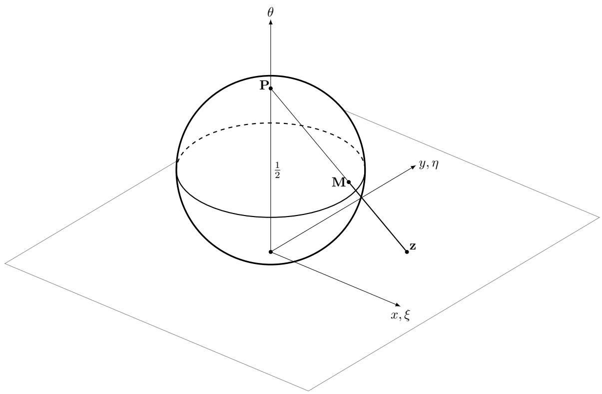


Рис. 1.1. Стереографическая проекция

Формулы, задающие стереографическую проекцию, имеют следующий вид.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \theta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

При этом бесконечно удалённой точке ∞ соответствует точка на сфере с координатами $(0, 0, 1)$.

1.3 Кривые на комплексной плоскости

Пусть дана комплекснозначная функция $\gamma(t)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Когда точка t пробегает отрезок $[a, b]$, точка $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ пробегает некоторое множество в комплексной плоскости.

Это множество вместе с указанием порядка, в котором проходятся все его точки, называется ***непрерывной кривой***, а уравнение $z = \gamma(t)$ - *параметрическим уравнением этой кривой.*

Порядок, в котором в котором проходятся точки называется *ориентацией кривой.*

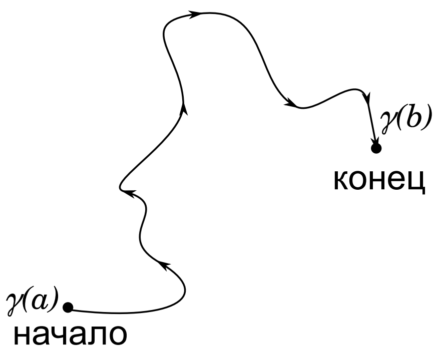


Рис. 1.2. Кривая γ.

Пример 1. *Параметризация отрезка, соединяющего точки* z_1 *и* z_2 *имеет вид*

$$\gamma(t) = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), \qquad t \in [0, 1].$$

При этом кривая γ *ориентирована в направлении от* z_1 *к* z_2. △

Кривая, не имеющая самопересечений называется ***простой кривой*** или простым контуром.

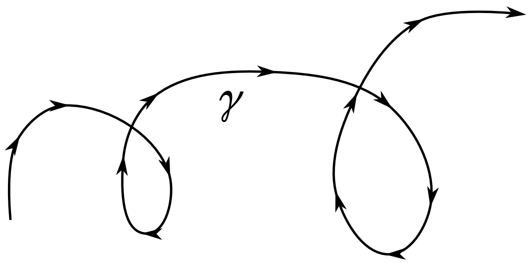


Рис. 1.3. Кривая имеет два самопересечения.

Кривая называется ***замкнутой***, если её начало совпадает с её концом, то есть если она имеет параметрическое уравнение

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \text{для которого} \quad z(a) = z(b).$$

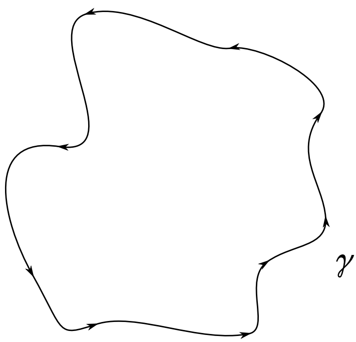


Рис. 1.4. Замкнутая кривая без самопересечений, ориентированная против часовой стрелки.

Пример 2. *Одной из самых простых замкнутых кривых является окружность. Пусть $C(z_0, R)$ — окружность с центром в* *точке z_0 и радиусом R. Тогда параметризация этой окружности имеет вид*

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

При этом кривая γ ориентирована против часовой стрелки. Если требуется ориентация по часовой стрелке, то следует выбрать уравнение вида

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{-it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Также приведём параметризацию эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\gamma(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

против часовой стрелки, и по часовой стрелке

$$\gamma(t) = a\cos t - b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

△

> Если кривая γ имеет хотя бы одно параметрическое уравнение $z = \gamma(t), \quad a \le t \le b$, с функцией $\gamma(t)$, имеющей на отрезке $[a, b]$ непрерывную и отличную от нуля производную, то γ называется ***гладкой кривой***.

Производная $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ — является касательным вектором к кривой γ в точке $\gamma(t_0)$.

> Непрерывная кривая γ называется ***кусочно-гладкой кривой***, если её можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является гладкой кривой.

1.4 Топология комплексной плоскости

Приведём основные топологические понятия, которые потребуются в данном курсе.

Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, тогда $|z - w|$ — расстояние между точками z и w. Расстояние от точки до множества и расстояние между множествами определяются следующим образом

$$\operatorname{dist}(z, A) = \inf_{w \in A} |z - w|, \quad \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{z \in A, w \in B} |z - w|.$$

Фиксируем комплексное число $a \in \mathbb{C}$ и вещественное число $r > 0$, тогда числа z, удовлетворяющие равенству $|a - z| = r$, составляют множество точек, удалённых от a на расстояние r. Другими словами, это окружность с центром в a и радиусом r.

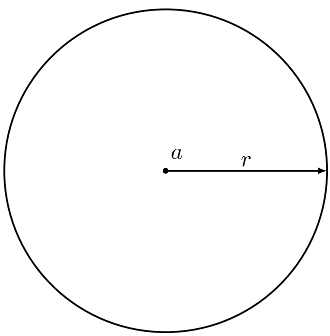


Рис. 1.5. Окружность $|a - z| = r$

Множество точек $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ образуют круг.

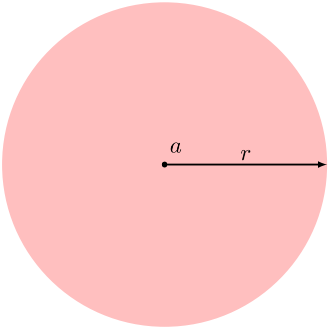


Рис. 1.6. Круг $|a - z| < r$

Также множество $B(a, r)$ называют ***окрестностью*** точки a (или r-окрестностью). Однако r-окрестностью бесконечно удалённой точки называют множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus B(a, r)$, то есть внешность круга. Окрестностью бесконечно удалённой точки на сфере Римана является «шапочка», то есть часть сферы, расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a, \ 0 < a < 1$.

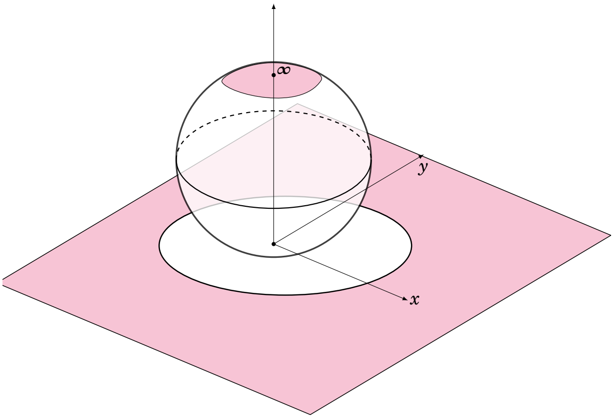
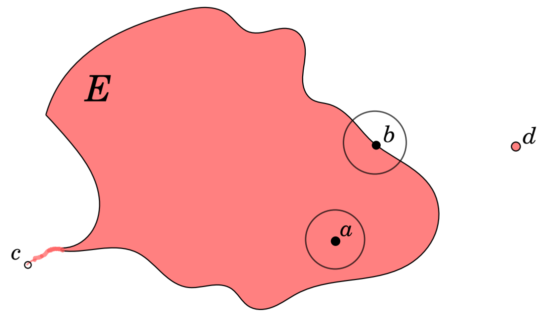


Рис. 1.7. Окрестность бесконечно удалённой точки.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$.
1. Точка a называется ***внутренней точкой*** множества E, если найдётся окрестность $B(a, r) \subset E$.
2. Точка b называется ***граничной точкой*** множества E, если всякая окрестность $B(b, r)$ содержит точки из E и из $\mathbb{C} \setminus E$.
3. Точка c называется ***предельной точкой*** множества E, если всякая окрестность $B(c, r)$ содержит точки из E, отличные от c.
4. Точка d называется ***изолированной точкой*** множества E, если $d \in E$ и найдётся окрестность $B(d, r)$, которая не содержит других точек из E.



Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется ***открытым***, если все его точки внутренние.

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои граничные точки.

Пример 3. *Пусть $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда множества $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$ открыты, в то время как множество $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ — замкнуто.*

Пример 4. *$\mathbb{C}$ и пустое множество $\emptyset$ — открытые множества (и в то же время замкнутые).*

Множество всех граничных точек множества E называется ***границей*** и обозначается ∂E.

Множество всех внутренних точек множества E называется ***внутренностью*** и обозначается $\operatorname{int} E$.

Объединение множества и его границы $\partial E \cup E$ называется ***замыканием*** и обозначается $\overline{E}$.

Пример 5. *Пусть* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, *тогда* $\overline{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ *и* $\partial E = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$. $\overline{E}$ *— замкнутый диск, а* ∂E *— окружность.*

Множество E называется ***связным***, если не существует двух открытых множеств U_1 и U_2, удовлетворяющих условиям

$$E \subset U_1 \cup U_2,\ E \cap U_1 \neq \emptyset,\ E \cap U_2 \neq \emptyset,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Это определение связности в случае непустого открытого множества D равносильно тому, что любые две точки множества D можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве.

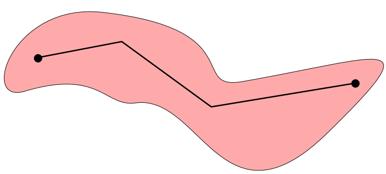


Рис. 1.8. Связное множество

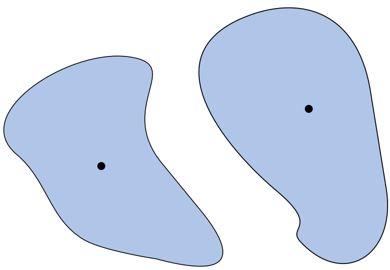


Рис. 1.9. Не связное множество (две компоненты)

Область — это открытое связное множество.

Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Далее рассматриваются только области с конечным порядком связности, иными словами *конечносвязные* области.

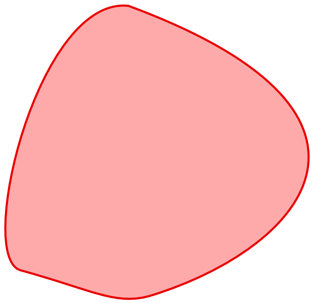


Рис. 1.10. Односвязная область

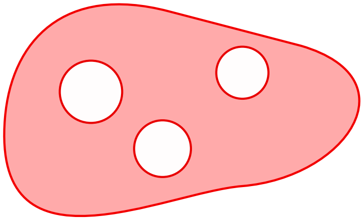


Рис. 1.11. Конечносвязная область (4-связная)

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется ***ограниченным***, если существует такой круг $B(0, R)$, $R < \infty$, что $E \subset B(0, R)$, то есть $|z| < R$ для любого $z \in E$.

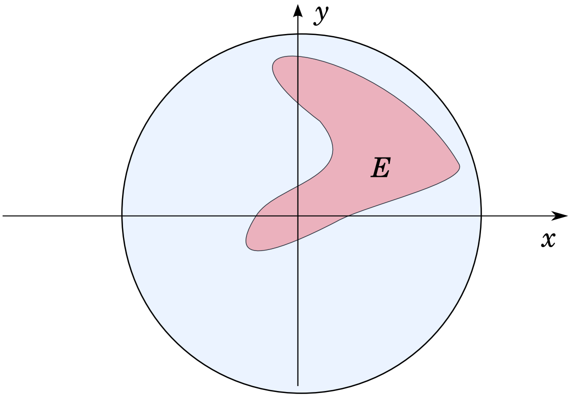


Рис. 1.12. Ограниченное множество.

Термины к главе 1

действительная часть компле́ксного числа́		复数的实数部分
за́мкнутая крива́я		封闭的曲线
за́мкнутый ко́нтур		闭合电路；封闭的周边
компле́ксное число́		复数
компле́ксное сопряже́ние		复数共轭
коне́ц		终止，终点；末端，端，尖
коне́ц криво́й		曲线的末端
коне́чная то́чка криво́й		曲线的端点
крива́я		曲线
лежа́ть		坐落于，位于
лежа́ть вне криво́й		位于曲线之外
лежа́ть внутри́ криво́й		位于曲线之内
лежа́ть снару́жи от криво́й		位于曲线外侧
мни́мая едини́ца		虚数单位
мни́мая часть компле́ксного числа́		复数的虚数部分
мо́дуль компле́ксного числа́		复数的模数
нера́венство треуго́льника		三角形的不等式
многосвя́зная о́бласть		多回路域

направлéние обхóда		转动方向，绕飞方向
направлéние обхóда по часовóй стрéлке		顺时针转动
направлéние обхóда против часовóй стрéлке		逆时针转动
начáло начáльная тóчка кривóй		[数]原点；原理；原则；基础；定律 曲线的原点（起始点）
конéц		终止，终点；末端，端，尖
óбласть		区域，部分；领域，范围，方面
ограни́ченная óбласть		限制区
окрéстность		[数]邻域
ориенти́рованная кривáя		面向曲线
отрéзок		[数]线段，截距；断片，切片；一段，一块（布料及材料等）
отрéзок прямóй (отрéзок прямолинéйный)		直线段
парáметр		参数，变数；数据，[矿]标轴
простóй кóнтур		单管电路
рáдиус		半径
рáдиус окрýжности		圆的半径
содержáть		设置；包含；维持，保持

содержа́ть внутри́ себя́		本身内部包含
сопряжённое компле́ксное число́ центр		共轭复数 中心；顶尖，顶针
центр кру́га		圆心

Глава 2

Функции комплексного переменного

> Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на множестве E задана ***функция*** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Любая функция комплексного переменного может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительнозначные функции. Функция u называется действительной частью f и обозначается $u = \operatorname{Re} f$, v — мнимая часть f и обозначается $v = \operatorname{Im} f$.

2.1 Многозначные функции

Функция комплексного переменного (в отличие от функции действительно переменного) может принимать несколько различных значений при одном значении переменного.

Если каждому z соответствует лишь одно значение w, то функция называется ***однозначной***, если некоторым z соответствует более чем одно значение w — ***многозначной***. Так, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^n$ и $\arg z$ — однозначные функции. Примерами многозначных функций могут служить $f(z) = \sqrt[n]{z}$ (n различных значений) и $f(z) = \operatorname{Arg} z$ (бесконечно много различных значений). Пусть f, g — две многозначные функции, тогда

$$f(z) = g(z) \Leftrightarrow \{f(z)\} = \{g(z)\}.$$

Другими словами, две многозначные функции ***равны*** в точке z, если совпадают множества их значений в данной точке.

2.2 Предел и непрерывность

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется ***пределом*** функции $f(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Если такого числа λ нет, то мы говорим, что предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ **не существует**.

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

где $\lambda = a + ib$.

Пример 6. *Пусть $f(z) = 5z$. Используя только определение предела, доказать, что*

$$\lim_{z \to i} f(z) = 5i.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$, подберём такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что неравенство $|f(z) - 5i| < \varepsilon$ будет верно для всех z таких, что $|z - i| < \delta_\varepsilon$. Поскольку

$$|f(z) - 5i| = |5z - 5i| = 5|z - i|,$$

то в качестве δ_ε можно выбрать $\delta_\varepsilon = \varepsilon/5$. Действительно, если $|z - i| < \varepsilon/5$, то $|f(z) - 5i| < \varepsilon$. △

Пример 7. *Показать, что предела* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ *не существует.*

Решение. Поскольку предел не зависит от того каким образом z стремится к нулю, то

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\overline{x + i0}}{x + i0} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{0 + iy}}{0 + iy}.$$

С другой стороны ,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overline{x + i0}}{x + i0} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\overline{0 + iy}}{0 + iy} = -1.$$

△

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Непрерывность функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z, эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0), как функций двух действительных переменных. Отсюда следует, что многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных непосредственно переносятся на непрерывные функции комплексного переменного.

А именно, *сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций также являются непрерывными функциями* (в случае частного исключаются те точки, в которых делитель обращается в нуль). Если функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве E и её значения принадлежат множеству F, на котором непрерывна функция $\zeta = g(w)$, то *сложная функция* $\zeta = g(f(z)) = h(z)$ *также непрерывна на* E.

Пример 8. *Показать, что* $f(z) = z^2$ *- непрерывная функция при любом значении* z.

Решение. Имеем $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Если $z \to z_0$, то существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z| < M, |z_0| < M$. Получаем, что

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < M|z - z_0|.$$

Возьмём $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{т.е. } |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

Итак, $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, то есть мы доказали, что $f(z) = z^2$ — непрерывная функция. $\triangle$

Пример 9. *Функция*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{Re} z|}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $z = 0$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

1) Если $z \to 0$ так, что $y = 0$ и $x \to 0$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|} = 1.$$

2) Если $z \to 0$ так, что $x = 0$ и $y \to 0$, то

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{|y|} = 0.$$

Таким образом, предела $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует и, следовательно, функция $f(z)$ разрывна при $z = 0$. $\triangle$

Иногда, точки, в которых функция разрывна, можно устранить.

> Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ является точкой устранимого разрыва, если существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$. В точке $z = -1$ функция не определена, однако, существует предел $\lim\limits_{z\to -1} f(z) - 2$. Поэтому доопределяя функцию в точке -1

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{z^2-1}{z+1}, & z \neq -1, \\ -2, & z = -1, \end{cases}$$

получаем функцию, непрерывную всюду в $\overline{\mathbb{C}}$.

Задачи к 2.2

1. Используя только определение предела доказать, что $\lim\limits_{z\to z_0} (az + b) = az_0 + b$.

2. Существует ли предел $\lim\limits_{z\to 0} \frac{|1+z|-1}{z}$?

3. Вычислить предел $\lim\limits_{z\to \infty} \frac{z^4+16}{z^5-16}$.

4. Вычислить предел

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z\,|z|-3\operatorname{Im}z+i}{z\,|z|^2+2z-3i}.$$

5. Вычислить пределы

а) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{iz^3-1}{z+i}$; б) $\displaystyle\lim_{z\to 1-i}(x+i(2x+y))$.

6. Показать, что функция $f(z)=|z|$ непрерывна при любом z.

7. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & \text{если } z\neq 0,\\ 0, & \text{если } z=0.\end{cases}$$

2.3 Комплексное дифференцирование

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in D$.

> Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется ***дифференцируемой в точке*** z_0, если существует предел
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2.1}$$

Предел 2.1 можно записать в виде

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности $B(z_0, r)$ точки z_0, то f называется ***голоморфной в точке***[1] z_0.

Функция f называется ***голоморфной*** (***дифференцируемой***) ***на открытом множестве*** $\Omega \subset \mathbb{C}$, если f дифференцируема в каждой точке $z \in \Omega$.

Если функция f дифференцируема на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, то на этом множестве определена функция, называемая ***производной***:

$$f'(z) = \lim_{t \to z} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}.$$

Функция голоморфная (дифференцируемая) всюду на $\mathbb{C}$ называется ***целой***.

> Особо отметим, что если функция дифференцируема, то она и непрерывна. То же самое можно сформулировать иначе, если функция не является непрерывной, то она не дифференцируема.

Пример 10. *Найти производную функции $f(z) = z^3$, используя только определение.*

[1] Для данного понятия также используется термин *аналитическая в точке* функция.

Решение. Имеем

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0}=\frac{(z-z_0)(z^2+zz_0+z_0^2)}{z-z_0}=z^2+zz_0+z_0^2,$$

и, следовательно,

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0}=3z_0^2.$$

△

Пример 11. *Функция* $f(z)=\overline{z}$ *нигде не дифференцируема.*

Решение. Действительно,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}.$$

Как мы показали в примере 7 последний предел не существует. △

Пример 12. *Функция* $f(z)=\overline{z}^2$ *дифференцируема при* $z_0=0$ *и не дифференцируема при* $z_0\neq 0$.

Решение. 1. Если $z_0=0$, то

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}^2}{h}=\lim_{h\to 0}\overline{h}\frac{\overline{h}}{h}=0.$$

2. Пусть $z_0\neq 0$. Положим $z=z_0+re^{i\varphi}$ (тогда $z\to z_0$ при $r\to 0$). Имеем

$$\frac{\overline{z}^2-\overline{z_0}^2}{z-z_0}=\frac{(\overline{z_0+re^{i\varphi}})^2-\overline{z_0}^2}{z_0+re^{i\varphi}-z_0}=\frac{(\overline{z_0}+re^{-i\varphi})^2-\overline{z_0}^2}{z_0+re^{i\varphi}-z_0}=$$

$$\frac{\overline{z_0}^2+2\overline{z_0}re^{-i\varphi}+r^2e^{-2i\varphi}-\overline{z_0}^2}{z_0+re^{i\varphi}-z_0}=$$

$$\frac{2\overline{z_0}r2e^{-i\varphi}+r^2e^{-2i\varphi}}{re^{i\varphi}}=2\overline{z_0}e^{-2i\varphi}+re^{-3i\varphi}$$

Тогда

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}^2-\overline{z_0}^2}{z-z_0}=\lim_{r\to 0}(2\overline{z_0}e^{-2i\varphi}+re^{-3i\varphi})=2\overline{z_0}\quad \text{при } \varphi=0,$$

и

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}^2-\overline{z_0}^2}{z-z_0}=\lim_{r\to 0}(2\overline{z_0}e^{-2i\varphi}+re^{-3i\varphi})=-2\overline{z_0}\quad \text{при } \varphi=\pi/2.$$

Таким образом, $f(z)=\overline{z}^2$ не дифференцируема в $z_0\neq 0$. △

Для комплексной производной выполняются стандартные свойства. Пусть f, g — дифференцируемые функции, тогда

1) $(f\pm g)'(z)=f'(z)\pm g'(z)$ свойство линейности;

2) $(f\cdot g)'(z)=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$ правило Лейбница;

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z)=\dfrac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z))}{(g(z))^2}$ производная отношения;

4) $(f(g(z)))'=f'(g(z))\cdot(g'(z))$ производная композиции.

Доказательство. 3) Заметим, что должно быть выполнено условие $g(z)\neq 0$. Вычислим производную

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(z+h)}{g(z+h)}-\frac{f(z)}{g(z)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)g(z)-f(z)g(z+h)}{hg(z+h)g(z)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Big(f(z+h)g(z)-f(z)g(z)\Big)-\Big(f(z)g(z+h)-f(z)g(z)\Big)}{hg(z)g(z+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(z)g(z+h)}\left(g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f(z)\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{g(z)\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right) - f(z)\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\right)}{\lim\limits_{h\to 0} g(z)g(z+h)}$$

$$= \frac{g(z)f'(x) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Здесь применяется непрервыность функции $g(z)$

$$\lim_{h\to 0} g(z)g(z+h) = g^2(z).$$

Напомним, что непрерывность следует из дифференцируемости. $\square$

Выведем правило дифференцирования обратной функции $(f^{-1})'$. Напомним:

> Функция $f : G \to H$ называется ***взаимно однозначной***, если для каждого $w \in H$ найдётся единственное число $z \in G$ такое, что $f(z) = w$.

> Если $f : G \to H$ взаимно однозначная функция, то существует ***обратная функция*** $g = f^{-1}$, $g : H \to G$ такая, что $f(g(w)) = w$ для всех $w \in H$.

Лемма 13 *Пусть $G, H \subset \mathbb{C}$ — открытые множества, $w_0 \in H$, $f : G \to H$ — взаимно однозначная функция (биекция) и $g = f^{-1}$. Если f дифференцируема в точке $g(w_0)$, $f'(g(w_0)) \neq 0$ и g — непрерывна в w_0, то g дифференцируема в w_0 и*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Доказательство. Имеем

$$g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} =$$
$$= \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\dfrac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}}.$$

Поскольку $g(w) \to g(w_0)$ при $w \to w_0$, получим

$$g'(w_0) = \lim_{g(w) \to g(w_0)} \frac{1}{\dfrac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}}$$

и

$$g'(w_0) = \frac{1}{\lim\limits_{g(w) \to g(w_0)} \dfrac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

$\square$

Отметим, что производные элементарных функций комплексного переменного находятся по тем же формулам, что и для действительного случая:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad (\ln z)' = \tfrac{1}{z},$$
$$(e^z)' = e^z,$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$
$$(\cos z)' = -\sin z,$$
$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

2.3.1 Условия Коши—Римана

Рассмотрим функцию $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда частные производные имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = u_y(x, y) + iv_y(x, y).$$

Следующая теорема устанавливает связь межу комплексной производной $f'(z)$ и частными производными f_x, f_y и, что более важно, описывает необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции f в смысле комплексного переменного.

Теорема 14 1) *Пусть f — дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда частные производные удовлетворяют условию*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{2.2}$$

2) *Пусть f — комплексная функция и её частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0. Если частные производные удовлетворяют условию* (2.2), *то функция f дифференцируема в точке z_0.*

В обоих случаях 1) *и* 2) *производную можно записать в виде*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Доказательство. 1) Если f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

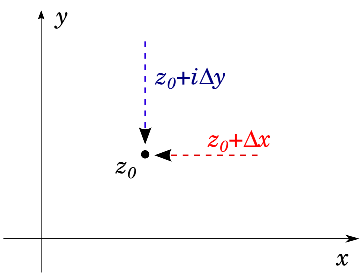
существует и не зависит от того, каким образом Δz стремится к нулю. Положим $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Рассмотрим два случая:

$a)$ $\Delta x \to 0, i\Delta y = 0$ и $b)$ $\Delta x = 0, i\Delta y \to 0$. Имеем

$$a) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0),$$

$$b) \quad f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \\ = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Таким образом, условие (2.2) выполнено.



2) Пусть теперь функция $f(z) = f(x, y)$ такова, что частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 и выполнено условие (2.2). Требуется доказать, что $f(z)$ дифференцируема в точке z_0. Фактически, мы покажем, что $f'(z_0) = f_x(z_0)$.

Имеем

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$$
$$=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0+\Delta x)+f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta z}=$$
$$=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{f(z_0+\Delta x+i\Delta y)-f(z_0+\Delta x)}{\Delta y}+\frac{\Delta x}{\Delta z}\cdot\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что при $\Delta z\to 0$

$$\frac{f(z_0+\Delta x+i\Delta y)-f(z_0+\Delta x)}{\Delta y}\to f_y(z_0)$$

и

$$\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}\to f_x(z_0).$$

Далее

$$f_x(z_0)=\frac{\Delta z}{\Delta z}f_x(z_0)=\frac{\Delta x+i\Delta y}{\Delta z}f_x(z_0)=$$
$$=\frac{\Delta x}{\Delta z}f_x(z_0)+\frac{\Delta y}{\Delta z}if_x(z_0)=\frac{\Delta x}{\Delta z}f_x(z_0)+\frac{\Delta y}{\Delta z}f_y(z_0).$$

В последнем переходе мы воспользовались равенством $if_x(z_0)=f_y(z_0)$ (которое следует из (2.2)).

Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_x(z_0)=$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta z}\left(\frac{f(z_0+\Delta x+i\Delta y)-f(z_0+\Delta x)}{\Delta y}-f_y(z_0)\right)\right]+$$
$$+\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta z}\left(\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}-f_x(z_0)\right)\right]=0,$$

здесь мы воспользовались тем, что $|\Delta x/\Delta z| \leq 1$, $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$. В итоге $f'(z_0) = f_x(z_0)$. □

Обычно (2.2) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

и называют ***условиями Коши-Римана***.

Пример 15. *Является ли дифференцируемой функция* $f(z) = y + ix$*?*

Решение. Находим $u = y, v = x, \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0.$ Видим, что одно из условий Коши-Римана не выполняется. Значит, данная функция не является дифференцируемой. △

Пример 16. *Является ли дифференцируемой функция* $f(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$*?*

Решение. Имеем $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, и находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Таким образом, получаем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ — условия Коши-Римана выполнены. Значит, можно посчитать производную

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + e^x \sin y =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z. \qquad \triangle$$

2.3.2 Гармонические функции

Дифференциальный оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа.

> Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется ***гармонической*** в области $D \subset C$, если
>
> $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{всюду в области } D.$$

Приведём примеры гармонических функций: $e^x \cos y$, $x^2 - y^2$, $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

Связь голоморфных и гармонических функций

Далее будет доказано, что голоморфная в области функция, а, следовательно, и её действительная и мнимая части, будут бесконечно дифференцируемы (см. теорему 43). А пока воспользуемся этим фактом.

Пусть функция $f = u + iv$ является голоморфной в области D, следовательно, выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по переменной x, второе равенство по переменной y, складывая и используя равенство смешанных производных ($\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, также см. теорему 94), получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

То есть функция u является гармонической в области D. Аналогично доказывается гармоничность функции v.

> Гармонические в области D функции называются ***сопряженными***, если они связаны условиями Коши–Римана.

Теорема 17 *Чтобы функция $f = u + iv$ была голоморфна в области D необходимо и достаточно, чтобы ее действительная часть u и мнимая часть v были сопряженными гармоническими функциями.*

Необходимость условий теоремы уже показана, а достаточность следует из того, что гармонические функции дифференцируемы (как функции двух действительных переменных), и их сопряженность влечет выполнение условий Коши–Римана.

Задачи к 2.3

8. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

а) $\operatorname{Re} z$, в) $|z|^2$, д) $z \operatorname{Re} z$,

б) x^2y^2, г) $x^2 + iy^2$, е) $2xy - i(x^2 - y^2)$.

9. Найти все точки, в которых дифференцируема функция $f(z) = e^{x^2} + i2x(1 + ye^{x^2})$

10. Найти, где дифференцируемы следующие функции, и написать формулы для их производных

а) $e^{\operatorname{ch} z}$, г) ze^{-z},

б) $\sin(2e^z)$, д) $\dfrac{e^z}{z}$,

в) $\dfrac{z \cos z}{1 + z^2}$, е) $\sin z \operatorname{ch} z - i \cos z \operatorname{sh} z$.

11. Выяснить, где дифференцируемы следующие функции, и найти их производных а) $\operatorname{tg} z$,

б) $\operatorname{ctg} z$,

в) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$,

г) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$,

д) $(e^z-e^{-z})^{-2}$,

е) $\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

12. Используя только определение производной, доказать равенство $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$, $z\neq 0$.

13. Найти производные

а) $\sin e^z$,

б) $\dfrac{e^{-z^2}}{1+2z}$.

14. Найти числа a, b при которых функция $f(z)=ax+iby$ будет дифференцируемой.

15. Найти числа a, b при которых функция $f(z)=x+ay+i(bx+y)$ будет дифференцируемой.

16. Является ли функция $f(z)=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Найти $f'(z)$.

17. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, такая что $\operatorname{Im} f(z)=x+y$ и $f(0)=0$. Найти $f(z)$.

18. Является ли функция

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & \text{если } z\neq 0\\ 0, & \text{если } z=0\end{cases}$$

голоморфной в 0?

19. Найти условия на постоянные a, b, c, при которых функция $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ является гармонической. ➠

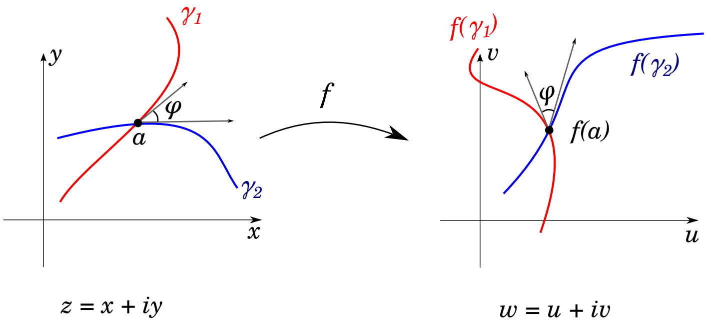
20. Является ли функция $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ гармонической? ➠

21. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, будут ли функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$ гармоническими? ➠

2.4 Геометрические свойства функций

Функции комплексного переменного можно рассматривать как отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, и по сути комплексная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — это преобразование плоскости $(x, y) \mapsto (u, v)$.

Теорема 18 *Пусть f — голоморфная в точке $a \in \mathbb{C}$ функция такая, что $f'(a) \neq 0$. Пусть также γ_1, γ_2 — две гладкие кривые, пересекающиеся в точке a под углом φ. Тогда f отображает γ_1, γ_2 в гладкие кривые $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$, которые пересекаются под тем же углом φ.*



Доказательство. Пусть $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ такие параметризации, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$. Тогда $\gamma_1'(0)$, $\gamma_2'(0)$ — касательные векторы к кривым γ_1, γ_2 в точке a. И, по условию, угол между этим векторами есть φ.

Вычислим касательные векторы в образе:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_1(t))|_{t=0} = f'(\gamma_1(0)) \cdot \gamma_1'(0) = f'(a) \cdot \gamma'(0),$$

аналогично $(f(\gamma_2(t)))'_{t=0} = f'(a)\gamma_2'(0)$. Это означает, что касательные векторы умножаются на одно и тоже комплексное число $f'(a)$. В свою очередь это означает, что длина каждого вектора умножается на $|f'(a)|$ и оба вектора поворачиваются на угол $\arg f'(a)$ (см. геометрический смысл умножения комплексных чисел). Таким образом, угол между касательными векторами не меняется. Следовательно, сохраняется угол между образами кривых $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$. □

2.4.1 Геометрический смысл производной

Пусть функция $f = u + iv$ является голоморфной в окрестности U точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим связанное с функцией f отображение $F : U \to R^2$, определяемое по правилу $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Найдём матрицу Якоби отображения F и, используя условия Коши-Римана, преобразуем ее к специальному виду

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{\sqrt{*}}\frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = |f'(z_0)| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ и $\varphi = arg f'(z_0)$.

Таким образом отображение, осуществляемое дифференциалом функции f (дифференциалом отображения F) в точке z_0, сводится к растяжению с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороту на угол $\varphi = \arg f'(z_0)$.

2.4.2 Примеры отображений

Параллельный перенос

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка. Отображение

$$f(z) = z + z_0$$

осуществляет параллельный перенос в направлении z_0.

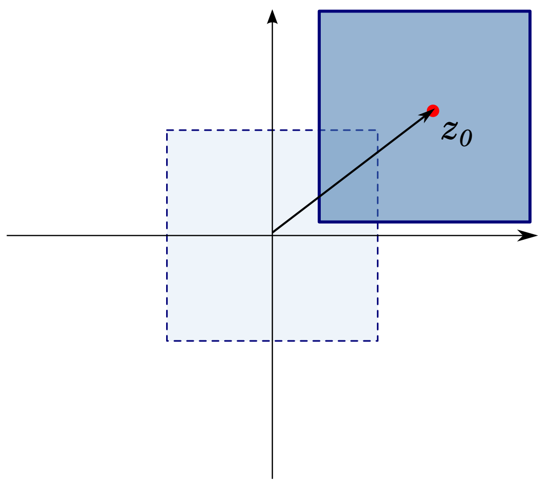


Рис. 2.1. Перенос $z + z_0$.

Поворот и растяжение

Рассмотрим отображение

$$f(z) = z_0 \cdot z. \tag{2.4}$$

Перепишем (2.4) в полярных координатах $z = re^{i\varphi}$

$$f(re^{i\varphi}) = r_0 e^{i\varphi_0} \cdot re^{i\varphi} = r_0 r e^{i(\varphi+\varphi_0)}.$$

То есть модуль числа умножается на r_0, а аргумент увеличивается на угол φ_0. Другими словами, отображение (2.4) осуществляет растяжение в r_0 раз и поворот на угол φ_0. Если $r_0 = |z_0| = 1$, то это поворот без растяжения; если $\varphi_0 = \arg z_0 = 0$, то это растяжение без поворота.

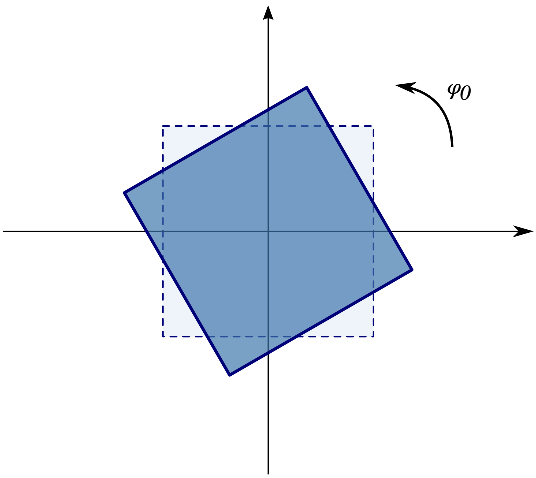


Рис. 2.2. Поворот $z_0 \cdot z$.

Инверсия

Отображение вида

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

называется ***инверсией***. В полярных координатах

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$$

При этом модуль преобразуется по правилу $r \mapsto \frac{1}{r}$. Откуда заключаем, что внутренность единичного круга отображается во внешность и наоборот. Преобразование аргумента $\varphi \mapsto -\varphi$ — это отражение относительно вещественной оси.

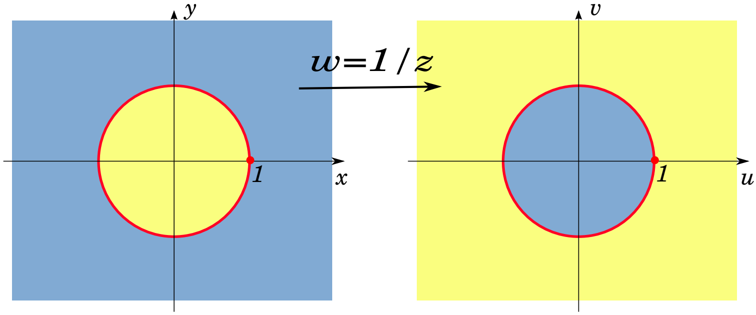


Рис. 2.3. Внутренность и внешность меняются местами, а окружность остаётся на месте.

Найдём координатное представление отображения. Для этого выделим действительную и мнимую части $f = u(x, y) + iv(x, y)$

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Таким же образом найдём

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \tag{2.5}$$

Исследуем дальнейшие свойства отображения. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = R^2$ (с центром в 0 и радиусом R) и найдём её образ при инверсии. Подставив выражения (2.5) в уравнение окружности, получаем

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = R^2$$

или, преобразуя, имеем уравнение

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2},$$

которое также является уравнением окружности с центром в 0, а радиус равен $\frac{1}{R}$.

Теперь выясним во что переходят вертикальные прямые вида $x = a$. Подставив (2.5) в уравнение прямой, имеем

$$\frac{u}{u^2 + v^2} = a.$$

Если $a = 0$, то $u = 0$ (образом прямой $x = 0$ является прямая $u = 0$). Если $a \neq 0$, выражение можно преобразовать следующим образом (выделение полного квадрата)

$$\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(2a)^2},$$

то есть образом прямой $x = a$ является окружность с центром в точке $(\frac{1}{2a}, 0)$ и радиусом $\frac{1}{2a}$. Аналогично выводим, что образом горизонтальной прямой $y = b$ является окружность $u^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{(2b)^2}$ с центром в точке $(0, -\frac{1}{2b})$ и радиусом $\frac{1}{2b}$.

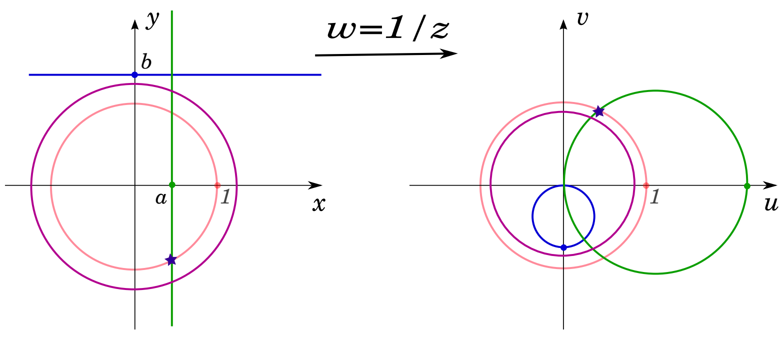
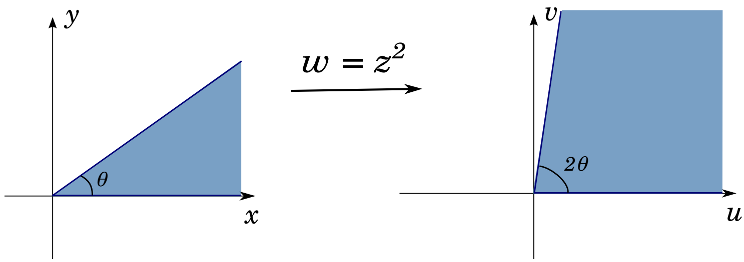


Рис. 2.4. Образы прямых и окружностей при инверсии

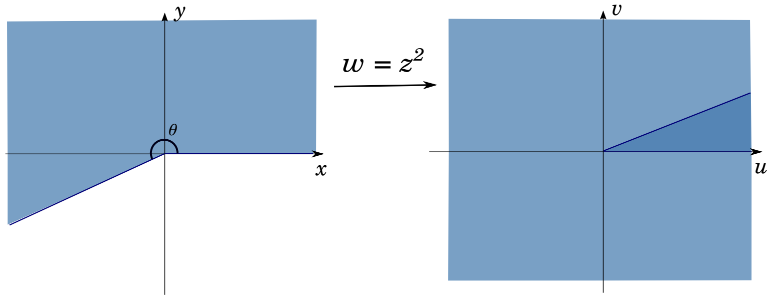
Степенное отображение

Изучим некоторые свойства функции $f(z) = z^2$. В полярных координатах функция имеет вид $f(re^{i\varphi}) = r^2 e^{i2\varphi}$, модуль возводится в квадрат, а аргумент умножается на 2. Рассмотрим образы различных секторов.



В частности, первая четверть отображается на верхнюю полуплоскость, а верхняя полуплоскость (впрочем как и нижняя) отображается на всю плоскость.

Если $\theta > \pi$, то происходит наложение, изображённое на рисунке ниже.



При отображении всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ каждой точке

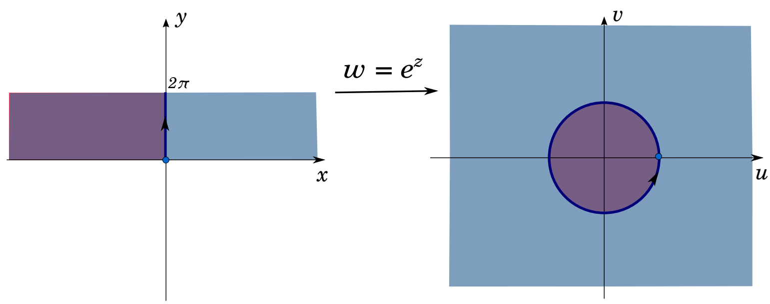
w (за исключением $w = 0$) соответствуют два значения z. Вследствие чего обратная функция $z = \sqrt{w}$ является двузначной.

Показательная функция

Выясним, какими свойствами обладает отображение, задаваемое экспонентой

$$f(z) = e^z.$$

Запишем в координатах $f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Заметим, что если x принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а y от 0 до 2π, то $e^x e^{iy}$ принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом горизонтальная полоса $0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi$ отображается на всю плоскость.



2.4.3 Конформное отображение

> Взаимно однозначное отображение $f : D \to D'$ ($D, D' \subset \mathbb{C}$ — области) называют ***конформным***, если в каждой точке $z \in D$ f обладает свойствами:
>
> 1. постоянства растяжения по всем направлениям;
> 2. сохранения углов меду кривыми.

В частности, если функция f является голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D, то f является конформным отображением на D.

Теорема 19 (о граничном соответствии) *Пусть f конформное отображение области D. Тогда $f(D)$ — область. При этом образ границы области D переходит в границу области $f(D)$:*

$$f(\partial D) = \partial[f(D)].$$

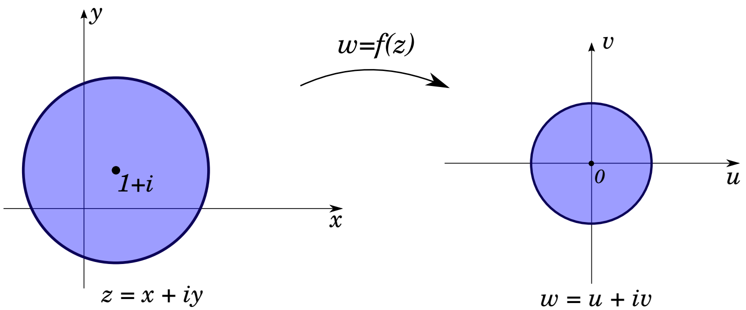
Стоит отметить, что при построении общей теории функций комплексного переменного и в её многочисленных приложениях, в частности при решении задач механики и физики, большое значение имеет изучение геометрических свойств конформных отображений, осуществляемых голоморфными функциями. Фундаментальной же задачей теории конформных отображений является следующая. Пусть даны две области комплексной плоскости. Требуется найти функцию, осуществляющую конформное отображение одной области на другую. Рассмотрим ниже некоторые примеры таких отображений, находящие наиболее широкое применение в приложениях.

Пример 20. *Покажем, что линейная функция $w = f(z) = az + b$ ($a \neq 0$ и b — произвольные комплексные постоянные) осуществляет конформное отображение полной комплексной плоскости z на полную комплексную плоскость w.*

Решение. Действительно, линейная функция является взаимно однозначной и её производная $f'(z) = a$ отлична от нуля во всех точках плоскости z. Чтобы убедиться в сохранении конформности отображения окрестности точки $z = \infty$ на окрестность точки $w = \infty$, положим $t = \frac{1}{z}$ и $\zeta = \frac{1}{w}$. Функция $w = az + b$ перейдёт в функцию $\zeta = \frac{t}{a+bt}$, которая осуществляет конформное отображение окрестности точки $t = 0$ на окрестность точки $\zeta = 0$ (здесь точка $t = 0$ является правильной точкой этой функции, то есть производная функции в этой точке не равна нулю), и $\zeta'(t)|_{t=0} = \frac{1}{a} \neq 0$. △

С геометрической точки зрения отображение, задаваемое линейной функцией $f(z) = az+b$, сводится к последовательному выполнению преобразования подобия с коэффициентом $|a|$, поворота на угол $\arg a$ и сдвига на вектор b. Данная функция может быть применена для построения конформных отображений подобных фигур. Это мы и продемонстрируем на следующем примере.

Пример 21. *Построить функцию, осуществляющую конформное отображение круга $|z-1-i| \le 2$ на единичный круг $|w| \le 1$.*

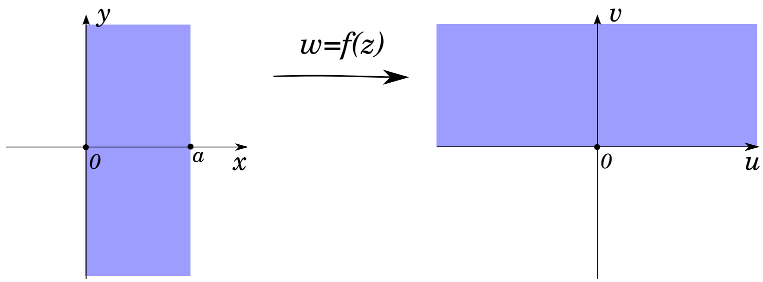


Решение. Так как эти области представляют собой подобные фигуры, то задача может быть решена при помощи линейной функции, которая осуществляет преобразование подобия плоскости z и сдвиг начала координат. Как легко видеть, искомая функция имеет вид

$$w = a(z-1-i),$$

где $|a| = \frac{1}{2}$, а аргумент комплексного числа a может иметь любое значение, определяя поворот плоскости w вокруг точки $w = 0$. $\triangle$

Пример 22. *Построить функцию, конформно отображающую полосу $0 < \operatorname{Re} z < a$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.*



Решение. Функция $z_1 = \frac{\pi}{a} z$ отображает исходную полосу на полосу $0 < \operatorname{Re} z_1 < \pi$. Функция $z_2 = i z_1$ переводит полученную полосу в полосу $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$. Наконец, функция $w = e^{z_2}$ осуществляет конформное отображение данной полосы на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Поэтому функция, осуществляющая заданное конформное отображение, может быть взята в виде

$$w = e^{i \frac{\pi}{a} z}. \qquad \triangle$$

2.4.4 Дробно-линейные функции

Дробно-линейной называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2.6}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$.

Далее считаем, что $c \neq 0$ (иначе получаем линейную функцию). Особыми точками являются $-d/c$ и ∞. Функцию (2.6) можно доопределить в этих точках: $w(-d/c) = \infty$, $w(\infty) = a/c$.
Доопределённая таким образом дробно-линейная функция будет взаимно однозначно и непрерывно отображать всю расширенную

комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Обратная функция имеет вид

$$z = \frac{dw - b}{a - cw}.$$

Теорема 23 *Дробно-линейное отображение* (2.6) *является конформным.*

Теорема 24 (круговое свойство) *Всякая окружность или прямая на комплексной плоскости дробно-линейной функцией отображается в окружность либо в прямую.*

Пример 25. *Найти образ области* $D = \{0 < x < 1\}$ *при дробно-линейном отображении* $w = \frac{z-1}{z}$.

Решение. Область D — это вертикальная полоса с боковыми границами $\{x = 0\}$ и $\{x = 1\}$.

1. Найдём образ прямой $x = 0$:

$$w\{x=0\} = \frac{z-1}{z} = \frac{x+iy-1}{x+iy} = \frac{0+iy-1}{0+iy} = \frac{iy-1}{iy} = 1 + i\frac{1}{y},$$

где $y \in \mathbb{R}$. На комплексной плоскости w это соответствует вертикальной прямой, проходящей через точку $w = 1$.

2. Найдём образ прямой $x = 1$:

$$w\{x=1\} = \frac{z-1}{z} = \frac{x+iy-1}{x+iy} = \frac{1+iy-1}{1+iy} = \frac{iy}{1+iy} = \\ = \frac{y^2}{1+y^2} + i\frac{y}{1+y^2},$$

где $y \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$w\{x=1\} = u + iv = \frac{y^2}{1+y^2} + i\frac{y}{1+y^2}.$$

Заметим, что

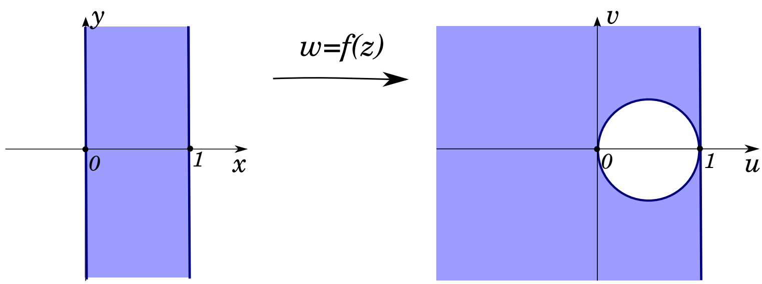
$$y = \frac{u}{v} \quad \text{и} \quad v = \frac{u/v}{1 + (u/v)^2},$$

откуда $u^2 + v^2 = u$ или

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}.$$

То есть это окружность с центром в точке $(1/2, 0)$ и радиусом $1/2$.

3. Граница области $\partial[f(D)]$ состоит из вертикальной прямой $u = 1$ и окружности $u^2 + v^2 = u$ и делит комплексную плоскость на три области. Чтобы понять какая из них является искомой, нужно определить которой из них принадлежит точка $f(1/2)$. Имеем $f(1/2) = -1$, значит, $f(D)$ это это область, расположенная справа.



$\triangle$

Теорема 26 *Для произвольных трёх различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и произвольных различных точек $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ существует единственное дробно-линейное отображение L такое, что $L(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3.$*

Отображение L в явном виде можно найти из равенства

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \tag{2.7}$$

2.4.5 Функция Жуковского

Функция

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{2.8}$$

называется ***функцией Жуковского.***

Очевидно, что эта функция является голоморфной на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Производная $w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ существует и отлична от нуля во всех точках, кроме $z=0,\pm1$. Следовательно, функция Жуковского является конформным отображением в окрестности каждой точки, отличной от $z=0,\pm1$. Однако функция Жуковского не является взаимно-однозначной на всей комплексной плоскости. В качестве областей, на которых функция Жуковского является взаимно-однозначной, можно выбрать внутренность единичного круга $|z|<1$ или его внешность $|z|>1$.

Пример 27. *Найти преобразование полярной сетки* $|z|=R,\arg z=\alpha$ *с помощью функции Жуковского* (2.8).

Решение. Используя тригонометрическое представление $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, отображение (2.8) можно записать в виде

$$w=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)\right).$$

Тогда

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\qquad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{2.9}$$

1. Найдём образ окружности $|z| = R < 1$. Из (2.9) имеем

$$u = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)\sin\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

— параметрическое уравнение эллипса с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)$. Отметим, что если точка z пробегает окружность $|z| = R$ против часовой стрелки, то точка $w = u + iv$ пробегает этот эллипс по часовой стрелке. При $R \to 1$ эллипс стягивается в отрезок $[-1, 1]$.

2. Аналогично получаем, что окружность $|z| = R > 1$ преобразуется в эллипс с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)$. Но на этот раз эллипс ориентирован против часовой стрелки.

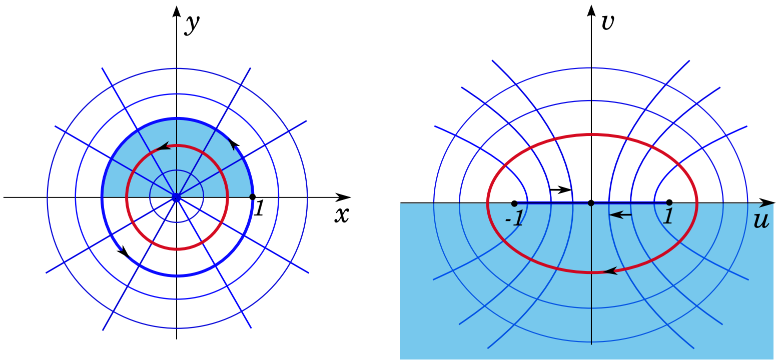
3. Лучи $\arg z = \alpha$ $(\alpha \neq \frac{\pi k}{2})$ переходят ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Итак, окружностям $|z| = R$ соответствуют софокусные эллипсы

$$\frac{4u^2}{(R + 1/R)^2} + \frac{4v^2}{(R - 1/R)^2} = 1$$

(окружности $|z| = 1$ - отрезок $v = 0, -1 \leq u \leq 1$). Лучам соответствуют софокусные гиперболы (лучу $\arg z = 0$ - луч $v = 0, u \geq 1$, лучу $\arg z = \pi$ - луч $v = 0, u \leq -1$; лучам $\arg z = \pm\pi/2$ - ось $u = 0$).



△

Задачи к 2.4

22. Найти образ окружности $|z-1|=1$ при отображении $w=\frac{1}{z}$.

23. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки -1, i, $1+i$ соответственно в точки i, ∞, 1.

24. Найти образ первой четверти $(x>0, y>0)$ под действием дробно-линейной функции $\dfrac{z-i}{z+i}$.

25. Выяснить, во что функция $w=\frac{1}{z-z_0}=h$ переводит прямоугольную сетку $x=C, \quad y=C$.

26. Выяснить, во что преобразуется квадрант $x>0$, $y>0$ при отображении $w=\frac{z-i}{z+i}$.

27. Выяснить, во что преобразуется полукруг $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ при отображении $w=\frac{2z-i}{2+iz}$.

28. Выяснить, во что преобразуется кольцо $1 < |z| < 2$ при отображении $w = \frac{z}{z-1}$.

29. Найти дробно-линейную функцию, исходя из условия, что точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в точку -1.

30. Найти области, на которые функция Жуковского отображает круг $|z| < R < 1$.

31. Найти области, на которые функция Жуковского отображает область $|z| > R > 1$.

32. Найти области, на которые функция Жуковского отображает область $|z| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$.

33. Найти области, на которые функция Жуковского отображает угол $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Термины к главе 2

аналити́ческая фу́нкция		解析函数
аналити́ческое продолже́ние		分（解）析开拓
бесконе́чно диффе-ренци́руемая фу́нкция		无限可微（分）函数
гармони́ческая фу́нкция		谐（波）函数
голомо́рфная фу́нкция		正则函数
дифференци́рование		微分法，求微分
дифференци́руемая фу́нкция		可微（分）函数
дробно-линейная функция (преобразование Мёбиуса)		莫比乌斯变换
конфо́рмное отображе́ние		保角映像；等角制图
обратная функция		反函数
пра́вило Ле́йбница		莱布尼茨定则
произво́дная		导数，微商
произво́дная поря́дка n		n 阶导数
уравне́ние Лапла́са		拉普拉斯方程
усло́вия Коши́-Рима́на		柯西—黎曼条件
функция Жуковского		茹科夫斯基变换
ча́стная произво́дная		偏导数，偏微商

Глава 3

Комплексный интеграл

Одно из основных свойств интеграла функции действительного переменного состоит в следующем:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

где $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. В комплексном анализе аналогичное свойство имеет вид:

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

где $F : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $\gamma \subset \Omega$ — кусочно-гладкая кривая.

3.1 Определение интеграла

Пусть γ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ такая, что $\gamma'(t) \neq 0$.

Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \to \mathbb{C}$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Поскольку $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то равенство (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt = \\ = \int\limits_{a}^{b} (ux' - vy')\,dt + i\int\limits_{a}^{b} (vx' + uy')\,dt = \\ = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy.\end{aligned}$$

Таким образом, нахождение интеграла от функции комплексного переменного может быть сведено к вычислению соответствующих криволинейных интегралов.

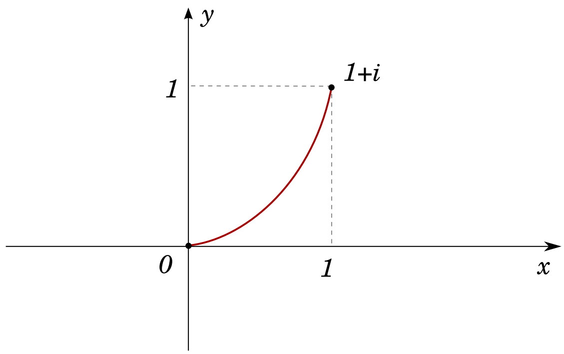
Приведём основные свойства интеграла:

$$\int\limits_{\gamma} (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha\int\limits_{\gamma} f\,dz + \beta\int\limits_{\gamma} g\,dz \quad \text{линейность,}$$

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz \quad \text{аддитивность,}$$

$$\int\limits_{\gamma^-} f\,dz = -\int\limits_{\gamma} f\,dz \quad \text{зависимость от ориентации.}$$

Пример 28. *Вычислить интеграл от функции $f(z) = \overline{z}^2$ по дуге параболы $y = x^2$, соединяющей точки 0 и $1 + i$.*



Решение. Параметризация: $\gamma(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 1$. Далее, $\gamma'(t) = 1 + 2ti$ и $f(\gamma(t)) = (\overline{t + it^2})^2 = t^2 - t^4 - 2t^3 i$. Тогда интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_0^1 (t^2 - t^4 - 2t^3 i)\cdot(1 + 2ti)\,dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}.$$

$\triangle$

Пример 29. *Вычислим интеграл*

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n\,dz,$$

считая, что $n \in \mathbb{Z}$, а окружность $|z - z_0| = R$ ориентирована против хода часовой стрелки.

Решение. Воспользовавшись параметризацией окружности

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad dz = iRe^{i\varphi} d\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi} R^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}\, d\varphi.$$

При $n = -1$ получаем

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 1.$$

При $n \neq -1$ получаем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} e^{i\varphi(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1}(e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

△

Полезно помнить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{d\,z}{z - z_0} = 1. \tag{3.2}$$

3.1.1 Длина кривой

Длина кусочно-гладкой кривой $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$

$$l(\gamma) = \int\limits_b^a |\gamma'(t)|\, dt.$$

Заметим, что длину кривой можно также выразить как

$$l(\gamma) = \int\limits_\gamma |dz|,$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – элемент длины кривой γ.

Пример 30. *Найдём длину единичной окружности* $\{|z| = 1\}$, *т. е.* $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Имеем $\gamma'(t) = ie^{it}$ и $|\gamma'(t)| = |ie^{it}| = 1$, тогда

$$l(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

3.1.2 Оценка интеграла

Лемма 31 *Для всякой непрерывной на кривой* γ *функции* f *выполняются неравенства*

$$\Big|\int\limits_\gamma f(z)\, dz\Big| \le \int\limits_\gamma |f(z)|\, |dz| \le \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Обозначим

$$I = \int\limits_\gamma f(z)\, dz.$$

Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $I = |I|e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg \int\limits_\gamma f(z)\, dz$. Тогда

$$|I| = \int\limits_\gamma e^{-i\varphi} f(z) d\, z = \int\limits_a^b e^{-i\varphi} f(z(t)) z'(t)\, dt.$$

Поскольку последний интеграл является действительным числом, то

$$|I| = \int\limits_a^b Re(e^{-i\varphi} f(z(t)) z'(t))\, dt \le \int\limits_a^b |f(z(t))|\, |z'(t))|\, dt =$$
$$= \int\limits_\gamma |f(z)|\, |dz| \le \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \int\limits_\gamma |dz| = \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma). \qquad \square$$

Лемма 32 (Лемма Жодана) *Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия*

1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе

$$S = \{\mathrm{Im}\, z \ge 0,\ |z| > R_0 > 0\};$$

2) $\quad M_R = \max\limits_{z\in C_R} |f(z)| \to 0$ *при* $R \to \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, то есть $C_R = \{\mathrm{Im}\, z \ge 0,\ |z| = R\}$.

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0.$$

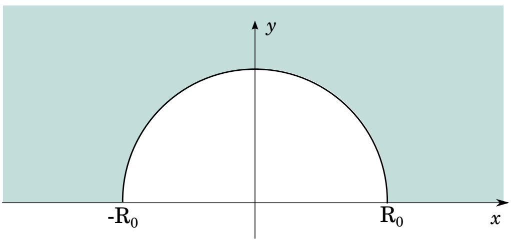


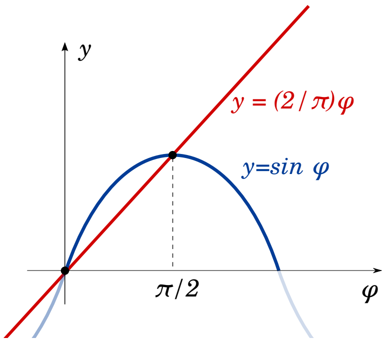
Рис. 3.1. Функция непрерывна в закрашенной области.

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$\left|e^{i\alpha z}\right| = \left|e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}\right| = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

В силу выпуклости функции $\sin\varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$ выполняется неравенство

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\,\varphi.$$



Теперь несложно получить требуемую оценку для интеграла

$$\Bigl|\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\, f(z)\, dz\Bigr| \leq RM_R \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2RM_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi}\, d\varphi \leq 2RM_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi}\varphi}\, d\varphi \leq$$

$$\leq M_R\frac{\pi}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi}{\alpha}M_R \to 0 \ \text{ при } R \to \infty. \qquad \square$$

Задачи к 3.1

34. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \overline{z}^2$ по кривой γ, если

а) γ — отрезок, соединяющий точки 0 и $1+i$,

б) γ — ломаная, соединяющая точки 0, 1 и $1+i$.

35. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma 1/z\,dz$, по кривой $\gamma(t) = \sin t + i\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

36. Проинтегрировать следующие функции по окружности $|z| = 2$, ориентированной против часовой стрелки (т. е. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$).

а) $z + \overline{z}$,

б) $z^2 - 2z + 3$,

в) $1/z^4$,

г) xy.

37. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\gamma e^z dz, \quad \text{где} \quad \gamma(t) = \pi t i, \quad t \in [-1, 1].$$

38. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\gamma z^2\,dz, \quad \text{где} \quad \gamma(t) = t + it, \quad t \in [0, 1].$$

39. Вычислить интеграл

$$\int_l (z^2 + \bar{z}z)\, dz,$$

где кривая $l = \{z : |z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi\}$.

40. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz,$$

где C - граница полукольца, изображенного на рисунке 3.2.

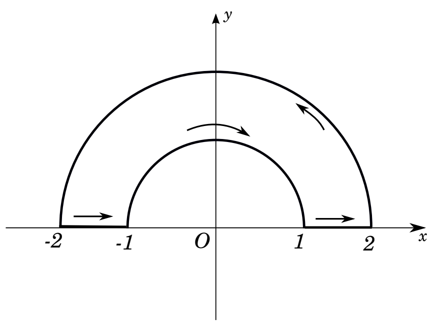


Рис. 3.2

41. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-i|=4} \frac{6}{(z-i)^2}\, dz.$$

42. Вычислить длины кривых

а) $\gamma(t) = 3t + i, \quad -1 \le t \le 1,$

б) $\gamma(t) = i + e^{i\pi t}, \quad 0 \le t \le 1,$

в) $\gamma(t) = i \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi,$

г) $\gamma(t) = a(\cos t - \sin t) + ia(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

43. Доказать, что
$$\left| \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1} dz \right| \le \frac{4\pi}{3}.$$

3.2 Интегральная теорема Коши

Мы подошли к одной из самых значимых теорем комплексного анализа:

Теорема 33 (Интегральная теорема Коши)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная конечносвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей $\Gamma = \partial D$, функция f является голоморфной в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)d\,z = 0.$$

Докажем более простое утверждение.

Теорема 34 *Пусть функция f является голоморфной в $\mathbb{C}$. Тогда для любого простого кусочно-гладкого замкнутого контура γ*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = 0.$$

Доказательство. Обозначим через D область, ограниченную контуром γ. Поскольку действительная и мнимая части функции $f = u+iv$ являются дифференцируемыми, мы можем воспользоваться формулой Грина (B.1)

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dx\,dy + i\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dx\,dy = 0.$$

Равенство нулю двойных интегралов является следствием условий Коши-Римана. □

Из теоремы получаем следующее свойство: интеграл от дифференцируемой функции определяется только начальной A и конечной B точками кривой интегрирования γ

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{A}^{B} f(z)\,dz. \tag{3.3}$$

Задачи к 3.2

44. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2} dz$. ➠

45. Используя известное равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx$. ➠

46. Интегрируя функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по границе прямоугольника

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Im} z \le b, |\operatorname{Re} z| \le R\},$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, d\, x.$$

➠

47. Интегрируя функцию $f(z) = e^{i\,z^2}$ по границе сектора

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \ 0 \le |z| \le R,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}\},$$

вычислить интеграл Френеля

$$\int\limits_0^\infty e^{i\,x^2}\,d\,x.$$

48. Вычислить следующие интегралы

а) $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,d\,x$, б) $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,d\,x$,

Указание: использовать задачу 47.

49. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma (4z^2 - 2iz)\,dz$,

по кривой $\gamma : y = x^3 + 2x^2 - 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.

3.3 Интегральная формула Коши

Теорема 35 (Интегральная формула Коши)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$– ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$, функция f является голоморфной в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда для произвольной точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка $z \in D$ и $d = \operatorname{dist}(z, \Gamma)$. Поскольку функция f непрерывна в точке z, то, по определению непрерывности, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|w - z| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

2. Пусть $r < \min(d, \delta)$. Рассмотрим круг $B(z, r)$, ориентированную против хода часовой стрелки окружность $C_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\}$ и обозначим через C_r^- окружность с противоположной ориентацией.

3. Функция $\dfrac{f(w)}{w - z}$ является голоморфной по переменной w в области $D^* = D \setminus \overline{B(z, r)}$, и по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D^*} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z} + \int\limits_{C_r^-} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = 0$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = \int\limits_{C_r} \frac{f(w)d\,w}{w - z}.$$

4. Учитывая,что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{d\,w}{w-z}=1,$$

получаем

$$\Bigl|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)d\,w}{w-z}\Bigr|=\Bigl|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{f(z)d\,w}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{f(w)d\,w}{w-z}\Bigr|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r}\frac{|f(z)-f(w)|\,|d\,w|}{|w-z|}\leq\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r=\varepsilon.$$

5. Из произвольности выбора числа ε следует, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)d\,w}{w-z}.$$

$\square$

Если выполнены условия теоремы и $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}$, то функция $\dfrac{f(w)}{w-z}$ оказывается аналитической по переменной w в области D и, учитывая интегральную теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(w)d\,t}{w-z}=\begin{cases}f(z), & z\in D;\\[2ex] 0, & z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}.\end{cases}$$

Пример 36. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{|z-i|=r}\frac{dz}{z^2+9},$$

если: а) $r=1$, б) $r=3$, в) $r=5$.

Решение. а) Пусть $r = 1$, в этом случае функция $\dfrac{1}{z^2+9}$ является голоморфной внутри шара $B(i, r)$. Тогда по интегральной теореме Коши $\int\limits_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = 0$.

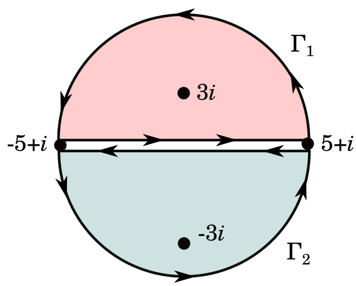
б) Если $r = 3$, то функция $\dfrac{1}{z^2+9}$ уже не будет голоморфной в шаре $B(i, r)$ (поскольку $3i$ — особая точка). Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{|z-i|=r} \frac{dz}{(z+3i)(z-3i)} = \int\limits_{|z-i|=r} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}\, dz.$$

Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$\int\limits_{|z-i|=r} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}\, dz = 2\pi i \frac{1}{(3i+3i)} = \frac{\pi}{3}.$$

в) Если $r = 5$, то функция $\dfrac{1}{z^2+9}$ также не будет голоморфной в шаре $B(i, r)$. Но в этом случае особых точек две: $3i$ и $-3i$. Поэтому мы не можем напрямую использовать интегральную формулу Коши как в случае б). Разделим контур $|z - i| = r$ на две части Γ_1 и Γ_2 (то есть $\{|z-i| = r\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$) следующим образом:



Γ_1 — это верхняя полуокружность вместе с отрезком $(-5+i) \to (5+i)$, Γ_2 — это верхняя полуокружность вместе с отрезком $(5+i) \to (-5+i)$.

Тогда
$$\int\limits_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9}.$$

Применяя интегральную формулу Коши для каждого интеграла в отдельности, получим

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}\,dz = 2\pi i \frac{1}{(3i+3i)} = \frac{\pi}{3},$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-3i)}}{(z+3i)}\,dz = 2\pi i \frac{1}{(-3i-3i)} = -\frac{\pi}{3}.$$

В итоге,

$$\int\limits_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0. \qquad \triangle$$

3.3.1 Теорема о среднем*

Теорема 37 (Теорема о среднем) *Если функция $f(z)$ является голоморфной в круге $B(z_0, r)$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, то ее значение в центре круга равно среднему значению функции на граничной окружности, то есть*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|w-z_0|=r} f(w)dl = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши и делая замену переменной $w = z_0 + re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)d\,w}{w - z_0} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|t-z_0|=r} f(t)dl. \qquad \square$$

3.3.2 Принцип максимума модуля*

Теорема 38 (Принцип максимума модуля)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, а отличная от постоянной функция f является голоморфной в области D и $M = \sup\limits_{z\in D} |f(z)|$.
Тогда $|f(z)| < M$ для произвольной точки $z \in D$.
Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

Доказательство. Если $M = +\infty$, то утверждение теоремы очевидно, так как функция $f(z)$ является голоморфной и, следовательно, конечной во всей области D.

Пусть $M < +\infty$. Доказывать будем от противного: предположим, что существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M$, и покажем, что в этом случае функция $f(z)$ является постоянной во всей области D.

Выбирая $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, используя теорему о среднем и определение числа M, получаем

$$M = |f(z_0)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi \le \frac{1}{2\pi}M2\pi = M,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi = M.$$

Поскольку функция $f(z)$ непрерывна и $|f(z)| \le M$, то последнее равенство возможно лишь при $|f(z_0 + re^{i\varphi})| = M$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, $|f(z)| \equiv M$ на окружности $|z - z_0| = r$. Так как $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ выбиралось произвольно, то $|f(z)| \equiv M$ в любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, R)} \subset D$.

Пусть z^* – произвольная точка области D. Покажем, что $|f(z^*)| = M$. Соединим точки z^* и z_0 кривой $\gamma \subset D$. Учитывая, что расстояние от кривой γ до границы области положительно, фиксируем положительное $r < \operatorname{dist}(\gamma, \partial D)$. Тогда для всякого $z \in \gamma$ замкнутый круг $\overline{B(z, r)} \subset D$.

Если $|z^* - z_0| \le r$, то по уже доказанному $|f(z^*)| = M$.

Пусть $|z^* - z_0| \ge r$. Так как длина кривой γ конечна, то ее можно разбить на конечное число последовательных дуг точками $z_1, z_2, \ldots, z_n = z^*$, такими, что $|z_{k+1} - z_k| \le r$. Поскольку $z_1 \in \overline{B(z_0, r)}$, то по уже доказанному $|f(z_1)| = M$. Повторяя для точки z_1 рассуждения, аналогичные ранее использованным для точки z_0, получаем $|f(z)| \equiv M$ в круге $\overline{B(z_1, r)}$. Поскольку $z_2 \in \overline{B(z_0, r)}$, то $|f(z_2)| = M$. Продолжая процесс, мы за конечное число шагов дойдем до точки $z_n = z^*$ и получим $|f(z^*)| = M$.

Поскольку точка z^* выбиралась произвольным образом, то модуль функции является постоянным во всей области D. Осталось показать, что и сама функция является постоянной.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда $u^2 + v^2 \equiv M^2$. Следовательно,

$$0 = \Delta(u^2+v^2) = 2u\Delta u+2v\Delta v+2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big] =$$

$$2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Последнее равенство является следствием гармоничности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области D. Таким образом, все частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

и, следовательно, $f(z) \equiv const$ в области D. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. □

Следствие 39 *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $m = \inf\limits_{z\in D} |f(z)|$. Если $f(z) \neq 0$ в области D, то $|f(z)| > m$ для произвольной точки $z \in D$.*

Доказательство. Поскольку $f(z) \neq 0$, то функция $g(z) = 1/f(z)$ будет аналитической в области D и

$$\sup_{z\in D} |g(z)| = \frac{1}{\inf\limits_{z\in D} |f(z)|} = \frac{1}{m}.$$

Остаётся воспользоваться принципом максимума модуля для функции $g(z)$. $\square$

Следствие 40 *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область. Если отличная от постоянной функция f является аналитической в области D, непрерывной в $\overline{D}$ и $f(z) \neq 0$ в области D, то модуль функции достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области.*

Доказательство. Поскольку $\overline{D}$ является компактным множеством, то по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $|f(z)|$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения в $\overline{D}$. При этом по принципу максимума модуля и следствию 39 эти значения не могут достигаться во внутренних точках области D. $\square$

Пример 41. *Найдём максимум $|e^z|$ на замкнутом круге $|z| \leq 1$.*

Решение. В силу принципа максимума, достаточно найти максимум на границе $|z| = 1$. Имеем $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$. Поскольку $|z| = 1$, $e^x = e^{\cos\varphi}$, где $\varphi \in [0, \pi)$. Следовательно $\max\limits_{|z|\leq 1} |e^z| = e$. $\triangle$

Задачи к 3.3

50. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-2)}$. ➠

51. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z\,dz}{z^2+2z}$. ➠

52. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{e^{2z}+\sin z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z$. ➠

53. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz, \quad a>1.$

54. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2+a^2},$$

где γ – простой замкнутый контур, содержащий внутри себя круг $|z| \le a$.

55. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}, \quad \text{если:}$$

1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 - вне контура C;
2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 - вне контура C;
3) точки 0 и 1 обе лежат внутри контура C.

56. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz\,dz}{z^2+4z+3}.$$

57. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^2-6z}.$$

58. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$;   в) $\int\limits_{|z|=5} \frac{1}{z^2+16}\,dz$;

б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz$.   г) $\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{(z^2+9)(z+9)}\,dz$.

59. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

60. Найти максимум $|\cos z|$ на замкнутом круге $|z| \leq 2$.

3.4 Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, f — определённая на кривой Γ непрерывная функция. Для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ непрерывна по переменной t на кривой Γ. Поэтому существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{3.4}$$

называемый ***интегралом типа Коши*** и являющийся однозначной функцией переменного z.

Теорема 42 *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функция f непрерывна на Γ. Тогда интеграл типа Коши, определяемый равенством (3.4), является голоморфной функцией в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Более того, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема и при этом*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ограничимся вычислением первой производной (т. е. $F'(z)$). Фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и пусть $2d = \operatorname{dist}(z, \Gamma)$, а $|\Delta z| < d$. Тогда для любого $t \in \Gamma$ выполняются неравенства $|t-z| > d$ и $|t - z - \Delta z| > d$.

Оценим разность

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t)\,dt}{(t-z)^2 (t-z-\Delta z)} \right| \le \frac{|\Delta z| LM}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ, а M – максимум модуля функции $f(t)$ на кривой Γ (см. лемму 31).

Таким образом,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие:

Теорема 43 *Голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в каждой точке области D.*

Доказательство. Действительно, пусть точка z_0 — произвольная точка области D и $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой. $\square$

Пример 44. *Вычислить интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\,e^z\,d\,z}{(z-a)^3},$$

если точка a лежит внутри простого замкнутого контура γ.

Решение. Используя интеграл типа Коши, перепишем исходный интеграл в следующем виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\,e^z\,d\,z}{(z-a)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{2!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\,e^z\,d\,z}{(z-a)^{2+1}} = \frac{1}{2} F''(a),$$

где
$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\, e^z\, d\, z}{(z-a)}.$$
Поскольку ze^z — голоморфная функция, то по интегральной теореме Коши
$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\, e^z\, d\, z}{(z-a)} = ae^a.$$
Вторая производная $F''(a) = e^a(2+a)$. В итоге,
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{z\, e^z\, d\, z}{(z-a)^3} = e^a(1+\frac{a}{2}).$$

△

Задачи к 3.4

61. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2iz}}{z^4}\, dz$.

➠

62. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z-1)}\, dz$. ➠

63. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z\, dz}{z+i}$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$, д) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$,

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$, г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z\, dz}{z^2-\pi^2}$, е) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z\, dz}{(z-i)^3}$.

➠

64. Вычислить интеграл $\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z^3)}\,dz$, если область D

а) $|z| < \frac{1}{2}$, б) $|z| < \frac{3}{2}$, в) $|z-1| < \frac{1}{2}$.

➠

65. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, где $|a| < z < |b|$, $n \in \mathbb{N}$.

➠

3.5 Первообразная

Голоморфная в области D функция $F(z)$ называется ***первообразной*** функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Таким образом, f — голоморфная функция и в качестве первообразной можно взять

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(w)\,dw = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw,$$

где $\gamma \subset D$ кусочно-гладкая кривая, соединяющая z_0 и z.

Действительно, пусть отрезок $[z, z+\Delta z] \subset D$. Поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования, то

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,dt = \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Далее будем считать, что в формуле (3.5) интегрирование происходит по отрезку $[z, z+\Delta z]$.

В силу непрерывности функции $f(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ для всех точек t, удовлетворяющих неравенству $|t - z| < \delta$. Пусть $|\Delta z| < \delta$, тогда

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} (f(t) - f(z))\,dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon.$$

Из полученной оценки непосредственно следует, что

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Заметим, что если $F(z)$ первообразная функции $f(z)$, то $F(z)+C$ также первообразная $f(z)$ (здесь $C = \mathrm{const}$).

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема 45 (Теорема Морера) *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то функция $f(z)$ является голоморфной в области D.

Доказательство. Выше было показано, что

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt, \tag{3.6}$$

где z_0 и z — произвольные точки области D, а интеграл берётся по любому пути, соединяющему эти точки в области D , является голоморфной в этой области функцией, причём $F'(z) = f(z)$. Производная голоморфной функции также является голоморфной функцией (см. лемму 43), то есть существует непрерывная производная функции $F'(z)$, а именно функция $F''(z) = f'(z)$, что и доказывает теорему. □

Теорема 46 (Теорема Лиувилля) *Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является голоморфной, а её модуль ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной $f(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Запишем значение производной $f'(z)$ в произвольной точке z по формуле :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{(\omega - z)^2}\, dt,$$

причём интегрирование будем вести по окружности некоторого радиуса R с центром в точке z, то есть $|t - z| = R$. По условию теоремы существует такая константа M, что $|f(t)| \le M$ независимо от R. Поэтому

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_R} \frac{|f(t)|}{(t - z)^2}\, dt \le \frac{M}{R}.$$

Так как радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ на всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что $f(z) \equiv \mathrm{const}$. $\square$

Тригонометрические функции комплексного переменного являются голоморфными функциями на всей комплексной плоскости. В силу только что доказанной теоремы эти функции не могут быть ограниченными на всей комплексной плоскости. Отсюда, в частности, следует, что найдутся такие значения комплексной переменной z, для которых

$$|\sin z| > 1.$$

Этим тригонометрические функции комплексного переменного существенно отличаются от соответствующих функций действительного переменного.

Задачи к 3.5

66. Найти первообразную функции e^{az}. ➠

67. Найти первообразные функций

а) $\operatorname{ch} az$;

б) $\operatorname{sh} az$;

в) $\cos az$;

г) $\sin az$.

68. Найти первообразные функций

а) $e^{az} \cos bz$;

б) ze^{az};

в) $z^2 \operatorname{ch} az$;

г) $z \cos az$.

Термины к главе 3

длинá кривóй (кривáя)		曲线的长度
интегрáл		积分
интегрáльная теорéма Коши́		柯西积分定理
интегрáльная фóрмула Коши́		柯西积分公式
интегри́рование		积分（法）；求积分
кóнтур интегри́рования		积分路线
криволинéйный интегрáл		曲线积分
линéйность		直线性，直线度
теорéма Морéры		莫雷拉定理

Глава 4

Ряды Тейлора и Лорана

4.1 Ряд Тейлора

В этой главе мы увидим, что понятия степенного ряда и голоморфной функции определяют один и тот же объект: любой степенной ряд с положительным радиусом сходимости является голоморфной функцией и, наоборот, любая голоморфная функция может быть представлена степенным рядом.

Теорема 47 *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4.1}$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда функция $f(z)$ является голоморфной функцией в $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Доказательство. 1. $f(z)$ — непрерывная функция.

2. Для любого замкнутого контура $\gamma \subset B(z_0, R)$ имеем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} c_k(z-z_0)^k\,dz = 0.$$

По теореме Морера 45 функция f является голоморфной в $B(z_0, R)$. □

Теперь покажем как вычислить производную функции (4.1).

Теорема 48 *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}. \tag{4.2}$$

Радиус сходимости ряда (4.2) также равен R.

Доказательство. 1. По теореме 47 функция $f(z)$ является голоморфной в $B(z_0, R)$.

2. По теореме 42

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2},$$

где γ это окружность $|z_0 - w| = r$, $r < R$, точка z лежит внутри окружности γ. Тогда

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (w-z_0)^k}{(w-z)^2}\,dw =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{(w-z_0)^k}{(w-z)^2}\,dw =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d}{dw}(w-z_0)^k \bigg|_{w=z} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}. \qquad \square$$

Из доказанной выше теоремы получаем следующее следствие.

Теорема 49 *Если степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

имеет положительный радиус сходимости, то

$$c_k = \frac{f'(z_0)}{k!}.$$

Доказательство. 1. Равенство $f(z_0) = c_0$ очевидно.

2. По теореме 48

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}, \tag{4.3}$$

тогда $f'(z_0) = c_1$.

3. Применяя теорему 48 к (4.3), получаем

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (z-z_0)^{k-2},$$

откуда $f''(z_0) = 2c_2$.

4. Продолжая таким же образом, выводим

$$f^{(k)}(z_0) = k!c_k. \qquad \square$$

Теперь уже можно доказать, что голоморфная функция может быть представлена в виде степенного ряда.

Теорема 50 (Теорема Тейлора) *Пусть функция f — голоморфна в круге $B(z_0, R)$. Тогда f может быть представлена в $B(z_0, R)$ степенным рядом с центром в z_0 (с радиусом сходимости $\geq R$):*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}}.$$

$\gamma \subset B(z_0, R)$ — простой кусочно-гладкий контур, содержащий z_0 внутри.

Доказательство. Положим $g(z) = f(z+z_0)$, тогда g — голоморфная функция в $(0, R) = \{z : |z| < R\}$. Пусть $z \in B(0, R)$, обозначим $r = \frac{|z|+R}{2}$. По интегральной формуле Коши 35

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{g(w)}{w - z}\,dw.$$

Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k. \tag{4.4}$$

Ряд (4.4) сходится равномерно на окружности $|w| = r$, поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} g(w) \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\, dw \right) z^k.$$

Возвращаясь к функции $f(z) = g(z - z_0)$ и делая замену замену $w = t - z$, получаем требуемое

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{k+1}}.$$

Заметим, что здесь мы использовали равенство

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{k+1}} = \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{g(w)}{(t - z_0)^{k+1}}\, dw,$$

которое верно в силу интегральной теоремы Коши. □

Как уже известно разложение экспоненты e^z в степенной ряд (а, значит, и в ряд Тейлора) имеет вид

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{4.5}$$

Ряд (4.5) сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть радиус сходимости $R = \infty$. С помощью (4.5) получить можно получить разложения в степенные ряды тригонометрических функций:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Напомним, что радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. На границе круга сходимости $|z|$ требуется дополнительное исследование.

Пример 51. *Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh} z$ в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости R.*

Решение. Имеем $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Поэтому записывая разложение (4.5) для каждой экспоненты в отдельности и складывая два ряда получаем

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Отсюда, находим радиус сходимости по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(2k+1)!}}} = \infty. \qquad \triangle$$

Пример 52. *Разложить функцию $f(z) = \cos^2 z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.*

Решение. Вспомним, что $\cos^2 z = (1 + \cos 2z)/2$.

Используя разложение $\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \cdots$, получаем

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \cdots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

$\triangle$

Пример 53. *Разложить функцию* $\dfrac{z}{z+2}$ *по степеням* $(z-1)$ *и найти радиус сходимости* R *полученного ряда.*

Решение. Перепишем функцию в виде

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z-1+1}{z+2} = ((z-1)+1)\frac{1}{3+(z-1)} = ((z-1)+1)\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}}.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{(z-1)}{3}\right)^k.$$

Далее имеем

$$\frac{z}{z+2} = ((z-1)+1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}+\sum_{k=0}^{\infty}2(-1)^{k+1}\frac{(z-1)^k}{3^{k+1}}.$$

Найдём радиус сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{2}{3^{k+1}}}} = 3. \qquad \triangle$$

4.1.1 Теорема единственности*

Теорема 54 *Пусть* $D \subset \mathbb{C}$ *— область, множество* $E \subset D$ *и имеет предельную точку* $z_0 \in D$*, функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *являются голоморфными в области* D *и* $f(z) = g(z)$ *для всех* $z \in E$*. Тогда* $f(z) = g(z)$ *всюду в области* D*.*

Доказательство. Множество E содержит последовательность точек $\{z_n\}$, сходящуюся к точке $z_0 \in D$. При этом

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n \in N.$$

По теореме Тейлора 50 в круге $B(z_0, r)$ при $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$

функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы степенными рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Начиная с некоторого номера, все точки z_n лежат в круге $B(z_0, r)$, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^k = f(z_n) = g(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^k = g(z_n).$$

Подставляя в это равенство z_0 вместо z, получаем $a_0 = b_0$. Разделив обе части этой формулы на $(z_n - z_0)$, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1},$$

переходя к пределу, в котором получаем $a_1 = b_1$.

Продолжая этот процесс, получаем $a_k = b_k$ для всех номеров $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(z) = g(z)$ всюду в круге $B(z_0, r)$.

Пусть z^*– произвольная точка области D. Соединим точку z_0 с точкой z^* непрерывной кривой γ, лежащей в области D. Фиксируем положительное ρ меньшее, чем расстояние от кривой γ до границы в области D.

Передвигая центр круга $B(z, \rho)$ вдоль кривой γ последовательно в точки $w_1, w_2, \ldots, w_n = z^*$, $|w_k - w_{k-1}| = \rho$ и повторяя приведенное ранее рассуждение, получим $f(z^*) = g(z^*)$. Поскольку z^*– произвольная точка области D, то $f(z) = g(z)$ всюду в области D. $\square$

Пример 55. *Существует ли голоморфная функция такая, что*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots?$$

Решение. Предположим, что такая функция существует.

Обозначим $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Точка $z_0 = 0$ является предельной для множества E.

Функция $f(z)$ совпадает с функцией $g(z) = z$ на множестве E. По теореме единственности $f(z) = z$ всюду на $\mathbb{C}$. Но тогда $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$, что противоречит условию. Следовательно, такой функции не существует. $\triangle$

4.1.2 Классификация нулей голоморфной функции

Рассмотрим полином степени n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

> ***Нулём кратности*** m ***полинома*** $p(z)$ называется такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что
>
> $$p(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z),$$
>
> где $g(z)$ — тоже полином и $g(z_0) \neq 0$.

Например, точка $z_0 = 1$ является нулём кратности $m = 2$ для полинома $p(z) = 3z^3 - 6z^2 + 3z$, так как $p(z) = (z-1)^2 \cdot 3z$ (здесь $g(z) = 3z$).

Определим аналогичное понятие для голоморфной функции.

> Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется ***нулём функции*** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Теорема 56 (Классификация нулей) *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является её нулём ($f(z_0) = 0$). Тогда возможны два случая:*
1) $f(z) = 0$ для всех $z \in B(z_0, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$
либо
2) существует $m \in \mathbb{N}$ и голоморфная функция $g(z)$ так, что $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$.

Число m из теоремы называется ***порядком нуля***.

Пример 57. *Для функции $f(z) = z^2 \sin z$ точка $z = 0$ является нулём. Найдём порядок этого нуля.*

Решение. Имеем

$$z^2 \sin z = z^2\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = z^3\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right).$$

Функция $h(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ голоморфна (в силу теоремы 47) и $h(0) \neq 0$. Таким образом, исходная функция имеет вид

$$f(z) = z^3 h(z),$$

значит, по теореме 56, порядок нуля равен 3. $\triangle$

Удобный способ определения кратности нуля голоморфной функции приводится в следующем утверждении

Теорема 58 *Точка z_0 — нуль порядка m голоморфной в точке z_0 функции $f(z)$, если*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \;\; f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Так, например, функция $f(z) = \cos z - 1$ имеет нули порядка 2 в точках $z = \pi k$. Действительно, $f(\pi k) = \cos \pi k - 1 = 0$, $f'(\pi k) = -\sin \pi k = 0$, а $f''(\pi k) = -\cos \pi k \neq 0$.

Задачи к 4.1

69. Разложить функцию $f(z) = e^z$ в ряд Тейлора с центром $z_0 = 1$.

70. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{ch} z$ в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости R.

71. Следующие функции разложить в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и найти радиус сходимости R.

а) $\sin^2 z$,

б) $\dfrac{1}{az+b}$,

в) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$,

г) $\cos^2 \frac{iz}{2}$.

72. Разложить функцию $f(z) = z^3 \sin 3z$ в ряд Тейлора в с центром $z_0 = 0$.

73. Разложить функцию $\dfrac{z}{z^2 - 2z + 5}$ в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости R.

74. Разложить функцию $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости R.

75. Найти все нули функции $f(z) = e^z - 1$ и определить их кратности.

76. Найти кратность нуля $z = 0$ функции $f(z) = z^2(e^{z^2-1})$.

77. Найти все нули функции $f(z) = \cos^3 z$ и определить их кратности.

78. Существует ли голоморфная функция такая, что

$$f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots ?$$

➠

79. Существует ли функция $f(z)$ голоморфная в некоторой окрестности $z = 0$ такая, что

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots ?$$

➠

80. Существует ли функция $f(z)$ голоморфная в некоторой окрестности $z = 0$ такая, что

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = e^{-k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots ?$$

➠

4.2 Ряд Лорана

Теорема 50 предоставляет мощный инструмент описания голоморфных функций. Однако, не все функции являются голоморфными. Далее мы увидим, что некоторые неголомофные функции можно представлять в виде суммы рядов с целыми степенями. Например, для функции $e^{\frac{1}{z}}$ вполне естественной была бы запись в виде ряда с отрицательными степенями

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Обозначим

$$S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Пусть радиус сходимости ряда

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

равен R. Тогда функция $S_1(z)$ будет голоморфной в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменной $w = \dfrac{1}{z-z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменной w

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ, тогда его сумма (как функция переменной w) будет голоморфной функцией в круге $|w| < \rho$, и, следовательно, функция $S_2(z)$ будет голоморфной при $|z - z_0| > r$ (здесь $r = 1/\rho$).

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

будет голоморфной в кольце $r < |z - z_0| < R$.

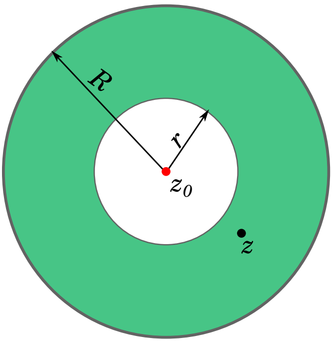


Рис. 4.1. Кольцо K.

Теорема 59 (Теорема Лорана) *Аналитическая в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представима в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w - z_0)^{k+1}},$$

$\gamma \subset K$ *— простой кусочно-гладкий контур, обходящий точку* z_0.

Полученный в теореме 59 ряд называют ***рядом Лорана***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad \textit{правильная часть ряда Лорана}$$

и

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad \textit{главная часть ряда Лорана.}$$

Доказательство. Положим $g(z) = f(z+z_0)$, тогда функция g голоморфна в кольце $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Фиксируем точку $z \in \tilde{K}$, тогда найдутся радиусы r_1, r_2 такие, что $r < r_1 < |z| < r_2 < R$. Рассмотрим замкнутый контур Γ из двух окружностей $|z| = r_1$, $|z| = r_2$ и соединяющего их отрезка (см. рис. 4.2). Обозначим эти окружности γ_1, γ_2.

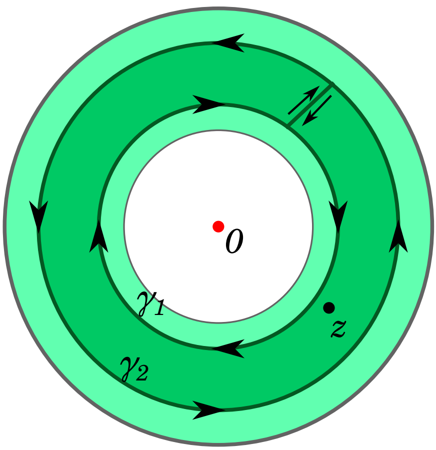


Рис. 4.2. Кольцо $\tilde{K}$.

По интегральной форме Коши

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(w)}{w-z}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w-z}\, dw - \int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w-z}\, dw \right). \quad (4.6)$$

1. Сначала преобразуем интеграл по γ_2. Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k. \quad (4.7)$$

Ряд (4.7) сходится равномерно на окружности γ_2 (поскольку $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$), поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = \int\limits_{\gamma_2} g(w) \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\, dw \right) z^k.$$

2. Перейдём к интегралу по γ_1. В этом случае используем следующее разложение

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^k.$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = -\int\limits_{\gamma_1} g(w) \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^k dw =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_1} g(w)w^k\,dw\right) z^{-(k+1)} = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int\limits_{\gamma_1}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

Подставляя полученные интеграл в (4.6) имеем

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_2}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int\limits_{\gamma_1}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k\right).$$

По интегральной теореме Коши интегралы по γ_1 и γ_2 можно свести к интегралу по кривой γ. Поэтому

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

Возвращаясь к функции $f(z) = g(z - z_0)$ и делая замену в интеграле, получаем требуемое. $\square$

Пример 60. *Разложить функцию* $\frac{1}{z^2+1}$ *в ряд Лорана в кольце* $0 < |z - i| < 1$.

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии выводим

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} =$$
$$= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(2i)^k} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(2i)^k}. \qquad \triangle$$

Пример 61. *Разложить функцию* $\frac{z^4}{(z-2)^2}$ *в ряд Лорана по степеням* $z - 2$.

Решение. Положим $z-2=t$. Тогда

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(t+2)^4}{t^2}=\frac{t^4+8t^3+24t^2+32t+16}{t^2}=$$
$$=\frac{16}{t^2}+\frac{32}{t}+24+8t+t^2,$$

то есть

$$f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2. \tag{4.8}$$

△

Пример 62. *Разложить функцию*

$$f(z)=\frac{1+2z}{z^3+z^2}$$

в ряд Лорана с центром в $z_0=0$.

Решение. Представим функцию в следующем виде, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1+2z}{z^3+z^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z+1}.$$

И найдём числа A, B и C.

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z+1}=\frac{Az(z+1)}{z^2(z+1)}+\frac{B(z+1)}{z^2(z+1)}+\frac{Cz^2}{z^2(z+1)}.$$

Тогда

$$1+2z=B+(A+B)z+(A+C)z^2,$$

и, следовательно,

$$\begin{cases}1=B,\\ 2=A+B,\\ 0=A+C.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$. Таким образом,

$$\frac{1+2z}{z^3+z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+1}.$$

Первые два слагаемых $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ — это уже часть ряда Лорана. Для третьего получаем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

Таким образом, разложение в ряд Лорана для функции $\frac{1+2z}{z^3+z^2}$ имеет вид

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

$\triangle$

4.2.1 Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удалённой точки, то есть существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Тогда функция $f(1/t)$ является голоморфной в кольце $0 < |t| < 1/R$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменной $t = \dfrac{1}{z}$ и полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удалённой точки ***правильной частью*** ряда Лорана называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Пример 63. *Разложим функцию* $\frac{1}{z-2}$ *в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.*

Решение. Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии следующим образом

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k.$$

Полученный ряд сходится при $|z| > 2$ (то есть сходится в окрестности точки $z = \infty$).

Таким образом, искомый ряд Лорана имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}$. △

Задачи к 4.2

81. Найти множество точек z, в которых сходятся следующие ряды

а) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$, б) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$.

➠

82. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{z-b}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. ➠

83. Разложить следующие функции в ряд Лорана в центром в нуле а) $\dfrac{\sin z}{z}$,

б) $\dfrac{e^{z}}{z}$,

в) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$,

г) $z^4 \cos \frac{1}{z}$.

84. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ в ряд Лорана с центром $z_0 = 0$.

85. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана с центром в точке а) $z = 0$, б) $z = 1$, в) $z = \infty$.

4.3 Изолированные особые точки

Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если существует окрестность $B(z_0, \rho)$ точки z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть и вообще не определена).

Рассмотрим функции $\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z^4}, \quad e^{\frac{1}{z}}$. Для каждой из этих функций точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой. Однако, оказывается, что характер особенности (сингулярности) в каждом случае разный.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется
1) ***устранимой особой точкой***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;
2) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3) ***существенно особой точкой***, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0.

Пример 64. *Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, поскольку*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$\triangle$

Пример 65. *Для функции $f(z) = \frac{1}{z^4}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом, поскольку*

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{1}{z^4} \right| = \infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{z^4} = \infty$. $\triangle$

Пример 66. *Предела $\lim\limits_{z \to z_0} e^{\frac{1}{z}}$ не существует. Поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.* $\triangle$

Определять тип особой точки можно с помощью следующего утверждения

Теорема 67 *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$. Тогда*
1) z_0 — устранимая $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$;
2) z_0 — полюс $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки.

Теорема 68 *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$.*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Тогда
1) z_0 — устранимая $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана нет членов с отрицательными номерами, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

2) z_0 — полюс $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит лишь конечное число членов с отрицательными номерами, то есть

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

3) z_0 — существенно особая $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными номерами, то есть имеет вид

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k.$$

Теорема 69 *Пусть $z = \infty$ — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$, а $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z)^k$ - ряд Лорана в кольце $|z| > R > 0$. Тогда*
1) $z = \infty$ — устранимая $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана нет положительных степеней z.
2) $z = \infty$ — полюс $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит лишь конечное число положительных степеней z, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = c_m (z-z_0)^m + \cdots + c_1 (z-z_0) + \sum_{k=-\infty}^{0} c_k (z-z_0)^k.$$

3) $z = \infty$ — существенно особая точка $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит бесконечное число положительных степеней z.

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс. Максимальный номер m такой, что $c_{-m} \neq 0$ называется *порядком полюса*. И говорят: z_0 — ***полюс порядка*** m.

Пример 70. *Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $m = 2$, поскольку ряд Лорана имеет вид*

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots.$$

△

Также порядок полюса можно устанавливать в помощью следующего утверждения.

Теорема 71 *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ её нуль порядка m. Тогда функция $1/f(z)$ имеет в z_0 полюс порядка m.*

Доказательство. Поскольку z_0 — нуль порядка m голоморфной функции $f(z)$, то эта функция имеет вид

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая голоморфная функция, такая что $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Следовательно, $1/g(z)$ — голоморфна в окрестности z_0 и, в частности, может быть разложена в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Заметим, что $a_0 \neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{g(z)} = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots$$

это и означает, что z_0 — полюс порядка m функции $1/f(z)$. $\square$

Задачи к 4.3

86. Найти особые точки функции $\dfrac{1}{z - z^3}$ и определить их характер.

87. Найти все особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ и определить тип этих особых точек.

88. Для функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)}$$

определить особые точки и установить их характер.

Термины к главе 4

гла́вная часть ря́да Лора́на		罗朗级数的主要部分
изоли́рованная осо́бая то́чка		隔离的奇（异）点
кольцо́		环，圈，环形物；光环，光圈；年轮
коэффицие́нт ря́да —		级数的系数
осо́бая то́чка		奇（异）点
осо́бая то́чка фу́нкции		函数的奇（异）点
осо́бенность		特点，特征；特性，特殊性
по́люс пе́рвого поря́дка		一阶极点
по́люс поря́дка n		阶极点n
пра́вильная часть ря́да Лора́на		罗朗级数的正确部分
просто́й по́люс		简单极
разложе́ние		[化]分解（作用）；解体，崩溃，腐败；[数]分解，展开（式）
разложе́ние Лора́на		罗朗分解
разложи́ть-разлага́ть		[专]分解；[转]使分化，使瓦解，使腐化
разложи́ть фу́нкцию в ряд		将函数展成级数

ряд Лора́на		罗朗级数
ряд Те́йлора		泰勒（台劳）级数
ряд Те́йлора с це́нтром в то́чке z_0		以z_0点为中心的泰勒（台劳）级数
суще́ственно осо́бая то́чка		极奇（异）点
тип		型，式；种类，型别
тип осо́бой то́чки		奇（异）点的类型
фо́рмула Те́йлора		泰勒（台劳）公式

Глава 5

Элементы теории вычетов

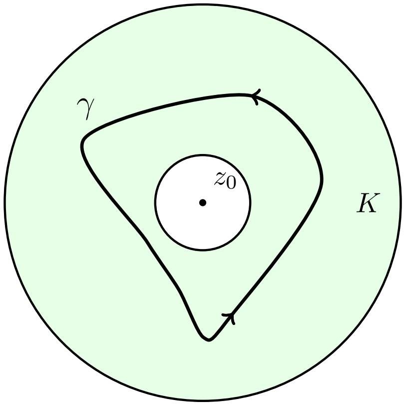
5.1 Определение вычета

В этом параграфе введём важное для приложений понятие вычета голоморфной функции в изолированной особой точке.

Пусть z_0 — изолированная особая точка однозначная функции f. Тогда f можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

в некотором кольце $K = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Рассмотрим кривую $\gamma \subset K$ такую, что точка z_0 находится внутри области, ограниченной этой кривой.



Проинтегрируем функцию f по кривой γ:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int\limits_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz.$$

Вспомним (см. пример 29.), что

$$\int\limits_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{5.1}$$

Вычетом **функции** $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется величина

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Или, что тоже самое, в силу (5.1)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если посмотреть с другой стороны, то можно сказать, что интеграл равен вычету:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

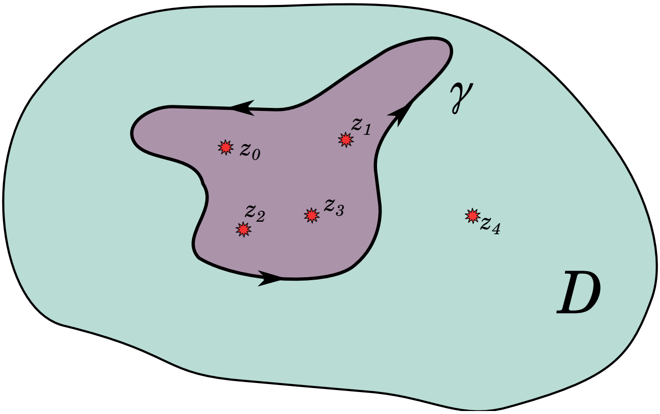
На самом деле справедливо более общее свойство.

Теорема 72 (Основная теорема теории вычетов)

Пусть f — голоморфна в $D \subset \mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $\{z_j\}$, γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, не содержащая особых точек $\{z_j\}$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z),$$

где суммирование ведётся по всем точкам z_j, находящимся внутри.



Суть теоремы 72 состоит в том, чтобы вместо непосредственного интегрирования $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ вычислять вычеты $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_j} f(z)$ в изолированных особых точках.

5.1.1 Вычет в бесконечно удалённой точке

Пусть бесконечно удалённая точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т. е. существует такое $R<\infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R<|z|<\infty$.

> **Вычетом функции** $f(z)$ в бесконечно удалённой точке $z=\infty$ называется величина
>
> $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz,$$
>
> где интеграл берётся по ориентированной в отрицательном направлении (по часовой стрелке) кривой γ.

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки (см. пункт 4.2.1), то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z)=\frac{1}{z}$, для которой $z=\infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$.

Теорема 73 *Пусть $f(z)$ — голоморфна, за исключением конечного числа особых точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$. Тогда сумма вычетов по всем особым точкам (включая $z=\infty$) равна нулю,* *т. е.*

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

5.2 Нахождение вычетов

Лемма 74 *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

Доказательство. Действительно, если z_0 — устранимая, то, в частности, $c_{-1} = 0$. □

Лемма 75 *Если $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z \cdot \left(\lim_{w\to\infty} f(w) - f(z) \right).$$

Далее мы рассмотрим приёмы, которые позволяют находить вычеты в полюсах.

Лемма 76 *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — простой полюс (т.е. полюс порядка 1) функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} ((z - z_0) \cdot f(z)).$$

Доказательство. Если z_0 — простой полюс, то

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Тогда

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + c_2(z-z_0)^3 + \ldots$$

и

$$(z-z_0)f(z) \to c_{-1} \qquad \text{при } z \to z_0.$$

Последние две леммы являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема 77 *Если z_0 — полюс порядка m функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m \cdot f(z)).$$

Сравните приведённое выше утерждение с теоремой 42.

Лемма 78 *Пусть f, g — голоморфные в точке z_0 функции и z_0 — ноль функции g порядка 1 (т. е. $g(z_0)=0$, но $g'(z_0)\neq 0$) и $f(z_0)\neq 0$. Тогда функция $f(z)/g(z)$ имеет полюс первого порядка в точке z_0 и*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Пример 79. *Найти вычеты функции $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$ во всех изолированных особых точках.*

Решение. 1) Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{-1}{z^3(z-1)(z+1)}.$$

Тогда 0 — полюс 3-го порядка, -1 и 1 — полюса первого порядка, а ∞ — устранимая особая точка.

2) Найдём вычет в точке 0. Для этого рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана с центром в 0:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{z^3} \cdot (1 + z^2 + z^4 + \ldots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + z + \ldots .$$

Отсюда имеем $c_{-1} = 1$, и, следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

3) Вычеты в простых полюсах -1 и 1 найдём по лемме 76:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1} (z+1) \cdot f(z) = \lim_{z\to-1} \frac{-1}{z^3(z-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z\to1} \frac{-1}{z^3(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

4) По теореме 73

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. △

Пример 80. *Пусть* $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z}$. *Найти* $\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)$.

Решение. Имеем $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z} = \frac{2e^z}{\sin 2z}$.

Функции $2e^z$ и $\sin 2z$ голоморфны и точка π является нулём первого порядка для функции $\sin 2z$ ($\sin 2\pi = 0$, $\sin' 2\pi \neq 0$). Тогда по лемме 78

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \left(\frac{2e^z}{\sin 2z} \right) = \frac{2e^\pi}{2\cos 2\pi} = e^\pi.$$

△

Задачи к 5.2

89. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

б) $f(z) = \frac{e^z}{z^2\,(z^2+9)}$;

в) $f(z) = \operatorname{ctg} z$;

г) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.

90. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$;

б) $f(z) = z^n e^{\frac{a}{z}}$;

в) $f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$.

5.3 Вычисление интегралов

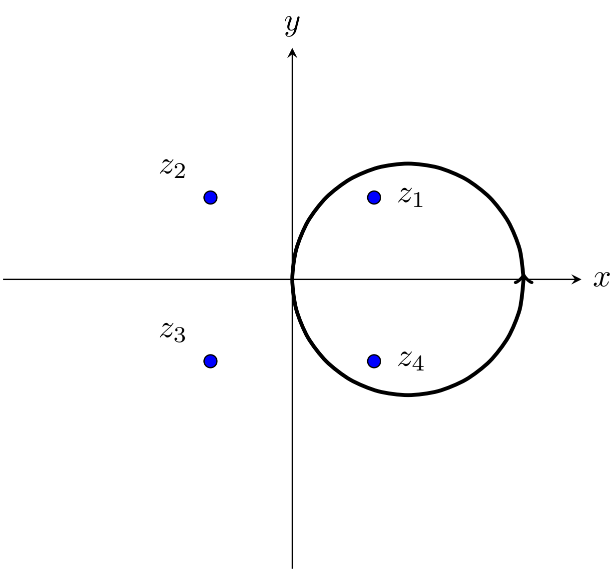
Основная теорема теории вычетов позволяет свести вычисление интегралов по замкнутому контуру к нахождению вычетов в изолированных особых точках, которые находятся в области, ограниченной данным контуром.

Пример 81. *Вычислить интеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, *где* C *— окружность* $x^2+y^2=2x$.

Решение. 1) Функция z^4+1 имеет четыре разных нуля порядка 1:

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Другими словами, $z^4+1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Тогда функция $\frac{1}{z^4+1}$ имеет четыре полюса порядка 1 (в точках z_1, z_2, z_3, z_4).



2) Два полюса (z_1 и z_4) находятся внутри контура интегрирования. Тогда по основной теореме теории вычетов 72 получаем

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1} + \operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}\right).$$

3) Найдём вычеты. Поскольку функции $f(z)=1$, $g(z)=z^4+1$ голоморфны и z_1, z_4 - нули первого порядка функции $g(z)$ (то есть при $z=z_1$ и $z=z_4$ имеем $g(z)=0$, $g'(z)\neq 0$), то можно воспользоваться леммой 78. Напомним, что по лемме 78: $\operatorname*{Res}_{z=z_j}(f(z)/g(z)) = f(z_j)/g'(z_j)$. В нашем случае

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}}$$

и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_4}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4e^{-3\pi i/4}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{4e^{3\pi i/4}} + \frac{1}{4e^{-3\pi i/4}}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{3\pi i/4}+e^{-3\pi i/4}}{4}\right) = 2\pi i\left(\frac{\cos 3\pi/4}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}\pi i}{2}. \qquad \triangle$$

Пример 82. *Вычислить интеграл*

$$I = \int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8-1}\,dz.$$

Решение. Функция $f(z)$ имеет восемь простых полюсов $z_k = e^{\frac{i\pi k}{4}}$, $k = 0, \ldots, 7$, лежащих в круге $|z|<2$, и по основной теореме теории вычетов

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{7} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Поскольку в окрестности бесконечно удалённой точки

$$f(z) = \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-8})} =$$

$$\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^7} - \frac{5}{z^8}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{8k}} = \frac{2}{z} + \sum_{m=2}^{\infty} c_m \frac{1}{z^m},$$

то $c_{-1} = 2$, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -2$, следовательно, $I = 4\pi i$.

△

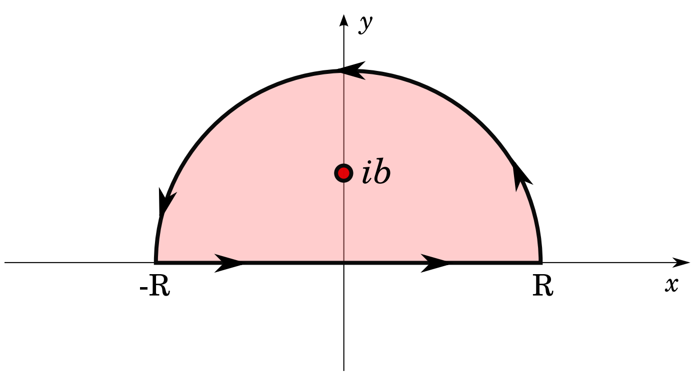
Пример 83. *Найдём интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2 + b^2},$$

параметры $a, b > 0$.

Решение. 1) Рассмотрим замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и верхней полуокружности

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}.$$



2) Имеем

$$\oint\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} = \int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} + \int\limits_{[-R,R]} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2}.$$

Первый интеграл

$$\int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} \to 0 \qquad \text{при } R\to\infty,$$

по лемме Жордана 32.

Второй интеграл

$$\int\limits_{[-R,R]} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+b^2} \qquad \text{при } R\to\infty.$$

3) Функция $\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ имеет полюс первого порядка в точке ib. Тогда по основной теореме теории вычетов 72

$$\oint\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z^2+b^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \frac{2\pi i e^{ia(ib)}}{2(ib)}.$$

4) Таким образом, искомый интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}\,dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}. \qquad \triangle$$

5.3.1 Рационально-тригонометрические интегралы

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)\,d\,\varphi,$$

где $R(\xi, \eta)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Сделаем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$d\varphi = -i\,\frac{dz}{z}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Следовательно,

$$I = -i \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} =$$

$$= \int\limits_{|z|=1} R_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R_1(z).$$

5.3.2 Рациональные интегралы

Рассмотрим интеграл

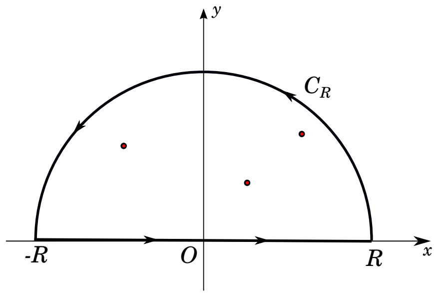
$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \tag{5.2}$$

где $f(x)$ – рациональная функция.

Пусть $f(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, то для сходимости интеграла (5.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m - n \geq 2$.

Поскольку рациональная функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ может иметь лишь конечное количество полюсов, то можно выбрать такое значение $0 < R < \infty$, что все конечные особые точки функции $f(z)$ будут лежать в круге $|z| < R$.

Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.



По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{5.3}$$

Поскольку при $R \to \infty$

$$\left| \int_{C_R} f(z)d\,z \right| \le CR^{-2} 2\pi R \to 0,$$

то переходя к пределу в равенстве (5.3), получаем

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\,x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов можно выбрать такой контур интегрирования, который содержит внутри себя всего одну особую точку.

Пример 84. *Вычислим интеграл*

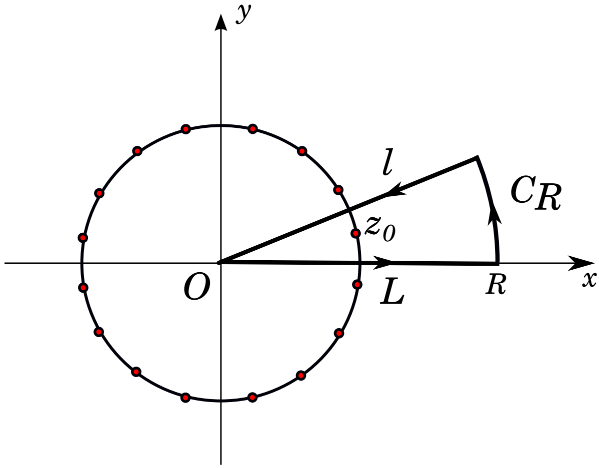
$$I_n \;=\; \int_{0}^{\infty} \frac{d\,x}{1 + x^{2n}}, \qquad n \ge 1.$$

Решение. Функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

имеет $2n$ особых точек.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R, состоящему из отрезка действительной оси $L = [0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n},\ \ 0 \le r \le R\}$.



Внутри контура Γ_R функция $f(x)$ имеет единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{l} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Поскольку $|f(z)| \sim \dfrac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \to \infty$, то

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, d\, z \;\to\; 0, \qquad (R \to 0).$$

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $L = [0; R]$

$$\int\limits_{l} f(z)\, d\, z = \int\limits_{R}^{0} f(re^{i\pi/n})\, e^{i\pi/n} d\, r = -e^{i\pi/n} \int\limits_{0}^{R} \frac{d\, r}{1 + r^{2n}}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$I_n - e^{i\pi/n} I_n = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\, x}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin\frac{\pi}{2n}}. \qquad \triangle$$

5.3.3 Интегралы со степенным весом*

Рассмотрим интеграл вида

$$I \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha - 1}\, f(x)\, dx, \tag{5.4}$$

где α — нецелое действительное число, а $f(x)$ — рациональная функция.

Без ограничения общности можно считать, что $f(0) \neq 0$ и $f(0) \neq \infty$, поскольку иначе $f(x) = x^m\, f_1(x)$, $f_1(0) \neq 0$, $f_1(0) \neq \infty$ и $x^{\alpha-1}\, f(x) = x^{\beta-1}\, f_1(x)$. Также при $z \to \infty$ выполняется оценка $f(z) \sim C z^{-k}$, где k — целое число, так как $f(z)$ — рациональная функция.

Для сходимости интеграла необходимо:

1) чтобы функция $f(x)$ не имела полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $\alpha > 0$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim x^{\alpha-1} f(0)$, при $x \to +0$;

3) $\alpha < k$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim C x^{\alpha-k-1}$, при $x \to +\infty$.

Продолжим подынтегральную функцию $f(x)$ в комплексную плоскость, при этом следует учесть, что функция $z^{\alpha-1}$ является многозначной. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $h(x + i0) = x^{\alpha-1}$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x - i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $f(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

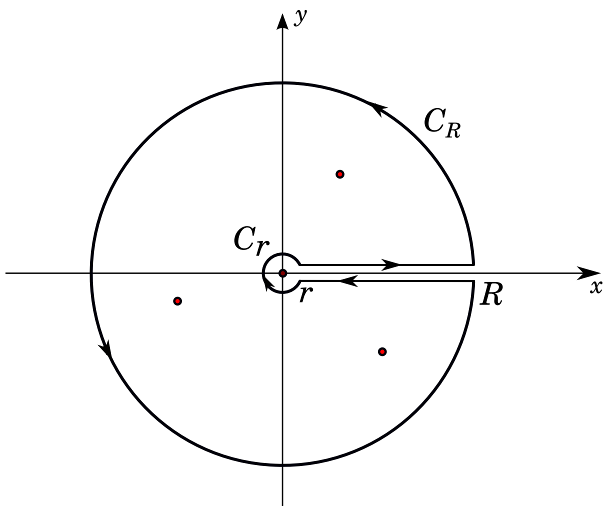


Рис. 5.1. Контур $\Gamma_{r,R}$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\,f(z)\,d\,z = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\,f(x)\,d\,x + e^{i2\pi\alpha}\int\limits_R^r x^{\alpha-1}\,f(x)\,d\,x +$$

$$+\int\limits_{C_R} h(z)\,f(z)\,d\,z + \int\limits_{C_r^-} h(z)\,f(z)\,d\,z = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,f(z)). \quad (5.5)$$

Из условий 2) и 3) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} h(z)\,f(z)\,d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)\,f(z)\,d\,z = 0.$$

Переходя в равенстве (5.5) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$I - e^{i2\pi\alpha}\cdot I = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,f(z)).$$

Окончательно, имеем:

$$I = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}} \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,R(z)).$$

Замечание. Достаточно часто встречающиеся интегралы вида

$$\int\limits_0^1 \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^\alpha f(x)\,d\,x$$

при помощи замены переменной $y = \dfrac{x}{1-x}$ сводятся к интегралам со степенным весом вида (5.4).

Пример 85. *Вычислить интеграл*

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\,dx, \qquad -1<p<1.$$

Решение. Обозначим $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$.

Рассмотрим замкнутую кривую $\Gamma_{R,r}$ как на рис. 5.1. Пусть $h(z)$ — однозначная ветвь функции z^p такая, что $h(x+i0)=x^p$ (в области, ограниченной кривой $\Gamma_{R,r}$, $h(z)=e^{p\ln|z|+i\arg z}$). Особыми точками функции $\frac{h(z)}{1+z^2}$ внутри кривой являются $-i, i$ — полюса первого порядка. Найдём вычеты в этих точках

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{h(z)}{1+z^2}=\frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{h(z)}{1+z^2}=-\frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i}.$$

Устремляя $R\to\infty$ и $r\to 0$, приходим к уравнению

$$I-e^{pi2\pi}I=2\pi i\left(\frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i}-\frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i}\right)=\pi(e^{ip\frac{\pi}{2}}-e^{ip\frac{3\pi}{2}}),$$

откуда находим

$$I=\frac{\pi}{2\cos(\pi p/2)}. \qquad \triangle$$

5.3.4 Интегралы с логарифмическим весом*

Рассмотрим интеграл вида

$$I_m=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx, \tag{5.6}$$

где α – действительное число, $m\in\mathbb{N}$, а $R(x)$ – рациональная функция.

Как и в предыдущем параграфе будем считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, и $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$.

Условия сходимости интеграла (5.6) оказываются такими же как и для интегралов со степенным весом в пункте 5.3.3:

1) функция $R(x)$ должна не иметь полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $0 < \alpha < k$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $h(x + i0) = x^{\alpha-1}$, и однозначную ветвь функции $\ln z$, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $\ln(x + i0) = \ln x$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x - i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}$, $\ln(x - i0) = \ln x + 2\pi i$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $R(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза (см. рис. 5.1).

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\,(\ln x)^m R(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz + e^{i2\pi\alpha} \int\limits_R^r x^{\alpha-1}\,(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (h(z)\,(\ln z)^m R(z)). \quad (5.7)$$

Из условия 2) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0.$$

Переходя в равенстве (5.7) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,(\ln x)^m R(x)\,dx - e^{i2\pi\alpha}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,d\,x =$$
$$= 2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,(\ln z)^m R(z)). \quad (5.8)$$

Возможны два различных случая.

1. **Число α является нецелым.** В этом случае множитель $e^{i2\pi\alpha}$ перед вторым интегралом в формуле (5.8) отличен от единицы. Наиболее простой вид формула (5.8) имеет при $m = 1$

$$(1 - e^{i2\pi\alpha})I_1 - 2\pi i\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,R(x)\,d\,x = 2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,\ln z\,R(z)). \quad (5.9)$$

Если ввести обозначение

$$J = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\,R(x)\,d\,x,$$

и выделить в формуле (5.9) действительную и мнимую части, то мы получим линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_1 I_1 + a_2 J = A \\ b_1 I_1 + b_2 J = B, \end{cases}$$

из которой можно найти значение интеграла I_1. Зная значение I_1, по формуле (5.8) можно последовательно найти значение интегралов $I_2,\ I_3,\ \dots\ I_m$.

2. **Число α является целым.** В этом случае мы имеем интеграл вида

$$I_m = \int\limits_0^{\infty} (\ln x)^m R(x)\,dx,$$

формула (5.8) принимает вид

$$\int\limits_0^{\infty} (\ln x)^m R(x)\,dx - \int\limits_0^{\infty} (\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (\ln z)^m R(z) \tag{5.10}$$

и не позволяет найти интеграл I_m.

Для нахождения интеграла I_m в формуле (5.10) в качестве подынтегральной функции следует взять функцию $(\ln z)^{m+1} R(z)$.

Если рациональная функция функция $R(x)$ является чётной, то для вычисления интеграла I_m можно использовать контур $\gamma_{r,R}$, состоящий из отрезков действительной оси $[-R,-r]$, $[r,R]$ и верхних полуокружностей C_r^+, C_R^+.

Задачи к 5.3

91. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\,dz$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz$; г) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$.

92. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{1+z^4}\,dz$; в) $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}\,dz$;

б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\,dz$; г) $\int\limits_{|z|=5} \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\,dz$.

93. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos(1/z)}{iz+1}\,dz.$$

94. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,d\,z}{\cos z},$$

где Γ – ориентированная против хода часовой стрелки граница полуполосы

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re}\ z < 0,\ -a < \mathrm{Im}\ z < a,\ a > 0\}.$$

95. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a > 1)$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} \quad (|a| < 1)$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi - \sin\varphi)\,d\,\varphi \quad (n \in \mathbb{N})$.

96. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ $\quad (|a|<1,\ n\in\mathbb{N});$

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$ $\quad (\ n\in\mathbb{N});$

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2\alpha}{\sin\varphi-\sin\alpha}\right)^n e^{in\varphi}\, d\varphi$ $\quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}).$

97. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, dx.$

98. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \qquad (n\in\mathbb{N}, n\geq 2).$$

Указание: проинтегрировать функцию $1/(1+z^n)$ по контуру, состоящему из лучей $\arg z=0$, $\arg z=2\pi/n$ и соединяющей их дуги окружности.

99. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{1+x^n} \qquad (n\in\mathbb{N}, n\geq 2 \text{ и } n>\alpha+1>0).$$

100. Доказать равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

101. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^6}{x^8+1}\,dx.$$

➠

102. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^p dx}{1-x}, \qquad -1<p<0.$$

➠

103. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}.$$

➠

104. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}, \qquad -1<p<0.$$

➠

5.4 Принцип аргумента и теорема Руше*

5.4.1 Логарифмическая производная

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области Ω. Функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ называется ***логарифмической производной*** функции $f(z)$ (действительно, $(\ln f)' = f'/f$).

Логарифмическая производная обладает следующим свойством

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f' \cdot g + f \cdot g'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}, \tag{5.11}$$

то есть логарифмическая производная произведения равняется сумме логарифмических производных.

Пусть теперь $f(z)$ — голоморфная в области Ω функция, имеющая конечное число нулей $z_1, \ldots, z_j$ кратности $n_1, \ldots, n_j$. По теореме 56 функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_j)^{n_j} \cdot g(z),$$

где $g(z)$ — голоморфная функция, не имеющая нулей в области Ω. Используя свойство (5.11), вычислим логарифмическую производную функции $f(z)$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{n_j}{z - z_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{5.12}$$

В случае если f имеет конечное число полюсов $p_1, \ldots, p_k$ порядка $m_1, \ldots, m_k$, логарифмическая производная примет вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m_1}{z - p_1} - \cdots - \frac{m_k}{z - p_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \tag{5.13}$$

где $g(z)$ — голоморфная функция, не имеющая полюсов в области Ω.

Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в области Ω, за исключением конечного числа полюсов, $\gamma \subset \Omega$ — замкнутая, кусочно-гладкая кривая без самопересечений и не проходящая через полюса функции f. Введём следующие обозначения:
$N(f, \gamma)$ — чило нулей функции f внутри γ,
$P(f, \gamma)$ — чило полюсов функции f внутри γ.

Теорема 86 *Пусть функция f и кривая γ удовлетворяют описанным выше условиям. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(f, \gamma) - P(f, \gamma).$$

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_j$ — нули кратности $n_1, \dots, n_j$, $p_1, \dots, p_k$ — полюса порядка $m_1, \dots, m_k$ функции f, находящиеся внутри γ.

По (5.12) и (5.13) получаем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \dots + \frac{n_j}{z - z_j} - \frac{m_1}{z - p_1} - \dots - \frac{m_k}{z - p_k} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

где $g(z)$ — голоморфная функция, не имеющая нулей и полюсов. Тогда $\frac{g'(z)}{g(z)}$ — голоморфная функция и по теореме Коши 34

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0.$$

Используя равенство (3.2), выводим

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i (n_1 + \dots + n_j - m_1 - \dots - m_k),$$

что и завершает доказательство. □

Доказанное утверждение позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 87 (теорема Руше) *Пусть f и g — голоморфные функции, γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений и $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in \gamma$. Тогда*

$$N(f+g,\gamma) = N(f,\gamma).$$

Доказательство. По теореме 86 имеем

$$N(f+g,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{(f+g)'}{f+g}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\left(f\left(1+\frac{g}{f}\right)\right)'}{f\left(1+\frac{g}{f}\right)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz =$$

$$= N(f,\gamma) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz.$$

Теперь заметим, что функция принимает значения $\left(1+\frac{g}{f}\right)$ только в области $\mathbb{C}\setminus\{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Это означает, что логарифм $\ln\left(1+\frac{g}{f}\right)$ и его производная $\frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}$ являются голоморфными функциями. По теореме Коши 34

$$\int\limits_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\,dz = 0.$$

В итоге получаем требуемое $N(f+g,\gamma) = N(f,\gamma)$. $\square$

Пример 88. *Сколько нулей в единичном круге имеет функция* $h(z) = e^z - 4z^n + 1$, *где* $n = 1, 2, 3, \dots$ *?*

Решение. Пусть $f(z) = -4z^n + 1$, а $g(z) = e^z$. На единичной окружности $|z| = 1$ имеем цепочку неравенств

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x \le e^1 < 3 = |-4z^n| - 1 \le |-4z^n + 1|.$$

То есть $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -4z^n + 1$ имеет n нулей в единичном круге (это $\sqrt[n]{1/4}$). Следовательно, по теореме Руше функция $h(z) = f(z)+g(z) = e^z - 4z^n + 1$ имеет n нулей в единичном круге. △

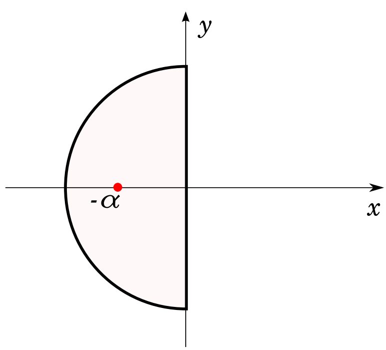
Пример 89. *Сколько корней имеет уравнение*

$$\alpha + z - e^z = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 1 < \alpha < +\infty$$

в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \le 0$*?*

Решение. Положим $f(z) = \alpha + z$, $g(z) = -e^z$. Заметим, что $f(z)$ имеет только один ноль: $z = -\alpha$.

В качестве замкнутой кривой выберем полуокружность C_R некоторого радиуса $R > \alpha + 1$, находящуюся в левой полуплоскости.



Для всех точек $z \in C_R$ имеет место следующая цепочка неравенств

$$|\alpha + z| \geq ||z| - \alpha| = R - \alpha > 1 \geq e^x = |-e^z|.$$

Следовательно, $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in C_R$, и по теореме Руше $f(z) + g(z)$ имеет столько же нулей, что и $f(z)$ внутри C_R. В силу произвольности R уравнение $\alpha + z - e^z = 0$ имеет один корень в левой полуплоскости. $\triangle$

С помощью теоремы Руше можно получить простое доказательство основной теоремы алгебры: *Всякий многочлен степени n имеет на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно n корней с учетом их кратности.*

Доказательство. Пусть $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$, где $a_n \neq 0$. Положим $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$.

Поскольку

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty,$$

то существует такое значение R_0, что при всех $|z| > R_0$ выполняется неравенство $|f(z)| > |g(z)|$.

Согласно теореме Руше, это означает что во всяком круге $B(0, R)$ при $R > R_0$ (а следовательно и во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$) функции $f(z)$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое количество нулей с учетом их кратности.

Очевидно, что точка $z = 0$ является нулём порядка n для функции $f(z) = a_n z^n$. Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

Задачи к 5.4

105. Сколько корней имеет уравнение

$$\alpha - z - e^{-z} = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, 1 < \alpha < +\infty$$

в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$? ➠

106. Сколько корней имеет уравнение

$$az^3 - z + b = e^{-z}(z+2), \qquad a > 0, b > 2$$

в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$? ➠

107. Сколько действительных корней имеет уравнение $ze^{\lambda - z} - 1 = 0$, $\lambda > 0$ в единичном круге ($|z| < 1$)? ➠

Сколько корней имеют уравнения в указанных областях?

108. $3e^z - z$ в $\overline{B(0,1)}$ ➠

109. $\frac{1}{3}e^z - z$ в $\overline{B(0,1)}$ ➠

110. $z^4 - 5z + 1$ в $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ ➠

Термины к главе 5

вы́чет		扣除；扣除额
основна́я теоре́ма тео́рии вы́четов		残数（留数）理论的基本定理
рациона́льная фу́нкция		有理函数
рациона́льно-тригонометри́ческий интегра́л		有理三角数积分
сходя́щийся интегра́л		下降的；[数]收敛的；[象]辐合的
тео́рия вы́четов		残数理论，留数理论

Приложение A

Примеры применений комплексного анализа

Комплексный анализ имеет множество приложений. Приведём некоторые из них.

A.1 Основная теорема алгебры

Теорема 90 (Основная теорема алгебры) *Каждый полином степени n имеет n корней (с учётом кратности).*

Доказательство этой теоремы алгебраическими средствами довольно трудное. Между тем, методы комплексного анализа позволяют доказать это утверждение достаточно легко (см. пункт 5.4).

A.2 Обтекание профиля крыла самолёта

Крыло, двигаясь в потоке газа или жидкости, создаёт подъёмную силу, перпендикулярную направлению потока.

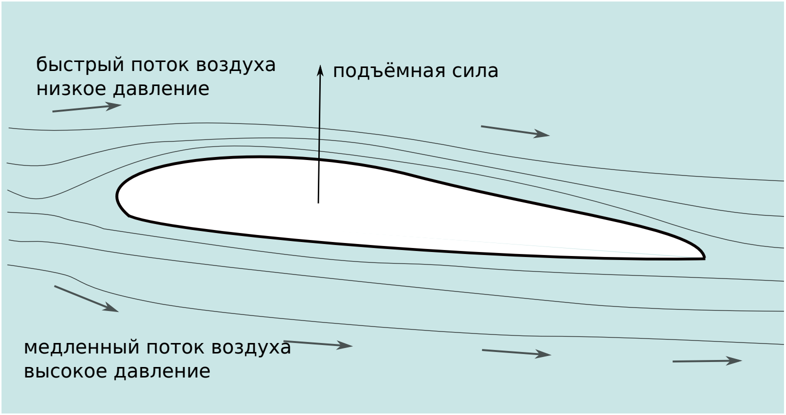


Рис. A.1. Профиль крыла в потоке воздуха

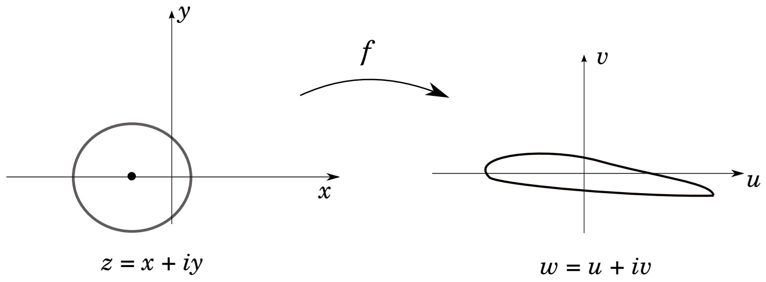
Воздушный поток, обтекающий профиль крыла, подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \tag{A.1}$$

где ϕ — потенциал скорости. Решение уравнения Лапласа в такой области весьма затруднительно. Но с помощью функции Жуковского

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

профиль крыла можно конформно отобразить на круг, где уравнение Лапласа решается достаточно легко.



Функция Жуковского отображает окружность на некую замкнутую кривую, подобную профилю самолётного крыла. Вариацией радиуса и положения круга относительно начала координат $z = 0$ можно менять угол изгиба и толщину крыла.

При этом структура дифференциального уравнения сохраняется:

$$\Delta\phi(u(x, y), v(x, y)) = 0. \tag{A.2}$$

Другими словами, уравнение Лапласа конформно инвариантно.

Пусть $g(x, y)$ решение уравнения (A.2), тогда $\phi(u, v) = g(f^{-1}(u, v))$ является решением уравнения (A.1).

Подробней см. пункт 2.4.5.

Приложение B

Сведения из математического анализа

Приведём теоремы и утверждения из математического анализа, которые используются в данном курсе.

Теорема 91 *Непрерывная функция, определённая на замкнутом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$, принимает своё максимальное и минимальное значение.*

Теорема 92 (Теорема о промежуточном значении) *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $f : I \to \mathbb{R}$ дифференцируема на I и $x, x + \Delta x \in I$. Тогда найдётся число $a \in [0, 1]$ такое, что*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + a\Delta x).$$

Теорема 93 *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда*

1) если $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$, то функция $F(x)$ дифференцируема *и $F'(x) = f(x)$;*

2) если F — первообразная функции f (то есть $F'(x) = f(x)$), то $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Теорема 94 (Равенство смешанных производных) *Если смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ определены на открытом множестве U и непрерывны в точке $(x_0, y_0) \in U$, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Теорема 95 (формула Грина) *Пусть γ - ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая без самопересечений и пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega = \gamma$. Если $u(x, y), v(x, y)$ — функции, дифференцируемые и имеющие непрерывные частные производные на Ω, тогда*

$$\int\limits_\gamma u(x, y)\,dx + v(x, y)\,dy = \iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy. \tag{B.1}$$

B.1 Гауссов интеграл

Гауссов интеграл (также интеграл Эйлера-Пуассона) это интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Найти первообразную $\int e^{-x^2}\,dx$ в элементарных функциях не удаётся. Однако определённый интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ вычислить можно. Идея состоит в следующем: возвести интеграл в квадрат, свести его к двойному и затем сделать полярную замену, вычислить полученный интеграл.

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-r^2}\,dr^2 = \pi.$$

В результате получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Пусть $a > 0$, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}\,d\sqrt{a}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В общем случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}+c}.$$

Термины к главе 2

Гауссов интеграл		高斯积分
оновная теорема алгебры		代数基本定理
крыло самолёта		机翼
потенциал скорости		速度位
формула Грина		格林公式

Ответы

1. см. пример 6.. **2.** Не существует, указание: показать, что при разных направлениях получается разный результат. **3.** 0. **4.** 0. **5.**(а) 0, (б) $1+i$. **6.** Указание: воспользоваться неравенством $||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$. **7.** Рассмотреть различные направления. **8.** (а) Нигде, (б) на действительной оси и на мнимой оси, (в) в точке $z = 0$, (г) на прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, (д) в точке $z = 0$, (е) всюду. **9.** $\operatorname{Im} z = 0$. **10.**(а) $\operatorname{sh} z e^{\operatorname{ch} z}$, (б) $2e^z \cos(2e^z)$, (в) $\dfrac{(1+z^2)(\cos z - z\sin z) - 2z^2\cos z)}{(1+z^2)^2}, zi$, (г) $(1-z)e^{-z}$, (д) $(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2})e^z, z \neq 0$, (е) $(1-i)\cos z \operatorname{ch} z + (1+i)\sin z \operatorname{sh} z$. **11.**(а) $\dfrac{1}{\cos^2 z}$, (б) $-\dfrac{1}{\sin^2 z}$, (в) $\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$, (г) $\cos 2z$, (д) $-2\dfrac{e^z + e^{-z}}{(e^z - e^{-z})^{-3}}$, (е) $\dfrac{1}{(\cos z - \sin)^2}$. **12.** см. пример 10. **13.**(а) $e^z \sin e^z$, (б) $-2e^{-z^2}(1+z)/(1+2z)^2$. **14.** $a = b$. **15.** $a = -b$. **16.** Да, является. Указание: заметить, что $\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$. $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$. **17.** $f(z) = z + iz$. **18.** Нет не является. Указание: показать, что предел $\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^{-1/z^4}}{z}$ не существует. Для это го рассмотреть пределы по направлениям $z = x$, $z = re^{i\pi/4}$ и показать, что они не совпадают. **19.** $a + c = 0$, b — произвольно. **20.** Да. **21.** $|f(z)|$ — не гармоническая функция, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$ — гармонические. **22.** Вертикальная прямая $u = \frac{1}{2}$. **23.** **24.** Полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w < 0$. **25.** В семейства окружностей, касающихся в точке $w = h$ прямых, соответственно параллельных мнимой и действительной осям (включая и сами эти прямые); уравнения этих семейств: $(C - x_0)[(u-h_1)^2 + (v-h_2)^2] - (u - h_1) = 0$; $(C - y_0)[(u-h_1)^2 + (v-h_2)^2] - (v - h_1) = 0$, где $z_0 = x_0 + iy_0$, $\quad h = h_1 + ih_2$. **26.** В полукруг $|w| < 1$, $\quad \operatorname{Im} w < 0$. **27.** В двусвязную область, граница которой состоит из прямой $\operatorname{Re} w = 1/2$ и окружности $|w - 3/4| = 1/4$. **28.** В область, содержащую точку $w = 0$ и ограниченную дугами окружностей $|w| = 1$ и $|w + 5i/4| = 3/4$. **29.** $w = \dfrac{(-1+3i)z + 1 - i}{(1+i)z - 1 + i}$. **30.** Внешность эллипса $\dfrac{4u^2}{(R+1/R)^2} + \dfrac{4v^2}{(R-1/R)^2} = 1$ рис. В.1. **31.** Внешность эллипса $\dfrac{4u^2}{(R+1/R)^2} + \dfrac{4v^2}{(R-1/R)^2} = 1$ рис. В.2.

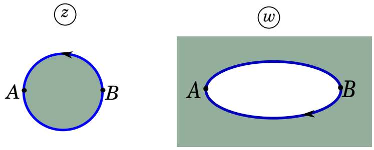


Рис. В.1

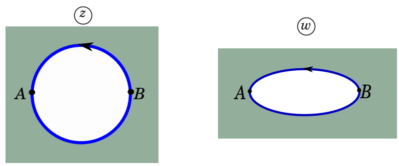


Рис. В.2

32. верхняя полуплоскость. **33.** область между ветвями гиперболы $\frac{u^2}{\sin^2\alpha} - \frac{v^2}{\cos^2\alpha} = 1$. **34.**(а) $(2/3)(1-i)$, (б) $4/3 + i2/3$. **35.** $-2\pi i$. **36.**(а) $8\pi i$, (б) 0, (в) 0, (г) 0. **37.** 0. **38.** $\frac{(1+i)^3}{3}$. **39.** $-8/3$. **40.** $4/3$. **41.** 0. **42.**(а) 6, (б) π. (в) 4, (г) $8a$. **43.**Указание: использовать лемму 31 **44.** 0. **45.** $\sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. **46.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$. **47.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$. **48.** Ответ в а) и б) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **49.** $\frac{8i}{3} - \frac{2}{3}$, указание: использовать свойство (3.3). **50.** 0. **51.** πi. **52.** $2\pi i e^{2pi}$. **53.** $\pi i/2$. **54.** $\frac{\sin a}{a}$. **55.** $1)1; 2) - e/2; 3)1 - e/2$. **56.** $\pi i\cos 1$. **57.** $-\pi i/3$. **58.**(а) π/e; (б) $i(2\pi/3)\operatorname{ch}\pi$; (в) 0; (г) $-\pi i/45$. **59.** $\frac{2\pi}{1-a^2}$ при $|a| < |$, $\frac{2\pi}{a^2-1}$ при $|a| > 1$. **60.** $\operatorname{ch} 2$. **61.**(а) $2\pi i$, (б) $-\pi i$, (в) $8\pi/3$. **62.** 0. **63.**(а) $2\pi\operatorname{sh}1$, (б) 0, (в) 0, (г) $2\pi\operatorname{sh}1$, (д) $\frac{\pi i}{4}$, (е) $2-\pi i\operatorname{ch}1$. **64.**(а) $2\pi i$, (б) $\pi i(2-e)$, (в) $-\pi i e$.

65. $-2\pi i(b-a)^{-n}$. **66.** $\frac{1}{a}e^{az} + C$. **67.**(а) $\frac{1}{a}\operatorname{sh}az + C$; (б) $\frac{1}{a}\operatorname{ch}az + C$; (в) $\frac{1}{a}\sin az + C$. (г) $-\frac{1}{a}\cos az + C$. **68.**(а) $e^{az}\frac{a\cos bz + a\sin bz}{a^2+b^2} + C$; (б) $\frac{1}{a}(z-\frac{1}{a})e^{az} + C$; (в) $\frac{z^2}{a}\operatorname{sh}az - \frac{2z}{a^2}\operatorname{ch}az + \frac{2}{a^3}\operatorname{sh}az + C$. (г) $-\frac{z}{a}\sin az + \frac{1}{a^2}\cos az + C$. **69.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(z-1)^k$. **70.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$, $R=\infty$.

71.(а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$; (б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R=\left|\frac{b}{a}\right|$;

(в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n-1)z^n$, $R = 1$ Указание: воспользоваться тем, что $(1/(z+1))' = -(1/(z+1)^2)$; (г) $1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)$.

72. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+4}$. **73.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}}((z-1)^{2k} + (z-1)^{2k+1})$, $R=2$. **74.** $\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(k-3)(z-1)^k}{2^{k+2}}$, $R=2$. **75.** $z = 2\pi k i, k\in\mathbb{Z}$ — нули кратности 1. **76.** 4. **77.** $z=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ — нули кратности 3. **78.** Нет, не существует. **79.** Да, $f(z) = \frac{z}{2+z}$. **80.** Нет, не существует. **81.**(а) кольцо $\frac{1}{2} < |z| < 2$, (б) кольцо $1 < |z| < 3$.

82. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}z^n$, указание: см. пример 63.. **83.**(а) $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\cdots$, (б) $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots$, (в) $\cdots+\frac{1}{z4!}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{2!}+z^2+z^3$, (г) $\cdots-\frac{1}{z^2 6!}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{2!}+z^4$. **84.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$. **85.** а) $\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, б) $-\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, в) $-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. **86.** $0, \pm 1$ — полюса 1-го порядка, ∞ — устранимая. **87.** Полюса первого порядка $z=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$. **88.** $z=0$ — устранимая, $z=1$ — полюс, $z=\infty$ — существенно особая точка. **89.**(а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)=2\sin 2$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-2\sin 2$; (б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{1}{9}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=3i} f(z)=\dfrac{i}{54}e^{3i}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=-3i} f(z)=-\dfrac{i}{54}e^{-3i}$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{27}(\sin 3-3)$; (в) $\operatorname*{Res}\limits_{z=k\pi}\operatorname{ctg} z=1$, $k\in\mathbb{Z}$ $z=\infty$ – неизолированная особая точка; (г) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=2} f(z)=\dfrac{143}{24}$. **90.**(а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} f(z)=\cos 1$; (б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$; (в) $\operatorname*{Res}\limits_{z=1} f(z)=-\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\sin 1$, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **91.**(а) $2\pi i(1-e^{-1})$; (б) $-4\pi i$; (в) π/e; (г) 0. **92.**(а) 0; (б) $-\pi i/121$; (в) $2\pi i$; (г) 0. **93.** 2π, указание: использовать лемму 75. **94.** $(2\operatorname{ch}\pi/2)^{-1}$. **95.**(а) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; (б) $\dfrac{2\pi}{1-a^2}$; (в) $\dfrac{2\pi}{n!}$. **96.**(а) $2\pi\dfrac{a^n}{1-a^2}$; (б) $\dfrac{2\pi i}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; (в) $\dfrac{\pi\, i^n}{2^{n-1}}$. **97.** π, указание: проинтегрируйте функцию $1/\operatorname{ch} z$ по границе прямоугольника с вершинами $\pm r$, $\pm r+i\pi$. **98.** $\frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$. **99.** $\frac{\pi}{n\sin((1+\alpha)\pi/n)}$. **101.** $\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. **102.** $\pi\operatorname{ctg}\pi p$. **103.** $\frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}}$. **104.** $-\pi$. **105.** Один корень, см. пример 89. **106.** Два корня. **107.** Один корень, $z=0$. **108.** 0 корей. **109.** 1. **110.** 3.

Литература

1. Dennis Pixton Lucas Sabalka Matthias Beck, Gerald Marchesi. A first course in complex analysis. http://www.math.binghamton.edu/dennis/complex.pdf, 2012. Version 1.41.

2. Евсеев Н. А. *Комплексные числа и функции.* Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015.

3. Бицадзе А. В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972.

4. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Абрамович И. Г. *Сборник задач по теории фукций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 2002.

5. Арфкен Г. *Математические методы в физике.* М.: Атомиздат, 1970.

6. Евграфов М.А., Сидоров Ю. В., Федорюк М.В., Шабунин М. И., Бежанов К. А., . *Сборник задач по теории аналитических фукций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972.

7. Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций. Т. 1, 2.* М.: Наука, 1967.

8. Лавреньтьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1987.

9. Романов А. С. Теория функций комплексного переменного. Записки лектора. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Tfkp_Romanov_FF_NGU_2007_86s.pdf, 2007.

10. Тихонов А. Н. Свешников А. Г. *Теория функций комплексной переменной.* Курс высшей математики и математической физики 4. М.: Физматлит, 2005.

11. [俄罗斯] 拉夫连季耶夫 / 沙巴. 复变函数论方法. 俄罗斯数学教材选译系列, 2006.

12. 林福民 编. 数学物理方法简明教程 林福民编. 北京大学出版社, 2008.

Предметный указатель