

Программа курса «Дифференциальные уравнения»

(5 семестр, 108 часов)

Занятия в КРИ Хэйлуңцзянского университета ведет Ph.D., доцент Александр Петрович Ульянов

*Лекции в НГУ читает к.ф.-м.н., доцент Татьяна Юрьевна Михайлова
Семинары в НГУ ведет старший преподаватель Елена Дмитриевна Доманова*

Программа лекций курса «Дифференциальные уравнения»

Введение.

Уравнение $y' = f(x, y)$. Определение решения. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем первого порядка и для уравнений высокого порядка.

Линейные уравнения и системы.

Линейное пространство решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений и его базис. Фундаментальные матрицы и их свойства. Формула Лиувилля. Матричная экспонента.

Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации постоянных. Сведение уравнения n -ого порядка к системе уравнений первого порядка. Определитель Вронского и формула Лиувилля для уравнений n -ого порядка. Линейное пространство решений однородного линейного уравнения и его базис. Построение фундаментальной системы решений (ФСР) для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Специальная ФСР и ее использование для построения матричной экспоненты.

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения. Метод вариации постоянных.

Автономные системы. Элементы теории устойчивости.

Фазовое пространство для автономных систем. Понятие траектории. Теорема о траекториях. Первые интегралы.

Устойчивость по Ляпунову. Критерий устойчивости нулевого решения линейных однородных уравнений и систем. Устойчивые матрицы. Квадратичные функции Ляпунова. Исследование устойчивости по первому приближению.

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца и краевые задачи.

Ортогональные системы координат и проблема разделения переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца. Постановка задачи Штурма - Лиувилля.

Краевая задача и условия ее разрешимости. Функция Грина. Сведение задачи Штурма - Лиувилля к интегральному уравнению. Теорема Стеклова о полноте системы собственных функций.

Элементы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема о существовании и единственности аналитического решения задачи Коши. Особые точки и регулярные особые точки уравнения. Решение уравнений с помощью степенных и обобщенных степенных рядов. Функции Бесселя.

Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка.

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрической и сферической системах координат. Цилиндрические и сферические функции.

Программа семинаров курса «Дифференциальные уравнения»

Методы решений уравнений первого порядка.

Основные классы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, линейное уравнение и уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах и интегрирующий множитель. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные уравнения и системы.

Пространство решений однородного линейного уравнения n -го порядка. Построение ФРС. Метод комплексных амплитуд. Линейное уравнение Эйлера, сведение его к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения n -го порядка. Принцип суперпозиции. Построение частного решения методом неопределенных коэффициентов и методом вариации постоянных.

Структура общего решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Построение фундаментальных матриц для системы с постоянными коэффициентами. Построение матричной экспоненты. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Принцип суперпозиции. Построение частного решения.

Автономные системы. Исследование устойчивости решений.

Фазовый портрет системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Фазовый портрет нелинейной автономной системы второго порядка. Линеаризация.

Автономная система высокого порядка. Первые интегралы и траектории автономной системы.

Устойчивость решения системы дифференциальных уравнений по Ляпунову. Исследование устойчивости положений равновесия автономных систем по первому приближению и с помощью функции Ляпунова.

Решение классических уравнений математической физики методом разделения переменных и краевые задачи для линейных уравнений второго порядка.

Разделение переменных в одномерном уравнении теплопроводности и уравнении колебания струны. Представление решения в виде ряда Фурье по системе собственных функций задачи Штурма - Лиувилля.

Разделение переменных в задачах о колебании прямоугольной и круглой мембраны. Задачи о колебании кругового цилиндра и шара.

Элементы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Построение ФСР однородного линейного уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами. Определитель Вронского, формула Лиувилля. Построение ФСР уравнения второго порядка в окрестности регулярной особой точки с помощью степенных и обобщенных степенных рядов.

Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка. Теорема сравнения. Исследование колебательного характера функций Бесселя.

Список литературы:

1. Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 1994.
2. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Под ред. С. К. Годунова. Новосибирск: НГУ, 1986.
3. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
4. Годунов С. К., Золотарева Е. В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.
5. Доманова Е.Д., Михайлова Т.Ю. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Устойчивость решений автономных уравнений и систем. Электронный курс. Доступен на сайте физического факультета НГУ <http://www.phys.nsu.ru/hlju>

Программу курса «Дифференциальные уравнения» составили:

Старший преподаватель Доманова Е.Д.

К.ф.-м.н., доцент Михайлова Т. Ю.

Ph.D., доцент Ульянов А. П.