Дополнительные главы высшей математики

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Курс «Дополнительные главы высшей математики»

96 часов, экзамен, Максимальное количество баллов = 100.

Часть 1. Основы вычислительной физики. 48 часов. Максимальное количество баллов = 50.

- Семинары в терминальных классах.
- Лекции.

Часть 2. Теория вероятностей. 48 часов. Максимальное количество баллов = 50.

- Лекции и семинары.

На итоговую оценку влияет

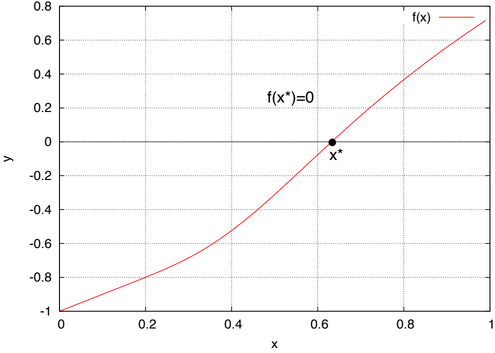
- Посещение лекций и семинаров
- Работа на семинарах
- Результаты еженедельных контрольных работ
- Результаты промежуточных экзаменов по 1 и 2 частям курса

Программа 1 части курса

- Численное решение уравнений $f(x) = 0$.

Пример:
Найти решение уравнения

$$f(x) = \frac{12}{e^{2/x} + 9} + x - 1 = 0$$

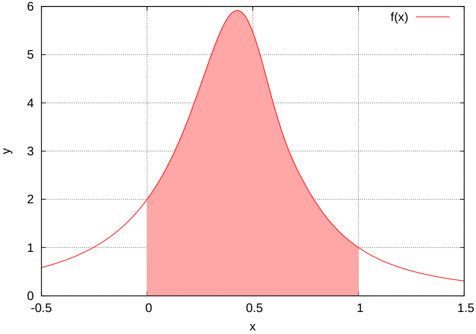


Программа 1 части курса

- Приближенное интегрирование $\int_a^b f(x)dx$.

Пример: Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{1 + e^{-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}}{3x^2 - 3x + 1} dx$$



Программа 1 части курса

- Интерполирование.
- Численное дифференцирование.
- Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений.
- Решение системы линейных уравнений. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. $\mathbf{A}$- матрица $N \times N$, $\vec{b}$-известный вектор правой части, $\vec{x}$ - неизвестный вектор.
- Задача Коши для одномерного уравнения диффузии на отрезке. Найти решение $T(x, t = t_f)$, $x \in [a, b]$ уравнения диффузии

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

  $+$ начальное условие $T(x, t = t_0) = f(x)$
  $+$ граничные условия при $x = a$, $x = b$
  D - коэффициент диффузии.

Лекция 1. Представление чисел с плавающей точкой.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Двоичная система счисления. Целые числа.

Система счисления с основанием 2. В двоичной системе счисления числа представляются с помощью двух чисел 0 и 1.

Целые числа:

$$\pm(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2 = \pm\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k$$

n - количество знаков в числе, a_k - цифры из множества $\{0, 1\}$, k-порядковый номер цифры.

Пример:

$16 = 2^4$, т.е. $n = 5$, в двоичной системе 10000_2

$39 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$, т.е. в двоичной системе 100111_2

64	32	16	8	4	2	1
	1	0	0	1	1	1
	+32	+0	+0	+4	+2	+1

Двоичная система счисления. Дробные числа.

Дробные числа:

$$\pm(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0{,}a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-(m-1)}a_{-m})_2 = \pm\sum_{k=-m}^{n-1} a_k 2^k$$

m - количество знаков вдробной части числа, a_k - цифры из множества $\{0, 1\}$, k-порядковый номер цифры.

Пример:

$0,25 = 2^{-2}$, т.е. в двоичной системе $0,01_2$

$14,625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$, т.е. в двоичной системе $1110,101_2$

64	32	16	8	4	2	1		0.5	0.25	0.125
			1	1	1	0	,	1	0	1
			+8	+4	+2	+0		+0.5	+0	+0.125

Формы представления вещественных чисел

$$732,17 = 73217,0 \cdot 10^{-2} = 7,3217 \cdot 10^{2}$$

Число с фиксированной запятой
фиксированное количество разрядов на целую и фиксированное количество разрядов на дробную части числа

Число с плавающей запятой
Экспоненциальная запись - представление действительных чисел в виде мантиссы и порядка. Удобна при представлении очень больших и очень малых чисел, а также для унификации их написания.

$$N = M \cdot n^{p}$$

N - записываемое число, M - мантисса, n - основание показательной функции, p -порядок (целое).

Число с плавающей запятой

Преимущество использования представления чисел в формате с плавающей запятой над представлением в формате с фиксированной запятой состоит в том, что можно использовать существенно больший диапазон значений при неизменной относительной точности.

Пример с положительными числами:

Формат с фиксированной запятой: 7 разрядов в целой части + 2 разряда в дробной. $9999999,99 \ldots 0,01$

Формат с плавающей запятой: 7 разрядов в мантиссе + 2 разряда в показателе степени (без учета знака). $9999999, \cdot 10^{99} \ldots 1, \cdot 10^{-99}$

Нормализованная форма записи вещественного числа с плавающей запятой

Нормализованная форма - в которой мантисса десятичного числа принимает значения от 1 (включительно) до 10 (не включительно), а мантисса двоичного числа принимает значения от 1 (включительно) до 2 (не включительно).

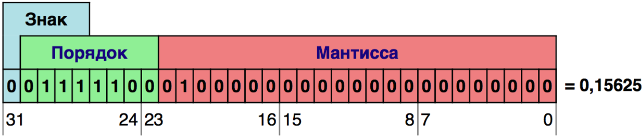
Пример (десятичные числа):

$1,602176565 \cdot 10^{-19}$ - элементарный заряд,

$6,02214129 \cdot 10^{23}$ - число Авогадро.

Число одинарной точности

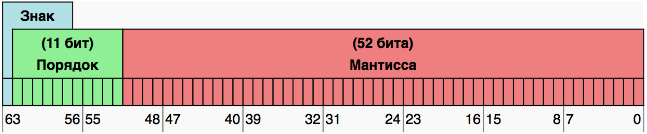
Число одинарной точности - компьютерный формат представления вещественных чисел, занимающий в памяти 32 бита (4 байта). Для вычисления показателя степени из восьмиразрядного поля порядка вычитается смещение порядка равное $127_{10} = 01111111_2$



В этом примере:
Знак $s = 0$ (положительное число)
Порядок $E = 01111100_2 - 127_{10} = 124_{10} - 127_{10} = -3$
Мантисса $M = 1.01_2$ (первая единица не явная)
В результате наше число
$F = 1.01_2 e - 3 = 2^{-3} + 2^{-5} = 0,125 + 0,03125 = 0,15625$

Числа двойной точности

Число двойной точности - компьютерный формат представления вещественных чисел, занимающий в памяти 64 бита (8 байта). Для вычисления показателя степени из восьмиразрядного поля порядка вычитается смещение порядка равное $1023_{10} = 01111111111_2$



Знак: 0- положительное число, 1 - отрицательное число.

Окончательное значение числа равняется

$$\pm \text{знак} \cdot (1 + \text{мантисса}/2^{52}) \cdot 2^{\text{порядок} - 1023}$$

Задание 1

Машинным ε называется такое число, что $1 + \varepsilon/2 = 1$, но $1 + \varepsilon \neq 1$. Найти машинное ε, число разрядов в мантиссе, максимальную и минимальную степени, при вычислениях с одинарной и двойной точностью.

Лекция 2. Численное решение уравнений. Метод бисекции, метод простых итераций, метод Ньютона.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Приближенное решение уравнений

Не всякое уравнение может быть решено точно:

- Трансцендентные уравнения:

$$tg(x) = x$$

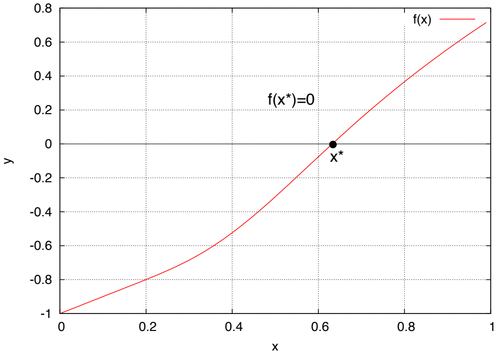
- Алгебраические уравнения выше четвертой степени (Абель, Галуа)

Но задача может считаться решенной, если можно найти корень уравнения с необходимой точностью.
Приближенные методы решений уравнений (метод бисекции, простых итераций, Ньютона) являются методами уточнения корней.
Т.е. необходимо знать примерное значение корня или интервал $[a, b]$, в котором лежит уточняемый корень уравнения.

Нахождение примерных значений корня уравнений

Пример. Найти примерное значение корня уравнения:

$$f(x) = \frac{12}{e^{2/x} + 9} + x - 1 = 0$$



Примерное значение корня $x \approx 0.65$. Интервал, в котором лежит корень $[0.6, 0.7]$.

Интервал изоляции корня

Теорема (Больцано-Коши о промежуточном значении)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$ найдется такая точка $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = C$.

Следствие: Если функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует такая точка $\gamma \in (a, b)$ в которой $f(\gamma) = 0$.

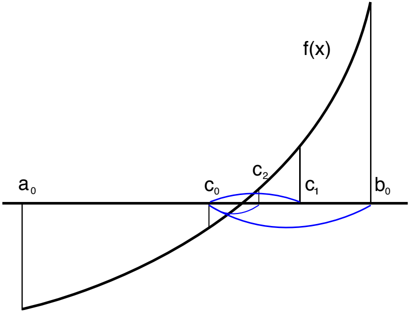
Если интервал $[a, b]$ настолько мал, что в нем лежит в точности один корень, то он является *интервалом изоляции корня*.

Интервал изоляции корня

Условия, что корень уравнения $f(x) = 0$ содержится в интервале $[a, b]$ и других корней в этом отрезке нет:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными первого и второго порядков.
2. Значение функции $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ имеют разные знаки: $f(a) \cdot f(b) < 0$
3. Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции)



1. Интервал изоляции корня $[a_0, b_0]$.
   Середина отрезка $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
   Т.к. $f(c_0) \cdot f(b_0) < 0$, то $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$.
2. Интервал изоляции корня $[a_1, b_1]$.
   Середина отрезка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
   Т.к. $f(c_1) \cdot f(a_1) < 0$, то $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$.
3. Интервал изоляции корня $[a_2, b_2]$.
   Середина отрезка $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
   Т.к. $f(c_2) \cdot f(a_2) < 0$, то $a_3 = a_2$, $b_3 = c_2$.
4. ...

Если требуется найти корень с точностью ϵ, деление продолжается пока длина отрезка $> 2\epsilon$

Преимущества и недостатки метода бисекции

Преимущества:

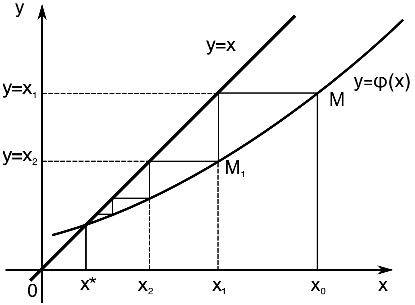
- Метод прост и надежен: к простому корню сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых
- Точность метода гарантируется

Недостатки:

- Низкая скорость сходимости - за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое
- Если на отрезке несколько корней, то неизвестно, к какому корню сойдется процесс
- Метод неприменим для нахождения корней четной кратности
- Для корней нечетной высокой кратности метод сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления возникающих при вычислениях $f(x)$

Метод простых итераций

$$f(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \varphi(x) = x$$



Интервал изоляции корня $[a, b]$.
$x_0 \in [a, b]$ - начальное (нулевое) приближение.

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$x_3 = \varphi(x_2)$$
$$\dots$$
$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

Если последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n \dots,$ имеет предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, то x^* является корнем уравнения:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*)$$

Сходимость метода простых итераций

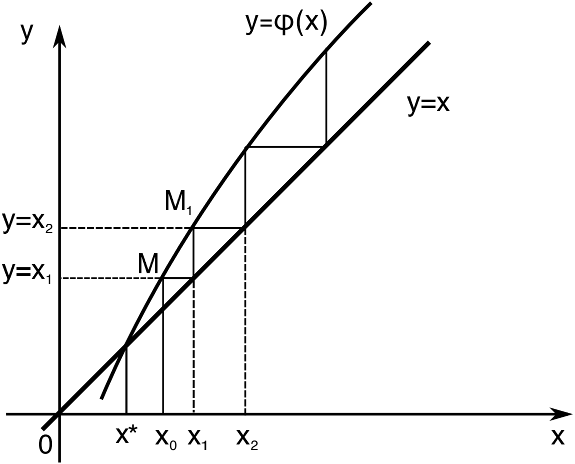
Теорема

Пусть интервал $[a, b]$ *является интервалом изоляции корня уравнения* $x = \varphi(x)$ *и во всех точках этого интервала производная* $\varphi'(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi'(x)| \leq M < 1$$

Если при этом выполняется условие $a \leq \varphi(x) \leq b$*, то итерационный процесс сходится, причем за нулевое приближение* x_0 *можно брать любую точку интервала* $[a, b]$

Пример расходящегося итерационного процесса



Преимущества и недостатки метода простых итераций

Преимущества:

- Не накапливаются ошибки вычислений
- Метод может быть обобщен на многомерный случай

Недостатки:

- Для сходимости метода необходимо выполнение условия $|\varphi'(x)| < 1$ как минимум вблизи корня.

Метод касательных (Ньютона)

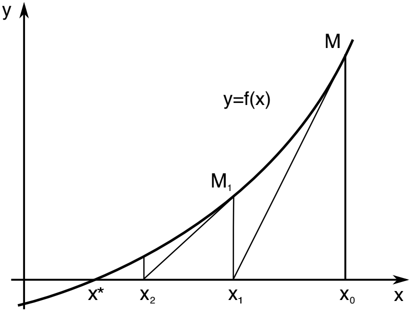
Ищем решение уравнения $f(x) = 0$. Если x_n - некоторое приближение к корню x^*, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то:

$$0 = f(x^*) = f(x_n + (x^* - x_n)) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(\xi)$$

имеем следующий итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Геометрический смысл:



Уравнение касательной в точке x_0:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

В качестве приближенного корня уравнения $f(x) = 0$ выбирается абсцисса точки пересечения касательной с осью $0x$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Условие и скорость сходимости метода Ньютона

Частный случай метода простых итераций с $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Если x^* -p-кратный корень уравнения, то вблизи корня $\varphi'(x^*) = \frac{p-1}{p}$, т.е. $0 \le \varphi'(x^*) < 1$.
Если начальное приближение выбрано близко к корню, то ньютоновские итерации сходятся. При произвольном начальном приближении метод сходится при выполнении условия:

$$|f(x)f''(x)| < (f'(x))^2$$

Итерации сходятся к корню с той стороны, с которой $f(x)f''(x) > 0$.
Для кратного корня скорость геометрической прогрессии.
Для простого корня (т.к. $x^* - x_n = \varphi(x^*) - \varphi(x_{n-1})$ и $\varphi'(x^*) = 0$):

$$x_n - x^* = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x^*)^2 \varphi''(\xi), \qquad \xi \in (x_{n-1}, x^*)$$

Погрешность очередного приближения $\approx$ квадрату погрешности предыдущего.

Преимущества и недостатки метода Ньютона

Преимущества:

- Быстрая сходимость метода (особенно для простых корней)
- Метод может быть обобщен на многомерный случай

Недостатки:

- Необходимо знать начальное приближение для корня.
- Необходимо знать первую производную $f'(x)$. (Устранется применением метода секущих)

Способ Ньютона для систем уравнений

Необходимо найти решение нелинейной системы уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ или

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad 1 \le k \le n$$

Если известно некоторое приближение $\mathbf{x^{(n)}}$ к корню $\mathbf{x}^*$, то вводя приращение $\mathbf{\Delta x} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x^{(n)}}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x^{(n)}} + \mathbf{\Delta x}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(\mathbf{x^{(n)}})}{\partial x_i} \Delta x_i^{(n)} = -f_k((\mathbf{x^{(n)}})), \qquad 1 \le k \le n$$

т.е. система линейных уравнений на $\mathbf{\Delta x^{(n)}} = \mathbf{x^{(n+1)}} - \mathbf{x^{(n)}}$.

В малой окрестности корня итерации сходятся, если $det[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}] \neq 0$, *причем сходимость квадратичная*

Пример решения системы двух уравнений

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Пусть x_0, y_0 - начальные приближения, поправки h и k:
$x^* = x_0 + h, y^* = y_0 + k$.
Разлагая в ряд Тейлора, имеем систему линейных уравнений на поправки $h_1 = x_1 - x_0$ и $k_1 = y_1 - y_0$:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + k_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) + h_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + k_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = 0 \end{cases}$$

Поправка на n-ом шаге:

$$\begin{cases} h_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \frac{f_y'^{(n)} \varphi^{(n)} - \varphi_y'^{(n)} f^{(n)}}{f_x'^{(n)} \varphi_y'^{(n)} - f_y'^{(n)} \varphi_x'^{(n)}} \\ k_{n+1} = y_{n+1} - y_n = \frac{\varphi_x'^{(n)} f^{(n)} - f_x'^{(n)} \varphi^{(n)}}{f_x'^{(n)} \varphi_y'^{(n)} - f_y'^{(n)} \varphi_x'^{(n)}} \end{cases}$$

Задание 2

Решить уравнение

$$f(x) = \frac{12}{e^{2/x} + 9} + x - 1 = 0$$

методами деления пополам, простых итераций, Ньютона.

Лекция 3. Интерполирование. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона. Точность интерполяционных формул.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Понятие об интерполировании

Построение аналитического выражения функции по ее таблице значений и нахождение промежуточных значений.
Пусть $y(x)$ - некоторая функция, для которой известна лишь таблица ее значений:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$$

Примеры применения:

- Экспериментальные данные
- Аналитическое выражение $y(x)$ очень сложное

$F(x)$ - любая функция, принимающая в заданных точках заданные значения. В общем случае бесконечное количество функций $F(x)$.

Формулировка задачи

Задача параболической интерполяции:
Для данных различных значений $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ найти многочлен $F(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0 \\ F(x_1) = y_1 \\ \dots\dots \\ F(x_n) = y_n \end{cases}$$

Точки $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ - *узлы интерполяции*, $F(x)$ - *интерполяционный многочлен*, Формулы для нахождения $F(x)$ - *интерполяционные формулы*.

Интерполяционная формула Лагранжа

Ищем $F(x)$ в виде полинома n-ой степени с неизвестными коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Используя условия

$$\begin{cases} F(x_0) = y_0 \\ F(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots \\ F(x_n) = y_n \end{cases}$$

имеем систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Решив ее, получаем интерполяционный многочлен $F(x)$.

Пример:

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 3$.

Интерполяционный многочлен $F(x) = 1 - x + x^2$

Интерполяционная формула Лагранжа

Выражение для многочлена, принимающего в точке $x = x_j$ значение y_j и обращающегося в нуль для значений $x = x_i \;\; (i = 0, 1, \dots, n, i \neq j)$:

$$F_j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} y_j$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{n} F_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} y_j \end{aligned}$$

Единственность решения

Пусть $R(x)$ тоже решение, т.е. многочлен степени n, принимающий в заданных точках заданные значения. Тогда $F(x) - R(x)$ многочлен степени не выше n, имеющий $n+1$ корень. Отсюда следует, что $F(x) - R(x) \equiv 0$ т.к. многочлен степени не выше n не может иметь $n+1$ корней.

Таким образом, *для любых значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$, среди которых нет совпадающих, и любых значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $F(x)$ степени n, принимающий в заданных точках заданные значения, т.е. удовлетворяющий условиям*
$F(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$
Примеры. $n = 1$ (прямая):

$$F(x) = \frac{x-b}{a-b}y_0 + \frac{x-a}{a-b}y_1$$

$n = 2$ (парабола):

$$F(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}y_2$$

Разделенные разности

Определим *разделенные разности* следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y(x_i, x_j) &= \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j},\\
y(x_i, x_j, x_k) &= \frac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k},\\
y(x_i, x_j, x_k, x_m) &= \frac{y(x_i, x_j, x_k) - y(x_j, x_k, x_m)}{x_i - x_m}\\
\dots \quad &\dots \quad \dots
\end{aligned}
$$

Пример с 4 узлами:

x_0	y_0			
		$y(x_0, x_1)$		
x_1	y_1		$y(x_0, x_1, x_2)$	
		$y(x_1, x_2)$		$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	y_2		$y(x_1, x_2, x_3)$	
		$y(x_2, x_3)$		
x_3	y_3			

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Ищем многочлен n - ой степени в виде:

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Определим коэффициенты:

$$\begin{array}{rcl}
y_0 & = & F(x_0) = a_0, \\
y_1 & = & F(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y(x_0, x_1) \\
y_2 & = & F(x_2) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \\
 & \Rightarrow & a_2 = \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) = y(x_0, x_1, x_2) \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Формула Ньютона:

$$\begin{array}{rcl}
F(x) & = & y_0 + y(x_0, x_1)(x - x_0) + y(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
\dots & + & y(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})
\end{array}$$

Задание 3

Провести интерполяционный полином $F(x)$ через точки

$$x_i = \frac{i\pi}{4n}, y_i = sin(x_i), i = 0, \ldots, n \quad n = 4$$

Нарисовать график $F(x) - sin(x)$.

Лекция 4. Приближенное интегрирование. Методы прямоугольников, трапеций. Формула Симпсона. Точность формул численного интегрирования.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Формулировка задачи

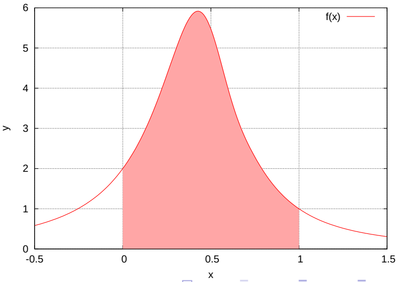
Необходимо вычислить определенный интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Первообразная функции $f(x)$ не выражается через элементарные функции
- Выражение для первообразной слишком сложное.
- Функция $f(x)$ задана таблицей.

Пример: Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{1 + e^{-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}}{3x^2 - 3x + 1} dx$$



Квадратурная формула

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Заменим $f(x)$ на аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, для которой интеграл легко вычисляется. $\varphi(x)$ - интерполяционный многочлен.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x) + r(x)$$

x_i - узлы, $r(x)$ - остаточный член аппроксимации.

$$I = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R, \qquad c_i = \int_a^b \varphi_i(x)dx, \qquad R = \int_a^b r(x)dx$$

c_i - *веса*, R - *погрешность* или *остаточный член формулы*.

Формула средних

Заменим подынтегральную функцию на константу $f(\bar{x})$ на интервале $[a, b]$, где $\bar{x} = (a+b)/2$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Оценка погрешности:
$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x})f'(\bar{x}) + (x-\bar{x})^2 f''(\bar{x})/2 + \dots$

$$R = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\bar{x}\right) \approx \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\bar{x})$$

Обобщение формулы средних

На подробной сетке $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ с известными значениями $f(x)$ в середине каждого интервала:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\bar{x}_i), \qquad R \approx \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i), \qquad \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Равномерная сетка: $h = (b - a)/n$, узлы $x_i = a + ih/2$, $i = 0, 1, \ldots n$:

$$I \approx h \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad R \approx \frac{h^2}{24} \int_a^b f''(x) dx, \qquad f_i = f(x_i)$$

Формула трапеций

Заменим $f(x)$ на многочлен Лагранжа первой степени. Узлы $x_0 = a$, $x_1 = b$, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(b)$.

$$\varphi(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

Тогда

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}[b-a]$$

Остаточный член $r(x)$:

$$r(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

где $\xi \in [a, b]$. Погрешность формулы трапеций:

$$R = \int_a^b r(x)dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

Обобщенная формула трапеций

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f_i + f_{i-1}) \\
R &\approx -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^3 f''(\xi_i)
\end{aligned}
$$

Равномерная сетка: $h = (b-a)/n$, узлы $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots n$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + \frac{1}{2}f_n) \\
R &\approx -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} h^3 f''(\xi_i) \approx -\frac{1}{12}h^2\int_a^b f''(x)dx
\end{aligned}
$$

Мажорантная оценка погрешности:

$$
|R| \le \frac{b-a}{12}h^2 M_2, \qquad M_2 = max|f''(\xi)|, \qquad \xi \in [a, b]
$$

Формула Симпсона

Заменим $f(x)$ на интервале $[a, b]$ на многочлен Лагранжа второй степени. Узлы $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$ Оценка интеграла по формуле Симпсона:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Оценка погрешности формулы Симпсона:

$$R \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4, \qquad M_4 = max|f^{(IV)}(\xi)|, \qquad \xi \in [a, b]$$

Обобщение формулы Симпсона

Для более точного вычисления интеграла разобьем отрезок $[a, b]$ на $N = 2n$ частей. $h = (b-a)/N$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N = 2n$.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(x_N)\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\sum_{i=1,2}^{N-1}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

Здесь индекс $i = 1, 2$ означает, что i меняется от 1 с шагом 2.
Погрешность метода Симпсона:

$$R \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4, \qquad M_4 = max|f^{(IV)}(\xi)|, \qquad \xi \in [a, b]$$

Лекция 5. Численное дифференцирование. Первые и вторые производные, заданные на сетке.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Формулировка задачи

Необходимо вычислить k-ую производную $y^{(k)}(x)$.
Возможные трудности:

- Выражение для производной $y^{(k)}(x)$ слишком сложное.
- Функция $y(x)$ задана таблицей.
- Решение дифференциальных уравнений при помощи разностных методов.

Выход - численное дифференцирование.

Понятие о численном дифференцировании

Аппроксимация дифференцируемой функции $y(x)$ легко вычисляемой функцией $\varphi(x)$.
Рассмотрим аппроксимацию интерполяционным многочленом в форме Ньютона.
Пусть $\xi_i = x - x_i$, x_i - узлы интерполяции, $y(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ - разделенные разности.

$$\varphi(x) = y(x_0) + \xi_0 y(x_0, x_1) + \xi_0\xi_1 y(x_0, x_1, x_2) + \xi_0\xi_1\xi_2 y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots$$

Вычислим производные функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= y(x_0, x_1) + (\xi_0 + \xi_1) y(x_0, x_1, x_2) + \\ &+ (\xi_0\xi_1 + \xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_2) y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots \\ \varphi''(x) &= 2y(x_0, x_1, x_2) + 2(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots \end{aligned}$$

Понятие о численном дифференцировании

Общий вид k - ой производной функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(x) &= k!\Bigg[y(x_0, x_1, \ldots, x_k) + \left(\sum_{i=0}^{k}\xi_i\right) y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) + \\
&+ \left(\sum_{i>j\geq 0}^{i=k+1}\xi_i\xi_j\right) y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+2}) + \\
&+ \left(\sum_{i>j>l\geq 0}^{i=k+2}\xi_i\xi_j\xi_l\right) y(x_0, x_1, \ldots, x_{k+3}) \ldots \Bigg]
\end{aligned}$$

Простые приближенные выражения для производных

В рассмотренных выше рядах можно оставлять только несколько слагаемых. Оставляя только первый член в ряде имеем:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &\approx y(x_0, x_1) = \frac{y(x_0) - y(x_1)}{x_0 - x_1} \\
\frac{1}{2} y''(x) &\approx y(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right] \\
\frac{1}{k!} y^{(k)}(x) &\approx y(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{p=0}^{k} y_p \prod_{i=0; i \neq p}^{k} \frac{1}{(x_p - x_i)}
\end{aligned}
$$

Замечание: Рассматриваемый случай справедлив и для неравномерных сеток.

Точность выражений для производных

Исследуем точность выражений по оценки скорости убыванiячленов ряда. Пусть x_i -интерполяционные узлы, $0 \leq i \leq n$ и шаг сетки мал. Погрешность вычисления k-ой производной $\approx$ первому отброшенному члену ряда. Т.е.

$$R_n^{(k)}(x) \sim k! y(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim \frac{k!}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x)$$

И пропорциональна сумме произведений различных сомножителей ξ_i. Каждое произведение содержит $n+1-k$ сомножителей и в сумме C_{n+1}^k слагаемых. Таким образом,

$$R_n^{(k)}(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1-k)!} max|\xi_1|^{n+1-k}, \qquad M_{n+1} = max|y^{(n+1)}|$$

Оценка погрешности для равномерных сеток

При равномерной сетке $max|\xi_i| < nh$

$$R_n^{(k)}(x) \leq M_{n+1}\left(\frac{enh}{n+1-k}\right)^{n+1-k} = O(h^{n+1-k})$$

Порядок точности формул по отношению к шагу сетки равен числу оставленных в ней членов **или** *равен числу узлов интерполяции минус порядок производной*

Минимальное число узлов сетки для вычисления k -ой производной равно $k+1$, при этом точность первого порядка по h.

Повышение точности вычисления производных на равномерных сетках

Причина повышения точности: остаточный член формулы есть многочлен $\sum\prod(x-x_i)$ степени $n+1-k$ относительно x. Если x - корень, то порядок точности увеличивается на единицу.
$x_k^{(p)}$ - *точки повышения точности*. k - порядок производной, $p=n+1-k$ - число оставленных членов в формуле производной.
У одночленной формулы для k -ой производной точка повышения точности находится из условия $\sum x_i=0$

$$x_k^{(1)}=\frac{x_0+x_1+\cdots+x_k}{k+1}$$

Пример одночленных формул на равномерной сетке: центральная первая и вторая производные:

$$y'(x_1)=\frac{y_2-y_0}{2h}+O(h^2)\qquad y''(x_1)=\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+O(h^2)$$

Для двучленной формулы - квадратное уравнение.

Повышение точности вычисления производных на равномерных сетках

Для $p > 2$-нечетного: Если узлы выбраны так, что они расположены симметрично относительно точки x, то x - является одной из точек повышения точности.

Доказательство. $x_i = x - x_i$ попарно одинаковые значения, но разные знаки. Остаточный член $\sum \prod \xi_i$ имеет нечетную степень, при замене знака ξ_i не меняет значения (перенумерация). Т.е. он ноль.

Пример. Первая производная по четырем узлам:

$$y'_{5/2} = \frac{y_0 - 27y_1 + 27y_2 - y_3}{24h} + O(h^4)$$

Оценка точности формул с помощью разложения в ряд Тейлора-Маклорена

x_i - узлы равноотстоящие на h. Проверим точность формулы:

$$y_i'' = y''(x_1) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Пусть $y(x)$ имеет непрерывную четвертую производную. Тогда

$$y(x_i \pm h) = y(x_{i\pm1}) = y_i \pm hy_i' + \frac{h^2}{2}y_i'' \pm \frac{h^3}{6}y_i''' + \frac{h^4}{24}y^{IV}(\eta_\pm)$$

Подставляя в формулу, имеем:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i'' + \frac{h^2}{24}[y^{IV}(\eta_+) + y^{IV}(\eta_-)]$$

Задание

1. Для функции

$$f(x) = sin(x)$$

вычислить правую, левую и центральную первые и вторую центральную производные в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi/2$.

Лекция 6. Приближенное решение дифференциальных уравнений.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Формулировка задачи

Обыкновенными дифференциальными уравнениями применяют для решения задач

- Движения системы взаимодействующих материальных точек
- Химической кинетики
- Электрических цепей
- Разделение переменных в уравнениях в частных производных

Задачи могут сводиться к решению ОДУ p -ого порядка

$$u^{(p)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(p-1)}(x))$$

Или заменой $u^{(k)}(x) = u_k(x)$ приводит к системе p уравнений первого порядка

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), \qquad 0 \le k \le p-2$$

$$u'_{p-1}(x) = f(x, u_0(x), u_1(x), \ldots, u_{p-1}(x))$$

Формулировка задачи

Примеры:

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = q(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_0'(x) &= u_1(x) \\ u_1'(x) &= q(x) - p_1(x)u_1(x) - p_2(x)u_0(x) \end{aligned}$$

$$u'' + uu' + u^2 = q(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_0'(x) &= u_1(x) \\ u_1'(x) &= q(x) - u_1(x)u_0(x) - u_0^2(x) \end{aligned}$$

Произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить эквивалентной системой уравнений первого порядка

$$u_k'(x) = f_k(x, u_0(x), u_1(x), \ldots, u_k(x)), \qquad 0 \le k \le p-1$$

Решение зависит от p параметров $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$. Для выделения единственного решения - p дополнительных условий.

Задача Коши для ОДУ

В задаче Коши (задаче с начальными условиями) дополнительные условия заданы в одной точке.
Для уравнения p порядка - задание производных функции в некоторой точке $x = \xi$

$$u^{(k)}(\xi) = \eta_k, \qquad 0 \le k \le p-1$$

Для системы p уравнений первого порядка задание значения функций в некоторой точке $x = \xi$

$$u_k(\xi) = \eta_k, \qquad 0 \le k \le p-1$$

Решение требуется найти на некотором интервале $\xi \le x \le X$

Методы решения

- **Точные.** Решения выражаются через элементарные функции или в виде квадратур элементарных функций
- **Приближенные.** Решение $u(x)$ как предел некоторой последовательности функций $y_n(x)$, которые выражаются через элементарные функции или квадратуры
- **Численные.** Алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения $u(x)$ на некоторой сетке значений x_n. Т.е. находится частное решение уравнения в виде таблицы значений.

Примеры: Решение уравнения

$$u'(x) = x^2 + u^2(x)$$

не выражается через элементарные функции Общее решение уравнения

$$u'(x) = \frac{u-x}{u+x} \qquad \frac{1}{2} ln(x^2 + u^2) + arctg\frac{u}{x} = const$$

не проще, чем численное решение исходного уравнения

Приближенные методы. Метод неопределенных коэффициентов

Решение линейного уравнения второго порядка:

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = q(x), \qquad u(0) = u_0, u'(0) = u'_0$$

Если функции $p_1(x), p_2(x), q(x)$ непрерывны в окрестности $x = 0$, то существует единственное решение. Пусть $p_1(x), p_2(x), q(x)$ могут быть разложены в ряд Маклорена:

$$p_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad p_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Ищем решение в виде ряда с неопределнными коэффициентами:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Приближенные методы. Метод неопределенных коэффициентов

Подставив выражения для функций, и приравняв коэффициенты слева и справа в уравнении при одинаковых степенях x^2 имеем систему уравнений на неопределнных коэффициенты c_0. Из начальных условий $c_0 = u_0$, $c_1 = u'_0$.
Примеры:

$$u''(x) - xu(x) = 0$$

$$\begin{aligned} c_{3n} &= \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (3n-1) \cdot (3n)} \\ c_{3n+1} &= \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (3n) \cdot (3n+1)} \\ c_{3n+2} &= 0 \end{aligned}$$

$$u''(x) - xu'(x) + u(x) = 1 - cos(x), \qquad y_0 = 0, y'_0 = 1$$

$$u(x) = x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \dots$$

Приближенные методы. Метод последовательного дифференцирования

Необходимо решить дифференциальное уравнение

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

с начальными условиями при $x = x_0$

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u'_0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}$$

Ищем частное решение $u = \varphi(x)$ в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{\varphi^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Приближенные методы. Метод последовательного дифференцирования

С учетом начальных условий

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + \frac{u_0'}{1!}(x-x_0) + \frac{u_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{u_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Значение $\varphi^{(n)}(x_0)$ находится из уравнения с учетом начальных условий. Для вычисления $\varphi^{(k)}(x_0), k > n$ вычислим $u^{(n+1)}$:

$$u^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}u' + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(n-1)}}u^{(n-1)}$$

Вычислив правую часть при $x = x_0$ найдем $\varphi^{(n+1)}(x_0)$. И т.д.

Пример:

$$u'' + a^2 u = 0, \qquad u(0) = 0, u'(0) = a$$

Решение

$$u(x) = \frac{ax}{1!} - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{(ax)^{2n+1}}{2n+1!} \dots = sinax$$

Приближенные методы. Метод Пикара(метод последовательных приближений)

Решим уравнение

$$u' = f(x,u), \qquad u = u_0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

Сводится к интегральному уравнению

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt$$

Считая отрезок (x, x_0) малым $u^{(0)} = u_0$ Следующие приближения:

$$u^{(1)}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u^{(0)}(t))dt = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0(t))dt$$

$$u^{(2)}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u^{(1)}(t))dt$$

n - ое приближение вычисляется следующим образом:

$$u^{(n)}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u^{(n-1)}(t))dt$$

Приближенные методы. Метод Пикара(метод последовательных приближений)

Теорема

Если в некоторой окрестности точки (x_0, u_0) правая часть уравнения $u' = f(x, u)$ непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f'_u(x, u)$, то в некотором интервале, содержащем точку x_0, последовательность $u^{(n)}(x)$ сходится к функции $\varphi(x)$, являющейся решением уравнения удовлетворяющего условию $\varphi(x_0) = u_0$

Пример. Решим уравнение

$$u' = x + u, \qquad u = 1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

4-ая итерация

$$u^{(4)}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

Точное решение

$$u(x) = 2e^{-x} - x - 1$$

Лекция 7. Численное решение дифференциальных уравнений.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Метод Эйлера

Задача Коши:

$$u' = f(x, u(x)), \qquad \xi \le x \le X, \qquad u(\xi) = \eta$$

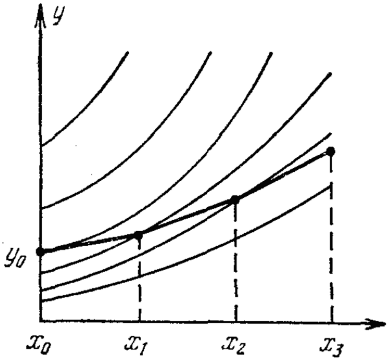
Вводим сетку (не обязательно равномерную):
$x_n, 0 \le n \le N : \xi = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = X$. Шаг сетки
$h_n = x_{n+1} - x_n$. Значения искомой функции в узлах сетки: $u_n = u(x_n)$.
Разложение $u(x)$ в ряд Тейлора на интервале $x_n \le x \le x_{n+1}$:

$$u_{n+1} = u_n + h_n u_n' + \frac{1}{2} h_n^2 u_n'' + \ldots$$

Старшие производные вычисляются последовательным дифференцированием исходного уравнения:

$$u_n' = f(x_n, u_n), \qquad u_n'' = f_x'(x_n, u_n) + f(x_n, u_n) f_u'(x_n, u_n), \ldots$$

Метод Эйлера (схема ломаных). Геометрический смысл.



Ограничиваясь первым членом разложения, получаем схему ломаных приближенного решения y_n:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n)$$

С начальным условием:

$$y_0 = u_0 = \eta$$

Сходимость метода Эйлера

Рассмотрим погрешность приближенного решения $z_n = y_n - u_n$:

$$z_{n+1} = z_n + h_n \left[f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n) \right] - \frac{1}{2} h_n^2 u_n'' = z_n (1 + hf_u)_n - \frac{1}{2} h_n^2 u_n''$$

Погрешность на произвольном шаге m:

$$z_m = z_0 \prod_{n=0}^{m-1} (1 + hf_u)_n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} h_n^2 u_n'' \prod_{k=n+1}^{m-2} (1 + hf_u)_k$$

Если шаг интегрирования мал,

$$\prod_{n=0}^{m-1} (1+hf_u)_n \approx \prod_{n=0}^{m-1} exp(hf_u)_n = exp\left(\sum_{n=0}^{m-1} (hf_u)_n \right) \approx exp\left[\int_{x_0}^{x_{m-1}} f_u(\tau, u(\tau)) d\tau \right]$$

Сходимость метода Эйлера

$$z_m = z_0 exp\left(\int_{x_0}^{x_m} f_u d\tau\right) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_m} d\tau h(\tau)u''(\tau)exp\left(\int_{\tau}^{x_m} f_u d\mu\right)$$

Начальное условие можно задать точно: $z_0 = 0$. Считая функцию $f(x,u)$ непрерывной и ограниченной вместе с производными:$|f| \leq M_1$, $|f_x| \leq M_2$,$|f_u| \leq M_3$ ($|u''| \leq M_4 = M_2 - M_1 M_3$) получаем мажорантную оценку погрешности:

$$\begin{aligned} |z_m| &\leq M(x_m) maxh_n = O(maxh_n), \\ M(x_m) &= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_m} d\tau |u''(\tau)| exp\left(\int_{\tau}^{x_m} |f_u| d\mu\right) \leq \frac{M_4}{2M_3} e^{M_3(x_m - x_0)} \end{aligned}$$

Т.е. *при $h \to 0$ приближенное решение по схеме Эйлера сходится к точному равномерно с первым порядком точности*

Методы Рунге-Кутта

Свойства:

- Методы являются одноступенчатыми: чтобы найти y_{n+1} нужна информация только о предыдущей точке x_n, y_n
- Методы согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^p, где степень p различна для различных методов и называется порядком метода
- Методы не требуют вычислений производных от $f(x, u)$, а требуют только вычисления самой функции.

Замечание: метод Эйлера является методом Рунге-Кутта первого порядка.

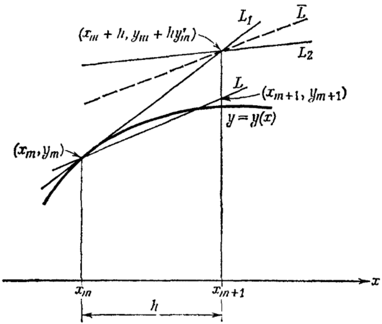
Исправленный метод Эйлера

В исправленном методе Эйлера средний тангенс угла наклона касательной вычисляется по двум точкам:x_m, y_m и $x_m + h, y_m + hy'_m$:

$$\Phi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hy'_m)\right], \qquad \text{где} \qquad y'_m = f(x_m, y_m)$$

Приближенное решение в точке x_{m+1} находится следующим образом:

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h)$$



Порядок исправленного метода Эйлера

Разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y)$ вблизи x_m, y_m

$$f(x, y) = f(x_m, y_m) + f_x(x - x_m) + f_y(y - y_m) + \dots$$

Подставляя $x = x_m + h, y = y = y_m + hy'_m$ с учетом $y'_m = f(x_m, y_m)$, вычислим $\Phi(x_m, y_m, h)$:

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f + \frac{h}{2}(f_x + ff_y) + O(h^2)$$

Итоговая формула совпадает с разложением функции y в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка по h:

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^3)$$

т.е. является методом Рунге-Кутта второго порядка.

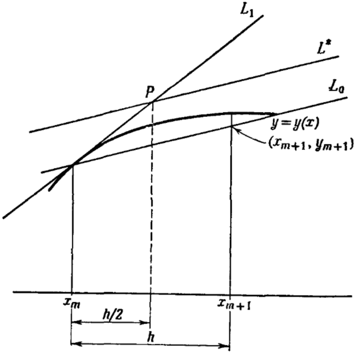
Модифицированный метод Эйлера

Вычислим тангенс угла наклона касательной в усредненной точке $x_m + h/2, y_m + y'_m h/2$:

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} y'_m), \qquad \text{где} \qquad y'_m = f(x_m, y_m)$$

Приближенное решение в точке x_{m+1} находится следующим образом:

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h)$$



Порядок модифицированного метода Эйлера

Разложение в ряд Тейлора функции $f(x,y)$ вблизи x_m, y_m

$$f(x,y) = f(x_m, y_m) + f_x(x - x_m) + f_y(y - y_m) + \dots$$

Подставляя $x = x_m + h/2, y = y = y_m + hy'_m/2$ с учетом $y'_m = f(x_m, y_m)$, вычислим $\Phi(x_m, y_m, h)$:

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f + \frac{h}{2}(f_x + ff_y) + O(h^2)$$

Итоговая формула совпадает с разложением функции y в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка по h:

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^3)$$

т.е. является методом Рунге-Кутта второго порядка.

Методы Рунге-Кутта второго порядка

Общий вид схемы:

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h) \tag{1}$$

Где тангенс угла наклона в общем виде вычисляется по некоторым 2 точкам:

$$\Phi(x_m, y_m, h) = a_1 f(x_m, y_m) + a_2 f(x_m + b_1 h, y_m + b_2 h f(x_m, y_m))$$

Для того, чтобы схема была второго порядка необходимо 3 параметра. Один является произвольным. Разложим функцию $f(x, y)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = x_m + b_1 h, y = y_m + b_2 hf$ и подставим в (1)

$$y_{m+1} = y_m + h\left[a_1 f + a_2 f + h(a_2 b_1 f_x + a_2 b_2 f f_y)\right] + O(h^3)$$

Условия: $a_1 + a_2 = 1$, $a_2 b_1 = 1/2$,$a_2 b_2 = 1/2$. Пусть произвольный параметр $a_2 = \omega \neq 0$:

$$y_{m+1} = y_m + h\left[(1-\omega) f(x_m, y_m) + \omega f(x_m + \frac{h}{2\omega}, y_m + \frac{h}{2\omega} f(x_m, y_m))\right] + O(h^3)$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x_m, y_m),\\
k_2 &= f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_1}{2}),\\
k_3 &= f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{hk_2}{2}),\\
k_4 &= f(x_m + h, y_m + hk_3).
\end{aligned}
$$

Пусть $f(x,y) = F(x)$, т.е. зависит только от x. $y(x) = \int_{x_0}^{x} F(x)dx$.
Введем обозначения $p = h/2$, $F_j = F(x_0 + jp)$. Т.к.
$y_m = y(x_0 + mh) = y(x_0 + 2mp)$, то обозначив
$Y_j = y(x_0 + jp)(y_m = Y_{2m})$ имеем:

$$
Y_{2m+2} - Y_{2m} = \frac{p}{3}(F_{2m} + 4F_{2m+1} + F_{2m+2})
$$

Суммируя на всем интервале, убеждаемся, что совпадает с формулой Симпсона. Т.е. классическая формула Рунге-Кутта 4 порядка есть обобщение формулы Симпсона.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Пример.

Рассмотрим решение уравнения $y' = y, y(0) = 1$. Вычислим коэффициенты в схеме Рунге-Кутта:

$$\begin{aligned}
k_1 &= y_m, \\
k_2 &= y_m + \frac{h}{2} y_m, \\
k_3 &= y_m + \frac{h}{2}\left(y_m + \frac{h}{2} y_m\right), \\
k_4 &= y_m + h\left(y_m + \frac{h}{2}\left(y_m + \frac{h}{2} y_m\right)\right).
\end{aligned}$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в схему РК:

$$y_{m+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) y_m$$

Сумма в скобках - пять первых членов разложения решения e^h в ряд Тейлора.

Устойчивость

Рассмотрим понятие устойчивости методов численного интегрирования ОДУ на примере уравнения:

$$u' = -\lambda u, \qquad \lambda > 0$$

Решение уравнения:

$$u(x) = u(0)e^{-\lambda x}$$

Для любого $a > 0$ справедливо:

$$|u(x+a)| \leq u(x)$$

т.е. решение уравнения асимптотически устойчиво.

Явная схема

Для y_n, построенного по схеме Эйлера, имеем:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = (1 - h\lambda)y_n$$

Для того, чтобы численное решение было устойчивым, необходимо выполнение условия:

$$|1 - h\lambda| < 1$$

откуда

$$h < \frac{2}{\lambda}$$

Такую схему называют *условно устойчивой*

Неявная схема

Рассмотрим численное решение того же уравнения, полученного с помощью неявной схемы Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - h\lambda y_{n+1}$$

Исследуем асимптотическую устойчивость численного решения

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h\lambda}$$

Видно, что для любого шага сетки h численное решение будет устойчивым.
Такая численная схема называется *абсолютно устойчивой*

Жесткая система уравнений

Определение: Система линейных уравнений $Au' = f$ является жесткой, если велико отношение максимального и минимального модуля собственных значений

$$s = \frac{maxRe|\lambda_k|}{minRe|\lambda_k|}, \lambda_k < 0$$

Отношение s называют числом жесткости системы.

Задание

Решить систему уравнений

$$u' = 998u + 1998v$$

$$v' = -999u - 1999v$$

явным и неявным методами Эйлера. Найти собственные числа. Нарисовать графики функций u и v в зависимости от времени.

Лекция 8. События и вероятность.

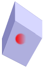
Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Список основных понятий

- Событие,
- Достоверное событие,
- Невозможное событие,
- Событие, противоположное некоторому другому событию,
- Несовместные события
- Единственно возможные события, полная группа событий
- Вероятность события

События

Событие - всякое явление, которое происходит или не происходит.
Примеры:

- Выпадение орла при бросании монеты 
- Выпадение 6 очков на игральной кости 
- Раздача со стены восточного ветра при игре в маджонг 
- Обнаружение частицы в выделенном объеме 

$A, B, \ldots$ - события

Достоверные и невозможные события

Достоверное событие - такое событие, которое обязательно должно произойти.

Примеры:

- Выпадение не более шести (≤ 6) очков при бросании игральной кости
- Раздача со стены не более четырех (≤ 4) одинаковых игральных костей при игре в маджонг
- Появление белого шара из ящика, содержащего только белые шары

Невозможное событие - такое событие, которое заведомо не произойдет.

Примеры:

- Наличие на руке более четырех (> 4) красных драконов  при игре в маджонг
- Появление красного шара из ящика, содержащего белые и черные шары

Противоположные и несовместные события

Пусть A - некоторое событие. Событие, **противоположное** ему - такое событие, состоящее в том, что A не наступило.

Противоположное событие - $\bar{A}$

Пример: При вытаскивании карты из колоды карт

- A - появление красной масти ($\heartsuit\diamondsuit$), $\bar{A}$ - появление черной масти ($\spadesuit\clubsuit$)

События A и B **несовместные** если наступление одного из них исключает наступление другого.

Примеры:

- A - выпадение одного очка на игральной кости ⚀, B - выпадение шести очков на игральной кости ⚅
- A - выпадение четного числа очков, B - выпадение нечетного числа очков
- События A и $\bar{A}$ всегда несовместные
- A - выпадение четного числа очков, B - выпадение числа очков кратного 3 **не являются несовместными**

Единственно возможные события

Пусть есть совокупность событий $A, B, C, \dots, L$. Эти события **единственно возможными**, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них наступит. Также, события $A, B, C, \dots, L$ образуют **полную группу событий**

Примеры:

- A_1 - выпадение одного очка на игральной кости ,

  A_2 - выпадение двух очков на игральной кости 

  A_3 - выпадение трех очков на игральной кости 

  A_4 - выпадение четырех очков на игральной кости 

  A_5 - выпадение пяти очков на игральной кости 

  A_6 - выпадение шести очков на игральной кости 

- A - выпадение орла при бросании монеты  B - выпадение решки при бросании монеты 

Классическое определение вероятности события

Пусть система конечного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ обладает следующими свойствами:

1. Эти события **попарно несовместны**. Т.е. для любых двух событий A_i и A_k $(i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k)$ появление одного из них исключает появление другого.
2. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ единственно возможны.
3. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ **равновозможны**. Это означает, что не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем какое-либо другое.

Событие A наступает, при появлении некоторых A_i из "элементарных"событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, и не наступает при появлении других. События A_i - **благоприятствуют** событию A.

Вероятностью события A называется отношение числа событий, благоприятствующих событию A к общему числу всех равновозможных событий.

$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$, m - число благоприятствующих событий, n - полное число.

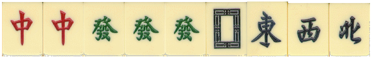
Классическое определение вероятности события. Примеры.

$A_1, A_2, \ldots, A_6$ - выпадение соответствующего числа очков на кубике.

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_6) = \frac{1}{6}, \qquad m = 1, n = 6$$

Событие A - выпадение четного числа очков. Благоприятствуют события A_2, A_4, A_6, т.е. $m = 3, n = 6$, вероятность такого события $P(A) = \frac{1}{2}$

Событие B - выпадение числа очков, кратного 3. Благоприятствуют события A_3, A_6, т.е. $m = 2, n = 6$, вероятность такого события $P(B) = \frac{1}{3}$

Пусть есть набор: 

Событие A - выпадение красного дракона. Благоприятствуют $m = 2, n = 9$, вероятность $P(A) = \frac{2}{9}$

Событие B - выпадение любого дракона. Благоприятствуют $m = 6, n = 9$, вероятность $P(B) = \frac{2}{3}$

Событие - выпадение любого ветра. Благоприятствуют $m = 3, n = 9$, вероятность $P(C) = \frac{1}{3}$

Свойство вероятности.

1. Для любого события A число благоприятствующих событий $m \leq n$. Т.е.
   Вероятность любого события A подчинена условиям:
   $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Если E - некоторое **достоверное** событие, то ему благоприятствуют все "элементарные события т.е. $m = n$. Т.е.
   Вероятность достоверного события равна единице $P(E) = 1$
3. Если U - **невозможное** событие, то из определения ему ничто не благоприятствует $(m = 0)$. Т.е.
   Вероятность невозможного события U равна нулю $P(U) = 0$

Примеры

Пример 1 В урне находятся 3 синих, 8 красных и 9 белых шаров одинакового размера и веса, неразличимых наощупь. Шары тщательно перемешаны. Какова вероятность появления синего, красного и белого шаров при одном вынимании шара из урны?

Пример 2 Одновременно бросаются 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях равна 8?

Сложение вероятности

Теорема сложения Пусть A и B два несовместных события. Тогда вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей.

$$P(A\text{или}B) = P(A) + P(B)$$

Доказательство: Пусть $A_1, A_2, \dots A_n$ - полная группа n попарно несовместных событий. $P(A) = p_1 = \frac{m_1}{n}$, $P(B) = p_2 = \frac{m_2}{n}$.
m_1-благоприятствует событию A, m_2-благоприятствует событию B.
Т.к. события несовместны, то число событий, благоприятствующих событию $(A\text{или}B)$ равно сумме $m_1 + m_2$:

$$P(A\text{или}B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = p_1 + p_2 = P(A) + P(B)$$

Случай конечного числа событий. Если $A, B, C, \dots, L$ - несовместные события, то

$$P(A\text{или}B\text{или}C \dots \text{или}L) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(L)$$

Сложение вероятности

Следствие Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и единственно возможны, то

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Пример 1 При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0.3, вероятность сделать выстрел на оценку «хорошо» - 0.4. Какова внероятность получитьза сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

Пример 2 В урне, содержащей n шаров белого, красного и черного цвета, находятся k белых шаров и l красных. Какова вероятность вынуть шар не черного цвета?

Задача

Пусть на складе имеется 400 электрических лампочек, изготовленных на двух различных заводах. На первом заводе изготовлено 75 % лампочек, а на втором – 25 %. Среди лампочек , изготовленных первым заводом, 83 % удовлетворяют условиям определённого стандарта, а для продукции второго завода этот процент равен 63. Какова вероятность того, что случайно взятая со склада лампочка окажется удовлетворяющей условиям стандарта?

Задача

Если известно, что выбранная лампочка изготовлена на первом заводе (событие A), то вероятность того, что она стандартна (событие B) будет уже не 0.78, а 0.83.
Такого рода вероятность, т.е. вероятность события B при условии, что имеет место событие A, называют условной вероятностью события B при условии наступления A и обозначают $P_A(B)$.
В рассмотренной задаче $P_A(B) = 0.83$

Умножение вероятности

Теорема умножения Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого в предположении, что первое имело место:

$$P(A\text{и}B) = P(A)P_A(B)$$

Задачи

1. В продукции некоторого предприятия признаются годными (событие A) 96% изделий. К первому сорту (событие B) оказываются принадлежащими 75 изделий из каждой сотни годных. Определить вероятность того, что произвольно взятое изделие будет годным и принадлежать к первому сорту.
2. Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом $p = 0.004$. Какова вероятность уничтожения самолета при одновременной стрельбе из 250 винтовок?

Лекция 9. Элементы комбинаторики.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Комбинаторные задачи

- Задача о перестановках. Имеется совокупность n различных объектов $a_1, a_2, \dots a_n$. Сколькими способами можно поставить их в ряд?
- Выборки. Имеется совокупность n различных объектов $a_1, a_2, \dots a_n$. Сколькими способами можно выбрать подсовокупность из k элементов?
  Если интересуемся выборками различающимися и по составу и по порядку следования объектов , то

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  Если важен только состав, то

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Комбинаторные задачи

- Имеется n ящиков и k различных шаров. Шары произвольным образом размещаются по ящикам без каких-либо ограничений. Скольким числом способов это можно сделать? n^k
  В статфизике размещение частиц по ячейкам. Это статистика Максвелла-Больцмана.
- Имеется n ящиков и k неразличимых шаров $k \leq n$. Шары размещаются по ящикам так, что в ящике не может находится более одного шара. Сколько существует различных размещений в этой схеме? C_n^k
  В статфизике это распределение Ферми-Дирака.
- Имеется n ящиков и k неразличимых шаров. Шары произвольным образом размещаются по ящикам без каких-либо ограничений. Сколько существует различных размещений в этой схеме? $C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$
  В статфизике это распределение Бозе-Эйнштейна.

Комбинаторные задачи

- В ящике находятся n различных шаров. Из них n_1 белых, $n - n_1$ черных. Наугад выбираются k шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных окажется ровно k_1 белых? Полное число возможных вариантов C_n^k. Число благоприятных исходов: $C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{k-k_1}$

Задания

- У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?
- В шахматном турнире участвуют 15 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
- Найти вероятность выбрасывания "дубля"(двух одинаковых цифр) на двух игральных костях.
- Для участия в команде тренер отбирает 5 юношей из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных юноши должны войти в команду?
- Сколько слов можно получить, переставляя буквы в словах Гора и Институт?

Задания

- n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что 2 книги окажутся стоящими рядом?
- Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую 5, в третью 12. Сколькими способами это можно сделать?
- Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинам, по другой 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?
- В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?
- Студенту нужно в течение N дней последовательно решить $M \geq N$ задач. Т.е. решение задачи с номером $j + 1$ можно начинать только после решения задачи с номером j. Сколькими способами он может распределить работу по дням, если будет решать не менее одной задачи в день?

Задания

- В группе из 8 студентов трое юношей и пять девушек. Наугад выбираются 3 фамилии из списка. Какова вероятность того, что все они окажутся девушками?
- В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найтивероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.
- В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других, каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что а) все выйдут на четвертом этаже б) все пятеро выйдут на одном этаже в) все пятеро выйдут на разных этажах?
- В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались только два купе.

Задания

- В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?
- Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?
- Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

Лекция 10. Вероятностное пространство общего вида. Независимые события.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Континуальные пространства

Полагаем, что $\Omega = \Re^n$, $n \geq 1$. События - подмножества Ω.
Рассмотрим случай $\Omega = \Re^1$. Функция $\pi : \Omega \to \Re$:

1. $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega) d\omega = 1$$

Вероятность определяется с помощью вспомогательной функции:

$$P(A) = \int_A \pi(\omega) d\omega$$

Вероятность того или иного отрезка на прямой вычисляется как площадь криволинейной трапеции, имеющей данный отрезок в качестве основания и ограниченной сверху графиком функции $\pi(\omega)$.
Вероятностное пространство, в котором таким образом задаются вероятности событий, называется **континуальным**.

Примеры функций π

1. Пространство Ω сужается до отрезка $[a, b]$:

$$\pi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \omega \in [a, b] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   Вероятность событий, вычисляемых как отношение длин множеств называют *геометрическими*

2. $$\pi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

3. Пространство $\Omega = [0, \infty)$

$$\pi(\omega) = \begin{cases} e^{-\omega}, \omega \geq 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Континуальные пространства

$\Omega = \Re^n$. Вероятность также определяется с помощью вспомогательной функции $\pi(\omega)$, но $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

1. $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega) d\omega_1 \ldots d\omega_n = 1$$

Вероятность определяется с помощью вспомогательной функции:

$$P(A) = \int\int\int_A \ldots \int \pi(\omega) d\omega_1 \ldots d\omega_n$$

Если π принимает постоянное значение на некотором множестве $D \subset \Re^n$ и 0 вне его, то вероятность события определяется геометрическим способом:

$$P(A) = \frac{\lambda(D)}{\lambda(A)}$$

$\lambda(A)$ - n-мерный объем множества A.

Вероятностное пространство общего вида

Вероятностное пространство $< \Omega, S, P >$. Ω - множество возможных исходов эксперимента, S - совокупность подмножеств Ω, называемых событиями. Вероятность P - числовая функция, областью определения которой является S. Аксиомы функции вероятности:

1. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in S$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Счетная аддитивность: если события $A_1, A_2, \ldots$ таковы, что $A_i A_j = \emptyset, (i \neq j)$, т.е. попарно несовместны, то

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

Следствие аксиом вероятности

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Аддитивность вероятности: для всякого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots A_n$

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

3. Для любого события A имеет место $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. Для любых событий A и B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$
6. Свойство непрерывности вероятности
   а) Если события $A_1, A_2, \dots$ таковы, что $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots$, то существует

$$lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

   б) Если события $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$, то существует

$$lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Независимые события

Независимые события - между которыми отсутствует причинно-следственная связь.

События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

- Пример независимых событий: В большой группе людей поровну женщин и мужчин. 5% людей имеют фамилию, начинающуюся на букву "К". Наугад выбирается человек. Какова вероятность, что это окажется женщина с фамилией, начинающейся на "К"? Событие A - выбрана женщина, событие B - фамилия начинается на "К" $P(AB) = 1/40$
- События не независимы: В большой группе людей поровну женщин и мужчин. Событие A - выбрана женщина, событие C - в у человека имеется юбка в гардеробе. $(P(C) \sim 1/2)$ Вероятность $P(AC) \neq 1/2 \cdot 1/2$

Независимые в совокупности события

Замечания:

1. Различие понятий несовместные и независимые события. Несовместность - свойство взаимного расположения множеств, независимость - свойство не только множеств, но и вероятности, заданной на этих множествах. Если A и B несовметные события, то скорее всего они зависимы!
2. Если A и B независимы, то независимы также A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$
3. События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого подмножества индексов $\{i_1, i_2, \ldots i_k\} \subset \{1, 2, \ldots n\}, 2 \leq k \leq n$ выполняктся $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

Задачи

- В квадрат с вершинами $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ наудачу брошена точка. Обозначим X и Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежущую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.
  а) Доказать, что для $0 < u < 1$ и $0 < v < 1$
  $$P(X < u, Y < v) = P(X < u)P(Y < v) = uv$$
  б) найти для $0 < t < 1$
  1)$P(|X - Y| < t)$
  2)$P(XY < t)$
  3)$P(max(X, Y) < t)$
  4)$P(min(X, Y) < t)$
  в) найти $P(X + Y < t)$ для $0 < t < 2$
- На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z - расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность того, что из отрезков длины X, Y и Z можно составить треугольник?

Задачи

- На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?
- Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $P(A)$ равно 1 или 0.
- Из отрезка $[0,1]$ наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи числа вторая цифра после запятой будет двойкой?
- Пусть e_1 и e_2 равны соотвественно первым двум цифрам числа после запятой из предыдущей задачи. Доказать, что события $e_1 = 3$ и $e_2 = 5$ независимые.
- Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B поражает мишень с вероятностью 0.5, стрелок C поражает мишень с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишеням. Какова вероятность того, что ровно две пули попали в цель?

Лекция 11. Схема Бернулли.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Повторение испытаний

Примеры задач:

1. Известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.515, девочки - 0.485. Некоторая супружеская пара запланировала иметь 10 детей. Какова вероятность, что девочек и мальчиков окажется поровну?
2. Стрелок в тире попадает в цель с вероятностью p и промахивается с вероятностью $q = 1 - p$. Какова вероятность, что произойдет ровно k попаданий за n выстрелов? k может принимать значения от 0 до n.
3. Изготовлено n деталей, причем каждая из них независимо от других оказывается бракованной с вероятностью p. С какой вероятностью при проверке на пригодность будет обнаружено k бракованных деталей?

Схема Бернулли

Общие черты задач:

1. В каждой имеется некоторое количество n независимых испытаний.
2. Каждое испытание может завершиться одним из двух возможных исходов, назовем их условно "успех"и "неуспех"
3. Вероятность "успеха"не меняется от испытания и равна p.

S_n - число успехов, реализовавшихся в n испытаниях. Необходимо найти $P(S_n = k)$, $0 \leq k \leq n$
Число различных последовательностей 2^n.
Вероятность одного элементарного исхода, в котором k успехов $P(\omega) = p^k q^{n-k}$
Искомая вероятность $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Совокупность чисел $\{C_n^k p^k q^{n-k}, 0 \leq k \leq n\}$ - **биномиальное распределение**

Схема Бернулли

Пример. Бросается монета 6 раз. Какова вероятность выпадения орла $0, 1, \ldots, 6$ раз?
Найдем, при каком k вероятность $P(S_n = k)$ максимальна.
Рассмотрим соотншение

$$\alpha_k = \frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)}$$

При $\alpha_k \geq 1$ вероятность неубывает, при $\alpha_k \leq 1$ вероятность невозрастает.

$$\alpha_k = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}$$

Неубывает при $k \leq np - q$, невозрастает при $k \geq np - q$. Значение k (т.к. может быть нецелым) соответствующее максимальному значению вероятности $k = [np - q] + 1 = [p(n+1)]$

Задачи

- Производится 8 выстрелов по резервуару с горючим, причем первое попадание вызывает течь, а второе - воспламенение горючего. Какова вероятность того, что резервуар будет подожжен, если вероятность попадания при отдельном выстреле $p = 0.2$.
- Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит орла. Найти вероятность того, что игра закончится на k -ом бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?
- Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?
- 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстояние более 200 метров от берега?

Задачи

- Шахматисты A и B решили сыграть между собой матч. Известно, что A выигрывает каждую партию у B с вероятностью $2/3$ и с веростностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в матче игроку A нужно набрать 4 очка, а B для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш - 0, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?
- Найти вероятность того, что k -ый по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.
- Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + l$ успехов, причем l успехов произойдет в последних l испытаниях.

Лекция 12. Условная вероятность. Полная вероятность.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Условная вероятность

A - некоторое событие. Хотим знать вероятность $P(A)$ произойти событию A в эксперименте. Знаем, что в эксперименте произошло событие B. Знание, что B произошло может менять вероятность события A.

Пример 1: Известно, что в результате броска игральной кости выпало менее четырех очков. Какова при этом вероятность, что выпало нечетное число очков?

Событие $B = \{1, 2, 3\}$. Нас интересует, в какой доле случаев при наступления события B произойдет событие A. Вероятность, что выпало нечетное число очков $2/3$.

Условной вероятностью (вероятностью события A при условии что B произошло) называется

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Условная вероятность. Пример.

Событие $B = \{1,2,3\}$, $P(B) = 1/2$. Событие $A = \{1,3,5\}$.
Вероятность события $P(AB) = 2/6$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Пример 2: Известно, что на двух брошенных игральных костях в сумме выпало четное число очков. Какова вероятность, что при этом выпал дубль?
Событие A - выпадение дубля, событие B - выпадение в сумме четного числа очков.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Условная вероятность. Замечания

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

1. $P(B)$ должно быть положительной величиной $P(B) > 0$. Для событий B, вероятность которых $P(B) = 0$ условная вероятность не вводится
2. Для $P(B) > 0$ и для независимых событий A и B вероятность $P(A|B) = P(A)$
3. Если произошло событие B, то пространство возможных исходов эксперимента сужается до размеров множества B. В формуле $1/P(B)$- нормировка, $P(AB)$ - из элементарных исходов множества A могут произойти только те, которе входят в B.

Задачи

- Известно, что при броске двух игральных костей на первой кости выпала единица. С какой вероятностью при этом сумма очков на двух костях будет равна двум.
- Известно, что сумма очков при броске двух костей равна двум. С какой вероятностью при этом на первой кости выпала единица?
- Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B поражает мишень с вероятностью 0.5, стрелок C поражает мишень с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишеням. В мишень попали ровно две пули. Какова вероятность, что промахнулся C?
- Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0.5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

Полная вероятность.

A- событие, вероятность которого необходимо узнать. Набор вспомогательных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ -будем называть **гипотезами**. Они удовлетворяют следующим требованиям:

1. $H_i H_j = \varnothing, i \neq j$
2. $A \subset \cup_{i=1}^{n} H_i$

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Формула полной вероятности. Пример.

Пример: На предприятии работает n рабочих, которые делают одинаковые изделия. За смену первый рабочий изготовил k_1 деталей, второй - $k_2, \ldots$ n - ый рабочий изготовил k_n деталей. Изделие, изготовленное первым рабочим с вероятностью p_1 оказывается бракованным, для второго рабочего вероятность брака p_2 и т.д. В конце смены все детали ссыпали в один бункер. Какова вероятность, что наугад выбранное изделие окажется бракованным?

Событие A - выбранное изделие бракованное. Пусть гипотеза H_i - деталь изготовил i рабочий.

1. $H_i H_j = \varnothing, i \neq j$
2. $\cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega \supset A$

$$P(H_i) = \frac{k_i}{k}, k = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

$P(A|H_i) = p_i$, тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{k_i}{k}$$

Задачи

- Мастер в среднем успевает выточить 100 деталей за смену, стажёр – 80 деталей, а ученик – 70. При этом мастер делает бракованную деталь с вероятностью 1%, стажёр – с вероятностью 5%, а ученик – с вероятностью 1/7. Все выточенные детали складываются в одну коробку. Найти вероятность извлечения из коробки бракованной детали.
- Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.
- Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n вытащит "хороший"билет. Какова вероятность вытащить "хороший"билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

Задачи

- Известно, что 34 % людей имеют первую группу крови, 37 % - вторую, 21 % - третью и 8 % четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй - кровь первой и второй групп, с третьей - с первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой крови можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?
- Стрелок А поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок В - с вероятностью 0.5, стрелок С - с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени. Пусть известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность, что промахнулся С?
- Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.
- Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятность события $P(a < X < b)$.
- Могут ли функции $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, $f(y) = e^{-y}$, $f(y) = cosy$, $f(y) = 1$ быть плотностями распределения.

Лекция 13. Формула Байеса.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Задачи

- Мастер в среднем успевает выточить 100 деталей за смену, стажёр – 80 деталей, а ученик – 70. При этом мастер делает бракованную деталь с вероятностью 1%, стажёр – с вероятностью 5%, а ученик – с вероятностью $1/7$. Все выточенные детали складываются в одну коробку. Найти вероятность извлечения из коробки бракованной детали.
- Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.
- Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n вытащит "хороший"билет. Какова вероятность вытащить "хороший"билет, если студент зайдет на экзамен вторым?
- Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0, 1, 2, \ldots,$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

Формула Байеса

Есть событие A и набор гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, удовлетворяющих условиям

1. $H_i H_j = \varnothing, i \neq j$
2. $A \subset \cup_{i=1}^{n} H_i$

Вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ - **априорные** (доопытные) Вероятности гипотез, после того как некоторое событие A произошло $P(H_1|A), P(H_2|A), \ldots, P(H_n|A)$ - **апостериорные** (послеопытные, учитывающие результаты эксперимента).
Апостериорные вероятности гипотез находятся по **формуле Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}$$

Доказательство.
$P(H_i|A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)}$, $P(H_i A) = P(A|H_i)P(H_i)$

Формула Байеса. Пример.

Пример: На предприятии работает n рабочих, которые делают одинаковые изделия. За смену первый рабочий изготовил k_1 деталей, второй - $k_2, \dots$ n - ый рабочий изготовил k_n деталей. Изделие, изготовленное первым рабочим с вероятностью p_1 оказывается бракованным, для второго рабочего вероятность брака p_2 и т.д. В конце смены все детали ссыпали в один бункер. Выбранная наугад деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что ее изготовил i - ый рабочий?

Решение. По формуле Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{p_i \frac{k_i}{k}}{\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{k_j}{k}}$$

Задачи

- Мастер в среднем успевает выточить 100 деталей за смену, стажёр – 80 деталей, а ученик – 70. При этом мастер делает бракованную деталь с вероятностью 1%, стажёр – с вероятностью 5%, а ученик – с вероятностью 1/7. Все выточенные детали складываются в одну коробку. Извлеченная случайным образом деталь оказалась бракованной. Найти, с какой вероятностью она изготовлена мастером, стажёром и учеником.
- Известно, что 34% людей имееют первую группу крови, 37% - вторую, 21% - третью и 8% - четвертую. Больному с первой группой можно переливать кровь первой группы, со второй - кровь первой и второй групп, с третьей - кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?
- Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин - дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

Задачи

- Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0, 1, 2, \ldots,$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. У насекомого развилось 10 потомков. Какова вероятность, что было отложено 20 яиц?
- По каналу связи может быть передана одна из трёх последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC, причём априорные вероятности каждой из последовательностей равны 0.3, 0.4, 0.3 соответственно. Известно, что действие шумов на приёмное устройство уменьшает вероятность правильного приёма каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приёма переданной буквы за две другие, увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность AAAA, если на приёмном устройстве получена последовательность ABCA.

Лекция 14. Случайная величина и ее закон распределения.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Случайная величина. Примеры.

Случайной величиной X называется произвольная функция, заданная на пространстве элементарных исходов Ω и принимающая значения в $\Re$ (значения $\pm\infty$ исключаются). Т.е. каждому элементарному исходу ω ставится в соотвествие число $X(\omega) \in \Re$.
Под случайной величиной понимается величина, принимающее в результате опыта некоторое числовое значение.

- Число очков, выпадающих на игральной кости. Случайная величина может принимать одно из значений $1, 2, \ldots, 6$
- Число наступлений события A при n независимых испытаниях. Случайная величина может принимать одно из значений $0, 1, 2, \ldots, n$
- Число выстрелов, производимых до первого попадания в цель. Случайная величина может принимать любое целое положительное значение.
- Расстояние от центра мишени до точки попадания. Случайная величина может принимать любое положительное значение или ноль.

Дискретная случайная величина.

Чтобы охарактеризовать случайную величину X нужно

1. Указать её возможные значения. $y_1, y_2, \dots$
2. Указать насколько часто принимаются эти значения, т.е. вероятности собоытий $X = y_i$

$$p_i = P(X = y_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Если перечисленны все возможные значения величины X, то события $X = x_i$ - несовместны и единственно возможны, т.е. сумма $\sum_i p_i = 1$. Случайная величина X называется **дискретной**, если существует конечная или счетная последовательность чисел $y_1, y_2, \dots$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = y_i) = 1$$

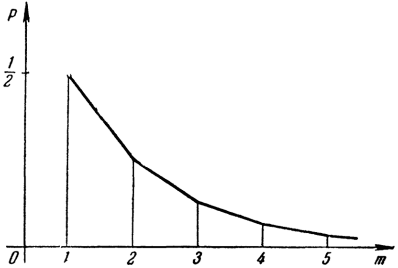
Соотношение, устанавливающее связь между значением случайной величины и вероятностями этих значений, называют законом распределения случайной величины.

Дискретная случайная величина. Табличное и графическое изображение закона распределения.

Число значений конечное или счетное. Табличное представление закона распределения.

значение	y_1	y_2	y_3	...
вероятность	p_1	p_2	p_3	...

Пример 1. X - число очков, выпадающих на игральной кости.
Пример 2. X - число выстрелов по цели до первого попадания.
Вероятность попадания при отдельном выстреле равна p.
Графическое представление для $p = q = 1/2$.



Функция распределения случайной величины.

Для произвольной (дискретной или непрерывной) случайной величины X.
Известно **распределение** случайной величины X, если для произвольных чисел $a \le b$ мы можем находить вероятности вида $P(\omega : a \le X(\omega) \le b) = P(a \le X \le b) = P(X \in [a, b])$.

Чтобы знать распределение случайной величины X - достаточно знать всего одну функцию - функцию распределения этой величины.

Функцией распределения случайной величины X называется

$$F_X(y) = P(X < y), -\infty < X < \infty$$

Свойства функции распределения случайной величины.

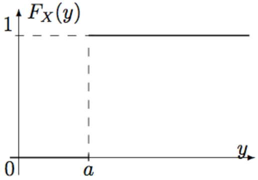
1. $0 \leq F_X(y) \leq 1$ для всех значений y.
2. Если $y_1 < y_2$, то $F_X(y_1) \leq F_X(y_2)$. Т.е. функция распределения монотонно неубывает.
3. Существуют пределы $lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$, $lim_{y \to \infty} F_X(y) = 1$
4. Для любого y $F_X(y - 0) = F_X(y)$. Т.е. функция распределения непрерывна слева.
5. $F_X(y + 0) = P(X \leq y)$ и $P(X = y) = F_X(y + 0) - F_X(y - 0)$. Значение вероятности в точке y равна значению скачка функции распределения в этой точке.
6. $$\begin{aligned} P(X \in [a, b)) &= F_X(b) - F_X(a) \\ P(X \in [a, b]) &= F_X(b + 0) - F_X(a) \\ P(X \in (a, b]) &= F_X(b + 0) - F_X(a + 0) \\ P(X \in (a, b)) &= F_X(b) - F_X(a + 0) \end{aligned}$$

Задачи.

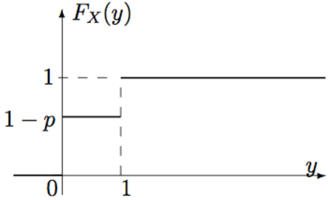
1. Построить функцию распределения для числа очков, выпавших на одной игральной кости.
2. Построить функцию распределения для количества «орлов», выпавших в серии из двух бросков монеты.
3. Построить функцию распределения для количества «орлов», выпавших в серии N=3 бросков монеты.
4. Построить функцию распределения для числа очков, выпавших на двух игральных костях.
5. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает "орел и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после 2 бросков монеты.
6. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.

Примеры дискретных распределений.

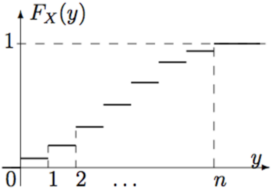
1. Вырожденное распределение.
I_a, если $P(X = a) = 1$



2. Распределение Бернулли. B_p, если $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$

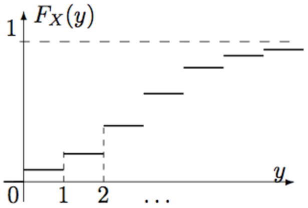


3. Биноминальное распределение.
$B_{n,p}$, если $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$

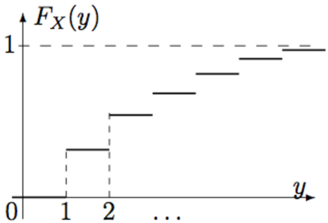


Примеры дискретных распределений.

4. Распределение Пуассона. Π_λ, если $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > 0$. (число звонков поступивших оператору, число частиц, зарегистрированных прибором, число особей биологической популяции)



5. Геометрическое распределение. G_p, если $P(X = k) = (1 - p)p^{k-1}, k = 1, 2, 3, \ldots, 0 < p < 1$ (число испытаний в схеме Бернулли до первого неуспеха)



Математическое ожидание

Если все значения непрерывной случайной величины принадлежат некоторому промежутку от a до b, то математическое ожидание непрерывной случайной величины X:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Матаматическое ожидание - определяет среднее значение случайной величины X
Дисперсия - отклонение случайной величины X от среднего значения

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Задачи.

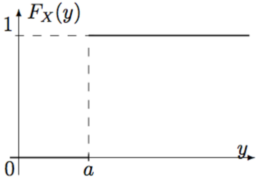
1. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины такова: $f(t) = 2e^{-2t}$ при $t \geq 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$.
   1) Найти формулу функции распределения этой случайной величины.
   2) Определить вероятность того, что прибор проработает не более года.
   3) Определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года.
   4) Определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

Лекция 15. Дискретная, непрерывная, смешанная функции распределения.

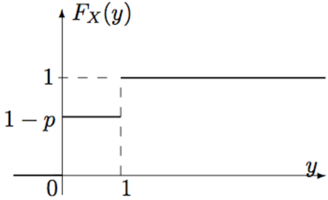
Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Примеры дискретных распределений.

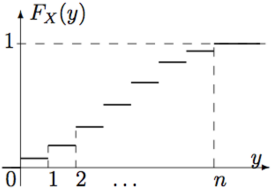
1. Вырожденное распределение.
I_a, если $P(X = a) = 1$



2. Распределение Бернулли. B_p, если $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p, 0 < p < 1$

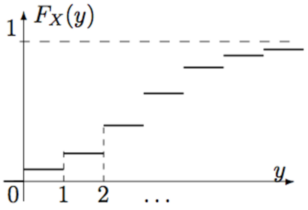


3. Биноминальное распределение.
$B_{n,p}$, если $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$

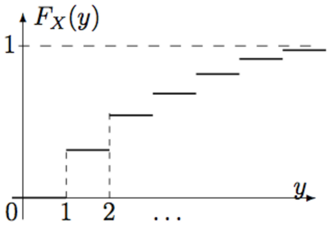


Примеры дискретных распределений.

4. Распределение Пуассона. Π_λ, если $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k= 0,1,2,\ldots, \lambda>0$. (число звонков поступивших оператору, число частиц, зарегистрированных прибором, число особей биологической популяции)



5. Геометрическое распределение. G_p, если $P(X=k)=(1-p)p^{k-1}, k= 1,2,3,\ldots, 0<p<1$ (число испытаний в схеме Бернулли до первого неуспеха)



Непрерывная случайная величина.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, функция распределения которой $F_X(y)$предполагается непрерывной и дифференцируемой.
Производная функции распределения

$$\varphi_X(y) = F'_X(y)$$

называется **плотностью распределения вероятности** случайной величины X.

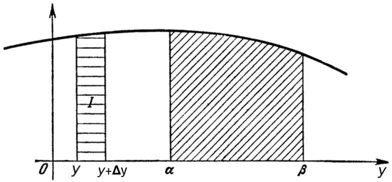
Случайная величина называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F_X(y)$ непрерывна на всей числовой очи, а плотность распределения $\varphi_X(y) = F'_X(y)$ существует и непрерывна всюду, кроме, может быть, дискретного множества точек.

Вероятностный смысл функции плотности распределения вероятности.

$$\varphi_X(y) = lim_{\Delta y \to 0} \frac{F_X(y+\Delta y) - F_X(y)}{\Delta y} = lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < X < y + \Delta y)}{\Delta y}$$

т.е. плотность вероятности случайной величины X равна пределу отношения вероятности попадания величины X в интервал $(y, y + \Delta y)$ к Δy, при Δy стемящемся к нулю.
Зная плотность распределения вероятности величины X вычислим вероятность того, что случайная величина X удовлетворяет неравенствам $\alpha \leq X < \beta$:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \int_\alpha^\beta F'_X(y)dy = \int_\alpha^\beta \varphi_X(y)dy$$



Свойства функции плотности вероятности.

1. $\varphi_X(y) \geq 0$ (как производная неубывающей функции)
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)dy = 1$$
3. $$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi_X(t)dt$$
4. Следствие предыдущего пункта

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} F'_X(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_X(y)dy$$

Т.е. плотность вероятности есть неотрицательная интегрируемая функция, площадь под графиком которой равна 1.

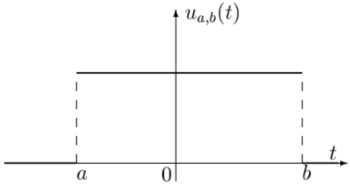
Функция плотности распределения. Задачи.

- Точка бросается наугад (без прицеливания) на отрезок $[0, 1]$. Случайная величина X - абсцисса точки попадания (считается, что бросаемая точка обязательно попадает на отрезок $[0, 1]$). Найти функцию распределения вероятности случайной величины и ее плотность.
- Показательный закон распределения определяется плотностью вероятности
$$\varphi_X(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ Ae^{-\lambda y}, 0 \leq y \end{cases}$$
где A и λ постоянные величины. Считая $\lambda > 0$ заданной, найти A и построить функцию распределения.
- Могут ли функции а)$\varphi_X(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, б) $\varphi_X(y) = e^{-y}$, в) $\varphi_X(y) = cos(y)$, г) $\varphi_X(y) \equiv 1$ быть плотностями распределения?

Примеры непрерывных распределений.

1. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Плотность:

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, t \in [a, b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

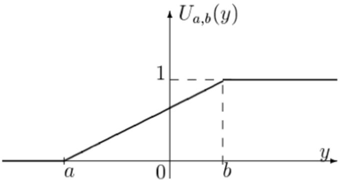


Вероятность попадания в промежуток $[c, d] \subset [a, b]$

$$P(X \in [c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

Функция распределения

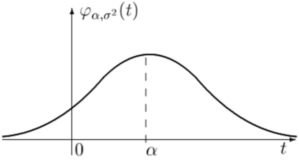
$$U_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, y \le a \\ \frac{y-a}{b-a} y \in [a, b] \\ 1, y > b \end{cases}$$



Примеры непрерывных распределений.

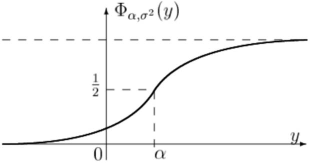
2. Нормальное (гауссовсое) распределение.
Плотность:

$$\varphi_{\alpha,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < t < \infty$$



Функция распределения

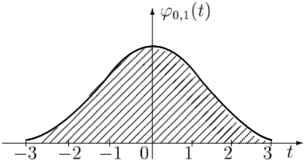
$$\Phi_{\alpha,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$



.

при $\alpha = 0, \sigma = 1$ имеем $\Phi_{0,1}$ - стандартное нормальное распределение:

$$\Phi_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



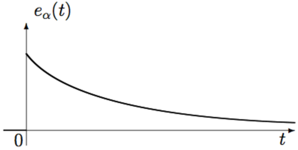
$P(|Y| < 3) = 0.9973$ $Y = \frac{X-\alpha}{\sigma}$ Правило трех сигм:

$$P(|X - \alpha| < 3\sigma) = 0.9973$$

Примеры непрерывных распределений.

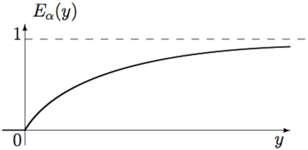
3. Показательное (экспоненциальное) распределение. Плотность:

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, t > 0 \\ 0, t \le 0 \end{cases}$$



Функция распределения:

$$E_\alpha(y) = \begin{cases} 0, y \le 0, \\ 1 - e^{-\alpha y}, y > 0 \end{cases}$$



Примеры непрерывных распределений.

3. Показательное (экспоненциальное) распределение.

Показательно распределены длительности телефонных разговоров, промежутки между последовательными обслуживаниями клиентов, время безотказной работы прибора.

Пусть X - время работы лампочки. И пусть лампа уже проработала y времени

$$P(X \geq y) = e^{-\alpha y}$$

Вероятность того, что лампа еще проработает t времени:

$$P(X \geq y + t | X \geq y) = \frac{P(X \geq y + t, X \geq y)}{P(X \geq y)} = \frac{(X \geq y + t)}{P(X \geq y)} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha(y+t)}}{e^{-\alpha y}} = e^{-\alpha t} = P(X \geq t)$$

Примеры непрерывных распределений.

4. Гамма распределение. Плотность:

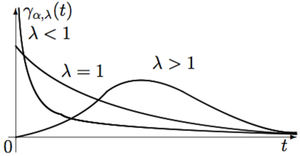
$$\gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, t > 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases}$$

$\alpha > 0, \lambda > 0$ Гамма функция Эйлера

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

Свойство $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$
(для целых $\Gamma(n+1) = n!$) Функция распределения:

$$\Gamma_{\alpha,\lambda}(y) = \int_0^y \gamma_{\alpha,\lambda}(t) dt$$

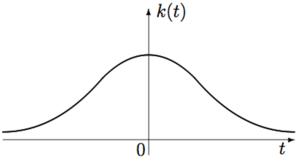


.

Примеры непрерывных распределений.

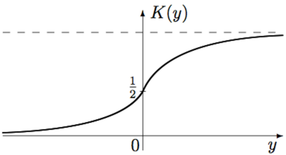
5. Распределение Коши. Плотность:

$$k(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, -\infty < t < \infty$$



Функция распределения:

$$K(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgy$$



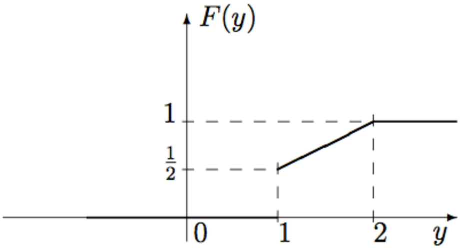
Смешанный тип распределения случайной величины.

Функция распределения относится к **смешанному типу**, если при всех значениях y

$$F(y) = \alpha F_1(y) + \beta F_2(y)$$

где $F_1(y)$ - непрерывная, $F_2(y)$ - дискретная функции распределения, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$

Пример:



Задачи

1. Плотность Г-распределения с параметрами α, n равна

$$f(y) = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\alpha y}$$

при $y > 0$ и $f(y) = 0$ при $y \leq 0$. Найти функцию распределения.
2. Какова вероятность того, что значение случайной величины окажется целым, если известно, что она имеет нормальное распределение?
3. На отрезок длины l произвольным образом бросаются две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.
4. В круг радиуса R наугад броасается точка. Найти функцию распределения и плотность распределения росстояния этой точки до центра круга.
5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин $|X|$, X^2, $sin(X)$.

Лекция 16. Многомерные распределения и плотности. Преобразования случайных величин.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Случайный вектор. Многомерная функция распределения.

Случайный вектор - всякий вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, компонентами которого являются случайные величины.

Функцией распределения случайного вектора X (многомерной функцией распределения) называется

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(X_1 < y_1, X_2 < y2, \ldots, X_n < y_n)$$

Свойства:

1.

$$0 \leq F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq 1$$

2. Для $y_1 < z_1, y_2 < z_2, \ldots, y_n < z_n$

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

3.

$$lim_{y_n \to -\infty} F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

$$lim_{y_n \to \infty} F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_{X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$$

Независимые случайные величины

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$**независимы**, если для любых $B_1 \subset \Re, B_2 \subset \Re, \dots, B_n \subset \Re$ события $\{X_1 \in B_1\}$, $\{X_2 \in B_2\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ независимы:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2) \cdots P(X_n \in B_n)$$

Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, то

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = F_{X_1}(y_1)F_{X_2}(y_2) \dots F_{X_n}(y_n)$$

Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$**независимы**, если для любых значений этих величин:

$$P(X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_n = y_n) = P(X_1 = y_1)P(X_2 = y_2) \dots P(X_n = y_n)$$

Распределение двумерных случайных векторов удобно представлять таблицей, вводя вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$

X/Y	y_1	y_2	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$

Математические операции над дискретными случайными величинами

- Произведением kX случайной величины X на постоянную k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями.
- m - ой степенью случайной величины X, т.е. X^m называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i.
- Суммой, (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_i$, $(x_i - y_i)$ или $x_i y_i$ с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y примет значение y_i:

$$p_{ij} = P(\{X = X_i\}\{Y = y_i\})$$

Если случайные величины независимы, то

$$p_{ij} = P(\{X = x_i\}\{Y = y_i\}) = P(\{X = X_i\})P(\{Y = y_i\}) = p_i q_j$$

Задачи

- Задан закон распределения случайной величины X:

x_i	-2	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

Найти закон распределения случайных величин а) $Y = 3X$, б) $Y = X^2$

- Заданы законы распределения случайных величин X и Y:

x_i	0	2	4
p_i	0.5	0.2	0.3

y_i	-2	0	2
q_i	0.1	0.6	0.2

Найти закон распределения случайных величин а) $Z = X - Y$, б) $Z = XY$

- Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

X/Y	-1	0	1
-1	$7/24$	$1/12$	$1/8$
1	$1/8$	$1/6$	$5/24$

Найти а) одномерные законы распределения X и Y, б) закон распределения $X + Y$, в) закон распределения $Z = X^2$

Плотность многомерных распределений

Функция распределения $F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется абсолютно непрерывной, если для всех значений аргумента

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}\dots\int_{-\infty}^{y_n} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)dt_1 dt_2 ..$$

Плотность многомерного распределения:

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n}$$

Свойства многомерных плотностей

1. $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$
3.

$$P((X_1, X_2, \dots X_n) \in B) = \int\int_B\dots\int f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

для любого прямоугольника $B \subset \Re^n$

Свойства многомерных плотностей

Свойства многомерных плотностей

4. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, то они независимы тогда и только тогда, когда

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(t_2)\dots f_{X_n}(t_n)$$

5. Получение плотности меньшей размерности, если известна n - мерная плотность:

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_{n-1}}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)dt_n$$

Пример - многомерное стандартное нормальное распределение

$$f(t_1, t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right] = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{0,1}(t_i)$$

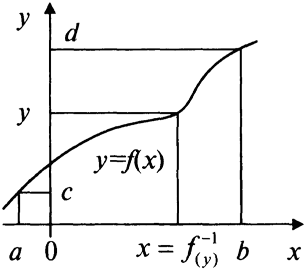
Преобразование случайных величин

Пусть X - непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $\varphi_X(t)$, а случайная величина $Y = f(X)$. Необходимо найти закон распределения случайной величины Y

1. Пусть функция $f(x)$ - **строго монотонна**, непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Пусть $f'(x) > 0$. Тогда функция распределения $G_Y(t)$случайной величины $Y = f(X)$

$$G_Y(t) = P(Y < t) = \begin{cases} \int_c^t g_Y(u)du \text{ при } c \le t \le d \\ 0 \text{ при } t < c \end{cases}$$

где $g_Y(t)$ - плотность распределения случайной величины Y



Преобразование случайных величин

Если $c \leq t \leq d$, то

$$G_Y(t) = P(Y < t) = P(f(X) < t) = P(X < f^{-1}(t)) = \int_d^{f^{-1}(t)} \varphi_X(u)du$$

где функция $f^{-1}(t)$ - функция, обратная $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. По теореме о производной интеграла по переменному верхнему индексу:

$$g_Y(t) = G'_Y(t) = \varphi_X[f^{-1}(t)] \cdot \mid [f^{-1}(t)]' \mid$$

Все рассуждения обобщаются и на бесконечные пределы.

$$G_Y(t) = P(Y < t) = P(f(X) < t) = P(X < f^{-1}(-\infty, t)) =$$

$$= \int_{f^{-1}(-\infty, t)} \varphi_X(u)du$$

Пример линейного преобразования случайной величины

Пусть случайная величина X обладает плотностью распределения $\varphi_X(t)$. Новая случайная величина $Y = aX + b$. Найдем $g_Y(t)$.

1. $a > 0$

$$G_Y(t) = P(aX + b < t) = P(X < \frac{t-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \varphi_X(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{a}\varphi_X(\frac{v-b}{a})dv$$

2. $a < 0$

$$G_Y(t) = P(aX + b < t) = P(X > \frac{t-b}{a}) = \int_{\frac{t-b}{a}}^{\infty} \varphi_X(u)du =$$

$$= \int_{t}^{-\infty} \frac{1}{a}\varphi_X(\frac{v-b}{a})dv = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{|a|}\varphi_X(\frac{v-b}{a})dv$$

То есть

$$g_Y(t) = \frac{1}{|a|}\varphi_x(\frac{t-b}{a})$$

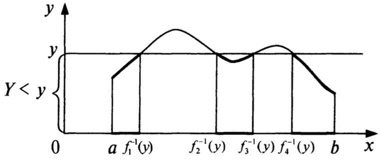
Преобразование гауссовских распределений

1. Если случайная величина X имеет нормальное распределение Φ_{α,σ^2}, то случайная величина $Y = (X - \alpha)/\sigma$ имеет стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$.
2. Если случайная величина Y имеет стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$, то случайная величина $X = \sigma Y + \alpha$ распределена по нормальному закону Φ_{α,σ^2}.
3. Если случайная величина X имеет нормальное распределение Φ_{α,σ^2}, то случайная величина $Y = AX + B$ распределена по нормальному закону $\Phi_{A\alpha+B,A^2\sigma^2}$.

Преобразование случайных величин

Пусть X - непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $\varphi_X(t)$, а случайная величина $Y = f(X)$. Необходимо найти закон распределения случайной величины Y

2. Пусть функция $f(x)$ - **немонотонна**, то обратная функция $y = f^{-1}(x)$ неоднозначна и ее число зависит от того, какое число y взято:



Плотность распределения вероятности в этом случае:

$$g_Y(t) = \sum_i^k \varphi_X[f_i^{-1}(t)] \mid [f^{-1}(t)]' \mid$$

k - число значений обратной функции $f^{-1}(t)$, соответствующих некоторому t. $f_i^{-1}(t)$ - значения обратной функции при данном t

Задачи

- Найти плотность распределения вероятности случайной величины $Y = 1 - X^3$, если случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью
$$k(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, -\infty < t < \infty$$
- Найти плотность распределения вероятности случайной величины $Y = X^2$, если случайная величина X распределена по стандартному нормальному закону $\Phi_{0,1}$
- Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = cos(X)$, если случайная величина X распределна равномерно на отрезке $[0, \pi]$.

Лекция 17. Формула свёртки. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Свёртка

X и Y - **независимые** случайные величины с функциями распределения F_X и F_Y. Необходимо найти F_{X+Y}.

Пример для дискретных случайных величин.

Случайные величины принимают целые неотрицательные значения с вероятностями $P(X=k)=p_k$, $P(Y=k)=q_k$, $k=0,1,2,\dots$.
Найти $P(X+Y=k)$.

$$P(X+Y=k)=P(\{X=0\},\{Y=k\})\cup P(\{X=1\},\{Y=k-1\})\cup\dots$$

$$\dots\cup P(\{X=k\},\{Y=0\})=$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(\{X=i\},\{Y=k-i\})=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}$$

Последовательность чисел $\{r_k=\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}, k=0,1,2\dots\}$ называется **свёрткой** последовательностей $\{p_k, k=0,1,2\dots\}$ и $\{q_k, k=0,1,2\dots\}$

Свёртка

X и Y - **независимые** случайные величины с функциями плотности распределения f_X и f_Y. Тогда

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(v) f_X(t-v)dv$$

Доказательство:

$$F_{X+Y}(y) = P(X+Y<y) = P((X,Y) \in (u,v) : u+v<t) =$$

$$= \int_{u+v<t}\int f_{X,Y}(u,v)dudv = \int_{u+v<t}\int f_X(u)f_Y(v)dudv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)dvdu = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)dtdu =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(v)du \right] dt$$

Задачи

1. Точку бросают наудачу в квадрат со стороной 1, стороны которого параллельны осям X и Y, а центр имеет координату $(0,0)$. Найти функцию распределения и плотность вероятности для случайных величин X, Y, $X+Y$.
2. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределения Пуассона Π_{λ_1}, Π_{λ_2}. Показать, что случайная величина $Y = X_1 + X_2$ имеет распределение Пуассона $\Pi_{\lambda_1+\lambda_2}$.
3. Пусть X и Y - независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с одной и той же константой α:
$$f_X(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \qquad f_Y(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$
Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$.
4. Пусть X и Y - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$.
5. Пусть X и Y - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X^2 + Y^2$.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть случайная величина X дискретна, и может принимать значения $y_1, y_2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = y_k) = 1$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(X = y_k)$$

если этот ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| P(X = y_k) < \infty$$

Иначе математическое ожидание случайной величины X не существует.

Примеры вычисления математического ожидания дискретной случайной величины

1. Случайная величина X распределена по закону Бернулли. Т.е. $P(X = 1) = p, P(X = 0) = (1 - p)$. Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

2. Случайная величина X имеет биноминальное распределение. Т.е. $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$. Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1 - p)^{n-1-m} = np$$

Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины

Пусть случайная величина X непрерывна. Плотность распределения $f_X(t)$

Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины X называется

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$$

если:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t) dt < \infty$$

Иначе математическое ожидание случайной величины X не существует.

Пример вычисления математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины

Случайная величина X распределена по нормальному закону Φ_{α,σ^2}.
Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha)e^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \alpha$$

Свойства математического ожидания

1. Мат. ожидание константы равно константе. $P(X = C) = 1$, то $EX = C$
2. Линейность. $E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta$
3. Мат. ожидание суммы любых случайных величин есть сумма матожиданий этих величин. Т.е. $E(X + Y) = EX + EY$
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$
5. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$
6. Если $EX = 0$ и $X \geq 0$, то $P(X = 0) = 1$

Задачи

Вычислить мат. ожидание случайной величины, имеющей:
а) распределение Бернулли
б) биномиальное распределение
в) распределение Пуассона
г) геометрическое распределение
д) равномерное распределение на отрезке $[a, b]$
е) показательное распределение с параметром α
ж) нормальное распределение с параметрами α, σ^2
з) гамма-распределение

Лекция 18. Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Дисперсия.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть случайная величина X дискретна, и может принимать значения $y_1, y_2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = y_k) = 1$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(X = y_k)$$

если этот ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| P(X = y_k) < \infty$$

Иначе математическое ожидание случайной величины X не существует.

Примеры вычисления математического ожидания дискретной случайной величины

1. Случайная величина X распределена по закону Бернулли. Т.е. $P(X=1)=p, P(X=0)=(1-p)$. Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$$

2. Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Т.е. $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-1-m} = np$$

Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины

Пусть случайная величина X непрерывна. Плотность распределения $f_X(t)$

Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины X называется

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt$$

если:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_X(t)dt < \infty$$

Иначе математическое ожидание случайной величины X не существует.

Пример вычисления математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины

Случайная величина X распределена по нормальному закону Φ_{α,σ^2}.
Математическое ожидание случайной величины X:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha)e^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dt = \alpha$$

Свойства математического ожидания

1. Мат. ожидание константы равно константе. $P(X = C) = 1$, то $EX = C$
2. Линейность. $E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta$
3. Мат. ожидание суммы любых случайных величин есть сумма матожиданий этих величин. Т.е. $E(X + Y) = EX + EY$
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$
5. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$
6. Если $EX = 0$ и $X \geq 0$, то $P(X = 0) = 1$

Моменты

Моментом k**-го порядка** дискретной случайной величины X называется

$$EX^k = \sum_i y_i^k P(X = y_i)$$

Моментом k**-го порядка** абсолютно непрерывной случайной величины X называется

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f_X(t)dt$$

Момент k-го порядка существует тогда и только тогда, когда $E|X|^k < \infty$

Величина $E(X - EX)^k$ называется **центральным моментом** k **-го порядка**.

Дисперсия

Второй центральный момент случайной величины X называется **дисперсией**

$$DX = E(X - EX)^2$$

Дисперсия показывает, на сколько велик разброс значений случайной величины.

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - (EX)^2$$

Дисперсия дискретной случайной величины X:

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty}(y_i - EX)^2 P(X = y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 P(X = y_i) - (EX)^2$$

Дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины X:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(t - EX)^2 f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt - (EX)^2$$

Величина $\sqrt{DX}$ называется **стандартным уклонением**.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия неотрицательная величина $DX \geq 0$
2. Дисперсия константы равна нулю $DC = 0$, т.к. $EC = C$
3. Если $DX = 0$, то $P(X = C) = 1$ для некоторой константы C
4. $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 DX$
5. Если X и Y независимы, то $D(X \pm Y) = DX + DY$

Доказательство:

$$D(X \pm Y) = E(X \pm Y - E(X \pm Y))^2 = E((X - EX) \pm (Y - EY))^2 =$$

$$= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2 \pm 2E((X - EX)(Y - EY))$$

Ковариация $Cov(E, X) = E((X - EX)(Y - EY))$ для двух независимых случайных величин равна нулю:

$$Cov(E, X) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(X - EX)E(Y - EY) = 0$$

Примеры вычисления дисперсии

1. Случайная величина X имеет распределение Бернулли. Вычислим дисперсию:

$$EX^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \qquad EX = p, \qquad DX = p - p^2 = p(1-p)$$

2. Случайная величина X распределена по нормальному закону Φ_{α,σ^2}. Вычислим дисперсию. Для этого введем случайную величину $Y = \frac{X-\alpha}{\sigma}$. Случайная величина Y распределена по стандартному нормальному закону $\Phi_{0,1}$. Т.к. $X = \sigma Y + \alpha$, то $DX = \sigma^2 DY$

$$EY^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} td\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Задачи

1. Случайная величина имеет распределение Пуассона. Вычислить мат. ожидание и дисперсию.
2. Случайная величина имеет Геометрическое распределение. Вычислить мат. ожидание и дисперсию.
3. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Вычислить мат. ожидание и дисперсию.
4. Случайная величина имеет показательное распределение с параметром α. Вычислить мат. ожидание и дисперсию.
5. На отрезок длины l произвольным образом бросаются две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними. Вычислить мат. ожидание и дисперсию.
6. В круг радиуса R бросается точка. Вычислить мат. ожидание и дисперсию для расстояния от центра круга до точки.

Лекция 19. Коэффициент корреляции

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Коэффициент корреляции

Коэффициентом корреляции называется

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{E((X-EX)(Y-EY))}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

Вводится тогда, когда существуют вторые моменты EX^2, EY^2 и $DX > 0, DY > 0$(случайные величины X и Y не константы)

Для абсолютно непрерывных случайных величин X и Y необходимо знать совместную функцию плотности распределения, т.к.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

Свойства коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции не может превышать 1

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

2. $|\rho(X, Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда слуяайные величины линейно связаны, т.е. для некоторых $a \neq 0$ и b $Y = aX + b$
3. Если X и Y независимы, то

$$\rho(X, Y) = 0$$

(обратное не утверждение не имеет места)

Задачи

1. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

X/Y	-1	0	1
-1	$7/24$	$1/12$	$1/8$
1	$1/8$	$1/6$	$5/24$

   Найти коэффициент корреляции.

2. Точка бросается в треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(2, 0)$. Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки. Вычислить коэффициент корреляции.

Лекция 20. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Вожаков Иван Сергеевич
Качулин Дмитрий Игоревич

Сходимость по вероятности

Случайные величины $X_1, X_2, \dots$ заданы на одном вероятностном пространстве

Последовательность $\{X_n\}$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, если для любого числа $\epsilon > 0$

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0, \qquad \text{при } n \to \infty$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{P} X$

Пример: Пространство $\Omega = [0, 1]$. Для любого интервала $A \subset \Omega$, вероятность $P(A) = \lambda(A)$- длина интервала. Пусть случайные величины $X_n(\omega)$:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$X(\omega) = 0$.

1) Если $\epsilon > 1$, то $P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$

2) Если $\epsilon \leq 1$, то $P(|X_n - X| \geq \epsilon) = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$

Свойства сходимости по вероятности

1. Если $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$, то $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$
2. $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a_1$, $X_n^{(2)} \xrightarrow{P} a_2$, $X_n^{(k)} \xrightarrow{P} a_k$, функция $g : \Re^k \to \Re$ непрерывна в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$. Тогда при $n \to \infty$

$$g(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{P} g(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

3. Если $X_n \xrightarrow{P} a$, а числовая последовательность $\alpha_n \to 0$, то

$$\alpha_n X_n \to 0$$

при $n \to \infty$

Закон больших чисел

Теорема (Закон больших чисел)

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ *независимы и одинаково распределены и* $EX_i^2 < \infty$. *Пусть* $a = EX_i$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \to a$$

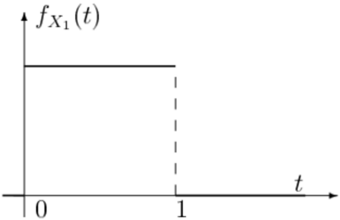
Теорема (Бернулли)

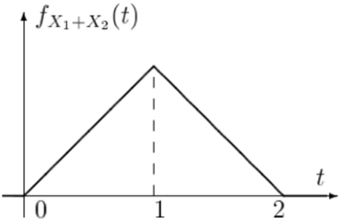
Пусть S_n *- число успехов в* n *испытаниях схемы Бернулли,* p*-вероятность успеха в одном испытании. Тогда при* $n \to \infty$

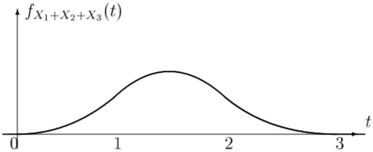
$$\frac{S_n}{n} \to p$$

Задача

Пусть случайные независимые величины $X_1, X_2, \dots$ имеют одинаковое равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределения вероятностей случайных величин $X_1 + X_2$ и $X_1 + X_2 + X_3$.







Центральная предельная теорема

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots$ *независимы и одинаково распределены и* $EX_1^2 < \infty$. *Пусть* $a = EX_1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\sigma^2 = DX$
Тогда для любого y *при* $n \to \infty$

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < y\right) \to \Phi_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Для вычисления вероятностей $P(\alpha \le S_n \le \beta)$ удобнее пользоваться следующей формой:

$$P\left(A \le \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le B\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{B} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

где

$$A = \frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \qquad B = \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

Теорема Муавра-Лапласа

Частный случай Центральной предельной теоремы:

Теорема (Муавра-Лапласа)

Пусть S_n- число успехов в n испытаниях схемы Бернулли, а p - вероятность успеха в одном испытании. Тогда при $n \to \infty$:

$$P\left(A \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq B\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Пример

В некотором производстве вероятность для отдельной детали оказаться бракованной равна 0.005. Какова вероятность того, что в партии из 10000 деталей бракованных окажется не более 70?

$$p = 0.005, \qquad n = 10000, \qquad \sqrt{np(1-p)} \approx 7.05 \qquad np = 50$$

Необходимо найти вероятность, что количество бракованных деталей (m) удовлетворяет неравенствам $0 \le m \le 70$. Пользуясь теоремой Муавра-Лапласа

$$P(-7.09 \le \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2.84) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7.09}^{2.84} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Искомая вероятность $P = 0.9977$

Задачи

1. Игральная кость бросается $n = 8000$ раз. Необходимо найти вероятность того, что частота выпадения цифры 6 будет отклоняться от вероятности $\frac{1}{6}$ не более чем на $\frac{1}{80}$.
2. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0.63. Сколько выстрелов необходимо произвести, чтобы с вероятностью 0.9 получить не менее 10 попаданий?
3. Известно, что вероятность рождения мальчика примерно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных окажется мальчиков не больше чем девочек?
4. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного лица, родственникам выплачивается сумма в 100000 рублей. Какова вероятность того, что
   а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке?
   б)его доход превысит 6000000 рублей?

Приближение Пуассона в схеме Бернулли

Теорема (Пуассона)

Пусть в схеме Бернулли $n \to \infty$ *и при этом* $p = p(n) \to 0$ *так, что* $np(n) \to \lambda > 0$. *Тогда для любого* $k = 1, 2, \ldots$

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Задача

Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук.
а) Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл?
б) Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?