

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

Н. А. Евсеев

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
2015

Предисловие

Цель данного пособия — помочь студентам Китайско-русского института, специализирующимся по направлению «физика», освоить начальные понятия комплексного анализа, которые необходимы для успешного изучения последующих разделов этого курса.

В первой главе вводится понятие комплексного числа. Изучаются свойства комплексных чисел и рассматриваются основные алгебраические операции.

Вторая глава посвящена геометрической интерпретации комплексных чисел. Решение задач на комплексной плоскости сопровождается подробными иллюстрациями. Изучаются различные формы записи комплексных чисел.

Последовательности комплексных чисел рассматриваются в третьей главе.

В четвёртой главе изучаются числовые и степенные ряды. Отдельные пункты посвящены абсолютно сходящимся и степенным рядам.

В пятой главе вводится понятие функции комплексного переменного. Подробно рассматриваются комплексная экспонента, тригонометрические функции, логарифм и степенная функция.

В заключении каждой главы приводится список ключевых математических терминов с переводом на китайский язык. По каждой теме помещены задания для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев приводятся указания.

В конце пособия для упрощения усвоения материала находится китайско-русский словарь. В нём содержатся общие математические термины, а также некоторые слова и выражения, используемые в ходе занятий и часто встречающиеся в письменной речи. Подбор терминов для словаря осуществил В. А. Александров, перевод на китайский язык — Ван Цян (王强).

Теоретические сведения представлены в соответствии с работами [5, 7, 8]. Часть задач заимствована из [3, 4].

1. Комплексные числа

Системы чисел удобно рассматривать в тесной связи с решениями разного рода уравнений. Проследим эту связь, расширяя последовательно известные числовые множества и используя несложные уравнения для примеров.

Рассмотрим простейшие линейные уравнения, общий вид которых

$$x + a = b, \text{ где } a, b \in \mathbb{N},$$

например, $n + 1 = 2$, $d + 12 = 33$ и т.д. И напомним, что $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ — это множество *натуральных чисел*, т.е. чисел, используемых при счёте и нумерации. Очевидно, что при $a \leq b$ подобные уравнения будут иметь решения, причём $x \in \mathbb{N}$. Но известно, что для случая $b > a$ такие уравнения не имеют натуральных корней.

В этом случае решения таких уравнений (например, $k + 1 = 0$, $z + 7 = 2$ и т.д.) будут принадлежать уже множеству *целых чисел* $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, которое включает в себя отрицательные числа.

Однако, в целых числах не удастся решить такие уравнения, как, например, $2r = 1$, $4r = -5$ и другие вида

$$ax = b, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

Корни таких уравнений могут быть дробными и будут принадлежать множеству рациональных чисел. Напомним, что множество *рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ — это числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, т.е. все числа, представимые в виде обыкновенной дроби.

Рациональные корни будут иметь также и квадратные уравнения вида

$$x^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2 - b^2 = 0, \quad b \in \mathbb{Q}$$

Но такие элементарные квадратные уравнения, как

$$x^2 = 2, \quad x^2 = 3, \quad x^2 = 11 \text{ и подобные им,}$$

уже не будут разрешимы в рациональных числах, т.к. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$. Напомним, что такие числа, которые нельзя представить в виде обыкновенной дроби (при этом их можно представить в виде бесконечной непериодической дроби) называют *иррациональными*. Множество *действительных (вещественных) чисел* $\mathbb{R}$ является объединением множества рациональных и множества иррациональных чисел.

И всё же существуют такие уравнения, которые нельзя решить, ограничиваясь только действительными числами. Например, решая уравнение

$$x^2 + 1 = 0, \quad (1)$$

видим, что не существует ни одного действительного числа, удовлетворяющего данному уравнению (т.е. нет такого действительного числа, квадрат которого равен -1). Для решения такого рода уравнений требуется уже более широкая система чисел, а именно множество комплексных чисел. Для решения уравнения (1) ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$, аналогично, решая уравнение

$$x^2 + b^2 = 0 \quad (2)$$

можно записать формальное решение как $b\sqrt{-1}$. При решении более общего уравнения

$$(x - a)^2 + b^2 = 0 \quad (3)$$

получаем следующее выражение для его корней $a + b\sqrt{-1}$. Введя в обозначение символ $i = \sqrt{-1}$, имеем выражение $a + ib$. Таким образом, множеством *комплексных чисел* назвали множество всех чисел, представимых в виде $a + ib$. Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. Заметим, что комплексных чисел оказывается достаточно для решения любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами.

Итак, имеем следующие включения

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Отметим также тот факт, что все действительные числа являются комплексными, т.е. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$.

1.1. Арифметика комплексных чисел

Комплексное число — это число вида $z = x + iy$, где x и y — вещественные числа, i — мнимая единица, определяемая следующим образом:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad i^2 = -1. \quad (4)$$

Запись комплексного числа вида $z = x + iy$ называется **алгебраической** формой комплексного числа. Число x называется **действительной частью** комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число y называется **мнимой частью** z и обозначается $\operatorname{Im} z$. Так, для числа $z = 3 - 4i$ действительная часть $\operatorname{Re} z = 3$, а мнимая часть $\operatorname{Im} z = -4$. Если $z = 5$, то $\operatorname{Re} z = 5$ и $\operatorname{Im} z = 0$. И вообще, для любого действительного числа x $\operatorname{Re} x = x$ и $\operatorname{Im} x = 0$. Наконец, можно сказать, что любое комплексное число имеет вид

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z.$$

Число $x - iy$ называется сопряжённым к $x + iy$ (см. п. 1.5.).

Всюду далее предполагается, что z — это комплексное число, а x и y — вещественные (и по умолчанию $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$).

Отметим, что нулём на множестве комплексных чисел является число $z = 0 + i0 = 0$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 **равны** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда совпадают вещественные и мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Из определения равенства вытекает, что два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ различны, т. е. $z_1 \neq z_2$, если выполнено хотя бы одно из неравенств: $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$.

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены, т. е. выражения $3 + 4i > 3 + i$ и $i > 0$ и им подобные не имеют смысла.

1.2. Арифметические операции

Сумма комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

т. е. $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$.
Например,

$$(3 + 4i) + (5 + 6i) = 8 + 10i.$$

Аналогично определена **разность**:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Противоположным к комплексному числу z называется такое число $-z$, что

$$z + (-z) = z - z = 0.$$

Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 задаётся равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i. \quad (5)$$

Произведение двух комплексных чисел находится при помощи выполнения обычных алгебраических операций и использования равенства $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i. \end{aligned}$$

Формула (5), вообще говоря, не требует запоминания. При умножении же комплексных чисел удобнее производить непосредственно вышеописанные действия.

Например,

$$\begin{aligned} (3 + 4i) \cdot (5 + 6i) &= 3 \cdot 5 + 4i \cdot 5 + 3 \cdot 6i + 4i \cdot 6i = \\ &= 15 + 20i + 18i - 24 = 15 - 24 + (20 + 18)i = -9 + 38i. \end{aligned}$$

Отметим, что если в равенстве (5), определяющем умножение комплексных чисел, положить $y_1 = 0$, то получим правило умножения действительного числа на комплексное:

$$x_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2.$$

Нетрудно проверить, что законы, которым подчиняются определённые выше операции над комплексными числами, те же самые, что и законы действий над вещественными числами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{коммутативность сложения}),$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (\text{ассоциативность сложения}),$$

то же самое относится к умножению:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (\text{коммутативность умножения}),$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (\text{ассоциативность умножения}),$$

наконец, справедливо свойство, устанавливающее связь между этими двумя действиями:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad (\text{дистрибутивность}).$$

Пример 1. Дано комплексное число $z_0 = a + ib$. Найти другое комплексное число, такое, чтобы произведение его на данное число было действительным числом. Сколько таких чисел можно подобрать?

Решение. Допустим, $z = x + iy$ — число, удовлетворяющее указанному условию, т. е. $z_0 \cdot z$ является действительным числом. Имеем

$$z_0 \cdot z = (a + ib) \cdot (x + iy) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

По предположению $z_0 \cdot z$ — действительное число. Это означает, что мнимая часть числа $z_0 \cdot z$ равняется нулю, т. е.

$$\operatorname{Im}(z_0 \cdot z) = ay + bx = 0.$$

Таким образом, при умножении данного числа $z_0 = a + ib$ на другое комплексное число $z = x + iy$, для которого выполнено свойство $ay + bx = 0$, в результате получается действительное число. Такое число z можно записать в виде $z = t - \frac{b}{a}ti$, где $t \in \mathbb{R}$ — произвольный вещественный параметр. Итак, чисел, удовлетворяющих заданному условию, бесконечно много. $\triangle$

Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число $w = \frac{z_1}{z_2}$, которое при умножении на z_2 даёт z_1 .

Можно показать, что частное двух комплексных чисел вычисляется по правилу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i. \quad (6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем свойством, что $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$, а затем выделили действительную и мнимую части.

Далее выводим,

$$\operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \text{ и } \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Нет необходимости также запоминать и формулу (6). Чтобы разделить одно комплексное число на другое, достаточно числитель и знаменатель полученной дроби умножить на сопряжённое число к знаменателю, что позволит выделить действительную и мнимую части. Например,

$$\frac{3 + 4i}{5 + 6i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (5 - 6i)}{(5 + 6i) \cdot (5 - 6i)} = \frac{39 + 2i}{25 + 36} = \frac{39}{61} + \frac{2}{61}i.$$

Для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует **обратное число** z^{-1} такое, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

Отметим, что если $z = x + iy \neq 0$, то

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Например,

$$(1 + i)^{-1} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Также стоит упомянуть очевидное свойство

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

1.2.1. Возведение в степень

Произведение n равных комплексных чисел z называется n -й **степенью** числа z и обозначается символом z^n :

$$z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$(3 + 4i)^3 = (3 + 4i) \cdot (3 + 4i) \cdot (3 + 4i) = -117 + 44i.$$

Возведение комплексного числа $z \neq 0$ в отрицательную степень определяется как

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Например,

$$(3 + 4i)^{-3} = \frac{1}{(3 + 4i)^3} = \frac{1}{-117 + 44i} = -\frac{117}{117^2 + 44^2} - i \frac{44}{117^2 + 44^2}.$$

Полезно помнить следующие свойства возведения в степень:

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m, \quad z^{n+m} = z^n \cdot z^m.$$

1.2.2. Извлечение корня

Корнем n -й степени из комплексного числа z называется комплексное число w , такое, что

$$w^n = z.$$

Стандартное обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$ или $w = z^{\frac{1}{n}}$.

Пусть известно число z и требуется найти число $\sqrt[n]{z} = w$. Представим w в виде $w = x + iy$, тогда $z = (x + iy)^n$. Следовательно, w можно определить из системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy)^n; \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy)^n. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим частный случай, $n = 2$, т. е. извлечение квадратного корня. Пусть требуется найти $\sqrt{z} = x + iy$. По определению корня квадратного корня имеем $z = (x + iy)^2$. Обозначим $z = a + ib$ (т. е. $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$). Тогда система (7) эквивалентна системе

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(x + iy)^2; \\ b = \operatorname{Im}(x + iy)^2. \end{cases} \quad (8)$$

Далее $(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, поэтому система (8) принимает вид

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2; \\ b = 2xy. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что в системе (9) параметры $a, b \in \mathbb{R}$ и неизвестные $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим три отдельных случая.

1. Если $a = b = 0$, то $x = y = 0$. Другими словами, $\sqrt{0} = 0$.

2. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, тогда $z = a$ (т. е. $z \in \mathbb{R}$). Если $a > 0$, то решениями являются

$$x = -\sqrt{a}, y = 0 \text{ и } x = \sqrt{a}, y = 0.$$

Если $a < 0$, то решениями являются

$$x = 0, y = -\sqrt{-a} \text{ и } x = 0, y = \sqrt{-a}.$$

3. Если $b \neq 0$, то из второго уравнения системы (9) имеем $x = \frac{b}{2y}$. Тогда первое уравнение системы (9) можно переписать как

$$a = \frac{b^2}{4y^2} - y^2,$$

или

$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0. \quad (10)$$

Решая биквадратное уравнение (10), находим

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{или} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

В этом случае решениями системы (9) являются

$$x = \pm \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

В итоге

$$\sqrt{z} = 0, \quad \text{если } z = 0;$$

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{a}, \quad \text{если } z = a \text{ и } a > 0;$$

$$\sqrt{z} = \pm i\sqrt{a}, \quad \text{если } z = a \text{ и } a < 0;$$

$$\sqrt{z} = \pm \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad \text{если } z = a + ib \text{ и } b \neq 0.$$

Следует обратить внимание, что если $z \neq 0$, то существуют два различных значения квадратного корня $\sqrt{z}$. В общем случае, если $z \neq 0$, то существуют n различных значений корня n -й степени $\sqrt[n]{z}$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{1+i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+i} = x + iy$, тогда $(x + iy)^2 = 1 + i$. Приравняв мнимые и действительные части, имеем

$$\begin{cases} 1 = x^2 - y^2; \\ 1 = 2xy. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = \frac{1}{2y}$, и первое уравнение можно переписать как

$$4y^4 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Находим $y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ и $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}$. В итоге значениями квадратного корня $\sqrt{1+i}$ будут

$$\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(см. также пример 21. на с. 39).

△

Определение степенной функции вводится в п. 5.4.

1.3. Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ — два комплексных числа. Как и в случае действительных чисел, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b) \cdot (a + b), \\ (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \end{aligned} \tag{11}$$

В общем случае для любого натурального n имеем¹

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{12}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Справедливость приведённых формул можно доказать, пользуясь правилами действий над комплексными числами.

¹Часто формулу (12) называют биномом Ньютона.

1.4. Модуль комплексного числа

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (13)$$

и имеет тот же геометрический смысл, что и модуль вещественного числа — расстояние до нуля. В частности, для действительного числа x имеем $|x| = \sqrt{x^2}$.

Для модуля комплексного числа выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0; \\ |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{при } z_2 \neq 0; \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z| \text{ и } |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad (|x| \leq |z| \text{ и } |y| \leq |z|); \\ |z| &\leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \quad (|z| \leq |x| + |y|); \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{неравенство треугольника}); \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2|. \end{aligned} \quad (14)$$

Пример 3. Найти модули комплексных чисел:

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = 3 + 4i.$$

Решение. По формуле (13) находим

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}.$$

и

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

△

1.5. Сопряжение

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, т. е. числа, которые отличаются только знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*.

При этом справедливы следующие свойства:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$\overline{\bar{z}} = z;$$

$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad (z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2);$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}};$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;$$

Также отметим, что сопряжённые числа имеют одинаковый модуль

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Остановимся подробнее на произведении сопряжённых чисел. Имеем

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2. \quad (15)$$

Из определения модуля числа z (13), выражение (15) можно переписать в виде

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \quad (16)$$

Из формулы (16) очевидно, что произведение сопряжённых чисел всегда является действительным неотрицательным числом. В самом деле, из определения модуля $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \geq 0$. Отметим также из (16) полезное равенство

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Ещё одно свойство операции сопряжения состоит в том, что

$$z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} z = 0,$$

т. е. сопряженное $\bar{z}$ число равно исходному z тогда и только тогда, когда это число является действительным ($z \in \mathbb{R}$). Также, из равенств

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

полезно отметить, что

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Таким образом, сумма двух сопряжённых чисел есть всегда число действительное, а разность сопряжённых чисел, в свою очередь, всегда является чисто мнимым числом ².

Пример 4. Показать, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad (17)$$

Решение. Используя выражение (16), имеем

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2, \\ |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1 - z_2}) = z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Замечание. Выражение (17) называется **равенством параллелограмма**. △

Отметим также, что деление комплексных чисел удобно выполнять следующим образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

²Чисто мнимое число — это комплексное число вида $z = 0 + iy$.

Пример 5. Известно, что z не является действительным числом (т. е. $\operatorname{Im} z \neq 0$) и $|z| = 1$. Показать, что $w = \frac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым числом (т. е. $\operatorname{Re} w = 0$).

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$w = \frac{x + iy - 1}{x + iy + 1} = \frac{(x + iy - 1) \cdot (x - iy + 1)}{(x + iy + 1) \cdot (x - iy + 1)} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2iy}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Поскольку $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, то

$$w = \frac{2iy}{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Таким образом, число w имеет вид αi , где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$, следовательно, w — чисто мнимое число. $\triangle$

Пример 6. Вычислить $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6$.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^6 = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^6 = (i)^6 = ((i)^2)^3 = -1.$$

$\triangle$

Пример 7. Решить уравнение с модулями для комплексных чисел: $|z + 2i| = |z - 2|$.

Решение. Возведём обе части равенства в квадрат:

$$|z + 2i|^2 = |z - 2|^2.$$

В силу свойства сопряжения ($|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (16)) это равенство примет вид

$$(z + 2i)\overline{(z + 2i)} = (z - 2)\overline{(z - 2)}.$$

Далее

$$\begin{aligned}(z + 2i)(\bar{z} - 2i) &= (z - 2)(\bar{z} - 2), \\ z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} + 4 &= z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4, \\ -iz + i\bar{z} &= -z - \bar{z}, \\ i(z - \bar{z}) &= z + \bar{z}.\end{aligned}$$

Теперь, записав в виде $z = x + iy$, получим

$$\begin{aligned}i(x + iy - (x - iy)) &= x + iy + x - iy, \\ i(2iy) &= 2x.\end{aligned}$$

Таким образом, ответ $y = -x$, т. е. решениями уравнения являются все комплексные числа z , для которых $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$.

Тождество для двух квадратов³

Из равенства $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ вытекает одно замечательное следствие.

Пусть z_1 и z_2 — два комплексных числа. Имеем

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

следовательно,

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2. \quad (18)$$

Пусть $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$, тогда

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i,$$

и равенство (18), принимает вид

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + cb)^2. \quad (19)$$

Таким образом мы получили **тождество для двух квадратов**⁴, которое можно прочесть как: *произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть сумма двух квадратов*. Например,

$$(1^2 + 2^2)(3^2 + 5^2) = 7^2 + 11^2.$$

³см [10].

⁴Это равенство также известно под названием тождество Брахмагупты.

Задачи к главе 1

1. Выполнить действия:

$$\text{а) } (1 - i)^2; \quad \text{б) } (1 + i)^3; \quad \text{в) } \frac{1}{i}.$$

2. Найти частное от деления чисел $z_1 = i$ на $z_2 = 1 + i$.

3. Найти значение выражения $\frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2}$, где $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$.

4. Вычислить:

$$\text{а) } i^3; \quad \text{б) } i^6; \quad \text{в) } i^{100}; \quad \text{г) } i^{2015}.$$

5. Вычислить:

$$\text{а) } (1 + i)^2; \quad \text{б) } (1 - i)^3; \quad \text{в) } (1 + i)^4; \quad \text{г) } (1 - i)^5.$$

6. Вычислить $z = \frac{(-1 + 5i)^2(3 - 4i)}{1 + 3i} + \frac{10 + 7i}{5i}$.

7. Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти

$$\text{а) } z_1 + z_2; \quad \text{б) } z_1 - z_2; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2; \quad \text{г) } \frac{z_1}{z_2}; \quad \text{д) } z_1^2.$$

8. Вычислить $z = \left(\frac{4}{\sqrt{3} + i} \right)^2$.

9. Вычислить $i^{17} - i^{26} + \frac{1}{i^{25}}$.

10. Вычислить $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$.
11. Вычислить $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$.
12. Вычислить $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$.
13. Найти все числа $z \in \mathbb{C}$, такие, что $z \cdot (5 - 3i) \in \mathbb{R}$.
14. Пусть $z = x + iy$. Найти $\operatorname{Re} z^2$ и $\operatorname{Im} z^2$.
15. Пусть $z \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $|z| = 1$. Показать, что для $w = \frac{z+1}{z-1}$ выполнено условие $\operatorname{Re} w = 0$.
16. Вычислить $\frac{(1+i)^{17}}{(1-i)^{16}}$.
17. Какое число нужно возвести в квадрат, чтобы получить $2i$?
18. Вычислить $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.
19. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Вычислить $\overline{z^2} - (\overline{z})^2$.
20. Найти все такие комплексные числа z , что $\bar{z} = -z$.
21. Найти модуль числа $z = (10 + 5i)(1 + 10i)(4 + 2i)(5 + 2i)$
22. Верно ли неравенство $|i - 1| > |1|$?
23. Пусть $a \in \mathbb{C}$, найти максимальное значение $|z^n + a|$ для таких z , что $|z| \leq 1$.
24. Найти $\operatorname{Im} z$, если известно, что $|z| = |z - 3i|$.
25. Известно, что комплексное число z является корнем уравнения $x^2 + x + 1 = 0$. Найти $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

26. Найти решение уравнения

$$\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} = -z^2.$$

27. Найти корни уравнения $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

28. Найти наименьшее натуральное число n , для которого $(-\sqrt{2} + i\sqrt{6})^n$ является целым числом.

Термины к главе 1

абсолютная величина комплексного числа	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$	复数的绝对值
вещественная часть комплексного числа	$\operatorname{Re} z = x$	复数的实数部分
комплексное число	$z = x + iy$	复数
комплексное сопряжение	$\bar{z} = x - iy$	复数共轭
корень квадратный из комплексного числа	$\sqrt{z}$	复数的平方根
корень n -ой степени из комплексного числа	$\sqrt[n]{z}$	复数的 n 次幂根 (n 次根)
мнимая единица	i	虚数单位
мнимая часть комплексного числа	$\operatorname{Im} z = y$	复数的虚数部分
модуль комплексного числа	$ z $	复数的模数
неравенство треугольника	$ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $	三角形的不等式
сопряжённое комплексное число	$\bar{z}$	共轭复数
степень комплексного числа	z^n	复数的幂

2. Геометрия комплексных чисел

В первой главе комплексные числа изучались с алгебраической точки зрения. Мы рассмотрели основные алгебраические операции и свойства комплексных чисел.

Но комплексные числа имеют и геометрическую интерпретацию как точки на плоскости или двумерные векторы. Действительно, каждое комплексное число z определяется парой вещественных чисел (x, y) : $z = x + iy$.

2.1. Комплексная плоскость

Рассмотрим плоскость и прямоугольную систему координат на ней. Ось абсцис (ось Ox) обозначим $\operatorname{Re} z$, а ось ординат (ось Oy) обозначим $\operatorname{Im} z$ (см. рис 1). Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку на этой плоскости с координатами (x, y) , и, другими словами, радиус-вектор с координатами (x, y) .

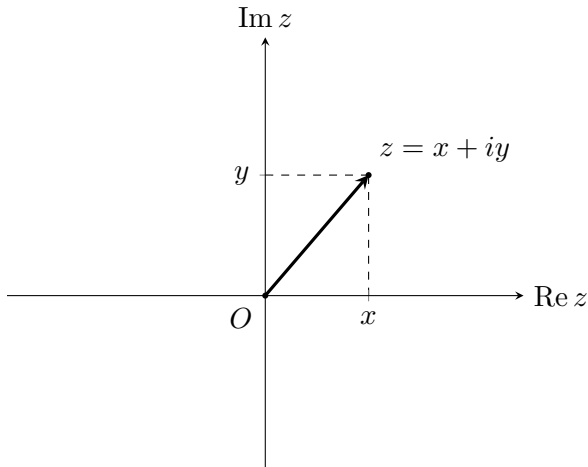


Рис. 1. Комплексная плоскость z

Заметим, что каждому комплексному числу соответствует только одна точка плоскости, и, наоборот, каждой точке на плоскости

соответствует только одно комплексное число.

Длина вектора с координатами (x, y) равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен длине вектора, который соответствует данному числу на комплексной плоскости (см. равенство (13)). Часто модуль обозначают $|z| = \rho$. Несложно проверить, что расстояние между двумя точками комплексной плоскости z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками на комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ между вектором (x, y) и положительным направлением действительной оси $\operatorname{Re} z$ измеряемый против хода часовой стрелки (рис. 2).

Аргумент числа z обозначается $\operatorname{Arg} z$.

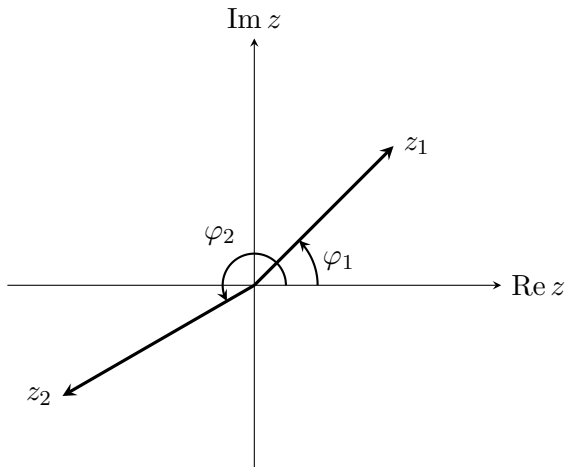


Рис. 2. Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$

Строго говоря, аргумент комплексного числа определен не однозначно, в общем виде аргумент можно записать как

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$ — *главное значение* аргумента. В свою очередь, главное значение аргумента комплексного числа определено однозначно (и принимает значения в промежутке $[0, 2\pi)$).

Единственное комплексное число, для которого значение аргумента не определяют, это $z = 0$. Впрочем, это также единственное число, у которого модуль равен нулю, поэтому неопределённость аргумента в данном случае не является проблемой. Также можно отметить: для действительных чисел ($\operatorname{Im} z = 0$) $\arg z = 0$, если число положительное, и $\arg z = \pi$, если число отрицательное.

Геометрически сложение чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения векторов (по правилу параллелограмма). Разность $z_1 - z_2$ представляется вектором, конец которого находится в точке z_1 , а начало — в точке z_2 (см. рис. 3).

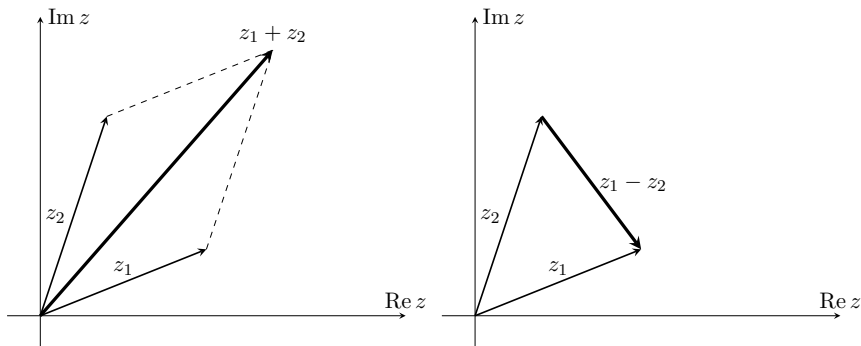


Рис. 3. Геометрическое представление суммы и разности

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу i состоит в повороте на угол $\pi/2$ (или 90°). Действительно, пусть $z = x + iy$, тогда $i \cdot z = -y + ix$. Преобразование $(x, y) \mapsto (-y, x)$ — это поворот вектора (x, y) на $\pi/2$ против часовой стрелки.

Умножение комплексного числа $z = x + iy$ на комплексную экспоненту $e^{i\theta}$ соответствует повороту на угол θ против часовой стрелки (см. подробней пункты 2.2.1. и 2.3.1.).

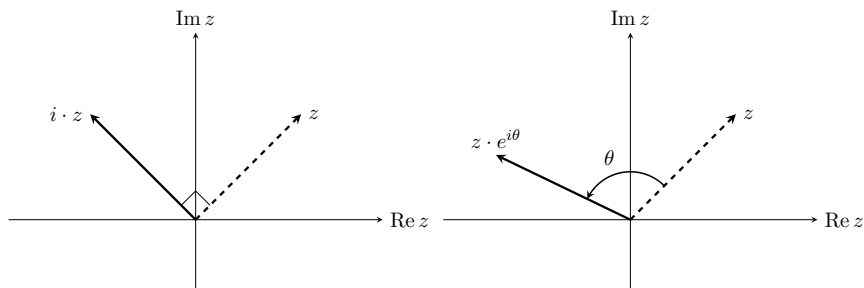


Рис. 4. Геометрический смысл умножения на i и на $e^{i\theta}$

Геометрический смысл операции сопряжения $z \mapsto \bar{z}$ состоит в отражении относительно оси Ox .

Пример 8. Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенство

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z.$$

Решение. Число $\frac{z}{|z|}$ находится на единичной окружности.

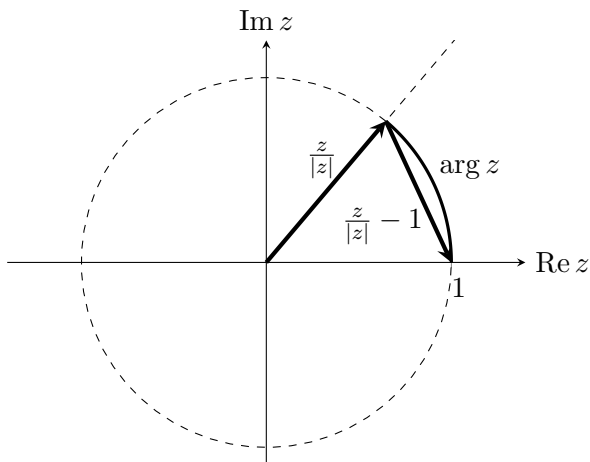


Рис. 5. Длина дуги больше длины отрезка.

Построим на комплексной плоскости вектор, соответствующий разности $\frac{z}{|z|} - 1$ (рис. 5).

Длина дуги единичной окружности, соединяющей точки 1 и $\frac{z}{|z|}$, равна $\arg z$ и не может быть меньше длины отрезка соединяющего эти точки. $\triangle$

Пример 9. Зафиксируем $z_0 \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z , которые удовлетворяют условиям:

$$1) |z - z_0| = r, \quad 2) |z - z_0| \leq r.$$

Решение. 1) Пусть $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$. Распишем модуль комплексного числа $|z - z_0|$ по определению:

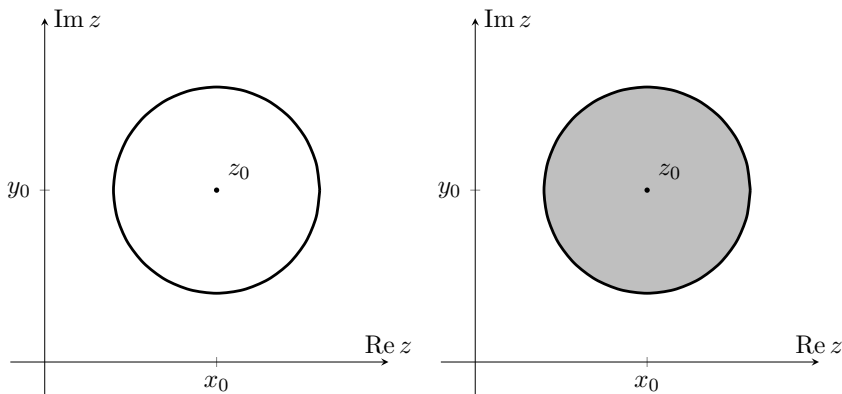
$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |x + iy - (x_0 + iy_0)| = \\ &= |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Тогда равенство $|z - z_0| = r$ равносильно

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В свою очередь, уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ задаёт окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r .

2) Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что неравенство $|z - z_0| \leq r$ равносильно неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$, которое задаёт круг.

Рис. 6. Окружность и круг с центром в точке z_0 .

Таким образом уравнения $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| \leq r$ определяют на комплексной плоскости окружность и круг с центром в точке z_0 и радиусом r (рис. 6).

△

Пример 10. *Выяснить геометрический смысл указанных соотношений:*

$$\text{а) } |z| = \operatorname{Re} z + 1, \quad \text{б) } |z| = \operatorname{Im} z + 1.$$

Решение. а) Пусть $z = x + iy$, тогда первое соотношение можно переписать как

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1. \quad (20)$$

Отметим, что модуль комплексного числа $|z|$ всегда больше или равен нулю. Поэтому $x \geq -1$ (или $\operatorname{Re} z \geq -1$).

Возведём обе части уравнения (20) в квадрат и приведём подобные:

$$y^2 = 2x + 1. \quad (21)$$

Уравнение (21) задаёт параболу с вершиной в точке $(-\frac{1}{2}, 0)$.

б) Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что второе соотношение эквивалентно уравнению

$$x^2 = 2y + 1,$$

которое задаёт параболу с вершиной в точке $(0, -\frac{1}{2})$ (см. рис. 7).

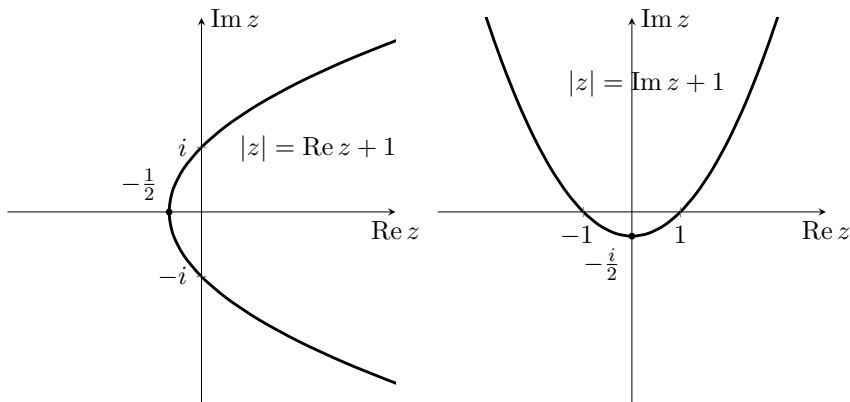


Рис. 7. Параболы

△

Пример 11. Изобразить множество точек на комплексной плоскости, соответствующих числам, которые удовлетворяют условию

$$|z - 1| + |z + 1| = 3. \quad (22)$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда (22) равносильно

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 3.$$

Перенесём второе слагаемое вправо и возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9 - 6\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + (x + 1)^2 + y^2,$$

или, сокращая,

$$6\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 9 + 4x. \quad (23)$$

Возведём обе части равенства (23) в квадрат:

$$36(x^2 + 2x + 1 + y^2) = 81 + 2 \cdot 36x + 16x^2,$$

и далее

$$20x^2 + 36y^2 = 45. \quad (24)$$

Перепишем уравнение (24) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a^2 = \frac{9}{4}, \quad b^2 = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, исходное уравнение (22) равносильно каноническому уравнению эллипса (рис. 8).

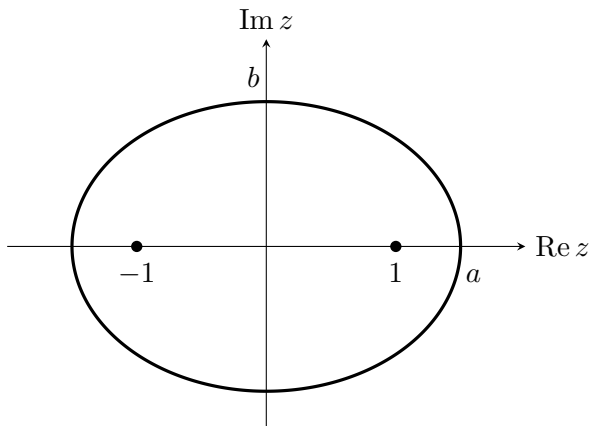


Рис. 8. Эллипс (большая полуось $a = \frac{3}{2}$, малая полуось $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$)

Замечание. Вообще говоря, с самого начала можно было заметить, что уравнение (22) задаёт множество точек z , для которых сумма расстояний до двух данных (-1 и 1) постоянна (и равна 3). Другими словами, это уравнение эллипса с фокусами в точках -1 и 1 .

△

Пример 12. Найти множество точек z на комплексной плоскости, для которых выполняется условие

$$|z - i| = |z - 1|. \quad (25)$$

Решение. Заметим, что $|z - i|$ — это расстояние от z до i , а $|z - 1|$ — расстояние от z до 1. Таким образом, множество точек z , удовлетворяющих (25), является множеством точек, равноудалённых от двух данных (от i и от 1). Это множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки (рис. 9).

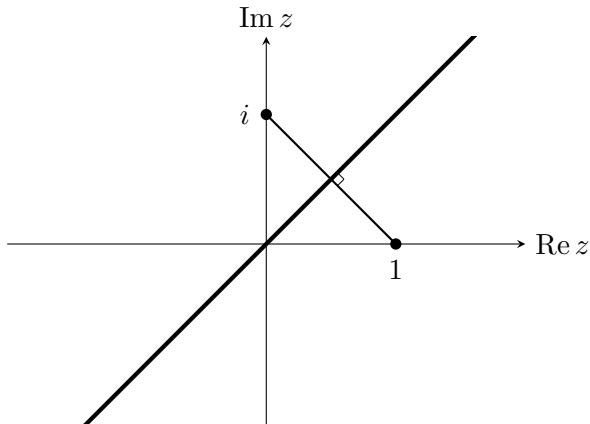
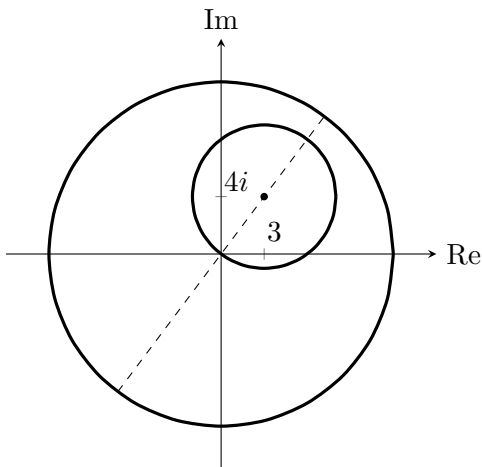


Рис. 9. Серединный перпендикуляр к отрезку $[1, i]$

△

Пример 13. Для всех комплексных чисел z и w , удовлетворяющих соотношениям $|z| = 12$ и $|w - 3 - 4i| = 5$, найти минимум и максимум модуля разности $|z - w|$.

Решение. Заметим, что все числа z , удовлетворяющие соотношению $|z| = 12$, образуют окружность с центром в нуле и радиусом 12. Соотношение $|w - 3 - 4i| = 5$ задаёт окружность с центром в точке $3 + 4i$ и радиусом 5. В свою очередь, величина $|z - w|$ есть расстояние между точками z и w . Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти минимальное и максимальное расстояние между точками z и w , лежащими на соответствующих окружностях. Построим эти окружности.

Рис. 10. Окружности $|z| = 12$ и $|w - 3 - 4i| = 5$

Из рис. 10 очевидно, что 12 — максимальное расстояние, а 2 — минимальное⁵.

2.2. Тригонометрическая форма записи

Пусть $z = x + iy$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, тогда

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (26)$$

Обозначим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из (26) выводим

$$\operatorname{Re} z = x = \rho \cos \varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = y = \rho \sin \varphi. \quad (27)$$

В итоге из (27) имеем

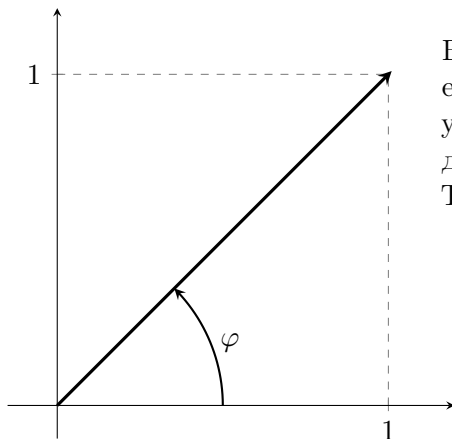
$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

⁵Кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися окружностями радиусов R и r равно $d - (R + r)$, если одна окружность лежит вне другой, и $R - (d + r)$, если одна — внутри другой (d — расстояние между центрами).

Запись комплексного числа вида $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\rho = |z|$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется **тригонометрической**.

Пример 14. Записать число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение. Данное число z на комплексной плоскости является вектором с координатами $(1, 1)$.



Вектор направлен по диагонали единичного квадрата, и поэтому угол $\varphi = \pi/4$. Длина вектора (модуль z) $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Таким образом,

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

△

2.2.1. Произведение в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, а $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два комплексных числа (в тригонометрической записи), тогда несложно проверить, что их произведение можно вычислить следующим образом: ⁶

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (28)$$

Другими словами, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

⁶Используя формулы $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

В свою очередь, деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеет вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Пример 15. Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right), z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Решение. По формуле умножения комплексных чисел в тригонометрической форме получаем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3 \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \\ &= 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

По формуле деления получаем

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

△

Формула (28) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена. В частности,

$$\begin{aligned} z^2 &= \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \\ z^{-1} &= \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)). \end{aligned}$$

И для любого целого числа k верно

$$z^k = \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \quad (29)$$

Другими словами, формула (29) задаёт способ возведения комплексного числа в степень.

Пример 16. *Вычислить*

$$\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{10}.$$

Решение. Представим число $\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме. Получим

$$\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Далее по формуле (29) вычисляем:

$$\begin{aligned} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^{10} &= \left(\cos \left(-\frac{10\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{3} \right) \right) = \\ &= \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

△

При $\rho = 1$ из выражения (29) выводится **формула Муавра**⁷:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi. \quad (30)$$

Эту формулу можно использовать для нахождения синусов и косинусов кратных углов.

⁷Часто формулой Муавра называют выражение (29).

Пример 17. Вывести формулы для $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.

Решение. Запишем выражение (30) в частном случае ($k = 3$):

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Используя формулу (11), распишем левую часть:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Приравнявая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

△

Пример 18. Вычислить $(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1)^n$.

Решение. Воспользуемся следующими тригонометрическими формулами:

$$1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1 &= 2 \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \\ &= 2 \cos \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Далее с помощью формулы Муавра (30) возводим в степень n :

$$(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1)^n = 2^n \cdot \cos^n \varphi \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

△

Пример 19. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ и известно, что $z^{2n} \neq -1$. Проверить, что $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ является действительным числом (т. е. $\operatorname{Im} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = 0$).

Решение. Поскольку $|z| = 1$, то

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

а по формуле (30)

$$z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad \text{и} \quad z^{2n} = \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi.$$

Далее, используя формулы

$$1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} 1 + z^{2n} &= 1 + \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi = \\ &= 2 \cos^2 n\varphi + i 2 \sin n\varphi \cos n\varphi = 2 \cos n\varphi (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{2 \cos n\varphi (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{1}{2 \cos n\varphi}.$$

△

Пример 20. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$.

Решение. Представим число $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в тригонометрической форме:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi.$$

Применяя формулу возведения в степень, получим

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013} &= \cos \left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin \left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = \\ &= \cos 1342\pi + i \sin 1342\pi = 1. \end{aligned}$$

△

2.2.2. Извлечение корней из комплексных чисел

Тригонометрическая запись комплексных чисел оказывается удобной и для извлечения корней n -й степени.

Напомним, что корень n -й степени $z^{\frac{1}{n}}$ (или $\sqrt[n]{z}$) — это комплексное число w , для которого выполнено условие $w^n = z$, т. е. при возведении этого числа в степень n мы получим z .

Если $z \neq 0$, то существует n различных корней n -й степени из числа z :

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (31)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $\varphi = \arg z$.

При этом числа w_k имеют одинаковый модуль (равный $\sqrt[n]{|z|}$) и расположены в вершинах правильного n -угольника (для случая $\sqrt[8]{1}$ см рис. 11). Если $n = 2$, то значения корня лежат на диаметре окружности с центром в нуле.

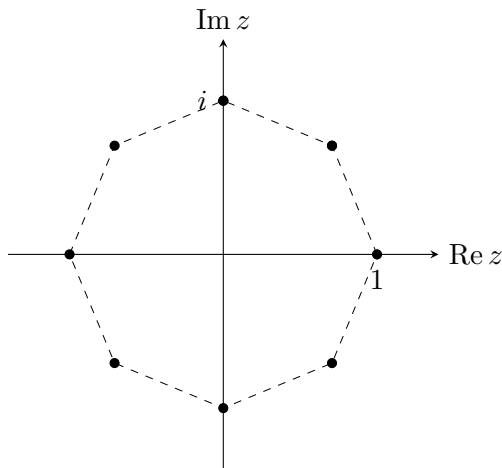


Рис. 11. Все значения $\sqrt[8]{1}$

Заметим, что в формуле (31) $\sqrt[n]{|z|}$ — это арифметический ко-

рень из положительного числа, а значит, определён однозначно.

Особенность извлечения корня из комплексного числа заключается в следующем. Если мы будем рассматривать $\sqrt[n]{z}$ как функцию от z :

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|},$$

то в каждой точке (за исключением нуля) $f(z)$ будет принимать ровно n различных значений. Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ является примером многозначной функции.

Пример 21. Вычислить $\sqrt{1+i}$ и изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Сначала нужно представить число $1+i$ в тригонометрической форме. Мы это уже сделали в примере 14.:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right),$$

где $\rho = |z| = \sqrt{2}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку $n = 2$, то в соответствии с формулой (31) имеем два корня:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right), \\ w_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

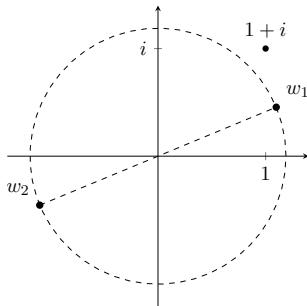


Рис. 12. Значения квадратного корня $\sqrt{1+i}$

На рис. 12 изображены значения корня w_1, w_2 , они расположены на окружности радиусом $\sqrt[4]{2}$. $\triangle$

Пример 22. На комплексной плоскости задан треугольник с вершинами в точках $1, 2i, -1$ (рис. 13).

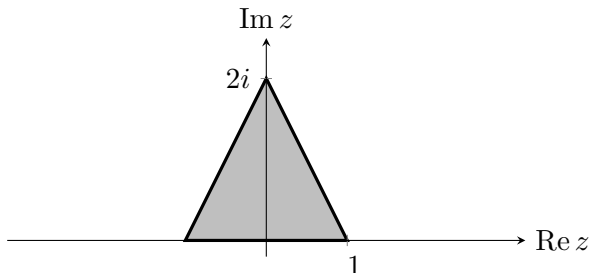


Рис. 13. треугольник с вершинами в точках $1, 2i, -1$

Найти, как изменится треугольник, если для всех точек z из этого треугольника выполнить следующие действия:

$$1) z \cdot i, \quad 2) z + i, \quad 3) \frac{z}{i}, \quad 4) z - i.$$

Решение. Исходя из геометрического смысла указанных действий можно увидеть: 1) умножение на i - поворот против часовой стрелки на угол 90° , 2) прибавление i - сдвиг по мнимой оси в положительном направлении, 3) деление на i - поворот против часовой стрелки на угол 90° , 4) вычитание i - сдвиг в отрицательном направлении (см. рис. 14).

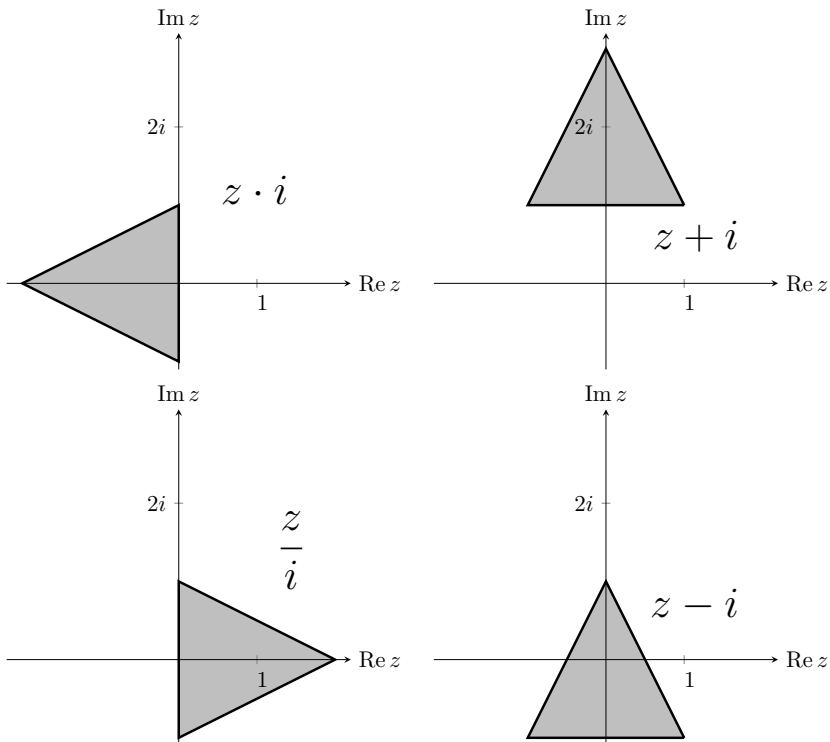


Рис. 14. Образ треугольника при различных действиях

△

Пример 23. Найти все такие $z \in \mathbb{C}$, что

$$\arg(z - i) < \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Обозначим $w = z - i$ и решим неравенство $\arg(w) < \frac{\pi}{6}$. Все числа w , аргумент которых меньше чем, $\pi/6$, находятся в заштрихованной области на рис. 15. Поскольку $z = w + i$, то искомая область будет сдвинута на единицу по мнимой оси в положительном направлении.

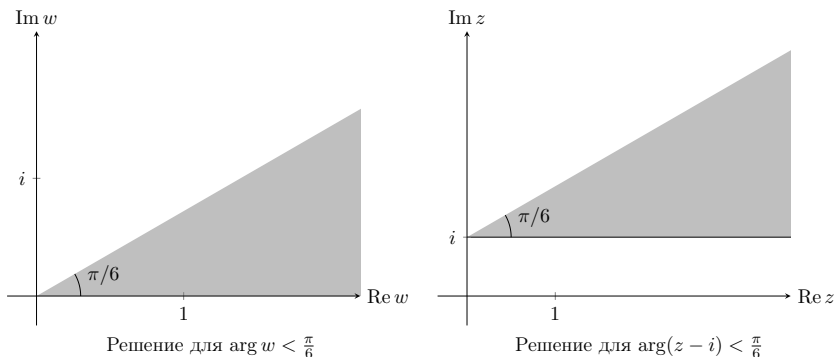


Рис. 15. К примеру 23.

△

2.3. Показательная форма записи

Существует ещё одна форма записи комплексных чисел. Для этой формы потребуется ввести понятие комплексной экспоненты e^z .

2.3.1. Комплексная экспонента

Экспонента e^z является примером комплексной функции комплексного переменного.

Комплексную экспоненту определяют в виде суммы степенного ряда (см. п. 4.4.):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

или как предел последовательности:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (32)$$

Основные свойства функции e^z — это

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \text{и} \quad (e^z)^w = e^{z \cdot w}, \quad (33)$$

где $z, w \in \mathbb{C}$ — любые комплексные числа. Далее нам потребуется **формула Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (34)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — действительное число.

$$\left| \begin{array}{l} \text{В частности получаем, что} \\ |e^{i\varphi}| = 1 \\ \text{для любого } \varphi \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

При подстановке в формулу (34) конкретных значений φ выводим следующие соотношения:

$$e^0 = 1, \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

и

$$e^{2\pi ki} = 1, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Равенство

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

связывает между собой пять самых распространённых математических постоянных и считается одним из величайших математических соотношений.

2.3.2. Запись в показательной форме

$$\left| \begin{array}{l} \text{Пусть } z \in \mathbb{C}, \rho = |z| \text{ и } \varphi = \arg z, \text{ тогда число } z \text{ можно} \\ \text{записать в виде} \\ z = \rho e^{i\varphi}. \end{array} \right.$$

Пример 24. Записать число $z = 1 + i$ в показательной форме.

Решение. Ранее в примере 14. мы вычислили величины $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\rho = \sqrt{2}$. Следовательно,

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

△

Показательная форма удобна для таких операций, как умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

и

$$(z)^n = \rho^n e^{in\varphi}, \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Пример 25. Найти действительные корни уравнения

$$\cos x + i \sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Решение. По формуле Эйлера $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, $|e^{ix}| = 1$ для любого действительного x , значит, $|\cos x + i \sin x| = 1$.

С другой стороны, для модуля правой части имеем

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \right| = \frac{\sqrt{13}}{4} \neq 1.$$

Следовательно, у данного уравнения действительных корней не существует. △

Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка

В этом пункте мы рассмотрим подход, который позволяет ввести понятие бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости. Более полное изложение приведено в [8].

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали.

Обозначим через S сферу с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad (35)$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем **полюсом** сферы S и обозначим символом P . Соединим отрезком точку $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ с полюсом P , при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется **стереографической проекцией** точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ на сферу S .

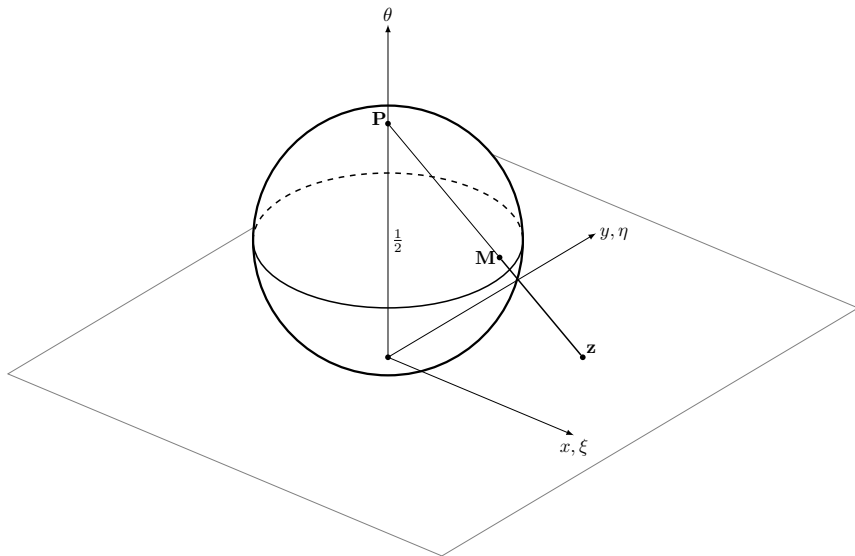


Рис. 16. Сфера Римана

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однознач-

ное соответствие между точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и точками сферы S с выколотым полюсом P .

В силу коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \theta)$ и $\mathbf{z}(x, y, 0)$ имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \theta}{1},$$

откуда выводим

$$x = \frac{\xi}{1 - \theta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \theta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \theta}. \quad (36)$$

Поскольку

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \theta)^2},$$

то из уравнения сферы (35) получаем

$$|z|^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (37)$$

Выражая из равенства (37) значение θ и подставляя его в равенства (36), находим

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \theta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (38)$$

Формулы (38) называют формулами стереографической проекции.

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P . Добавим к комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *идеальный объект*, называемый **бесконечно удаленной точкой** и обозначаемый символом ∞ . Далее комплексную плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой будем называть **расширенной комплексной плоскостью** и обозначать символом $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой S .

Стандартной окрестностью полюса P на сфере является «шапочка», т.е. часть сферы S , расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a$, $0 < a < 1$. Стандартной окрестностью бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости является прообраз стандартной окрестности полюса P при стереографической проекции, т.е. множество $U = \{|z| > r > 0\}$ — внешность круга с центром в нуле. При таком определении стереографическая проекция будет непрерывна и в бесконечно удаленной точке. При этом отображение всей расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ на сферу S будет гомеоморфизмом. Сферу S , на которой изображены комплексные числа, называют *сферой Римана*.

Естественным образом определяется сходимость последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ к бесконечно удаленной точке: $z_n \rightarrow \infty$, если для любой окрестности бесконечно удаленной точки U найдется такой номер n_0 , что при $n > n_0$ точки z_n принадлежат окрестности U . Это определение эквивалентно тому, что $|z_n| \rightarrow +\infty$ (более подробно про предел последовательности см. главу 3.).

Задачи к главе 2

29. $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.
30. Пусть $|z| = 2$ и $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Представить z в виде $x + iy$.
31. Пусть $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ фиксированная точка. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, таких, что:
- а) $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, б) $\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta$.
32. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, которые удовлетворяют соотношению $|z - i| + |z + i| = 16$.

33. Пусть z_1, z_2 — фиксированные комплексные числа. Найти геометрическое место точек, соответствующих числам z , таким, что:

$$\text{а) } |z - z_1| = |z - z_2|, \quad \text{б) } |z - z_1| = |z + z_1|.$$

34. Представить $z = \sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме.

35. Представить $z = -2 + i2\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

36. Представить $\frac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}}$ в тригонометрической форме.

37. Представить число

$$\frac{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}$$

в алгебраической форме.

38. Найти произведение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right), \quad z_2 = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

39. Вычислить $(1 + \sqrt{3}i)^9$.

40. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^9$.

41. Вычислить:

$$\text{а) } u = (1 + \sqrt{3})^{13} + (1 - \sqrt{3})^{13}; \quad \text{б) } v = \frac{(1 + \sqrt{3})^{13} - (1 - \sqrt{3})^{13}}{i}.$$

42. Вывести формулы для $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

43. Вычислить $(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - 1)^n$.
44. Вычислить $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$, где $n \in \mathbb{N}$.
45. Вывести формулу для $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.
46. Представить в показательной форме числа $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ и $z_2 = 1 - i$
47. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:
- а) $(1 + i \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$; если $|\alpha| < \pi/2$, б) $1 + i\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$;
 г) $1 - (2 - \sqrt{3})i$; д) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$; где $|\alpha| < \pi$;
 е) $1 - \cos \alpha - i \sin \alpha$ при $0 < \alpha < 2\pi$;
 ж) $(1 - e^{2i\alpha})(1 - e^{2i\beta})$; если $0 < \alpha, \beta < \pi$.

48. Проверить, что для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$|z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| \leq 2|z_1 z_2|.$$

49. Найти образы точек

$$\text{а) } z = 1, \quad \text{б) } z = i, \quad \text{в) } z = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}$$

при стереографической проекции.

50. При каком условии стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 являются диаметрально противоположные точки сферы Римана?
51. Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на комплексной плоскости?

Термины к главе 2

аргумент комплексного числа	$\operatorname{Arg} z$	复数的宗数
бесконечность	∞	无限; 无穷(性)
вектор	$\vec{v}$	向量; 矢量, 矢
геометрическая интерпретация		几何说明(解释)
главное значение аргумента комплексного числа	$\arg z$	整数宗数的主要意义
длина		长度
единичная окружность		单位圆
комплексная плоскость		复平面
комплексная экспонента	e^z	复变指数
полярные координаты	(ρ, φ)	极坐标
полярный радиус	ρ	极半径
полярный угол	φ	极角
построить на плоскости		在平面上建设
тригонометрическая форма комплексного числа	$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$	复数的三角形式
формула Муавра	$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$	棣(狄)美弗公式
формула Эйлера	$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$	欧拉公式

3. Последовательности комплексных чисел

Последовательность комплексных чисел — это закон (или правило), по которому каждому натуральному числу соответствует определённое комплексное число.

Обычно последовательность записывают в виде

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n, \dots$$

Также последовательность можно изображать в виде точек на комплексной плоскости (рис. 17).

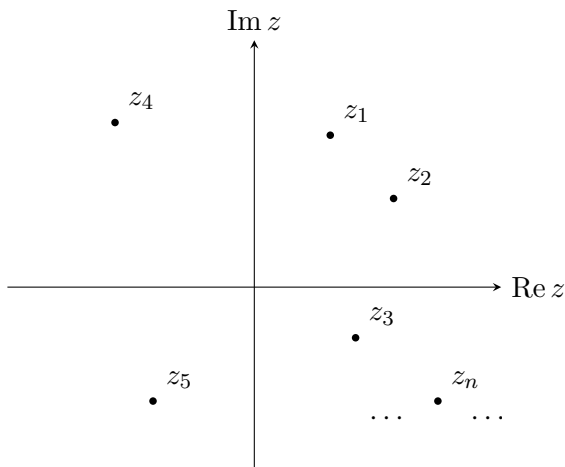


Рис. 17. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$

Пример 26. Записать несколько первых членов последовательностей и изобразить их на комплексной плоскости

$$\text{а) } z_n = i^n, \quad \text{б) } w_n = (1 - i)^n.$$

Решение. а) Возводя мнимую единицу в степени 1, 2, 3, 4, 5, имеем

$$z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 1, \quad z_5 = i.$$

Далее значения последовательности будут повторяться таким образом, что

$$z_{4k} = 1, \quad z_{4k+1} = i, \quad z_{4k+2} = -1, \quad z_{4k+3} = -i,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, т. е. все элементы последовательности сосредоточены в четырёх точках (рис. 18).

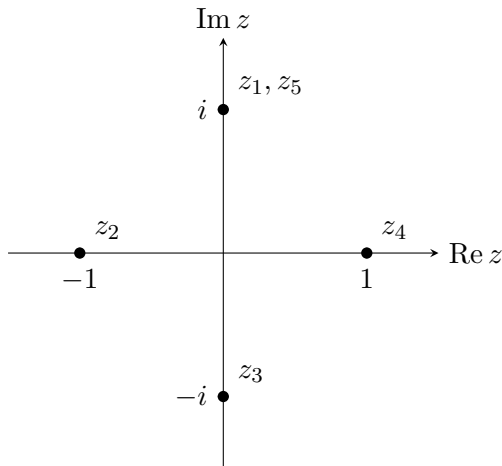


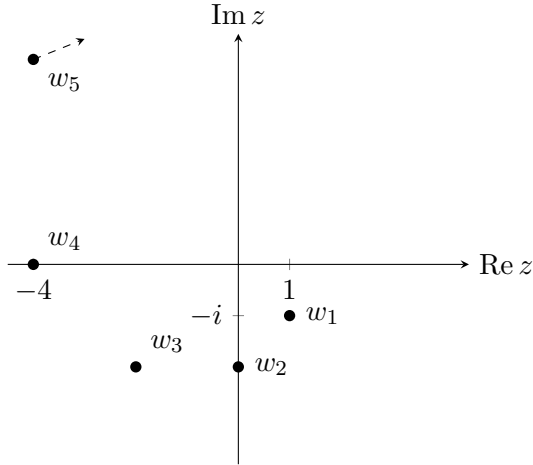
Рис. 18. Последовательность $z_n = i^n$

б) По формуле возведения в степень в тригонометрической форме (29) имеем

$$(1 - i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \left(n \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(n \frac{7\pi}{4} \right) \right),$$

и

$$w_1 = 1 - i, \quad w_2 = -2i, \quad w_3 = -2 - 2i, \quad w_4 = -4, \quad w_5 = -4 + 4i.$$

Рис. 19. Последовательность $w_n = (1 - i)^n$

Элементы данной последовательности лежат на раскручивающейся спирали (рис. 19). $\triangle$

Последовательность называется **ограниченной**, если все её значения ограничены, т. е. существует положительное число $M < \infty$, такое, что $|z_n| < M$ для всех n .

Другими словами, последовательность ограничена, если все её элементы содержатся в некотором круге (в данном случае радиусом M). Так, последовательность $z_n = i^n$ из примера 26. ограничена (действительно, для $M = 2$ имеем $|z_n| = 1 < M$). С другой стороны, последовательность $z_n = (1 - i)^n$ не является ограниченной (для любого M найдётся номер n_M , такой, что $|1 - i|^{n_M} > M$).

Предел последовательности

Комплексное число a называется **пределом** последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

Используются стандартные обозначения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \quad \text{или} \quad z_n \rightarrow a, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Последовательность, которая имеет предел $a \in \mathbb{C}$, называется **сходящейся**.

Примерами сходящихся последовательностей могут служить:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} &= 0 \quad \text{где } 0 < p < \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z^n &= 0 \quad \text{при } |z| < 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1. \end{aligned}$$

Будем считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, если $|z_n| \rightarrow \infty$. Например,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - i)^n &= \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} &= \infty \quad \text{при } p < 0. \end{aligned}$$

На комплексной плоскости сходящаяся последовательности выглядит так, как представлено на рис. 20

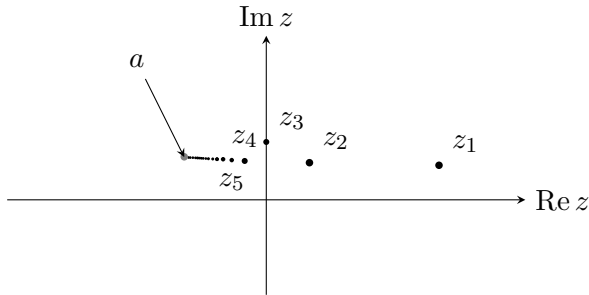


Рис. 20. Сходящаяся последовательность

Следует отметить, что каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $z_n = x_n + y_n i$. Верно следующее утверждение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Другими словами, сходимость последовательности комплексных чисел означает одновременную сходимость действительной и мнимой частей (и наоборот).

Если для данной последовательности не существует предела, то последовательность называется **расходящейся**.

Отметим, что из расходимости действительной или мнимой части следует расходимость всей последовательности.

Пример 27. Найти предел последовательности:

$$z_n = \frac{3-n}{n} + i \frac{n+1}{2n+3}.$$

Решение. Действительная и мнимая части последовательности z_n равны

$$x_n = \frac{3-n}{n}, \quad y_n = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Найдём пределы действительной и мнимых частей по отдельности:

$$x_n = \frac{3}{n} - 1 \rightarrow -1, \quad y_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ и $\frac{3}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

В итоге, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1 + i\frac{1}{2}$. △

Пример 28. Показать, что последовательность $z_n = (1 + i)^n$ расходится.

Решение. Запишем число $1 + i$ в тригонометрической форме⁸:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

Используя формулу возведения в степень в тригонометрической форме (29), имеем

$$z_n = (1 + i)^n = (\sqrt{2})^n (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}).$$

Последовательность действительных частей $x_n = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$ расходится (т. к. $(\sqrt{2})^n \rightarrow \infty$, а величина $\cos \frac{n\pi}{4}$ ограничена при $n \rightarrow \infty$). Следовательно, исходная последовательность z_n расходится. △

Свойства предела

Приведём некоторые свойства предела последовательности⁹. Рассмотрим две сходящиеся последовательности $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b.$$

Выполняются следующие свойства:

⁸См. пример 14.

⁹Более подробно см. работы [6, 8, 9].

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = a + b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = a \cdot b$;
- 3) если $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

Критерий Коши: для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы для всех $n > N$ и $m > N$ выполнялось неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Вычисление пределов последовательностей

Предположим, требуется доказать (непосредственно по определению), что последовательность $\{z_n\}$ сходится к a , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Обычно поступают следующим образом:

- 1) оценивают модуль разности $|z_n - a|$:

$$|z_n - a| \leq E(n),$$

таким образом, чтобы число $E(n)$ зависело только от n ,

- 2) если удаётся подобрать оценку $E(n)$ так, что $E(n)$ убывает до нуля с ростом n ($E(n) \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), то для любого $\varepsilon > 0$ находят такой номер N , что $E(n) < \varepsilon$. И, следовательно, $|z_n - a| \leq E(n) < \varepsilon$.

Пример 29. Пусть $z_n = 1 + i \frac{(-1)^n}{n}$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

Решение. 1) Имеем $|z_n - 1| = |i \frac{(-1)^n}{n}| = \frac{1}{n}$. Таким образом,

$$|z_n - 1| \leq \frac{1}{n}.$$

2) Используем $\frac{1}{n} \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для произвольного (малого) $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N , такое, что $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ (например, $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа). Следовательно, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ для любых $n > N$.

В итоге, мы доказали: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|z_n - 1| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$. $\triangle$

Пример 30. Найти предел последовательности $z_n = \frac{3n + i}{2n - i}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n :

$$\frac{3n + i}{2n - i} = \frac{3 + \frac{i}{n}}{2 - \frac{i}{n}}.$$

Так как $\frac{i}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{3}{2}$. $\triangle$

Пример 31. Пусть $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Изобразить последовательность на комплексной плоскости и найти предел.

Решение. Найдём несколько первых членов последовательности:

$$z_1 = e^{i\pi} = -1, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_4 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и т. д.

$$z_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

Изобразим последовательность z_n на комплексной плоскости. Заметим, что все члены последовательности лежат на единичной окружности (рис. 21).

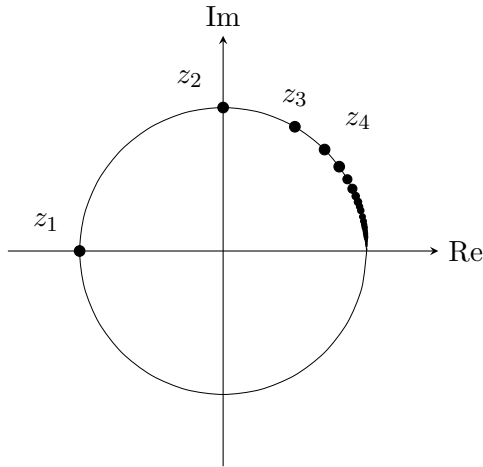


Рис. 21. Последовательность $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

Теперь найдём предел. Запишем действительную и мнимую части последовательности:

$$\operatorname{Re} z_n = \cos \frac{\pi}{n}, \quad \operatorname{Im} z_n = \sin \frac{\pi}{n}.$$

Найдём пределы $\operatorname{Re} z_n$ и $\operatorname{Im} z_n$ по отдельности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 + i0,$$

что вполне согласуется с рис. 21¹⁰.

△

Задачи к главе 3

52. Пусть

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = \frac{7i}{3}, \quad z_3 = \frac{5i}{2}, \quad z_4 = \frac{13i}{5}.$$

¹⁰На самом деле, это рис. 21 согласуется с ответом. Сам по себе рисунок не является доказательством, а только может натолкнуть на некоторые идеи.

Найти выражение для z_n .

53. Записать несколько первых членов последовательности $z_n = (1+i)^n$ и изобразить их на комплексной плоскости.

54. Найти предел последовательности $z_n = \frac{3n-1}{2n+2} + \frac{n+1}{n-1}i$ при $n \rightarrow \infty$.

55. Найти предел последовательности

$$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

56. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

57. Найти следующие пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3 + in^2}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + in^2}{n^2 + 1}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(i)^n}{3^{n+1}}; & \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in}{2^n}. \end{array}$$

58. Изобразить последовательность $z_n = ie^{i\frac{\pi}{n}}$ на комплексной плоскости и найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

59. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{1}{n} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Термины к главе 3

Послѣдовательность чѣсел	$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$	数的连续性
предел последовательности чѣсел	$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$	数的连续性的限度

4. Ряды

В этой главе вводится понятие ряда и некоторые свойства ¹¹.

Пусть задана последовательность (комплексных) чисел $\{a_n\}$. Формальная сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется числовым **рядом** и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (39)$$

Сумма называется формальной, поскольку неизвестно заранее, можно ли выполнить сложение для заданной последовательности. Так, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$$

равна бесконечности, а для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$$

сумма не определена вовсе. С другой стороны, во многих случаях сумму ряда посчитать можно. Примерами могут служить следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1; \quad (40)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots = \pi;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}; \quad (41)$$

¹¹Подробнее см. [2, 6, 9].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2. \quad (42)$$

Далее мы приведём строгое определение суммы ряда. Определим последовательность **частичных сумм** $\{s_n\}$ ряда $\sum a_n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned} \quad (43)$$

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ и $|S| < \infty$, то говорят, что ряд $\sum a_n$ **сходится** и сумма ряда равна S :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если предела частичных сумм не существует или равен бесконечности, то говорят, что ряд **расходится**. Например, для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \quad (44)$$

предел частичных сумм равен бесконечности¹². Следовательно, этот ряд расходится.

¹²Ряд (44) называется гармоническим.

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 32. Проверить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}.$$

Решение. Запишем частичные суммы:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{i}{2}, \\ s_2 &= \frac{i}{2} + \frac{i}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}i, \\ s_3 &= \frac{i}{2} + \frac{i}{2 \cdot 3} + \frac{i}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}i, \\ s_4 &= \frac{i}{2} + \frac{i}{2 \cdot 3} + \frac{i}{3 \cdot 4} + \frac{i}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}i, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= \dots\dots\dots = \frac{n}{n+1}i. \end{aligned}$$

Далее имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}i = i$. Таким образом, мы показали, что ряд сходится, и нашли сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)} = i.$$

△

Как и в случае последовательностей, ряд можно разделить на действительную и мнимую части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

где $x_n = \operatorname{Re} a_n$, $y_n = \operatorname{Im} a_n$. Выполнено следующее свойство: ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды действительных и мнимых частей. Причём если $\sum a_n = S$, $\sum x_n = S_x$, $\sum y_n = S_y$, то $S = S_x + iS_y$. С другой стороны, если один из двух указанных рядов расходится, то расходится и исходный ряд.

Пример 33. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n ni}{n^2}.$$

Решение. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n ni}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом, мы разложили исходный ряд на два уже изветных ряда (см. (41) и (42) на стр. 62). В итоге ряд сходится, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n ni}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$

△

Пример 34. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n}$$

расходится.

Решение. Разделим ряд на действительную и мнимую части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ряд составленный из действительных частей сходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$). Ряд, составленный из мнимых частей, является гармоническим и, как мы знаем, расходится. Следовательно, исходный ряд расходится. △

Необходимый признак сходимости: если ряд $\sum a_n$ сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Так, ряд из примера 32. сходится, и $a_n = \frac{i}{n(n+1)} \rightarrow 0$. Отметим, что необходимый признак применяется для доказательства расходимости ряда. Например, расходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$$

можно показать, используя этот признак. Действительно, последовательности членов ряда $a_n = n$ и $a_n = (-1)^n$ не стремятся к нулю, и, следовательно, по необходимому признаку сходимости данные ряды сходиться не могут.

Следует обратить внимание, что выполнение необходимого признака не влечёт сходимости. Например, для ряда (44) имеем $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но ряд расходится.

Пример 35. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+i}$$

расходится.

Решение. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+i} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, в силу необходимого признака сходимости ряд $\sum \frac{n}{n+i}$ расходится. $\triangle$

4.1. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, которая строится следующим образом. Пусть даны b и q — два комплексных числа. Определим последовательность:

$$a_1 = b \quad \text{и} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{для } n = 2, 3, \dots,$$

т. е.

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad bq^3, \quad bq^4, \quad \dots$$

Число q называется **знаменателем прогрессии**. Если дана геометрическая прогрессия $\{a_n\}$, то числа b и q можно найти из следующих соотношений:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad b = \frac{a_n}{q^{n-1}}.$$

Пример 36. Дана геометрическая прогрессия:

$$i, \quad -2 + i, \quad -4 - 3i, \quad 2 - 11i, \quad \dots$$

Найти знаменатель прогрессии q и выражение для общего члена прогрессии a_n .

Решение. Найдём знаменатель прогрессии из соотношения $q = \frac{a_2}{a_1}$:

$$q = \frac{-2 + i}{i} = \frac{(-2 + i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{1 + 2i}{1} = 1 + 2i.$$

Для любой геометрической прогрессии общий член выражается в виде $a_n = a_1 q^{n-1}$. В нашем случае $a_1 = i$ и

$$a_n = i \cdot (1 + 2i)^{n-1}.$$

△

4.1.1. Частичная сумма геометрической прогрессии

Пусть $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{C}$ — геометрическая прогрессия. Если знаменатель прогрессии $q \neq 1$, то сумму n первых членов можно вычислить по формуле

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Если $q = 1$, то последовательность имеет вид $b, b, b, \dots$ (т. е. $a_n = b$), в этом случае частичная сумма $s_n = n \cdot b$. Заметим, что если $a_1 = 0$, то $s_n = 0$. Далее будем считать, что $a_1 \neq 0$.

Отметим важный частный случай, когда $a_1 = 1$. Тогда формула частичной суммы геометрической прогрессии имеет вид

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (45)$$

Пример 37. Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии $a_n = (1 + i) \cdot 2^{n-1}$.

Решение. Имеем $a_1 = 1 + i$ и знаменатель прогрессии $q = 2$. Тогда по формуле частичной суммы геометрической прогрессии

$$s_n = (1 + i) \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = (1 + i) \cdot (2^n - 1).$$

△

Пример 38. Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии $a_n = (\frac{i}{2})^{n-1}$ и вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Решение. Имеем $a_1 = 1$ и $q = \frac{i}{2}$. Тогда по формуле частичной суммы геометрической прогрессии

$$s_n = \frac{1 - (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}}.$$

Найдём предел частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 - 0}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{2 - i} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$

△

Пример 39. Найти выражение для частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Решение. Последовательность $a_n = (-1)^n$ является геометрической прогрессией: $a_1 = -1$ и $q = -1$. Тогда по формуле для частичных сумм имеем

$$s_n = (-1) \cdot \frac{1 - (-1)^n}{1 + 1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{чётное;} \\ 1, & \text{если } n - \text{нечётное.} \end{cases}$$

△

Пример 40. Пусть $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Вычислить $1 + z + z^2 + \dots + z^{20}$.

Решение. Воспользуемся формулой частичной суммы геометрической прогрессии (45):

$$1 + z + \dots + z^{20} = \frac{1 - z^{21}}{1 - z}.$$

Заметим, что в данном случае $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$, что позволит вычислить z^{21} . Имеем¹³

$$z^{21} = (e^{\frac{i\pi}{4}})^{21} = e^{i\frac{21\pi}{4}} = e^{5\pi i + \frac{i\pi}{4}} = e^{5\pi i} e^{\frac{i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1 - z^{21}}{1 - z} &= \frac{1 + e^{\frac{i\pi}{4}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1 + i}{\sqrt{2} - 1 - i} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + 1 + i) \cdot (\sqrt{2} - 1 + i)}{(\sqrt{2} - 1 - i) \cdot (\sqrt{2} - 1 + i)} = \frac{\sqrt{2}i}{2 - \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}i \cdot (2 + \sqrt{2})}{2} = (1 + \sqrt{2})i. \end{aligned}$$

¹³Напомним, что $e^{5\pi i} = -1$.

4.1.2. Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим ряд, элементами которого являются члены геометрической прогрессии, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_1 = b \text{ и } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad (46)$$

и при этом $b, q, a_n \in \mathbb{C}$. Известны частичные суммы этого ряда:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{и} \quad s_n = n \cdot b, \text{ если } q = 1.$$

Далее исследуем вопрос о сходимости ряда (46). Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1}.$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ только если $|q| < 1$ ¹⁴. Следовательно, при $|q| \geq 1$ ряд (46) расходится в силу необходимого признака сходимости. С другой стороны, при $|q| < 1$ последовательность частичных сумм ряда (46) имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ ряд (46) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (47)$$

Таким образом, мы получили *формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии*. В частности,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}. \quad (48)$$

Заметим, что в формуле (48) суммирование начинается с нуля, а не с единицы.

¹⁴Напомним, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ только при $|z| < 1$.

Пример 41. Исследовать сходимость ряда и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{i}{3^{n-1}} \right).$$

Решение. Ряд сходится, так как его действительная и мнимая части являются геометрическими прогрессиями со знаменателями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно. С помощью формулы (47) вычислим сумму ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{i}{3^{n-1}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{1 - 1/2} + i \frac{1}{1 - 1/3} = 2 + \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

△

Пример 42. Вычислить суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi,$$

при условии, что $0 < r < 1$.

Решение. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $|z| = r < 1$ и по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии (47) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1 - z} = \frac{re^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}.$$

Используя формулу Эйлера (34) и проводя соответствующие пре-

образования, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{re^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} &= \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1-r \cos \varphi - ir \sin \varphi} = \\
 &= \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1-r \cos \varphi - ir \sin \varphi} \cdot \frac{1-r \cos \varphi + ir \sin \varphi}{1-r \cos \varphi + ir \sin \varphi} = \\
 &= \frac{r \cos \varphi - r^2 \cos^2 \varphi + ir^2 \cos \varphi \sin \varphi + ir \sin \varphi - ir^2 \cos \varphi \sin \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{(1-r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \\
 &= \frac{r \cos \varphi - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi + ir \sin \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \\
 &= \frac{r \cos \varphi - r^2 + ir \sin \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2}.
 \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя формулу Муавра и выделяя действительную и мнимую части, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\varphi})^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi.$$

В итоге выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{r \cos \varphi - r^2}{1-2r \cos \varphi + r^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r \sin \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2}.$$

△

4.2. Абсолютно сходящиеся ряды

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится другой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов исходного ряда.

Пример 43. Проверить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ сходится абсолютно.

Решение. Чтобы исследовать ряд на абсолютную сходимость, запишем выражения для модулей членов ряда:

$$|a_n| = \left| \left(\frac{i}{2}\right)^n \right| = \left| \frac{i}{2} \right|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Мы уже знаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится и его сумма равна единице (это геометрическая прогрессия с $a_1 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. $\triangle$

Отметим важное свойство: *если ряд сходится абсолютно, то он сходится (в обычном смысле)*. Так, ряд из примера 43. сходится не только абсолютно, но и в обычном смысле¹⁵. Другими словами, если мы сумели доказать абсолютную сходимость ряда, то сходимость в обычном смысле будет следовать автоматически.

Однако из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Но этот ряд не является абсолютно сходящимся, поскольку ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится. Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что ряд *сходится условно*. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно.

¹⁵Это геометрическая прогрессия с $a_1 = \frac{i}{2}$ и $q = \frac{i}{2}$.

Пример 44. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$$

сходится.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$|a_n| = \left| \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2} \right| = \frac{1}{5^n} \cdot \frac{|3+4i|^n}{n^2} = \frac{1}{5^n} \cdot \frac{(\sqrt{9+16})^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (его сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$), то исходный ряд сходится абсолютно. А из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$ получаем, что он сходится (в обычном смысле). $\triangle$

Данный пример демонстрирует, что иногда бывает удобнее проверять абсолютную сходимость вместо «обычной».

Исследование рядов на абсолютную сходимость

Чтобы исследовать ряд $\sum a_n$ на абсолютную сходимость, нужно исследовать сходимость ряда $\sum |a_n|$. Обозначим $\alpha_n = |a_n|$, тогда $\alpha_n \geq 0$ и для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \quad (49)$$

применимы признаки сходимости знакопостоянных рядов. Приведем основные из этих признаков.

1. **Признак сравнения.** Пусть $\sum \beta_n$ — другой ряд с неотрицательными членами. Если выполнено неравенство

$$\alpha_n \leq \beta_n,$$

то из сходимости ряда $\sum \beta_n$ следует сходимость ряда (49), из расходимости ряда (49) следует расходимость ряда $\sum \beta_n$.

2. **Признак Даламбера.** Если $\alpha_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = p,$$

то при $p < 1$ (49) сходится, а при $p > 1$ расходится.

3. **Признак Коши.** Если $\alpha_n \geq 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = p,$$

то при $p < 1$ (49) сходится, а при $p > 1$ расходится.

Пример 45. Исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$$

на абсолютную сходимость.

Решение. Имеем $|a_n| = \left| \frac{n}{(2i)^n} \right| = \frac{n}{2^n}$. Таким образом, требуется исследовать сходимость ряда $\sum \alpha_n = \sum \frac{n}{2^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера. Для этого найдём отношение двух последующих членов

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{n \cdot 2}$$

и вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $p = \frac{1}{2} < 1$, и, значит, ряд $\sum \frac{n}{2^n}$ сходится (по признаку Даламбера). Отсюда следует абсолютная сходимость исходного ряда $\sum \frac{n}{(2i)^n}$. $\triangle$

Пример 46. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{ni}}{n^2}.$$

Решение. Проверим абсолютную сходимость. Для этого найдём модули членов ряда:

$$|a_n|^2 = \left| \frac{1 + (-1)^n n i}{n^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{n^2} + i \frac{(-1)^n}{n} \right|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} = \frac{1 + n^2}{n^4}.$$

Таким образом, $|a_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2}$ и верно следующее неравенство:

$$|a_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Но ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, и, следовательно, по признаку сравнения (см. с. 74) ряд $\sum |a_n|$ также расходится. Значит, ряд $\sum \frac{1+(-1)^n n i}{n^2}$ не является абсолютно сходящимся. Тем не менее, как мы знаем из примера 33., этот ряд сходится. Таким образом, мы исследовали сходимость ряда $\sum \frac{1+(-1)^n n i}{n^2}$ и показали, что он сходится условно. $\triangle$

Пример 47. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}.$$

Решение. Имеем $|a_n| = \left| \frac{n!}{(in)^n} \right| = \frac{n!}{(n)^n}$. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n)^n}.$$

Для этого воспользуемся признаком Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^{-1}$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{e} < 1$, и, следовательно, ряд сходится абсолютно. $\triangle$

4.3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов

Рассмотрим ряды следующего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n, \quad \text{где } a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{C}.$$

Имеют место следующие признаки сходимости.

Признак Дирихле. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ограничена, т. е. найдётся число M такое, что для любого $N \in \mathbb{N}$ верно $\left| \sum_{n=0}^N b_n \right| < M$.

Пример 48. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\theta n}}{n}.$$

Решение. Обозначим $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = e^{in\theta}$. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ монотонно стремится к нулю. Для последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ имеем

$$\sum_{n=1}^N e^{in\theta} = \frac{e^{i(N+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1},$$

это выражение ограничено при $\theta \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, при $\theta \neq 2\pi k$ ряд сходится в силу признака Дирихле. При $\theta = 2\pi k$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

и, следовательно, расходится. △

Признак Абеля. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится.

4.4. Степенные ряды

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление в виде суммы некоторого ряда уже хорошо изученных функций. Простейшим классом таких функциональных рядов являются *степенные ряды*.

Итак, ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (50)$$

называется *степенным рядом*.

Здесь $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — фиксированные комплексные числа, а z — комплексное переменное¹⁶.

Ряд (50) сходится при одних значениях z и расходится при других. Точно можно сказать, что при $z = 0$ ряд (50) сходится (так как $\sum a_n 0^n = 0 + 0 + \dots = 0$). Примерами степенных рядов могут служить следующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} = z + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \dots,$$

¹⁶Часто степенным рядом называют ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. В этом случае ряд (50) получается путём несложных преобразований. Степенной ряд — это простейший пример функционального ряда, т. е. ряда, членами которого являются функции от z : $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{1}{n}} z^n = ez + 2e^{\frac{1}{2}} z^2 + 3e^{\frac{1}{3}} z^3 + \dots$$

Следующая теорема характеризует сходимость степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке z_0 , то он сходится в любой точке z , такой, что $|z| < |z_0|$.

Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ расходится в точке z_1 , то он расходится в любой точке z , такой, что $|z| > |z_1|$.

Более точную информацию о том, где сходится степенной ряд, даёт

Формула Коши–Адамара. Пусть

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Обозначим $R = \frac{1}{l}$ (если $l = \infty$, то $R = 0$; если $l = 0$, то $R = \infty$). Тогда степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$

Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Множество $\{z : |z| < R\}$ называется **кругом сходимости** степенного ряда. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно, а вне круга — расходится. В точках границы круга сходимости $|z| = R$ ряд может, как сходится, так и расходится.

Если $R = 0$, то это означает, что степенной ряд сходится только в одной точке $z = 0$.

Заметим, что формула Коши–Адамара не даёт ответа, сходится ли ряд на границе круга сходимости $|z| = R$. Поэтому при решении задач этот вопрос нужно исследовать дополнительно.

Пример 49. Найти радиусы сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Решение. а) Имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{i^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Радиус сходимости $R = 1$.

$$\text{б) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \text{ Радиус сходимости } R = 0. \quad \triangle$$

Пример 50. Исследовать сходимость степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \quad (51)$$

Решение. 1. Найдём радиус сходимости. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \right| = 1$, радиус сходимости $R = 1$. Отсюда по формуле Коши–Адамара ряд (51) сходится (абсолютно) при $|z| < 1$, а расходится при $|z| > 1$.

2. Исследуем сходимость на границе круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$. Если $|z| = 1$, то $z = e^{i\varphi}$, и ряд (51) на границе круга сходимости имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^2}. \quad (52)$$

Проверим абсолютную сходимость ряда (52). С учётом (41) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in\varphi}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Получаем, что ряд (52) сходится абсолютно при всех φ . Следовательно, ряд (51) сходится абсолютно на границе круга сходимости. В итоге ряд (51) сходится абсолютно при $|z| \leq 1$. $\triangle$

Задачи к главе 4

60. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n$?

61. Доказать что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3i+5}$ расходится.

62. Найти частичные суммы s_n геометрической прогрессии и вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, где $a_1 = \frac{1}{2i}$ и $q = \frac{1}{2i}$.

63. Вычислить $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$.

64. Дана геометрическая прогрессия

$$i, -2, -4i, 8, 16i, \dots$$

Найти знаменатель q этой прогрессии и выражение для a_n .

65. Найти выражение для n -й частичной суммы s_n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n.$$

66. Пусть $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, вычислить $1 + z + z^2 + \dots + z^{19}$.

67. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{5^{n+1}}$ для $|z| < 5$.

68. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n-1}}{n!}$ сходится абсолютно.

69. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{10^n} \right)$.

70. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{i}{2^n} \right)$ и найти его сумму.

71. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{i}{2^n} \right)$.

72. Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a_n = \frac{ni}{(1+i)^n}; & \text{б) } a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}i; \\ \text{в) } a_n = \frac{i^{2n}}{n}; & \text{г) } a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n. \end{array}$$

73. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

74. Исследовать сходимость ряда

$$P(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i(n-1)\theta}$$

и найти значения $P(\pi/2)$, $P(\pi)$

75. Найти все значения действительного параметра α , при которых сходятся следующие ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{i\pi/n}; \\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)^{-\alpha} (e^{in} - 1); & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln n^2 + 1)^{\alpha}}{n}. \end{array}$$

76. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n.$$

77. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos in.$$

78. Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n.$$

79. Исследовать сходимость степенных рядов (в том числе и на границе круга сходимости):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Термины к главе 4

ра́диус сходи́мости сте- пенно́го ря́да	$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }$	幂级数的收敛半 径
ряд	$\sum_n a_n$	系列; [数]级数
степенно́й ряд	$\sum_n a_n z^n$	幂级数
су́мма ря́да	$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$	级数和
части́чная су́мма ря́да	$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$	级数的部分总和
числово́й ряд	$\sum_n a_n$	数量级数

5. Функции комплексного переменного

Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , то говорят, что на множестве E задана **функция** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Если каждому z соответствует лишь одно значение w , то функция называется **однозначной**, если некоторым z соответствует более чем одно значение w — **многозначной**. Так, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^n$ и $\arg z$ — однозначные функции. Примерами многозначных функций могут служить $f(z) = \sqrt[n]{z}$ (n различных значений) и $f(z) = \operatorname{Arg} z$ (бесконечно много различных значений). Пусть f , g — две многозначные функции, тогда

$$f(z) = g(z) \Leftrightarrow \{f(z)\} = \{g(z)\}.$$

Другими словами, две многозначные функции **равны** в точке z , если совпадают множества их значений в данной точке.

Любая функция комплексного переменного может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительнoзначные функции. Функция u называется действительной частью f и обозначается $u = \operatorname{Re} f$, v — мнимая часть f и обозначается $v = \operatorname{Im} f$.

5.1. Предел и непрерывность

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **пределом** функции f в точке z_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Стандартное обозначение:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda.$$

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

где $\lambda = a + ib$.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Непрерывность функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z , эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , как функций двух действительных переменных.

Более подробно см. [1].

5.2. Экспонента и тригонометрические функции

Мы уже встречались с комплексной экспонентой в п. 2.3.1.. Напомним, что по определению

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Используя свойство $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ и формулу Эйлера, можно получить

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е.

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

откуда находим

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (53)$$

Учитывая эти соотношения, определим косинус и синус комплексного переменного:

$$\left| \begin{array}{l} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{array} \right.$$

Все тригонометрические тождества верны и в случае комплексного переменного:

- 1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
- 2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$;
- 3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
- 4) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$;
- 5) $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$.

Кроме того, полезно помнить, что

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{и} \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Определены тангенс и котангенс комплексного переменного:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические косинус и синус определяются следующим образом:

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{array} \right.$$

Выполняются свойства:

- 1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
- 2) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1$;
- 3) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;
- 4) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$;
- 5) $\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$.

Также

$$\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.$$

Определены гиперболические тангенс и котангенс комплексного переменного:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими соотношениями:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z. \quad (54)$$

Важным классом функций комплексного переменного являются периодические функции.

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется **периодической**, если найдётся такое число $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, что

$$f(z + T) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Все приведённые выше тригонометрические и гиперболические функции являются периодическими. Например, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$, другими словами, e^z — периодическая функция с периодом $T = 2\pi i$

Свойства периодичности

$f(z)$	T
$\sin z, \cos z$	2π
$\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$	π
$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$	$2\pi i$
$\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$	πi
e^z	$2\pi i$

Пример 51. Для функции

$$f(z) = e^{e^z}$$

найти значение $f(i)$.

Решение. Имеем $e^i = \cos 1 + i \sin 1$. Далее

$$e^{e^i} = e^{\cos 1 + i \sin 1} = e^{\cos 1} e^{i \sin 1}.$$

В свою очередь $e^{i \sin 1} = \cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1)$. Тогда окончательно

$$f(i) = e^{\cos 1} (\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1)).$$

△

Пример 52. Функцию $f(z) = \cos z$ записать в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и найти $|\cos z|$.

Решение. 1. Применяя формулу косинуса суммы и (54), имеем

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - \sin x \cdot i \operatorname{sh} y.$$

Таким образом,

$$\cos z = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ и $v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y$.

2. Вычислим модуль $|\cos z| = \sqrt{u^2 + v^2}$:

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + (1 - \cos^2 x) \cdot \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\cos^2 x \cdot (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \end{aligned}$$

Заметим, что также верно $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$. △

Подчеркнём, что комплексные синус и косинус не являются ограниченными функциями. Более того, каждая из этих функций может принимать любые значения.

Пример 53. Найти такие z , что:

$$1) \operatorname{Re} \cos z = 0, \quad 2) \operatorname{Im} \cos z = 0.$$

Решение. Из примера 52.

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

1) Функция $\operatorname{ch} y \neq 0$ для всех вещественных y . Поэтому $\operatorname{Re} \cos z = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$. Таким образом, $\operatorname{Re} \cos z = 0$ для $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$ — любое.

2) $\operatorname{Im} \cos z = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ или $\operatorname{sh} y = 0$. Значит, $\operatorname{Im} \cos z = 0$ при $z = \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$ — любое и при $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ — любое ($y = 0$). $\triangle$

Пример 54. Вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n} \cos kx = 1 + \cos x + \cdots + \cos nx,$$

где $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Из соотношений (53) имеем $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} \cos kx &= 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \cdots + \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}) + \frac{1}{2}(1 + e^{-ix} + \cdots + e^{-inx}). \end{aligned}$$

Используя формулу частичной суммы геометрической прогрессии (45), имеем

$$\begin{aligned} (1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}) &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}, \\ (1 + e^{-ix} + \cdots + e^{-inx}) &= \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}}. \end{aligned}$$

Снова используя соотношения (53), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} \cos kx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{inx} - e^{-ix} - e^{i(n+1)x} + 1 + e^{-inx} - e^{ix} - e^{-i(n+1)x} + 1}{(1 - e^{ix}) \cdot (1 - e^{-ix})} \right) = \\ &= \frac{\cos nx - \cos x - \cos((n+1)x) + 1}{2(1 - \cos x)}. \end{aligned}$$

△

5.3. Комплексный логарифм

Напомним, что

Функция $f^{-1}(w)$ называется **обратной** к $f(z)$, если

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad \text{и} \quad f(f^{-1}(w)) = w \quad \text{для всех } z, w \in \mathbb{C}.$$

Комплексный логарифм $\text{Ln } z$ является обратной функцией к комплексной экспоненте e^z и определяется равенством

$$e^{\text{Ln } z} = z.$$

Пусть $\text{Ln } z = u(z) + iv(z)$, где $u(z)$ и $v(z)$ — действительнoзначные функции. Тогда в соответствии с определением имеем

$$z = e^{u(z)+iv(z)} = e^{u(z)} e^{iv(z)}.$$

Отсюда получаем $|z| = e^{u(z)}$ и $\text{Arg } z = v(z)$ или $u(z) = \ln |z|$ и $v(z) = \arg z + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $|z| \neq 0$ (здесь $\ln |z|$ — это логарифм от положительного числа). Следовательно, мы можем записать формулу для комплексного логарифма:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi ki, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \quad (55)$$

Таким образом, комплексный логарифм является многозначной функций.

Главным значением комплексного логарифма называется функция

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Заметим, что главное значение комплексного логарифма для положительных вещественных чисел совпадает с «обычным» логарифмом, а для отрицательных нужно вычислить «обычный» логарифм модуля и прибавить $i\pi$. Например, $\ln(-5) = \ln 5 + i\pi$.

Пример 55. Вычислить $\operatorname{Ln} 1$, $\operatorname{Ln}(-1)$ и $\operatorname{Ln} i$.

Решение. В соответствии с формулой (55) имеем

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + i \arg 1 + 2\pi ki = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \arg(-1) + 2\pi ki = \pi i + 2\pi ki = \pi i(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} i &= \ln |i| + i \arg(i) + 2\pi ki = 0 + i \frac{\pi}{2} + 2\pi ki = \\ &= \pi i \left(\frac{1}{2} + 2k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

△

Отметим, что и в комплексном случае логарифм нуля не определён.

5.4. Показательная и степенная функции

Определим показательную функцию.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$, тогда

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z(\ln |a| + i \arg a + 2\pi ki)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $f(z) = a^z$ является многозначной функцией. Однако **главное значение показательной функции** $a^z = a^{\ln z}$ является однозначной функцией.

В п. 1.2.1. мы определили операцию возведения комплексного числа в целую степень. Возведение в комплексную степень определяют следующим образом:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Пусть } z, \alpha \in \mathbb{C} \text{ и } z \neq 0, \text{ тогда} \\ z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln |z| + i \arg z + 2\pi k i)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Таким образом, в общем случае функция $f(z) = z^\alpha$ является многозначной. Однако выполняются следующие свойства:

$$f(z) = z^\alpha \text{ — однозначная функция} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$$

и

$$f(z) = z^\alpha \text{ — конечнозначная функция} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Так, корень n -й степени $f(z) = z^{1/k}$ принимает ровно n различных значений. Кроме того, мы можем записать следующую формулу извлечения корня n -й степени:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln |z| + i \arg z + 2\pi k i)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 56. Вычислить все значения $1^{\sqrt{2}}$.

Решение. Имеем

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{2\sqrt{2}\pi k i} = \cos 2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k.$$

Число $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, и поэтому $1^{\sqrt{2}}$ принимает бесконечно много различных значений. $\triangle$

Пример 57. Вычислить i^i .

Решение. Из примера 55. $\operatorname{Ln} i = \pi i \cdot (\frac{1}{2} + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{-\pi(2k + \frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку k принимает целые значения (в том числе и отрицательные), то также верно, что

$$i^i = e^{\pi(2k-\frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

△

Заметим, что $i^i \cdot i^{-i} \neq 1$, а корректная запись $i^i \cdot i^{-i} = e^{2\pi k}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

5.5. Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$ и $\operatorname{Arccos} z$ определяются из условий

$$\sin(\operatorname{Arcsin} z) = z \quad \text{и} \quad \cos(\operatorname{Arccos} z) = z.$$

Выведем формулу для $\operatorname{Arcsin} z$. Обозначим $w = \operatorname{Arcsin} z$, тогда

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{или} \quad \sin w = \frac{u - \frac{1}{u}}{2i} = z,$$

где $u = e^{iw}$. Отсюда приходим к уравнению

$$u^2 + -2izu - 1 = 0,$$

решая которое, находим

$$u = iz + \sqrt{i^2 z^2 + 1} = iz + \sqrt{i^2 z^2 - i^2} = iz + i\sqrt{z^2 - 1}.$$

Здесь имеется в виду комплексный квадратный корень, который принимает два значения. Получаем $e^{iw} = i(z + \sqrt{z^2 - 1})$, или

$$iw = \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Отсюда получаем формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (56)$$

Аналогичным способом можно получить формулу

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Пример 58. Найти все значения $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (56) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} &= -i \operatorname{Ln} i \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= -i (\ln |\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}| + i \arg(\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi i) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}\end{aligned}$$

△

Пример 59. Найти все такие $z \in \mathbb{C}$, что $\sin z + \cos z = 2$.

Решение. Умножая обе части равенства на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и применяя формулу для синуса суммы, переходим к эквивалентному равенству

$$\sin(z + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2},$$

откуда получаем

$$z = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arcsin} \sqrt{2}.$$

Далее

$$\operatorname{Arcsin} \sqrt{2} = -i \operatorname{Ln} i (\sqrt{2} + \sqrt{2-1}) = i \operatorname{Ln} i (\sqrt{2} \pm 1) = -i \operatorname{Ln} (i\sqrt{2} \pm i).$$

Вычислим логарифм:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(i\sqrt{2} \pm i) &= \ln |i\sqrt{2} \pm i| + i \arg(i\sqrt{2} \pm i) + 2k\pi i = \\ &= \ln(\sqrt{2} \pm 1) + i \frac{\pi}{2} + 2k\pi i.\end{aligned}$$

В итоге

$$z = -\frac{\pi}{4} - i \ln(\sqrt{2} \pm 1) + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

△

Пример 60. При каких $a \in \mathbb{C}$ разрешимо уравнение

$$\operatorname{th} z + \operatorname{cth} z = a?$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{th} z + \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} + \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{ch} z \operatorname{sh} z} = a.$$

Применяя формулы для гиперболических функций (см. с. 87), получим

$$\frac{\operatorname{ch} 2z}{\operatorname{sh} 2z} = \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{e^{2z} - e^{-2z}} = \frac{a}{2}.$$

Обозначим $u = e^{4z}$, тогда уравнение можно переписать в виде

$$u + 1 = \frac{a}{2}(u - 1),$$

откуда находим $e^{4z} = u = \frac{a+2}{a-2}$. Таким образом,

$$z = \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{a+2}{a-2}.$$

Комплексный логарифм определён всюду, кроме нуля. Следовательно, уравнение разрешимо для всех a , таких, что $a \neq \pm 2$.

Задачи к главе 5

80. Показать, что функция $f(z) = |z|$ непрерывна при любом z .

81. Для функции

$$f(z) = e^{e^z}$$

найти значение $f(1 + i\pi/2)$.

82. Функцию $f(z) = \sin z$ записать в виде $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ и найти $|\sin z|$.

83. Найти такие z , что

$$1) \operatorname{Re} \sin z = 0, \quad 2) \operatorname{Im} \sin z = 0.$$

84. Функцию $\operatorname{tg} z$ записать в виде $\operatorname{tg}(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ и найти $|\operatorname{tg} z|$.
85. Показать, что $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ и $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.
86. Вычислить $\ln 1$ и $\ln(-1)$.
87. Вычислить 1^{-i} .

Термины к главе 5

арккосинус (арк-косинус)	$\arccos z$	反余弦
арксинус (арк-синус)	$\arcsin z$	反正弦
ареакосинус гипер- болический	$\operatorname{arch} z$	双曲区余弦
ареасинус гиперболический	$\operatorname{arsh} z$	双曲区正弦
арккотангенс	$\operatorname{arctg} z$	反余切
арктангенс	$\operatorname{arctg} z$	反正切
гиперболический косинус	$\operatorname{ch} z$	双曲线余弦
гиперболический синус	$\operatorname{sh} z$	双曲线正弦
значение функции	$w = f(z)$	函数值
комплексная функция	$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	复变数函数
комплексная экспонента	e^z	复变指数
косинус	$\cos z$	余弦
котангенс	$\operatorname{ctg} z$	余切
логарифм	$\operatorname{Ln} z$	对数
непрерывная функция	$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	连续函数

период функции	T	函数的周期
периодическая функция	$f(z + T) = f(z)$	周期函数
показательная функция	a^z	指数函数
предел функции	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	函数的极限
предел функции в точке	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$	函数在点上的极限
синус	$\sin z$	正弦
степенная функция	z^α	幂函数
тангенс	$\operatorname{tg} z$	正切
тригонометрическая функция	$\sin, \cos, \operatorname{tg}, \dots$	三角函数

Словарь

аксиоматический метод		公理化方法
алгебра		代数学, 代数
алгебраическое выражение		代数式
алгебраическое доказательство		代数证明
арифметическое действие		算术演算
аргумент		(数)宗数; 自变数; 论据
бесконечность	∞	无限; 无穷(性)
больше	$>$	大于
больше или равно	$\geq$	大于或等于
вершина квадрата		正方形的顶点
вещественная переменная		实数变量(变数)
вещественное число (действительное число)	$x \in \mathbb{R}$	实数
вещественно-значная функция		实值函数
возвести-возводить в квадрат	x^2	自乘
вопрос	$?$	问题
выделить-выделять полный квадрат	$(a + b)^2$	推导出整方(完全平方)
выражение		表达式
вычислить-вычислять		计算出, 算出

геомётрия		几何学; 几何形状
гипотену́за		斜边; 直角三角形的弦
гра́фик		图表, 表格; [数]图像, 图形; 曲线图; 进度表
гра́фик фу́нкции		函数表
де́йствие		[数]演算, 运算; 作用, 效应; 行动, 动作, 操作
для всех	$\forall$	适用于所有人
доказа́тельство		证明, 论证, 证据
доказа́ть-дока́зывать		证明, 证实; 检验
дома́шнее задáние		家庭作业(习题、课题)
дома́шняя зада́ча		课后题(算题)
дробь	$\frac{a}{b}$	[阴] 小数, 分数
едини́ца	1	一个; 单位; 单元
Есть ли вопро́сы?		大家有没有问题?
зада́ча		课题, 算题; 任务, 使命
замеча́ние		说明; 评语, 意见
заме́на переме́нной		变数更换, 变元
зачёт		测验, 考查
звезда́		星, 恒星; 星形物
звёздочка	*	星形物; 星形分电器; 链轮, 星形轮; 闪光轮

знак		符号, 记号, 标证, 标志
знак мѣнуса	—	减号, 负号
знак неравенства	$\neq$	不等号
знак плюса	+	加号; 正号
знак равенства	=	等号
знаменатель		分母; 级数的公比
знаменатель дроби	$\frac{a}{b}$	分数的分母
изучать		研究, 调查, 学习
интервал		[物]音程; 间隔, 时间间隔; 范围, 区间
интервал вещественных чисел		实数的区间
инфимум	inf	下确界
исправить-исправлять ошибку		改正错误
катет		直角边, 股
квадрат		方; 平方; [电]接线方柱; 方格
квадрат числа	x^2	数的平方
контрольная работа		平时的测验
корень квадратный	$\sqrt{\quad}$	平方根
корень многочлена		多项式的根
корень уравнения		方程的根
коэффициент		系数, 因数, 常数, 率, 比

коэффици́ент много- чле́на		多项式的系数
круг		圆, 圈; 范围
ле́вая часть ра́венства	$a = b$	等式的左侧部分
ле́кция		课堂; 报告, 讲座
ле́мма		引理, 辅助定理
лине́йная а́лгебра		线性代数
лине́йное преобра- зовáние		线性变换
лине́йность		直线性, 直线度
лине́йность преобра- зовáния		变换的直线性
ма́сса	m	[物]质量; [技]体质, 物质; 总量, 大量
матема́тика		数学
математи́ческая тео́рия		数学理论
математи́ческий ана́лиз		数学分析
ме́ньше	$<$	小于
ме́ньше и́ли ра́вен	$\leq$	小于或等于
контро́льная рабо́та		平时的测验
ми́нус	$-$	减, 负号, 负值
многочле́н	$a_n x^n + \dots$	多项式
мно́жество		集合

мно́житель		因数, 乘数
моно́м		单项式
напоми́нание		提醒
напо́мнить-напомина́ть		提醒, 使想起, 使记起
направле́ние обхо́да		转动方向, 绕飞方向
направле́ние обхо́да по часовой стрёлке		顺时针转动
направле́ние обхо́да прот́ив часовой стрёлки		逆时针转动
нарисова́ть-рисова́ть		描绘, 描画
натурáльное числó	$n \in \mathbb{N}$	自然数
нача́ло		[数]原点; 原理; 原则; 基础; 定律
нача́ло координáт	$(0, 0)$	坐标原点
незави́симая переме́нная		自变数
нера́венство		不相等, 不等; [数]不等式; 不平衡
нестро́гое нера́венство	$\leq, \geq$	不严格不等式
нечётная фу́нкция	$f(-x) = -f(x)$	奇函数
ну́жно доказа́ть		需要证明
нуль	0	零
нуль фу́нкции	$f(x) = 0$	函数的零点
область		区域, 部分; 领域, 范围, 方面

область определения функции		函数的定义范围
обратная теорема		逆定理
обратная функция	f^{-1}	反函数
обозначение		符号, 标记, 记号, 表示
обоснование		根据, 基础; 论证, 理由
обосновать- обосновывать		论证, 提出根据; 说明理由
объяснение		解释, 说明; 说明书
объяснить-объяснять		解释, 说明
объяснить-объяснять на примере		用例子证明
ограниченная область		限制区
одночлен		单项式
окрестность		[数]邻域
окружность		圆, 圆周
определить-определять		测定, 确定, 规定; 算出, 求出; 下定义
определение		算出, 求出; 测定, 确定; 定义
ответ		答案, 回答, 应答
отрезок		[数]线段, 截距; 断片, 切片; 一段, 一块(布料及材料等)
отрезок прямой (отрезок прямолинейный)		直线段

отрицательное число	$x < 0$	负数
ошибка		误差; 错误
параметр		参数, 变数; 数据, [矿]标轴
первый случай		第一种情况
перерыв		休息, 停, 中断, 间歇
перерыв между уроками		课间休息
переменная (переменное число)	x	变数, 变量
перемножить- перемножать два числа	$a \cdot b$	将两个数互乘
перемножить со- множители		将多个余因子 (余因式, 相乘数) 互乘
площадь		面积, 广场
плюс	+	加, 加号; 正(值); 有余
подмножество	$A \subset B$	子集, 子集合
подмножество множества		集合的子集
подобные		相似, 相同(项)
подобные члены		同类项
показатель		[数]指数, 幂数; 率; 指标, 指示器; 指示剂
положительное число	$x > 0$	正数
понятие		概念, 观念

пра́вая часть ра́венства	$a = b$	等式的右端
пра́вило		定则, 规则, 法则; 定律; 条例, 规程, 章程; 要领
пра́вило Лейбница	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	莱布尼茨定则
пра́вильно		正确
пра́вильное решéние		正确的解答 (解法, 解 题)
предположи́ть- предполага́ть		假定, 假设
предположе́ние		假设, 假定, 推测; 打算, 预定, 猜想
преобразова́ние		变换, 转变, 转换; 改造, 改革, 换算
преобразова́ние вы- раже́ния		奇函数
привести́ подóбные		[数]取消, 相约
привести́ подóбные чле́ны		合并同类项
примéр		例题, 例子, 示例; 榜样, 范本
продолжи́ть вы- числе́ния		继续计算(运算)
произведе́ние чи́сел	$a \cdot b$	数的乘积
произво́дная	$f', \frac{d}{dx} f$	导数, 微商
произво́дная порядка n	$f^{(n)}, \frac{d^n}{dx^n} f$	n阶导数
пряма́я		直线; [数]正(比例)

прямая́ линия		直线; 直通线
пусть		[数]假定, 设, 令
пусть дано́, что		设给定...
ра́венство	$a = b$	[数]等式; 相等, 平衡
ра́диус		半径
ра́диус окру́жности	r	圆的半径
разложе́ние		[化]分解(作用); 解体, 崩溃, 腐败; [数]分解, 展开(式)
разложи́ть-разлага́ть		[专]分解; [转]使分化, 使瓦解, 使腐化
разложи́ть многочле́н на мно́жители		将多项式的因子分解
раскры́ть-раскрывать ско́бки		去括号
рассказа́ть-расска́зывать реше́ние		讲一讲解题方法
рассто́яние		距离, 间隔
рациона́льное число́	$x \in \mathbb{Q}$	有理数
результáт		结果; 效果, 成果
реше́ние		解答, 解法, 解题, 演算; 决议, 决定, 方案; 处理
решíть-решáть		决定, 拿定主意; 作出决议或判决; 答出, 解开(算题等); 解决(问题等)
решíть зада́чу		解开题

решить уравнение		解方程式
сво́йство		性能, 性质, 特性
сдвиг		位移, 移动; 剪移, 剪切; [地]断层
семина́р		课堂讨论
ско́бка	()	括号
слага́емое		[数]被加数; 部分
сле́дствие		结果, 后果
сле́дствие из теорéмы		定理的结果
сложéние	+	构成, 合成, 构造; [数]加
сложíть два числá	$a + b$	将两个数相加
слúчай		事件, 事故; 情况; 机会
содержáние кúрса		课程内容
содержáть		设置; 包含; 维持, 保持
содержáть внутрí себя́		本身内部包含
сократíть-сокращáть		缩短, 减缩, 减少; [数]约, 除
сократíть подóбные члéны		合并同类项
сомно́житель		余因式, 余因子, 相乘数
соотношéние		关系, 比, 比例
спóсоб решéния задáчи		解题方法

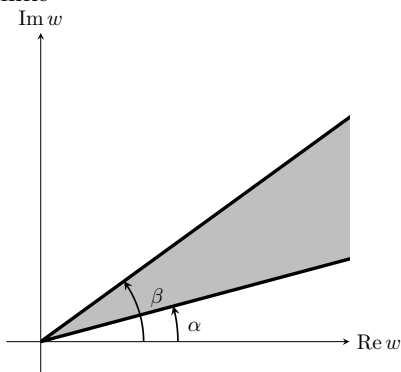
сторона́		面; 方面, 方向; 边, 侧, 端
сторона́ треуго́льника		三角形的边
стро́гое нера́венство		严格不等式...
су́мма	Σ	和, 总数, 总额; 金额, 款额
су́мма чи́сел		数的总和, 总数
существова́ние		存在
существу́ет (суще- ствова́ть)	$\exists$	存在
теоре́ма		定理
теоре́ма Пифаго́ра	$c^2 = a^2 + b^2$	商高定理, 毕氏定理
тео́рия фу́нкций ко́мплексного пе- реме́нного		综合可变函数论
тип		型, 式; 种类, 型别
тогда́		则, 那么(就)
то есть		即, 也就是说
то же са́мое		同样的(情况)
то́чка		点; [机]车; 磨, 磨快; 俄厘
то́чная ве́рхняя гра́ница	sup	精确的上限
то́чная ни́жняя гра́ница	inf	精确的下限
треуго́льник		三角形; 三角板; 三角符 号(表示表面光洁度)
тригономе́трия		三角学

тригонометри́ческая фо́рмула		三角函数公式
тригонометри́ческая фу́нкция		三角函数
убыва́ть-убы́ть		减少, 缩小, 降低, 下落
убыва́ющая фу́нкция		减函数
у́гол	$\angle$	角, 角度; 角位, 角隅, 角部
у́гол ме́жду векто́рами		向量(矢量)间的角
умно́жение		[数]乘法; 乘; 倍增, 增加
умно́жение чи́сел	$a \cdot b$	数相乘
упрости́ть-упроща́ть вы- раже́ние		简化表达式
уравне́ние		方程, 方程式; 反应式
уро́к		功课; 课, 一堂课; 授课时间
усло́бие зада́чи		题目的条件
фа́за		相, 相位; 阶段; 时期; 周期
фи́зик		物理系学生; 物理学家
фи́зика		物理
физи́ческая зада́ча		物理学问题
фо́рмула		公式, 式
фу́нкция	$f(z)$	函数; 机能; 职能; 作用, 功用
це́лое число́	$k \in \mathbb{Z}$	整数

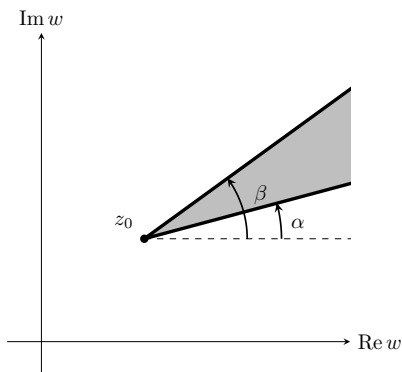
центр		中心; 顶尖, 顶针
центр круга		圆心
частная производная	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$	偏导数, 偏微商
черта́		线, 标线; 特点; 轮廓; 界线; [数]线括(号)
чёрточка		(指小)线, 线条; 特点, 特征
чётная функция	$f(-x) = f(x)$	偶函数
числитель		(分数的)分子
числитель дроби	$\frac{a}{b}$	分数的分子
число́		数
что и требовалось до- каза́ть	Q.E.D.	这就是需要证明的部分
штрих	,	影线, 细线条; 锉痕, 锉纹; 划分, 分划线
экза́мен		考试
экспоне́нта	e^x	指数; 指数曲线

ОТВЕТЫ

1. а) $-2i$; б) $-2 + 2i$; в) $-i$. 2. $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$. 3. $40 - 32i$. 4. а) $-i$; б) -1 ; в) 1 ; г) $-i$. 5. а) $2i$; б) $-2 - 2i$; в) -4 ; г) $-4 + 4i$. 6. $10 + 38.2i$. 7. а) $1 - 4i$; б) $-7 + 14i$; в) $33 + 47i$; г) $-\frac{57}{97} - \frac{7}{97}i$; д) $-16 - 30i$. 8. $2 - 2\sqrt{3}i$. 9. 1. 10. $-4i$. 11. -8 . 12. $-\sqrt{3} + i$ и $\sqrt{3} - i$. 13. $z = t + i\frac{3}{5}t$, где $t \in \mathbb{R}$. 14. $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. 15. См. пример 5. 16. $1 + i$ 17. $1 + i$ 18. i . 19. 0 20. $\operatorname{Re} z = 0$, т. е. все чисто мнимые числа. 21. $|z| = 50\sqrt{2929}$. 22. Указание: $|i - 1| = \sqrt{2}$. 23. Указание: по неравенству треугольника $|z^n + a| \leq |z^n| + |a| = 1 + |a|$, далее найти z при которых равенство достигается. 24. $\operatorname{Im} z = 3/2$. 25. -1 . 26. $z = (\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$. 27. $z = \pm \frac{1}{2}, \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 28. 6. 29. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$. 30. $z = \sqrt{3} + i$. 31. См. рисунки ниже

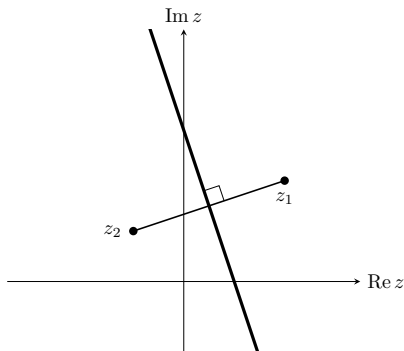


к задаче 31 а)

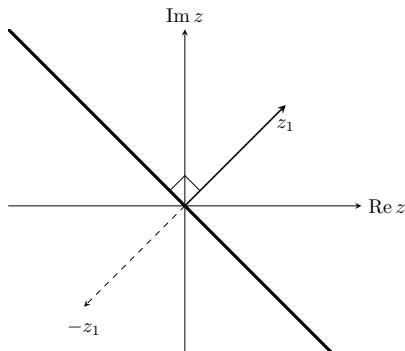


к задаче 31 б)

32. Эллипс с фокусами в точках $-i$ и i , каноническое уравнение $\frac{x^2}{63} + \frac{y^2}{64} = 1$. 33. См. рисунки ниже

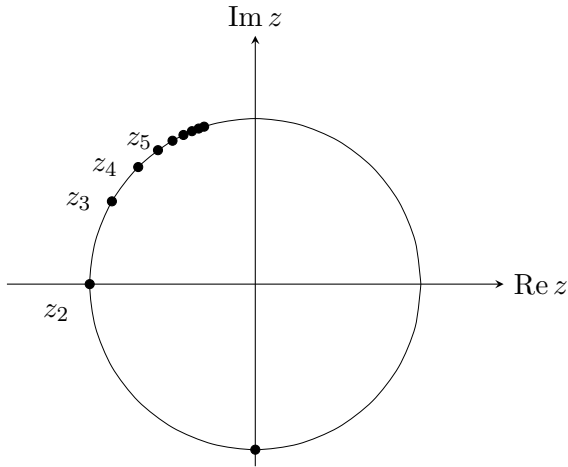


к задаче 33 а)



к задаче 33 б)

- 34.** $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. **35.** $4(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$. **36.** $\sqrt{2}(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$. **37.** $-i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **38.** $3 + i3\sqrt{3}$ **39.** -512 **40.** -1 . Указание: см. пример 16.. **41.** а) $u = 2^{13}$; б) $v = 2^{13}\sqrt{3}$. **42.** $\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$, $\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi$ **43.** $(2i)^n \cdot \sin^n \varphi \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, указание: см. пример 18. **44.** $(2 \cos \frac{\theta}{2})^n \cdot (\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2})$. **45.** $(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$. **46.** $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. **47.** а) $\cos \alpha e^{-i\alpha}$; б) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; в) Используя результат задачи 46, получим $2\sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{6}}$; г) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{23\pi}{12}}$; д) $2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$; е) $2 \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}$; ж) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} e^{i(\alpha-\beta)}$. **48.** Указание: представить числа z_1, z_2 в показательной форме. **49.** а) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, б) $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, в) $(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$. **50.** $z_1 \bar{z}_2 = -1$. **51.** Семейство окружностей, касающихся друг друга в полюсе. **52.** $z_n = \frac{(3n+1)i}{1+n}$. **53.** $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2 + 2i$, $z_4 = -4$, $z_5 = -4 - 4i$. **54.** $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{3}{2} + i$. **55.** -2 **56.** i **57.** а) $-i$; б) i ; в) 0 ; г) 0 . **58.** $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i$, см. рисунок, приведенный ниже. **59.** $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.



Десять первых элементов последовательности $z_n = ie^{i\frac{\pi}{n}}$

- 60.** Расходится. **61.** Указание: проверить необходимый признак сходимости. **62.** $s_n = \frac{1-(1/2i)^n}{2i-1}$, $s = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **63.** $-1 + i$. **64.** $q = 2i$, $a_n = i \cdot (2i)^{n-1}$. **65.** $s_n = z \cdot \frac{1-(z/2)^n}{2-z}$ если $z \neq 2$, $s_n = n$, если $z = 2$. **66.** $1 + (1 + \sqrt{2})i$, см. также пример 40. **67.** $1/(5z^2 - z^3)$. **68.** $|a_n| = \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{n!}$, далее воспользоваться признаком Даламбера. **69.** Расходится. Указание: показать расходимость действительных частей. **70.** Сходится абсолютно, сумма ряда $\frac{1}{4} - i$. **71.** Сходится абсолютно. **72.** а) сходится абсолютно, б) расходится, в) сходится условно, г) сходится абсолютно. **73.** Сходится условно (по признаку Дирихле). **74.** $P(\pi/2) = \pi/4 + \ln(2)/2$, $P(\pi) = \ln 2$. **75.** а) При $\alpha > 0$, б) при $\alpha > 1$, в) при $\alpha > 0$, г) при любом α . **76.** $1/4$. **77.** $1/e$, указание: использовать свойство $\cos iz = \operatorname{ch} z$, см. пункт 5.2.. **78.** а) 1; б) ∞ ; в) $1/4$. **79.** а) сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geq 1$; б) сходится абсолютно при $|z| < 1$, сходится условно при $|z| = 1$ и $z \neq 1$; расходится при $|z| > 1$ и при $z = 1$. **80.** Указание: воспользоваться неравенством $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$. **81.** $\cos e + i \sin e$. **82.** $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$, $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$. **83.** 1) $\operatorname{Re} \sin z = 0$ при $z = \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$. 2) $\operatorname{Im} \sin z = 0$ при $z = x$, где $x \in \mathbb{R}$ и при $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$. **84.** $\operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x \operatorname{ch} 2y}$, $|\operatorname{tg} z| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x \operatorname{ch} 2y}$. **85.** Указание:

записать функции в виде $f(z) = u + iv$, откуда $\overline{f(z)} = u - iv$, затем воспользоваться свойствами чётности тригонометрических функций.

86. $\ln 1 = 0$, $\ln(-1) = i\pi$. 87. $e^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Список литературы

1. Бицадзе А. В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1972.
2. Бугуева Т. В. *Основы математического анализа. Теоретический и практический тренинг*. Новосибирск: НГУ, 2012.
3. Волковиский Л. И., Лунц Г. Л., Абрамович И. Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. М.: Физматлит, 2002.
4. Евграфов М.А., Сидоров Ю. В., Федорюк М.В., Шабунин М. И., Бежанов К. А., . *Сборник задач по теории аналитических функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1972.
5. Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций. Т. 1, 2*. М.: Наука, 1967.
6. Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. М.: Физматлит, 1984.
7. Лавренъев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1987.
8. Романов А. С. *Теория функций комплексного переменного. Записки лектора*. Новосибирск: НГУ, 2009.
9. Тихонов А. Н. Свешников А. Г. *Теорию функций комплексной переменной. Курс высшей математики и математической физики 4*. М.: Физматлит, 2005.
10. Кантор И. Л. Солодонилов А. С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973.

Предметный указатель

А

аргумент, 24

Б

бесконечно удаленная точка, 46

В

возведение в степень, 35

Г

гармонический ряд, 63

геометрическая прогрессия, 66

главное значение

аргумента, 25

логарифма, 92

показательной функции, 93

Д

деление, 9

З

знаменатель прогрессии, 67

К

комплексная плоскость, 23

расширенная, 46

корень, 11

n -й степени, 11, 38, 93

квадратный, 11

критерий Коши, 57

круг сходимости, 79

Л

логарифм, 91

М

модуль, 14, 24

Н

необходимый признак сходимости,
66

неравенство треугольника, 14

П

последовательность, 51

ограниченная, 53

расходящаяся, 55

сходящаяся, 54

предел, 85

предел последовательности, 54

признак сходимости

Абея, 78

Даламбера, 75

Дирихле, 77

Коши, 75

сравнения, 74

произведение, 7, 33

Р

равенство

комплексных чисел, 6

многозначных функций, 85

равенство параллелограмма, 16

радиус сходимости, 79

разность, 7

ряд, 62

расходящийся, 63

степенной, 78

С

сопряжённые числа, 15

степень, 10

комплексная, 93

отрицательная, 10

стереографическая проекция, 45

сумма, 7
сумма ряда, 63
сфера Римана, 47
сходимость ряда, 63
 абсолютная, 73
 условная, 73

чисто мнимое, 16

Э

экспонента, 42, 86

Т

теорема Абеля, 79

Ф

форма записи
 алгебраическая, 6
 показательная, 42
 тригонометрическая, 32

формула

 Коши–Адамара, 79

 Муавра, 35

 Эйлера, 43

функции

 гиперболические, 87

 тригонометрические, 86

функция

 многозначная, 85

 непрерывная в точке, 86

 обратная, 91

 однозначная, 85

 периодическая, 88

 показательная, 92

 степенная, 93

Ч

частичная сумма, 63

частное, 9

число

 комплексное число

 действительная часть, 6

 мнимая часть, 6

 обратное, 10

 противоположное, 7

Оглавление

Предисловие	3
1. Комплексные числа	4
1.1. Арифметика комплексных чисел	6
1.2. Арифметические операции	7
1.3. Формулы сокращённого умножения	13
1.4. Модуль комплексного числа	14
1.5. Сопряжение	15
2. Геометрия	23
2.1. Комплексная плоскость	23
2.2. Тригонометрическая форма записи	32
2.3. Показательная форма записи	42
3. Последовательности	51
Предел последовательности	54
4. Ряды	62
4.1. Геометрическая прогрессия	66
4.2. Абсолютно сходящиеся ряды	73
4.3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов	77
4.4. Степенные ряды	78
5. Функции	85
5.1. Предел и непрерывность	85
5.2. Экспонента и тригонометрические функции	86
5.3. Комплексный логарифм	91
5.4. Показательная и степенная функции	92
5.5. Обратные тригонометрические функции	94
Словарь	100
Ответы	113
Список литературы	116
Предметный указатель	117