МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет Кафедра общей физики физического факультета

А.В. Иванов

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ОПТИКА

Курс лекций

Новосибирск 2014 **Иванов А.В.** Электродинамика и оптика. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2014. – 125 с.

Курс лекций включает в себя три основных раздела: «Электромагнитные волны», «Оптика», «Электродинамика частиц и волн». Основное внимание в курсе сосредоточено на анализе волновых явлений и процессов, возникающих в этих областях физики.

Курс лекций предназначен для студентов третьего курса физического факультета Китайско-российского института Хэйлунцзянского университета. Он может быть полезен также студентам физического и геолого-геофизического факультетов НГУ, преподавателям физики.

> Курс лекций подготовлен в рамках реализации проекта "Развитие сотрудничества НГУ с Хэйлунцзянским университетом"

> > (a) Новосибирский государственный университет, 2014

Оглавление

Часть 1.	Введение	5
1.1.	Введение в векторный анализ	5
1.2.	Электрическое поле в вакууме	9
1.3.	Электрическое поле в среде	11
1.4.	Магнитное поле в вакууме	13
1.5.	Магнитное поле в среде	14
Часть 2.	Электромагнитные волны	16
2.1.	Система уравнений Максвелла	16
2.2.	Свободное электромагнитное поле	16
2.3.	Плоские волны	17
2.4.	Плоские монохроматические волны	20
2.5.	Поток энергии электромагнитного поля	21
2.6.	Сферические волны	23
2.7.	Шкала электромагнитных волн	.24
2.8.	Отражение и преломление электромагнитных волн	25
2.9.	Формулы преобразования Фурье	33
2.10.	Уравнения Максвелла в фурье-представлении	. 39
2.11.	Дисперсия света	40
2.12.	Электронная теория дисперсии Лоренца	41
2.13.	Фазовая и групповая скорости	.44
2.14.	Стоячие волны	46
2.15.	Генерация электромагнитных колебаний	48
2.16.	Резонаторы	. 49
2.17.	Волноводы	52
Часть 3.	Оптика	56
3.1.	Геометрическая оптика	56
3.2.	Оптические системы	60
3.3.	Интерференция	66
3.4.	Когерентность	. 69
3.5.	Основные методы получения интерференционной картины	70
3.6.	Пространственная когерентность	71
3.7.	Временная когерентность	72

3.8.	Интерферометры	
3.9.	Дифракция	
3.10.	Спектры излучения	
3.11.	Дифракция Брэгга	
Часть 4.	Электродинамика частиц и волн	
4.1.	Волновое уравнение для потенциалов	
4.2.	Запаздывающие потенциалы	
4.3.	Дипольное излучение	110
4.4.	Магнитно-дипольное излучение	
4.5.	Квадрупольное излучение	113
4.6.	Излучение антенны	
4.7.	Интерференционный способ управления	диаграммой
направленне	ости	117
4.8.	Антенны	
4.9.	Радиотелескоп	

Часть 1. Введение

1.1. Введение в векторный анализ

Скалярные и векторные поля

Говорят, что в какой-либо области пространства определено *скалярное поле*, если каждой точке этой области соответствует свое значение скалярной величины. Аналогично определение *векторного поля* – каждой точке области пространства соответствует свое значение векторной величины.

Скалярные поля обычно обозначаются при помощи греческих букв: $\varphi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$. Радиус-вектор **r** обозначает рассматриваемую точку пространства. Пример скалярного поля – распределение температуры в теле. Векторные поля обозначаются при помощи заглавных латинских букв: **A**(**r**), **B**(**r**). Физические примеры векторных полей – поле скоростей движущейся среды (воды или воздуха), поле силы тяжести. Примеры скалярных и векторных полей показаны на рисунке 1.



Рисунок 1. Скалярные и векторные поля на примере распределения температуры и скоростей частиц в среде.

Интеграл вдоль кривой, по поверхности и по объему.

В дальнейшем нам часто придется рассматривать следующие интегралы от скалярных и векторных полей:

а) интеграл от векторного поля вдоль какой-либо кривой

$$\int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{l},$$

б) интеграл от векторного поля по какой-либо поверхности (поток поля)

$$\iint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} = \iint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

в) интеграл от скалярного поля по какому-либо объему

$$\iiint \varphi(\mathbf{r}) \, dV$$

Если поверхность или кривая являются замкнутыми, то используются специальные обозначения интегралов:

$$\int \rightarrow \oint \quad , \quad \iint \quad \rightarrow \oint \int \quad .$$

Интеграл вдоль замкнутой кривой называется *циркуляция*. Для замкнутой поверхности вектор нормали направлен наружу.

Приведем примеры использования этих интегралов в физике.

Плотность и плотность потока, работа силы

Плотность однородного тела определяется как масса этого тела, деленная на его объем:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Если тело неоднородное, то его плотность меняется от точки к точке. Плотность в точке необходимо в этом случае рассчитывать следующим образом:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta M}{\delta V}.$$

Плотность $\rho(\mathbf{r})$ является скалярным полем; масса тела вычисляется при помощи интеграла от плотности по объему тела:

$$M = \iiint \rho(\mathbf{r}) \, dV$$

Пусть задана плоская поверхность площадью *S* с вектором нормали \mathbf{n}_0 . Пусть какое-либо вещество движется в пространстве, проходя через эту поверхность. *Поток вещества* через поверхность есть масса вещества, прошедшего через эту поверхность за единицу времени. Поток однородного вещества с плотностью ρ , имеющего одинаковую скорость **v**, равен

$$\Phi = \frac{M}{T} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}, \ \mathbf{S} = S \mathbf{n}_0$$

В случае неоднородного вещества, имеющего разную скорость в различных точках, необходимо ввести *вектор плотности потока*

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

Векторы $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ являются векторными полями. Поток вещества через поверхность в этом случае будет равен интегралу от плотности потока по этой поверхности:

$$\Phi = \iint \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS}.$$

Наконец, приведем пример использования интеграла от векторного поля вдоль кривой. Пусть на какое-либо тело в каждой точке пространства действует сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

6

Пример – сила тяжести. Если тело перемещается в пространстве (из точки 1 в точку 2), то эта сила совершает работу, изменяя энергию тела:

$$A = \Delta W = \int_{1}^{2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dl}.$$

Дифференциальные операции над полями

Нахождение производной $\frac{df}{dx}$ называют операцией дифференцирования. При помощи дифференцирования в каждой точке из одной функции получается другая:

$$f(x) \to f'(x)$$

Функции f'(x) входят в дифференциальные уравнения, которыми описываются многие физические явления. Похожие операции можно ввести и для скалярных и векторных полей.

Пусть в пространстве задано скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$ или векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Возьмем точку \mathbf{r}_0 и окружим ее объемом δV , имеющим поверхность δS . Можно вычислить следующие интегралы:

$$\oint_{\delta S} \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{n} \, dS \,, \qquad \oint_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dS \,, \qquad \oint_{\delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dS \,.$$

Будем уменьшать δV , поверхность δS при этом также будет уменьшаться. Построим величину

$$\lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S} \dots \, dS.$$

Градиентом скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r}_0 называют предел

$$\lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S} \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{n} \, dS = grad \, \varphi(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(\mathbf{r}).$$

Дивергенция векторного поля A(r):

$$\lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dS = div \, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Ротор векторного поля $A(\mathbf{r})$:

$$\lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dS = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Таким образом, мы ввели одну дифференциальную операцию для скалярного поля и две дифференциальные операции для векторного поля. Они очень широко применяются в физике и, в частности, в электродинамике.

Рассмотрим операцию градиент. В результате ее применения к скалярному полю получается вектор, направление которого совпадает с направлением быстрейшего изменения этого поля, а модуль градиента есть величина этого изменения. Если есть скалярное поле, то градиент дает векторное поле, к которому, в свою очередь, можно применить две операции:

- rot grad $\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$,
- *div grad* $\varphi(\mathbf{r}) = \Delta \varphi(\mathbf{r})$ оператор Лапласа.

Если есть векторное поле, то к нему возможно применить операции дивергенции и ротора, в результате которых получается скалярное и векторное поля соответственно. К ним, в свою очередь, можно применить операции дивергенции, ротора и градиента:

- $div rot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv 0$,
- rot rot $A(\mathbf{r})$,
- grad div $A(\mathbf{r})$.

При помощи последних двух операции можно определить векторный оператор Лапласа

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = grad \ div \ \mathbf{A}(\mathbf{r}) - rot \ rot \ \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Для декартовой системы координат оператор **Г** (набла) имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Следовательно,

$$grad \varphi(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(x, y, z) = \mathbf{e}_{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{e}_{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$div \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \frac{\partial A_{y}}{\partial y} + \frac{\partial A_{z}}{\partial z},$$
$$rot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z) = \left| \frac{\mathbf{e}_{x}}{\partial x} \frac{\mathbf{e}_{y}}{\partial y} \frac{\mathbf{e}_{z}}{\partial z} \right|.$$

Оператор Лапласа в декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Векторный оператор Лапласа

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \, \Delta A_x + \mathbf{e}_y \, \Delta A_y + \mathbf{e}_z \, \Delta A_z.$$

Интегральные теоремы векторного анализа

Существует две теоремы, которые играю важную роль в векторном анализе. Первая из них называется *теоремой Остроградского-Гаусса*. Пусть имеется объем V, ограниченный поверхностью S. Тогда поток векторного поля $A(\mathbf{r})$ через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объему, заключенному внутри этой поверхности:

$$\oint_{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dS = \iiint_{V} \, div \, \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV.$$

Вторая теорема называется *теоремой Стокса*. Пусть поверхность S односязна и ограничена замкнутой кривой L. Тогда для векторного поля $A(\mathbf{r})$ справедливо

$$\oint_L \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dl} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

где вектор **dl** направлен вдоль касательной к кривой *L*, а его модуль |**dl**| = dlОриентация **n** должна быть согласованной с направлением касательной по правилу правого винта.

1.2. Электрическое поле в вакууме

Мы знаем, что в природе существуют электрические заряды, и эти заряды взаимодействуют друг с другом. Если заряженное тело имеет маленький размер, то его называют *точечным зарядом*. Взаимодействие двух неподвижных точечных зарядов выражается согласно закону Кулона

$$\mathbf{F} = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

Любое заряженное тело создает электрическое поле. Это электрическое поле может быть описано векторным полем **E** – *вектором напряженности* электрического поля. Электрическое поле неподвижного точечного заряда выражается в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q \, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

r′ – точка, где находится заряд, **r** – точка наблюдения. Поскольку в рассматриваемом случае поле не зависит от времени, его называют электростатическим полем. Взаимодействие двух точечных зарядов определяется как взаимодействие поля, создаваемого одним из зарядов в точке нахождения второго заряда, с этим вторым зарядом

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2)$$

Важную роль играет *принцип суперпозиции* – напряженность электростатического поля, создаваемого в данной точке системой зарядов, есть сумма напряженностей полей отдельных зарядов.

Плотность заряда

Очень часто имеется не несколько, а очень много точечных зарядов, величина каждого из них очень мала. В каких-то областях пространства этих зарядов может быть много, в каких-то – мало. Введем распределение *плотности заряда* в пространстве

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta Q}{\delta V}.$$

9

Если есть какой-либо объем *V*, то полная величина заряда внутри этого объема вычисляется интегрированием плотности заряда по этому объему

$$Q = \iiint \rho(\mathbf{r}) \, dV.$$

Проведем аналогию с механикой – тела можно рассматривать как точечные объекты, обладающие какой-либо массой. Более подробную информацию о том, как распределено вещество в пространстве, дает плотность вещества.

Если известна плотность заряда, то при помощи принципа суперпозиции можно найти поле, создаваемое этим зарядом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'.$$

Уравнения электрического поля в вакууме

Из закона Кулона можно получить, что при заданной плотности электрическое поле неподвижных зарядов подчиняется уравнению

$$div \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}).$$

Для электрического поля, как и для любого центрального поля, справедливо

$$rot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

Электростатический потенциал

Векторное поле **E**(**r**) может быть описано при помощи скалярного поля φ (**r**), называемого электростатическим потенциалом

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -grad \,\varphi(\mathbf{r}).$$

Из уравнения $div \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$ следует, что потенциал должен подчиняться уравнению

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}).$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона.

Потенциал, создаваемый неподвижным точечным зарядом, равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Если известно распределение плотности заряда, то при помощи принципа суперпозиции можно найти потенциал, создаваемый этим зарядом

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Как покажем далее, эта формула является решением уравнения Пуассона с нулевым граничным условием на бесконечности. Отметим, что скалярный потенциал определен с точностью до константы.

1.3. Электрическое поле в среде

Вспомним определение: *среда* – вещество с очень большим числом частиц (твердое тело, жидкость, газ, песок). В присутствии электрического поля среда может менять это электрическое поле.

Вспомним еще определения: электрический ток – направленное движение зарядов. Если вещество проводит электрический ток, то оно называется проводником, если нет – диэлектриком.

Электрический диполь



Рисунок 2. Диполь.

Систему из двух зарядов одинаковой величины, но разных по знаку, называют диполем. Диполь и силовые линии создаваемого им электрического поля приведены на рисунке 2. Характеристикой диполя является *дипольный момент* – вектор, определенный как

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$
.

Здесь q – величина зарядов, **d** – вектор, протянутый от отрицательного заряда к положительному. Можно показать, что дипольный момент является характеристикой любой системы зарядов, полный заряд которой равен нулю (для простоты так же будем называть такую систему диполем). Общее выражение для дипольного момента

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}'_i; \ \mathbf{p} = \iiint \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$$

Первая формула записана для системы точечных зарядов, вторая – для системы с заданным распределением плотности заряда.

Потенциал, создаваемый диполем на достаточно большом расстоянии

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

поле диполя

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -grad \ \varphi(\mathbf{r}) = 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Поляризация диэлектриков

В случае наличия среды под воздействием внешнего электрического поля она поляризуется, т.е. каждый отдельный кусочек среды сам начинает

быть источником электрического поля. Есть несколько механизмов поляризации, простейшим примером являются диэлектрики, молекулы которых обладают ненулевым дипольным моментом даже в отсутствии внешнего электрического поля, например, вода (см. рисунок 3).



Рисунок 3. Молекула воды.

Для описания воздействия электрического поля на среду вводится *вектор поляризации*. Точку наблюдения в среде окружают малым объемом V и вычисляют дипольный момент среды в этом объеме. Тогда вектор поляризации

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{V}.$$

Если внешнего поля нет, то молекулы ориентированы хаотично, и $\mathbf{p} = 0$. В присутствии электрического поля молекулы начинают ориентироваться вдоль поля, $\mathbf{p} \neq 0$.

Заряды в среде можно разделить на внешние и связанные, принадлежащие молекулам самой среды:

$$div \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{\rm CB} + \rho).$$

Оказывается, что

$$\rho_{\rm CB} = -div \mathbf{P}, \quad div (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = div \mathbf{D} = 4\pi \rho.$$

Здесь введен вспомогательный вектор **D** – *вектор* электрической индукции. Этот вектор связан с вектором напряженности электрического поля выражением

 $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}.$

Связь между **D** и **E** называется *материальным уравнением* среды. В самом простом случае вектор поляризации линейно зависит от внешнего поля:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi) = \varepsilon \mathbf{E},$$

Величина ε называется *диэлектрической проницаемостью* и зависит от вещества среды. Есть среды, в которых направления векторов **Р** и **Е** не совпадают. Такие среды называются анизотропными, в этом случае ε представляет собой тензор

$$D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}$$

Вообще говоря, слово изотропность означает одинаковость физических свойств во всех направлениях.

В среде одно из уравнений электрического поля принимает вид

$$div \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}),$$

где под $\rho(\mathbf{r})$ следует понимать плотность внешних, внесенных в среду зарядов. Теорема Остроградского–Гаусса позволяет связать поток вектора **D** через границу объема с полным зарядом Q, заключенным внутри этого объема:

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi \iiint \rho dV = 4\pi Q.$$

Это есть теорема Гаусса.

Найдем уравнение, которому подчиняется электростатический потенциал в среде. Запишем

$$div \mathbf{D} = div(\varepsilon \mathbf{E}) = -div(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = 4\pi\rho.$$

В случае однородной среды, когда в каждой точке величина диэлектрической проницаемости одинакова, *є* можно вынести и получить уравнение Пуассона для электростатического потенциал в среде

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r})/\varepsilon.$$

1.4. Магнитное поле в вакууме

Мы знаем, что движущиеся электрические заряды взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие отличается от взаимодействия согласно закону Кулона. Проще всего это взаимодействие наблюдать при рассмотрении двух токов. Количественно взаимодействие двух тонких отрезков с токами выражается согласно закону Ампера

$$\mathbf{dF} = \frac{1}{c} I_1 I_2 \frac{\mathbf{dI}_2 \times (\mathbf{dI}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

Токи (движущиеся заряды) взаимодействуют при помощи магнитного поля. Это магнитное поле может быть описано векторным полем, обозначаемым **B**(**r**) – *вектор индукции магнитного поля*. Магнитное поле выражается следующим образом (закон Био-Савара)

$$\mathbf{dB}(\mathbf{r}) = \frac{l}{c} \frac{\mathbf{dI} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}; \qquad \mathbf{dB}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Векторный потенциал магнитного поля

По аналогии с электрическим полем, поле B(r) может быть описано при помощи потенциала. Однако, в данном случае необходимо использовать векторный потенциал A(r):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = rot \, \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

По известному полю **В** векторный потенциал может быть определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Благодаря этому, можно потребовать выполнения условия $div \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Тогда векторный потенциал должен удовлетворять уравнению

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'; \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{l}{c} \oint \frac{\mathbf{dl}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Основные уравнения магнитного поля постоянных токов

Из закона Био-Савара можно вывести два уравнения магнитного поля. Первое уравнение выражает отсутствие магнитных зарядов

$$div \mathbf{B} = 0$$

Второе уравнение

$$rot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Вместе эти уравнения образуют полную систему основных уравнений магнитного поля постоянных токов.

1.5. Магнитное поле в среде

Магнитный диполь



Рисунок 4. Магнитный диполь.

По аналогии с электрическим полем, систем токов вдали от ее можно рассматривать как магнитный диполь, характеризуемый вектором *магнитного момента*. Магнитный момент плоского витка с током *I* площадью *S* равен

$$\mathbf{m} = \frac{IS}{c}\mathbf{n}$$

силовые линии поля такого витка представлены на рисунке 4. Магнитный момент произвольной системы

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \iiint [\mathbf{r}' \times j(\mathbf{r}')] dV'; \quad \mathbf{m} = \frac{l}{2c} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'.$$

Векторный потенциал магнитного диполя

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

поле магнитного диполя

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 3\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

Намагниченность магнетиков



Рисунок 5. Намагничение среды.

В случае наличия среды под воздействием внешнего магнитного поля она намагничивается, т.е. каждый отдельный кусочек среды сам начинает быть источником магнитного поля. Этот процесс можно представить как ориентацию магнитных моментов молекулярных токов (см. рисунок 5). Для описания воздействия магнитного поля на среду аналогично вектору поляризации вводится *вектор намагниченности*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{V}.$$

Токи в магнетике можно разделить на молекулярные и внешние

$$rot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{мол}} + \mathbf{j}).$$

Оказывается, что

$$\mathbf{j}_{\text{MOЛ}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \operatorname{rot} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Вспомогательный вектор **Н** – *вектор напряженности магнитного поля*. Для линейных сред

$$\mathbf{M} = k\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

Величина µ называется *магнитной проницаемостью* и зависит от вещества среды.

В среде одно из уравнений магнитного поля заменяется на

$$rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

где под $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ следует понимать плотность внешних, внесенных в среду токов. Теорема Стокса позволяет получить из этого уравнения *закон полного тока*:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{dI} = \frac{4\pi}{c} \iint \mathbf{j} \cdot \mathbf{dS} = \frac{4\pi}{c} I$$

Часть 2. Электромагнитные волны

2.1. Система уравнений Максвелла

До сих пор мы рассматривали случай, когда заряды, токи, электрическое и магнитное поля не зависят от времени. В случае, когда поля и их источники (заряды и токи) зависят от времени, полученные уравнения необходимо объединить в одну систему уравнений, называемую *системой уравнений Макс-велла*:

$$rot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad div \mathbf{B} = 0,$$
$$rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad div \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Видно, что источником электрического поля являются не только заряды, но и изменяющееся во времени магнитное поле; источником магнитного поля являются не только токи, но и изменяющееся во времени электрическое поле. Таким образом, в нестационарном случае существует электромагнитное поле. Это поле состоит из электрического и магнитного полей, которые являются источниками друг друга.

Система уравнений Максвелла допускает существование электромагнитного поля, не связанного ни с какими токами или зарядами. Иначе говоря, токи и заряды могут порождать электромагнитное поле, которое сколь угодно далеко может оторваться от породивших это поле источников и существовать в виде электромагнитной волны.

2.2. Свободное электромагнитное поле

Перейдем к подробному изучению электромагнитных волн. Общее рассмотрение является весьма сложной проблемой, поэтому ограничимся случаем однородной непроводящей среды без зарядов и токов (или вакуумом). При этом

$$\rho(\mathbf{r}) = 0, \ \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0;$$

$$\varepsilon, \ \mu = const.$$

Уравнения Максвелла и материальные уравнения среды в этом случае

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad div\mathbf{B} = 0,$$
$$rot\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad div\mathbf{D} = 0,$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

Возьмем частную производную по времени от 1-го уравнения 2-ой пары, и, поменяв порядок дифференцирования (не забывайте, что ротор есть дифференциальная операция, действующая на пространственные координаты) и используя 1-го уравнение 1-ой пары, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot \mathbf{H} = rot \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{c}{\mu} rot rot \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Из 2-го уравнения 2-ой пары, окончательно получаем

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Аналогичное уравнение описывает и магнитное поле:

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

В прямоугольной системе координат эти уравнения для векторов превращаются в три скалярных уравнения для каждой из компонент

$$\Delta E_{x,y,z} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_{x,y,z} = 0.$$

Такие уравнения называют *волновыми уравнениями*. Задолго до создания теории Максвелла, подобное уравнение было получено и исследовано в механике и акустике. Впервые же это было сделано учеными Д'Аламбером и Эйлером при изучении упругих колебаний струны.

Общее решение волнового уравнения

Пусть имеется одномерный случай: функция u = u(x, t) должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v$$
 - константа

Общее решение такого уравнения можно записать в виде

$$u(x,t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt).$$

Если заданы начальные условия

$$u(x,t=0) = g(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = f(x)$$

то общее решение имеет вид (формула д'Аламбера)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(g(x-vt) + g(x+vt) \right) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} f(\xi) d\xi.$$

ar I aat

Если начальные условия такие, что остается только одно решение

$$u(x,t) = g_1(x - vt),$$

то оно описывает волну, двигающуюся со скоростью v в положительном по x направлении.

2.3. Плоские волны

Вернемся к волновому уравнению для **E** и **H**. Наиболее просто решение волнового уравнения выглядит в случае, если все величины зависят только от

одной декартовой координаты, например, от *z*, а при изменении других координат не изменяются. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а любая компонента векторов Е и Н подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_{x,y,z}}{\partial t^2},$$
$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Общим решением таких уравнений является сумма двух независимых друг от друга функций: одна функция описывает волну, двигающуюся вдоль оси *z* в положительном направлении, другая – описывает волну, двигающуюся вдоль оси *z* в отрицательном направлении.

Запишем уравнение

$$rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

в декартовой системе координат

$$rot\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{x} & \boldsymbol{e}_{y} & \boldsymbol{e}_{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{x} & E_{y} & E_{z} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_{x} \frac{\partial E_{y}}{\partial z} + \boldsymbol{e}_{y} \frac{\partial E_{x}}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \Big(\boldsymbol{e}_{x} \frac{\partial H_{x}}{\partial t} + \boldsymbol{e}_{y} \frac{\partial H_{y}}{\partial t} + \boldsymbol{e}_{z} \frac{\partial H_{z}}{\partial t} \Big).$$

Отсюда получается связь между компонентами электрического и магнитного полей в плоской волне:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

Аналогично рассмотрим уравнение

$$rot\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

В декартовой системе координат это уравнение

$$rot\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{x} & \boldsymbol{e}_{y} & \boldsymbol{e}_{z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{x} & H_{y} & H_{z} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_{x} \frac{\partial H_{y}}{\partial z} + \boldsymbol{e}_{y} \frac{\partial H_{x}}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \Big(\boldsymbol{e}_{x} \frac{\partial E_{x}}{\partial t} + \boldsymbol{e}_{y} \frac{\partial E_{y}}{\partial t} + \boldsymbol{e}_{z} \frac{\partial E_{z}}{\partial t} \Big),$$

Получаем еще одни набор уравнений

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Далее будем рассматривать только волны, распространяющиеся в положительном направлении:

$$E_{x} = E_{x}(z - vt), E_{y} = E_{y}(z - vt), E_{z} = E_{z}(z - vt)$$
$$H_{x} = H_{x}(z - vt), H_{y} = H_{y}(z - vt), H_{z} = H_{z}(z - vt)$$

18

Подставим эти выражения в уравнения и выполним интегрирование. Все константы интегрирования, как постоянные поля, не влияющие на распространение электромагнитных колебаний, положим равными нулю.

$$\begin{split} E_{x}(z,t) &= E_{x}(z-vt), \ H_{x}(z,t) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{y}(z-vt), \\ E_{y}(z,t) &= E_{y}(z-vt), \ H_{y}(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{x}(z-vt), \\ E_{z}(z,t) &= 0, \ H_{z}(z,t) = 0. \end{split}$$

Основные свойства плоских волн

Из полученных выражений следуют основные свойства плоских электромагнитных волн:

- 1. колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны;
- 2. вектора **E** и **H** перпендикулярны друг другу и образуют взаимно перпендикулярную тройку векторов вместе с вектором вдоль направления распространения волны;
- 3. по разным поперечным направлениям амплитуда колебаний различна (эта характерная особенность электромагнитных колебаний называется *поляризацией*);
- 4. энергия полей одинакова, поскольку $\varepsilon E^2 = \mu H^2$.

Продольные и поперечные волны



Рисунок 6. Продольные и поперечные волны.

Любой распространяющийся в пространстве волновой процесс может быть охарактеризован двумя векторами – направлением распространения и амплитудой колебаний. Если амплитуда колебаний параллельна направлению распространения волны, то такая волна называется плоской (см. рисунок 6). Пример такой волны – звуковые колебания в воздухе. Если амплитуда перпендикулярна направлению распространения, то волна называется поперечной. Поперечной является плоская электромагнитная волна, поскольку в ней колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

2.4. Плоские монохроматические волны

Важнейшим частным случаем плоских волн является их гармоническая зависимость:

$$E_{1,2} \sim \cos(k(z-vt) + \varphi_{1,2}) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_{1,2}).$$

Такие волны называются *монохроматическими*. Введенный вектор **k** называют *волновым вектором*, направлен вдоль направления распространения волны. Модуль волнового вектора $k = |\mathbf{k}|$ называют *волновым числом*, оно связано с частотой ω и пространственной длиной волны колебаний λ следующими соотношениями:

$$\omega = kv, \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Поляризация

Пусть

$$E_{x}(z,t) = E_{1}\cos(kz - \omega t),$$

$$E_{y}(z,t) = E_{2}\cos(kz - \omega t + \varphi).$$

Из выражений для E_x и E_y можно исключить зависимость от времени и координаты; при этом получится следующее выражение:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_1}\frac{E_y}{E_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

Это выражение задает на плоскости координат E_x и E_y эллипс. Вектор **E** направлен из начала координат в какую-либо точку на этом эллипсе. При фиксированном значении координаты *z* конец вектора **E** при изменении времени движется вдоль эллипса. То же происходит и при фиксированном моменте времени при изменении координаты *z*.

В общем случае плоская электромагнитная волна имеет эллиптическую поляризацию. В зависимости от направления вращения вектора **E** вдоль эллипса есть левая и правая поляризации.

Первый частный случай – линейная поляризация, при которой одна из амплитуд E_1 , или E_2 , равна нулю. Колебания происходят только вдоль одного поперечного направления. Это направление вместе с направлением распространения образуют плоскость поляризации. Для линейной поляризации разность фаз φ должна быть равна нулю или кратна π .

Второй частный случай – *круговая поляризация*, когда $E_{1'} = E_{2'}$. Условие круговой поляризации: $\varphi = \pi/2 + n\pi$, $E_1 = E_2$.

Любую эллиптически поляризованную волну можно представить как сумму двух линейно поляризованных волн с перпендикулярными плоскостями

поляризации или как сумму двух волн с круговой поляризацией, но с противоположными направлениями вращения вектора **E**.

Поляризатор

Устройство, выделяющее из падающего света только линейной поляризованный в заданном направлений свет, называется поляризатором (линейным). Пример – призма Николя, изображенная на рисунке 7. Эта призма изготовлена из прозрачного кристаллического вещества, в котором свет, имеющий разные поляризации, распространяется в различающихся направлениях (такой эффект называется *двойное лучепреломление*). Потом эти волны окончательно разделяются при помощи эффекта полного внутреннего отражения, который будет рассмотрен далее.



Рисунок 7. Призма Николя.



Рисунок 8. Схема работы поляризатора.

Сейчас поляризаторы – тонкие пленки, которые содержат большое количество мелких кристаллов, имеющих одинаковое направление. Схема работы пленочного поляризатора поясняется на рисунке 8.

2.5. Поток энергии электромагнитного поля

Рассмотрим работу, совершаемую полем над движущимися зарядами. Мощность этой работы, отнесенная к единице объема

$$P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}.$$

Плотность тока можно выразить из одного из уравнений Максвелла:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \Big(c \, rot \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Big).$$

Подставляя эту плотность тока в выражение для мощности и отнимая нулевой член, получающийся из другого уравнения Максвелла

$$\frac{c}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\left(rot\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=0,$$

получаем при перегруппировке членов

$$P = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot rot\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot rot\mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \Big(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big).$$

Далее используем одну из формул векторного анализа

$$div(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot rot\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot rot\mathbf{B}.$$

Вводим обозначения

$$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Окончательно приходим к формуле

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div \mathbf{S} = -P.$$

Полученную формулу можно интерпретировать как локальный закон сохранения энергии электромагнитного поля. Действительно, запишем его в интегральной форме, для какого-либо объема V, окруженного замкнутой поверхностью Σ . Используя теорему Остроградского-Гаусса, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint w \, dV = - \iiint P \, dV - \oiint \mathbf{S} \cdot \mathbf{d\Sigma}.$$

Величина *w* есть плотность энергии электромагнитного поля, интеграл от нее – энергия поля в объеме *V*, следовательно – левый член выражения есть скорость изменения энергии поля в объеме *V*. Первый член в правой части есть убыль энергии поля вследствие произведенной им работы над зарядами. По закону сохранения энергии второй член в правой части должен иметь смысл потока энергии поля наружу, через окружающую объем поверхность Σ . Значит **S** есть плотность потока энергии электромагнитного поля; этот вектор называют *вектором Пойнтинга*.

В плоской электромагнитной волне векторы электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}],$$

n – единичный вектор, направленный вдоль распространения волны. Отсюда получаем вектор Пойнтинга для плоской волны

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{c}}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{c}}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \mathbf{n}.$$

Направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением распространения волны. В плоской волне суммарная плотность энергии равна

$$w = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E^2 = \frac{1}{4\pi} \mu H^2,$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} w \mathbf{n} = w \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \mathbf{n}.$$

Из этой формулы можно заключить, что энергия поля в электромагнитной волне переносится со скоростью распространения этой волны. В случае круговой поляризации величина вектора Пойнтинга не изменяется во времени, в случае линейной поляризации – меняется от максимума до нуля.

2.6. Сферические волны



Рисунок 9. Распространение сферической волны.

Если волна изотропно расширяется от точечного источника или сходится к нему (как показано на рисунке 9), то в сферической системе координат с источником в центре компоненты полей, в силу симметрии задачи, не будут зависеть от угловых координат. Решение волнового уравнения следует искать в виде

$$f = f(r, t)$$

В сферической системе координат

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

В силу симметрии

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

волновое уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Перенеся *r* в правую часть и занеся его под частную производную по времени, получаем уравнение, аналогичное рассмотренному для плоской волны:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf).$$

23

Его решение

$$f(r,t) = \frac{f_1(r-vt)}{r} + \frac{f_2(r+vt)}{r}.$$

2.7. Шкала электромагнитных волн



Рисунок 10. Шкала электромагнитных волн.

По частое (и, соответственно, по длине волны) электромагнитные волны делятся на:

- 1. Сверхдлинные волны ($f < 30 \cdot 10^3$ Гц, $\lambda > 10$ км). Пример сеть переменного тока. Такие волны распространяются по проводам.
- 2. Радиоволны $(30 \cdot 10^3 < f < 30 \cdot 10^9 \ \Gamma u$, $10 \ km > \lambda > 1 \ cm$). Используются для радиопередач. Делятся на длинные, средние, короткие, ультракороткие волны. Ультракороткие волны (f от 0.1 до 30 $\Gamma \Gamma u$, λ от 3 м до 1 см) используют в телевидении, радиолокации, сотовой связи.
- Микроволновое и инфракрасное излучение (30 · 10⁹ < f < 4 · 10¹⁴ Гц, 1см > λ > 750нм). Используется для физических и астрономических исследований.
- 4. Видимый свет ($4 \cdot 10^{14} < f < 7.5 \cdot 10^{14}$ Гц, 750нм > λ > 400нм).
- 5. Ультрафиолетовые лучи (7.5 \cdot 10¹⁴ < f < 10¹⁶ Гц, 400нм > λ > 30нм).
- 6. Рентгеновские лучи ($10^{16} < f < 10^{18}$ Гц, 30нм > λ > 0,3 нм). Представленное разделение наглядно изображено на рисунке 10.

2.8. Отражение и преломление электромагнитных волн



Рисунок 11. Плоскость падения.

Рассмотрим поведение волны при ее падении на плоскую границу раздела двух оптически прозрачных сред с различными значениями ε и μ . Часть волны при этом отразится от границы раздела, часть – пройдет из первой среды во вторую. Выделим *плоскость падения* – плоскость, образованную направлением распространения волны и нормалью к границе раздела сред (векторами **k** и **n**); эта плоскость показана на рисунке 11.



Рисунок 12. Падение ТМ волны на границу раздела сред.

Представим падающую волну как сумму двух линейно поляризованных волн; вектор **E** одной из этих волн лежит в плоскости падения, вектор **E** другой волны перпендикулярен этой плоскости. Для первой волны вектор **H** перпендикулярен плоскости падения, такую волну называют TM-волной (Transverse Magnetic). Падение TM-волны на границу раздела сред показано на рисунке 12. Вторую волну называют TE-волной (Transverse Electric). Так же поляризацию TM-волны называют р-поляризацией, а поляризацию TE-волны – s- поляризацией.

На предыдущих курсах при рассмотрении границы раздела двух сред вы получали граничные условия, связывающие величины электрического и магнитного полей во одной среде (непосредственно перед границей) с соответствующими величинами во второй среде (непосредственно за границей). Если нет свободных зарядов и токов проводимости, то плотность поверхностного заряда σ и плотность поверхностного тока **i** равна нулю в каждой точке границы. Граничные условия имеют следующий вид:

$$D_{1n} = D_{2n}, \ \mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}, \ B_{1n} = B_{2n}, \ \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{2\tau}.$$

Рассмотрим ТЕ-волну. Из граничного условия для вектора Е следует

$$E\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)+E''\cos(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-\omega''t)=E'\cos(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega't).$$

Это условие должно выполняться в каждый момент времени для каждой точки границы раздела. Такое возможно, если только

$$\omega = \omega' = \omega'', \ \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$$

Частоты всех трех волн равны. Второе условие можно записать так:

$$k_{x}x + k_{y}y + k_{z}z = k'_{x}x + k'_{y}y + k'_{z}z = k''_{x}x + k''_{y}y + k''_{z}z.$$

Оно должно выполняться в каждой точке на границе раздела сред. На границе изменяются две координаты -x и y, следовательно, коэффициенты при этих координатах равны. Коэффициенты при y:

$$k_y = k'_y = k''_y = 0.$$

Все три волновых вектора лежат в плоскости падения. Если изменять координату x, то второе условие примет вид

$$k \sin(\alpha) = k' \sin(\alpha') = k'' \sin(\alpha'')$$

Модуль волнового вектора определяется только частотой и параметрами среды, значит k = k''. Следовательно, $sin(\alpha) = sin(\alpha'') - угол$ падения равен углу отражения. Отсюда же получаем связь угла падения с углом преломления:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha')} = \frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{n'}{n}.$$

Это выражение называют законом Снеллиуса.

Величина $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ носит название показатель преломления среды.

Для ТМ-волны можно рассмотреть граничные условия для поля **H**. Получится полностью аналогичные выводы. Следовательно, все полученные соотношения справедливы для падающей волны любой поляризации.

Нахождение амплитуд волн

Найденные законы не дают ответа на вопрос о величине амплитуд отраженной и преломленной волн. Рассмотрим ТМ-волну. Из граничных условий для векторов **E** и **H** следует

$$E\cos(\alpha) - E''\cos(\alpha'') = E'\cos(\alpha'), \quad H + H'' = H'.$$

Вспоминая соотношение между величиной электрического и магнитного поля в плоской волне, закон Снеллиуса, учитывая равенство углов падения и отражения, а так же то, что в большинстве сред $\mu \approx 1$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\alpha)}E' = E + E''\\ \frac{\cos(\alpha')}{\cos(\alpha)}E' = E - E'' \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно неизвестных E' и E'', находим:

$$E'_{TM} = E \frac{2 \sin(\alpha') \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')} = E \tau_{TM}, \quad E''_{TM} = E \frac{t g(\alpha - \alpha')}{t g(\alpha + \alpha')} = E \rho_{TM}$$

Аналогично для ТЕ-волны находим используя те же граничных условий

$$E'_{TE} = E \frac{2sin(\alpha')cos(\alpha)}{sin(\alpha+\alpha')} = E\tau_{TE}, \quad E''_{TE} = E \frac{sin(\alpha-\alpha')}{sin(\alpha+\alpha')} = E\rho_{TE}.$$

Полученные соотношения между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн называют формулами Френеля. Эти соотношения разные для разных поляризаций падающей волны. Коэффициенты ρ и τ называются амплитудными коэффициентами отражения и пропускания.

Энергия падающей волны делится между отраженной и преломлённой волнами. Вводят коэффициенты отражения и пропускания, которые равны отношению потока энергии в отраженной и преломленной волнах соответственно к потоку энергии падающей волны; эти коэффициенты обозначаются как R и T = 1 - R.

$$R_{TM} = \rho_{TM}^2 = \frac{tg^2(\alpha - \alpha')}{tg^2(\alpha + \alpha')}, \qquad R_{TE} = \rho_{TE}^2 = \frac{\sin^2(\alpha - \alpha')}{\sin^2(\alpha + \alpha')}$$

Зависимость коэффициентов отражения ТЕ и ТМ волн от угла падения для случаев $n' < n \, \text{м} \, n' < n$ показана на рисунке 13.



Рисунок 13. Зависимость коэффициентов отражения от угла падения.

Угол Брюстера

Как видно из рисунка13, существует угол падения, при котором $R_{TM} = 0$ – одна из поляризаций отраженной волны исчезает! Если на поверхность под этим углом падает волна, имеющая эллиптическую поляризацию, то отраженная волна будет линейно поляризована, причем вектор **E** в ней будет перпендикулярен плоскости падения. Этот угол называют *углом Брюстера*.

Обозначим угол Брюстера через $\alpha_{\rm B}$. Условие, которому он должен удовлетворять

$$tg(\alpha_{\rm B}) = n'/n.$$

Из закона Снеллиуса

$$sin(\alpha'_{\rm b}) = sin(\alpha_{\rm b})\frac{{\rm n}}{{\rm n}'} = cos(\alpha_{\rm b}).$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha_{\rm B} + \alpha_{\rm B}' = \pi/2.$$

Угол между отраженной и преломленной волнами должен составлять 90°, как показано на рисунке 14.



Рисунок 14. Исчезновение одной из поляризаций при падении под углом Брюстера.

Наблюдать эффект исчезновения одной из поляризаций можно при помощи поляризующего фильтра. Подобрав угол наблюдения, можно практически полностью убрать отраженный свет (блики) – см. рисунок 15.



Рисунок 15. Исчезновение бликов.

Если среда, на которую падает свет, поглощающая, то полная поляризация света не достигается ни при каком угле падения.

Эффект полного внутреннего отражения

Для случая n'/n < 1 есть ограничение для угла падения. Точнее, угол падения может быть любой, но тогда из закона Снеллиуса следует, что в случае, если $sin(\alpha) > n'/n$ синус преломленного угла равен

$$sin(\alpha') = \frac{n}{n'}sin(\alpha) > 1.$$

Это означает, что преломленная волна отсутствует. Такой эффект называется полным внутренним отражением. Волна не может выйти из более плотной среды, вся световая энергия возвращается обратно в первую среду. В частности, эффект миража возникает вследствие полного отражения между слоями воздуха с разной температурой. Переход к внутреннему отражению наглядно представлен на рисунке 16.



Рисунок 16. Падение под разными углами.

Критический угол падения, при котором наступает полное внутренне отражение, определяется из условия

$$sin(\alpha') = 1$$
, $sin(\alpha_{\text{KD}}) = n'/n$.

Эффект полного внутреннего отражения находит многочисленные применения в оптических устройствах. Так, он используется в призмах, отклоняющих световой поток, пример показан на рисунке 17.



Рисунок 17. Полное отражение при угле падения, большем чем критический.

Полное отражение используется в оптических волокнах (*световодах*), представляющих собой тонкую стеклянную нить, по которому свет может распространяться на значительные расстояния без заметного затухания (см. рисунок 18). Световоды широко применяются в оптических линиях связи, медицине и других областях.



Рисунок 18. Оптические волокна.

В случае полного внутреннего отражения поле во второй среде равно

$$E' = Ee^{-\frac{z}{l}}e^{i(k'x-\omega t)},$$

$$k' = k\sin(\alpha), \quad l = \frac{n'}{k}\sqrt{\sin^2(\alpha) - (n'/n)^2}.$$

Оно представляет собой неоднородную волну, распространяющуюся параллельно границе раздела, с амплитудой

$$E_0'(z) = Ee^{-\frac{z}{l}},$$

убывающей по мере удаления от границы. Величина *l*, по порядку близкая к длине волны – эффективная глубина проникновения поля во вторую среду. Та-ким образом, при полном внутреннем отражении электромагнитное поле во второй среде существует только в тонком приповерхностном слое.

Эффект полного внутреннего отражения может нарушаться, если во второй среде недалеко от границы раздела поместить третью среду.

Если две стеклянные призмы поместить близко друг от друга, как показано на рисунке 19, то неоднородная преломленная волна попадает во вторую призму и часть светового пучка проходит не отражаясь. Изменяя толщину воздушного зазора, можно менять соотношение интенсивностей отраженной и прошедшей волн.



Рисунок 19. Нарушение эффекта полного внутреннего отражения.

Осталось разобраться с поведением фаз волн при отражении и преломлении. При отражении разность фаз колебаний **E** и **H** изменяется на π , а при преломлении – остается неизменной. Преломление происходит при всех условиях без изменения фазы волн. При отражении происходит изменение фаз, зависящее от условий. Действительно, из формул Френеля следует, что при отражении можно получить отрицательную величину E''. Поскольку всякую отрицательную величину можно записать как $f = |f|e^{i\pi}$, это можно интерпретировать как сдвиг фазы на π при отражении. Об этом эффекте часто говорят как о потере полуволны при отражении.

При падении волн на границу раздела со стороны оптически менее плотной среды при любых углах падения фаза перпендикулярной составляющей напряженности электрического поля в отраженной волне изменяется на π . Фаза параллельной составляющей изменяется лишь при углах падения, меньших угла Брюстера, а при углах падения, больших $\alpha_{\rm B}$, фаза параллельной составляющей остается той же (т. е. в этом случае на π изменяется фаза напряженности магнитного поля).

При падении волн на границу раздела со стороны оптически более плотной среды при любых углах падения фаза перпендикулярной составляющей напряженности электрического поля волны та же (т. е. в этом случае изменяется на π фаза напряженности магнитного поля). Фаза параллельной составляющей постоянна лишь при углах падения, меньших угла Брюстера. При углах падения, больших угла Брюстера, фаза параллельной составляющей электрического поля в отраженной волне изменяется на π (следовательно, фаза напряженности магнитного поля в отраженной волне не изменяется).

Просветление оптики

Хотя коэффициент отражения от стекла невелик, во многих сложных оптических системах с большим числом преломляющих поверхностей даже при малом R в итоге накапливаются значительные потери света. В этой связи возникает задача снижения интенсивности отраженной волны или, как говорят, просветления оптики. Конструктивно эта цель достигается с помощью тонкого диэлектрического слоя, наносимого на поверхность отражающей среды. Рассмотрим такую задачу с использованием подхода, основанного на рассмотрении многократных отражений-преломлений на границах раздела. Проиллюстрируем этот подход для угла падения, отличного от нуля.



Рисунок 20. Многократное отражение и преломление.

Согласно рисунку 20, обозначим ρ_{12} – амплитудный коэффициент отражения для перехода из n_1 в n_2 , ρ_{23} – для перехода из n_2 в n_3 ; $\tau_{12} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$, $\tau_{21} = \frac{2n_2}{n_1+n_2}$ – амплитудные коэффициенты прохождения границы 12 слева направо и справа налево. Падает волна с амплитудой E_0 . Тогда

$$E_{11} = E_0 \rho_{12}, E_{21} = E_0 \tau_{12}, E_{12} = E_0 \tau_{12} \rho_{23} \tau_{21} e^{2ik_2 a}.$$

Фазовый множитель обусловлен суммарным набегом фазы при прохождении волны по слою толщины *а* вперед и назад. Амплитуды последующих отраженных волн E_{13} , E_{14} , ... :

$$E_{13} = E_{12}q, E_{14} = E_{13}q, \dots \qquad q = \rho_{21}\rho_{23}e^{2ik_2a}$$

Отраженная волна может быть представлена в виде суммы бесконечного набора волн с одинаковыми \mathbf{k} , ω и с амплитудами E_{1n} так что

$$E_{1} = E_{11} + E_{12} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = E_{11} + E_{12} \frac{1}{1-q} = E_{0} \rho_{12} + E_{0} \tau_{12} \tau_{21} \rho_{23} \frac{e^{2ik_{2}a}}{1-\rho_{21}\rho_{23}e^{2ik_{2}a}}$$

Заметим, что $\rho_{21} = -\rho_{12}$, а произведение

$$\tau_{12}\tau_{21} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = 1 - \rho_{12}^2, \ E_1 = E_0 \frac{\rho_{12} + \rho_{23}e^{2ik_2a}}{1 + \rho_{12}\rho_{23}e^{2ik_2a}}.$$

Выясним условия, при которых отраженная волна отсутствует, т. е. $E_1 = 0$. Так как для прозрачных диэлектриков коэффициенты отражения ρ_{12} , ρ_{23} вещественны, числитель дроби может быть обращен в нуль только при условии, что фазовый множитель e^{2ik_2a} , зависящий от толщины пленки *a*, является вещественным. Следовательно, существуют два варианта значений *a*, при которых амплитуда отраженной волны равняется нулю.

Если
$$e^{2ik_2a} = 1$$
, что имеет место при $a_m = m \frac{\lambda_2}{2}, m = 1, 2, ...,$ $E_1 = E_0 \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3},$

не содержит n_2 . При $n_1 = n_3$, т. е. если диэлектрическая пленка с произвольным показателем преломления и с толщиной, кратной половине длины волны λ_2 находится в однородной среде, падающая волна проходит через пленку без отражения. Но этот случай к вопросу о просветленной оптике не относится.

Рассмотрим второй вариант, когда $e^{2ik_2a} = -1$,

$$a_m = (2m+1)\frac{\lambda_2}{4}, m = 1, 2, \dots$$

При этом требование $E_1 = 0$ сводится к условию $\rho_{12} = \rho_{23}$, эквивалентному

$$n_2^2 = n_1 n_3, \ \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}.$$

Таким образом, если $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$, а толщина пленки диэлектрика равна четверти длины волны в диэлектрике ε_2 , то такая пленка обеспечивает полное прохождение волны без отражения. Здесь мы говорим о четвертьволновой пленке, имея в виду минимальную толщину.

Обычно прозрачный диэлектрик с точно нужным значением показателя преломления не существует; например, для стекла с $n_3 = 1,53$ необходимое $n_2 = \sqrt{n_1 n_3} = 1,23$; а в качестве покрытия используют криолит ($n_2 = 1,35$) или фтористый магний ($n_2 = 1,38$) и добиваются значительного ослабления отражения.

Диэлектрические зеркала

Если на поверхность стекла с показателем преломления n_0 нанести слой прозрачного диэлектрика толщины $\lambda_2/4$ с показателем преломления $n > n_0$, то отражательная способность поверхности возрастает, т. к. в этом случае, как понятно из предыдущего анализа, волны E_{11} и E_{12} синфазны и усиливают друг друга. Покрывая стекло слоем из сернистого цинка (n = 2,3), получают R = 0,3.

Более высокие коэффициенты отражения достигаются за счет многослойных покрытий. Например, семь слоев из сернистого цинка и криолита $(n_2 = 1,35)$ приводят к $R \approx 0,9$. Для получения $R \approx 0,99$ (такие зеркала нужны для лазерных резонаторов) надо нанести 11 - 13 слоев.

2.9. Формулы преобразования Фурье

Периодическую функцию с периодом *T* можно представить в виде ряда Фурье, т. е. в виде бесконечной суммы гармоник с частотами, отстоящими друг от друга на фиксированную величину $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n e^{-in\omega_0 t}}{\sqrt{T}}, \quad f_n = \int_0^T \frac{f(t) e^{in\omega_0 t}}{\sqrt{T}} dt.$$

Для вещественной функции

$$f_{-n} = f_n^*$$

Отсюда можно показать, что ряд Фурье представим в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2 \operatorname{Re}(f_n)}{\sqrt{T}},$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2 \operatorname{Im}(f_n)}{\sqrt{T}}.$$

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2|f_n|}{\sqrt{T}}, \ \text{tg}(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n} = -\frac{\text{Im}(f_n)}{\text{Re}(f_n)}.$$

Ряд A_n называется амплитудным спектром функции f(t), а ряд φ_n – ее фазовым спектром.

Непериодическая функция также может быть представлена в виде набора гармоник, но при этом частоты не дискретны, а заполняют некоторый участок числовой оси, и функция представляется интегралом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \qquad f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Говорят, что $f(\omega) - \phi y p b e - o \delta p a 3$ функции f(t); используют следующее обозначение

$$f(t) \doteqdot f(\omega)$$

Если функция f(t) представима в виде ряда Фурье, то говорят, что f(t) обладает *дискретным спектром*, а в случае интеграла Фурье – сплошным спектром.

Для вещественной функции

$$f(-\omega) = f^*(\omega),$$

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{2|f(\omega)|}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{tg}(\varphi) = \text{Im}(f(\omega))/\text{Re}(f(\omega))$$

Справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega$$

34

Квадрат модуля спектральной плотности называют спектральной плотностью энергии. Для периодической функции

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T}|f(t)|^{2}dt = \frac{A_{0}^{2}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{n}^{2}$$

Пространственные функции можно разложить на гармоники. Возьмем функцию f(x) от одной пространственной координаты x. Для нее формулы преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx}dk, f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Функция, описывающая некоторый физический процесс, в своем составе имеет гармоники, соответствующие и отрицательным частотам. Спектральный состав физической величины может быть найден физическими методами с помощью различных фурье-анализаторов. При этом, естественно, ни о каких отрицательных частотах речь идти не может. Но противоречия нет, поскольку спектральная плотность $f(-\omega)$ на частоте $-\omega$ однозначно определяется значением $f(\omega)$.

Спектр сдвинутого сигнала

Пусть некоторый процесс, описываемый функцией f(t) характеризуется фурье-образом $f(\omega)$. Как изменится спектр, если тот же процесс повторить с некоторым сдвигом по времени (см. рисунок 21)?

Можно показать, что

$$f(t-T) \doteqdot e^{i\omega T} f(\omega).$$

Сдвинутому на отрезок T сигналу соответствует фурье-образ первоначального сигнала, умноженный на фазовый множитель $e^{i\omega T}$.



Рисунок 21. Сдвинутый сигнал.

Спектр прямоугольного сигнала

Имеется ступенчатая функция

$$f(t) = \begin{cases} f_0 = const при & |t| < \tau/2 \\ 0 & при & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Ее фурье-образ – вещественная четная функция (показана на рисунке 22):

$$f(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}}{i\omega} = \frac{f_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\omega\tau/2)$$

Между длительностью сигнала и шириной его спектра существует определенная зависимость, справедливая при любой форме сигнала. Эту зависимость обозначают термином *соотношение неопределенности*.



Рисунок 22. Спектр прямоугольного сигнала.

В этом примере продолжительность импульса вполне определенна. Ширина спектра не совсем однозначна, но допустимо в качестве $\Delta \omega$ принять полосу от $\omega = 0$, где $f(\omega)$ максимальна, до первого нуля функции $f(\omega)$: $\Delta \omega = 2\pi/\tau$.

Видно, что чем продолжительнее импульс, тем уже спектр, между собой они связаны соотношением $\Delta \omega \tau = 2\pi$.

Спектр свертки

Есть две функции f(t) и g(t). Их фурье-образы: $F(\omega)$ и $G(\omega)$. Создадим новую функцию (такая операция называется сверткой):

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Какой будет Фурье-образ этой функции? Ответ:

$$E(\omega) = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega).$$

Спектр волны, ограниченной во времени

Пусть в фиксированной точке пространства электрическое поле волны меняется как

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \sin(\omega_0 t) \text{ при } |t| < \tau/2 \\ 0 \text{ при } |t| > \tau/2 \end{cases}$$
Пусть $\tau = N(2\pi/\omega_0)$, т. е. отрезок содержит *N* периодов синусоиды. Волна представляет собой цуг синусоидальных волн длины $\lambda = c(2\pi/\omega_0)$, имеющий конечную протяженность $l = c\tau$. Фурье-образ такого поля

$$E(\omega) = i \frac{\sqrt{2\pi}E_0 N}{2\omega_0} \left\{ \operatorname{sinc}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) N \pi \right] + \operatorname{sinc}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} + 1 \right) N \pi \right] \right\}$$

График этой функции показан на рисунке 23.

Когда ширина спектра $\Delta \omega$ мала по сравнению с частотой ω_0 , излучение называют квазимонохроматическим. Таким образом, длинный цуг синусоидальных волн является квазимонохроматической волной и только при $N \to \infty$ превращается в монохроматическую волну; при этом сплошной спектр переходит в линейчатый.



Рисунок 23. Спектр ограниченной во времени волны.

Спектр поля затухающего осциллятора

Классическое описание излучения возбужденного атома, основанное на модели затухающего осциллятора

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0\\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Энергетический спектр при $\gamma \ll \omega_0$

$$|E(\omega)|^{2} = \frac{E_{0}^{2}}{8\pi} \frac{1}{\gamma^{2} + (\omega - \omega_{0})^{2}}.$$

Описываемая этим выражением форма спектральной линии излучения называется *лоренцевским контуром* (см. рисунок 24).



Рисунок 24. Затухающие колебания и их спектр.

Спектр гауссовой функции

Рассмотрим функцию

$$E(x) = E_0 e^{-\alpha x^2}$$

Фурье-образ этой функции

$$E(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}.$$

Характерная протяженность сигнала и ширина спектра связаны как

$$\Delta x \Delta k = 2.$$

Соотношение неопределенности

Рассмотренные примеры показывают, что произведение длительности сигнала Δt на ширину спектра $\Delta \omega$ (или протяженности сигнала Δx на ширину спектра пространственных частот Δk) в каждом конкретном случае есть константа порядка π (точное значение константы зависит от формы сигнала и способа определения величин Δt и $\Delta \omega$). Эти соотношения и называются соотношениями неопределенностей

$\Delta t \Delta \omega \sim \pi$, $\Delta x \Delta k \sim \pi$.

Преобразования Фурье для функций нескольких переменных

Рассмотрим функцию двух переменных *z* и *t*. Осуществив последовательно преобразования по одной и другой переменной, приходим к следующим формулам:

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(k,\omega) e^{i(kz-\omega t)} dkd\omega , f(k,\omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(z,t) e^{-i(kz-\omega t)} dzdt$$

Видно, что процесс, описываемый функцией f(z,t) может быть представлен в виде суперпозиции бесконечного числа плоских монохроматических волн, бегущих вдоль направления z. Каждая из этих волн характеризуется частотой ω , волновым числом k, распространяется со скоростью $v = \omega/k$ и имеет амплитуду $f(k, \omega)$.

Возьмем функцию – решение волнового уравнения и описывающую волну, бегущую без изменения профиля с постоянной скоростью *v* :

$$f(z,t) = f(\xi), \ \xi = z - vt,$$

$$f(k,\omega) = \sqrt{2\pi}f(k)\delta(\omega - kv), \ f(k) \doteqdot f(\xi).$$

Функция $f(k, \omega)$ отлична от нуля не в двумерной области плоскости k, ω а только на линии $\omega = kv$. При этом

$$f(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ik(z-\nu t)} dk.$$

Таким образом, функцию f(z, t) мы представили в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Волны, подчиняются линейной зависимости $\omega(k)$ и все имеют одну и ту же фазовую скорость v. Волновой пакет не расплывается.

Общий случай четырех переменных

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^4} \int \iint_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{k},\omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{k} d\omega,$$
$$f(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^4} \int \iint_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{r},t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{r} dt.$$

2.10. Уравнения Максвелла в фурье-представлении

Сейчас возможно применить преобразования Фурье к электрическим и магнитным полям. Переход к фурье-представлению полей упрощает уравнения Максвелла, так как дифференциальные операторы, действующие на искомые функции, при этом переходе заменяются на алгебраические множители, и задача становится алгебраической.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{pmatrix}_{\mathbf{k},\omega} = -i\omega \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}, \left(div \mathbf{E} \right)_{\mathbf{k},\omega} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}, \quad \left(rot \mathbf{E} \right)_{\mathbf{k},\omega} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}, \left(grad \varphi \right)_{\mathbf{k},\omega} = i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k},\omega}, \quad \left(\Delta \varphi \right)_{\mathbf{k},\omega} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k},\omega}.$$

Таким образом, уравнения Максвелла в фурье-представлении имеют вид

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = 0,$$
$$i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}_{\mathbf{k},\omega}, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{k},\omega} = 4\pi\rho_{\mathbf{k},\omega},$$

Есть еще одна, не менее важная причина такого перехода. Для стационарных полей мы принимали линейную связь между **D** и **E**, а также **B** и **H**. В случае быстропеременных полей дело обстоит сложнее. На вектор поляризации **P**(**r**, *t*) в данной точке пространства в данный момент времени влияние оказывает поле всего ближайшего окружения точки **r** во все предыдущие моменты времени. Такую зависимость называют *дисперсией*, более подробно дисперсию мы рассмотрим с следующей главе.

Часто влиянием окружения точки наблюдения можно пренебречь и учитывать только предысторию поля в данной точке пространства, т.е. пространственной дисперсией можно пренебречь и учитывать только частотную дисперсию. Примем, что поле **D** определяется полем **E** в той же точке во все предыдущие моменты времени. При этом линейную связь подобного рода в общем случае можно записать в виде интегрального соотношения

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_{0}^{\infty} \mathbf{E}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Учесть подобную связь довольно сложно, если не перейти в пространство **k**, *ω*. Действительно, при этом (вспомним спектр свертки двух функций)

$$\mathbf{D}_{\omega} = \left(1 + \sqrt{2\pi}f(\omega)\right)\mathbf{E}_{\omega} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_{\omega}.$$

Получили связь между фурье-компонентами полей **D** и **E** (материальные уравнения), и система уравнений Максвелла становится замкнутой. Аналогично

$$\mathbf{B}_{\omega} = \mu(\omega)\mathbf{H}_{\omega}$$

Разложение свободной электромагнитной волны

Пусть имеется однородная среда с линейной частотной дисперсией без токов и зарядов: $\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega} = 0$, $\rho_{\mathbf{k},\omega} = 0$. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = -\varepsilon \mu \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega},$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = 0.$$

Отсюда можно получить уравнения

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}\left(k^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0, \ \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}\left(k^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0.$$

Произвольное ненулевое решение уравнений Максвелла в однородной области без токов и зарядов представляет собой не просто суперпозицию плоских монохроматических волн (ведь любая функция $f(\mathbf{r}, t)$ представляется фурье-разложением), а суперпозицию волн, у которых волновые вектора и частоты подчиняются определенному соотношению

$$k = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \, \omega/c.$$

2.11. Дисперсия света

В обычных условиях число атомов вещества столь велико и они расположены столь близко друг к другу, что дискретная структура среды никак не проявляется, вещество ведет себя как сплошная среда. Это и позволило в свое время ввести вектора поляризации **Р** и намагничения **М** вещества, диэлектрическую и магнитную проницаемости ε и μ :

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$
$$\varepsilon = 1 + 4\pi \chi_e, \quad \mu = 1 + 4\pi \chi_m.$$

Такая связь напряженности внешних полей (**E** и **H**) и отклика среды (**P** и **M**) сводится к простой пропорциональности. С физической точки зрения это означает безинерционность, локальность, линейность и изотропию среды. Безинерционность и локальность означают, что величина векторов **P** и **M** в некоторый момент времени и в некоторой точке пространства полностью определяются значениями внешних полей в это же точке и в этой же точке. Линейность и изотропия – что уравнения линейны, а величины χ_e и χ_m являются скалярными, а не тензорными величинами.

Среды с локальной и безинерционной зависимостью P(E) называют недиспергирующими, нелокальность приводит к пространственной дисперсии, а инерционность, т.е. запаздывание **P** относительно **E** – к временной, или частотной дисперсии. Независимо от дисперсии, среды могут быть линейными или нелинейными, изотропными или анизотропными.

Давайте далее рассматривать диэлектрические немагнитные среды без свободных зарядов. К ним относятся газы, стекла, жидкости, пластмассы и т.п., то есть все наиболее важные для оптики среды. Материальное уравнение среды в общем виде

 $P = P(E), D = E + 4\pi P, D = D(E).$

Волновое уравнение в среде с дисперсией принимает вид

$$rot \, rot \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}.$$

Для линейных изотропных сред **P** || **E**, следовательно, **D** || **E**, и из уравнения $div \mathbf{D} = 0$ следует $div \mathbf{E} = 0$, и полученное уравнение переходит в

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}.$$

2.12. Электронная теория дисперсии Лоренца

Отыскание явного вида зависимости $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ сводится к решению уравнения, описывающего движение зарядов. Для этого рассмотрим атом как систему, способную совершать колебательное движение. Поскольку ядро атома обладает массой как минимум в 2000 раз большей, чем электроны, его можно считать неподвижным при наложении внешнего переменного поля, будем рассматривать движение только электронов.

Пусть в отсутствие внешнего поля молекулы или атомы среды нейтральны. Появление поля смещает электроны на расстояние **r**, образуя в среде дипольный момент

$$\mathbf{P} = Ne\mathbf{r}.$$

N – число атомов в единице объема вещества. Это смещение определяется полем **Е**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{E})$$

Для нахождения зависимости r(E) воспользуемся вторым законом Ньютона

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Примем, что кроме внешней силы, на электрон действую еще две силы:

• Сила, удерживающая его в положении равновесия. Примем, что это упругая сила $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$;

• Сила, вызывающая затухание колебаний. Примем, что эта сила описывается аналогично силе трения $\mathbf{F} = -\eta \dot{\mathbf{r}}$.

Внешняя сила есть сила со стороны электрического поля $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, следовательно, уравнение движения приобретает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

 $\gamma = \frac{\eta}{m}$ – параметр, описывающий затухание, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – квадрат собственной частоты осциллятора, в данном случае электрона в атоме. Будем рассматривать периодическую вынуждающую силу $\mathbf{E}(t) \sim e^{i\omega t}$. Частное решение уравнения в этом случае

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Отсюда поляризация среды

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \mathbf{E},$$

линейная восприимчивость среды и диэлектрическая проницаемость

$$\chi_e = \chi_e(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Диэлектрическая проницаемость получилась комплексной, следовательно, показатель преломления среды и волновое число тоже будут комплексными величинами. Обозначим

$$n = n' - in'', \ k = k' - ik'' = \frac{\omega}{c}(n' - in'').$$

Пусть плоская монохроматическая волна распространяется в среде вдоль оси *z*. Тогда поле волны

$$E = E_0 exp(i(\omega t - kz)) = E_0 exp(-k''z)exp(i(\omega t - k'z))$$

Мнимая часть волнового вектора определяет затухание волны в среде, а действительная - скорость ее распространения. Поскольку $k' = k'(\omega)$, скорость перемещения точки волны с постоянной фазой также зависит от частоты – пришли к явлению дисперсии.

Интенсивность света зависит от z как

$$I(z) = I_0 e^{-bz}$$

где $b = 2k'' = 2\frac{\omega}{c}n''$. Эта зависимость - *закон Бугера*, она определяет поглощение света при его распространении в среде. Показатель преломления и коэффициент поглощения выражаются комплексную диэлектрическую проницаемость среды следующим образом:

$$n'(\omega) = Re\left[\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right] \ b(\omega) = 2\frac{\omega}{c}Im\left[\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right]$$

Если ввести плазменную частоту как

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$$

то диэлектрическая проницаемость запишется в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} =$$
$$= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} - i\frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Анализ этого выражения проведем, разделив среды на разреженные и плотные. В разреженных средах плотность атомов в веществе *N* мала. Это позволяет, воспользовавшись известной формулой математического анализа

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$$
 при $x \ll 1$,

представить показатель преломления и коэффициент поглощения среды

$$n'(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$
$$b(\omega) = \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Зависимость этих величин от частоты приведена на рисунке 25.



Рисунок 25. Зависимость показателя преломления и коэффициента поглощения среды от частоты.

Вблизи собственной частоты системы значительно увеличивается поглощение волны средой. Разобьем весь диапазон частот на три части. В областях I и III, вдали от собственной частоты, коэффициент поглощения мал, показателя преломления слабо отличается от единицы, а его величина увеличивается с ростом частоты: $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0 - область нормальной дисперсии. В области II <math>\frac{\partial n}{\partial \omega} <$ 0 – *область аномальной дисперсии*. Величина коэффициента поглощения в области II большая, ее диапазон частот называется *полосой поглощения*.

Если атомы и молекулы вещества имеют несколько резонансных частот, то будет несколько полос поглощения, в каждой из которых будет наблюдаться аномальная дисперсия.

При рассмотрении дисперсии в разреженных средах мы полагали, что на атом воздействует только поле световой волны. Если же среда достаточно плотная, то расстояния между атомами невелики, и необходимо учитывать их взаимное влияние. При наличии внешнего поля **E** в среде можно ввести эффективное поле

$$\mathbf{E}_{\mathbf{y}\mathbf{\varphi}\mathbf{\varphi}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}.$$

Тогда уравнение движения можно записать для вектора Р:

$$\ddot{\mathbf{P}} + \gamma \dot{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right)$$

Для области прозрачности, когда $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, это уравнение приводит к следующему уравнению для показателя преломления среды

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{1}{3} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Данное выражение называют *формулой Лоренца-Лоренца* в честь датского физика Людвига Лоренца и голландского физика Хендрика Лоренца, получивших ее независимо друг от друга.

2.13. Фазовая и групповая скорости

Говоря о плоской монохроматической волне, мы записывали ее зависимость от координаты и времени как

$$f(z,t) = f_0 \cos(kx - \omega t).$$

Найдем скорость перемещения точки волны с определенной фазой (это может быть один из максимумов или минимумов волны). Эта скорость определяется из условия

$$kx - \omega t = const, \ k \, dx - \omega \, dt = 0, \ \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_{\phi}.$$

Для сред с дисперсией мы видели, что в эту формулу должна входить реальная часть волнового числа, и получали зависимость волнового числа от частоты в виде

$$k'(\omega) = \frac{\omega}{c} Re\left[\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right].$$

Можно обратить это уравнение и записать его в виде

$$\omega = \omega(k),$$

такое уравнение называется дисперсионным уравнением.

Монохроматическая волна обладает бесконечной длительностью, следовательно, не несет в себе какой-либо информации. Как мы хорошо знаем, для передачи информации нужно осуществить модуляцию волны – амплитудную, частотную, фазовую, импульсную и т.д. Спектр получающегося сигнала при этом будет неизбежно шире, чем бесконечно узкий спектр монохроматического сигнала.

Рассмотрим сигнал, спектр которого включает только две близко стоящие частоты:

$$f(z,t) = f_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + f_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) =$$

= $2f_0 \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).$

Этот сигнал в два близких момента времени изображен на рисунке 26.



Рисунок 26. Распространение сигнала в среде с дисперсией.

Второй множитель – волна с частотой, близкой к частотам двух исходных волн; ее фазовая скорость так же близка к их фазовым скоростям. Первый множитель есть низкочастотная модуляция огибающей этой волны, скорость перемещения максимума этой огибающей определяется из уравнения постоянства ее фазы

$$\Delta k \ x - \Delta \omega \ t = const,$$

 $\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk} \equiv v_{\rm rp}.$

Групповая скорость – скорость перемещения максимума амплитудной огибающей квазимонохроматического волнового пакета – совокупности обладающих разными частотами волн, которые описывают обладающее волновыми свойствами возмущение в среде. Это возмущение в общем случае ограничено во времени и пространстве. Именно групповая скорость определяет скорость перемещения информации в среде. Значение групповой скорости определяется из дисперсионного уравнения. Можно показать, что групповая скорость определяется выражением

$$v_{\rm rp} = \frac{v_{\rm p}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Если среда дисперсии не имеет, то групповая скорость совпадает с фазовой, в случае нормальной дисперсии $v_{\rm rp} < v_{\rm pas}$, в случае аномальной дисперсии $v_{\rm rp} > v_{\rm pas}$.



Рисунок 27. Пример импульса.

Рассмотрим ситуацию, когда нам надо передать в среде с дисперсией импульс, занимающий достаточно короткий промежуток времени τ (например, как на рисунке 27). Мы знаем, что ширина спектра $\Delta \omega$ такого сигнала достаточно широка, поскольку

$$\tau \Delta \omega \sim 2\pi$$

Разные области широкого спектра могут обладать разной групповой скоростью, эта разность пропорциональна второй производной частоты $\frac{d^2\omega}{dk^2}$. Если ее значение не равно нулю, что импульс достаточно скоро расплывется, и передать его относительно невозмущенным на достаточно большое расстояние нельзя. Поэтому, скажем, в оптических волокнах специально подбирают их состав, чтобы на рабочей частоте вторая производная была равна нулю.

В области аномальной дисперсии групповая скорость, вычисленная по приведенным выше формулам, может оказаться больше *с*. Это не противоречит теории относительности, ибо групповая скорость выражает скорость передачи информации лишь тогда, когда волновой импульс в процессе распространения практически не изменяет своей формы. В области же аномальной дисперсии импульс сильно деформируется, и данный физический смысл групповой скорости теряется.

2.14. Стоячие волны

Рассмотрим суперпозицию двух монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу. Будем считать, что они линейно поляризованы, их плоскости поляризации совпадают (пусть колебания происходят вдоль оси x), и они имеют одинаковую амплитуду.

$$E_{1x}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t),$$

$$E_{2x}(z,t) = E_0 \cos(kz + \omega t + \varphi).$$

В силу принципа суперпозиции, итоговое поле есть сумма этих полей:

$$E_{x} = E_{1x} + E_{1x} = 2E_{0}\cos\left(kz + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Такая волна не является бегущей, в ней нет члена $kz \pm \omega t$, она называется *сто-ячей*.

Напряженность изменяется с одинаковой частотой и в той же фазе; амплитуда колебаний меняется вдоль оси z по гармоническом закону. Мгновенные снимки бегущей и стоячей волн совпадают, но их динамика во времени различается кардинально (см. рисунок 28). Красные точки – узлы стоячей волны. Между узлами находятся плоскости максимальных амплитуд (*пучности*).



Рисунок 28. Стоячие волны в разные моменты времени.

Стоячие волны образуются при отражении волны от металлической стенки с идеальной проводимостью, как показано на рисунке 29. Отсюда следует особенность таких волн – отсутствие переноса энергии:



Рисунок 29. Формирование стоячей волны при отражении от стенки.

Стоячие волны при отражении от стенки конечной проводимости

В предыдущем параграфе было использовано, что $\sigma = \infty$. При этом можно не учитывать проникновение волны за границу раздела и использовать граничное условие $\mathbf{E}_{\tau} = 0$. А что будет при учете конечной проводимости стенок? Необходимо рассмотреть не только падающую и отраженную волны, но и преломленную волну, распространяющейся в проводящей среде.

В металлах диэлектрическая проницаемость является комплексной, причем такой, что в области радиочастот ее вещественной частью можно пренебречь и принять

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Тогда волновое число для проходящей в металлическую стенку волны будет

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \sqrt{2i} \sqrt{2\pi\sigma\omega}/c , \ \sqrt{2i} = 1 + i.$$

Комплексные амплитуды полей внутри металла можно представить в виде

$$E(z) = E_0 \exp\left(-(1+i)\frac{z}{\delta}\right),$$
$$H(z) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}E(z) = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}E_0 \exp\left(-(1+i)\frac{z}{\delta}\right)$$
$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}.$$

Толщина скин-слоя в условиях $\sigma \gg \omega$ намного меньше длины волны в свободном пространстве:

$$\delta/\lambda \ll 1.$$

Отсюда следует, что поля внутри металла и на его поверхности связаны между собой соотношением

$$\mathbf{H}_{\tau} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} (1+i) \mathbf{E}_{\tau}.$$

Так как на границе раздела поля H_{τ} , E_{τ} непрерывны, этим же соотношением должны быть связаны поля с внешней стороны границы раздела. Это условие называется *граничным условием Леонтовича*.

В случае стенок с конечной проводимостью, среднее значение вектора Пойнтинга оказывается не равным нулю

$$\langle S_z \rangle = -\frac{c}{2\pi} |E_0|^2 \frac{\chi}{(1+\chi)^2 + 1} \approx -2\chi S_0, \ \chi = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}.$$

2.15. Генерация электромагнитных колебаний

Колебания с частотой десятки Герц обычно генерируются динамомашинами и передаются по проводам. Основной пример здесь сети переменного тока. При передаче переменного тока на большие расстояния волновая природа колебаний в сети напоминает о себе весьма неприятным образом. Длина волны колебаний с частотой 50 Гц составляет 6000 км. При передачи напряжения от источника в сети возникает стоячая волна. Если у генератора находится пучность волны, то через четверть длины волны на расстоянии 1500км расположен узел волны, в окрестности этой точки напряжение в сети приближается к нулю. Чтобы избавиться от этого, по дороге ставят подстанции, единственная цель которых сбивать фазу волны. Способы генерации и распространения волн радиодиапазона изучаются в курсе радиоэлектроники (с длиной волны от нескольких километров до метров). Основной способ направленной передачи энергии или информации состоял в использовании проводов. Энергия генерировалась в обычных колебательных контурах, дополненных устройствами обратной связи на лампах или полупроводниках.

В оптическом диапазоне частот свет обычно генерируется за счет атомных переходов, вызываемых нагревом (Солнце, лампа накаливания) или другим способом. Направленная передача энергии осуществляется здесь с помощь световодов.

При повышении частоты волн выше радиодиапазона мы вступаем промежуточную с классической оптикой область, которую традиционно называют областью сверхвысоких частот СВЧ. Здесь для генерации колебаний вместо колебательных контуров используются объемные резонаторы (часто просто резонаторы), которые вместе с устройствами обратной связи называются магнетронами и клистронами. Для передачи энергии используются волноводы.

2.16. Резонаторы

Мы получили уравнение для электрического и магнитного полей

$$\left(c^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0.$$

Незатухающие колебания в резонаторе мы будем искать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}.$$

Волновое уравнение вместе с граничными условиями принимает вид

 $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \ k^2 = \omega^2 / c^2, \ \mathbf{E}_t = 0, \ div \, \mathbf{E} = 0.$

В подобной системе уравнений для магнитного поля надо только заменить граничное условие на $\mathbf{H}_n = 0$. Однако, достаточно решить только приведенную систему уравнений, а магнитное поле можно вычислить по электрическому из уравнения Максвелла *rot* $\mathbf{E} = ik\mathbf{H}$, причем условие $\mathbf{H}_n = 0$ выполнится автоматически.

Метод разделения переменных

Пусть имеется дифференциальное уравнение в частных производных

$$L u(x_1, \dots, x_N) = 0,$$

L – линейный дифференциальный оператор.

Пусть этот оператор можно представить в виде

$$L = L_1 + L_2,$$

 L_1 действует только на переменные $x_1, ..., x_k, L_2$ – только на переменные $x_{k+1}, ..., x_N$. Тогда решение уравнения представимо в виде произведения двух функций

$$u(x_1,\ldots,x_N) = v(x_1,\ldots,x_k)w(x_{k+1},\ldots,x_N)$$

49

В этом случае уравнение записывается в виде

$$(L_1 + L_2)vw = L_1vw + L_2vw = wL_1v + vL_2w = 0.$$

Разделим полученное уравнение на vw

$$\frac{L_1v}{v} = -\frac{L_2w}{w}$$

Левая часть зависит только от $x_1, ..., x_k$, правая - только от $x_{k+1}, ..., x_N$. Такое возможно лишь при условии, если обе этих части порознь равны одной и той же постоянной, называемой константой разделения. Таким образом, одно уравнение на функцию многих переменных преобразуется к двум связанным уравнениям на функции меньшего количества переменных.

Существование систем координат, в которых данное уравнение допускает разделение переменных, связано со свойствами симметрии уравнения.

Собственные функции

В методе разделения переменных приходим к уравнению вида

$$Lv = kv$$

где L – линейный дифференциальный оператор, k – какое-либо число. Это и есть задача на определение собственных функций и собственных значений оператора L.

Метод разделения переменных позволяет найти решение волнового уравнения в ограниченной области. Рассмотрим простейший одномерный случай. Пусть при x = 0 и x = a функция f = 0. Найти возможные решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Ищем функцию в виде

$$f(x,y) = F(x)T(t).$$

После подстановки этого представления в уравнение получаем

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = const = -k^2,$$

$$F'' + k^2 F = 0, \ F = A \sin(kz) + B \cos(kz),$$

$$T'' + \omega^2 T = 0.$$

С учетом граничных условий

$$F_n(x) = A_n \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{\pi n}{a}$$
$$f(x,t) = \sum_n f_n \sin(k_n x) \cos(k_n v t + \varphi_n)$$

Что, если на границе заданы условия f'(0) = f'(a) = 0? Тогда $F_n(x) = A_n \cos(k_n x)$.

Задача Дирихле – задано значение функции на границе

$$f|_{\partial\Omega} = g_1$$

Задача Неймана – задана значение нормальной производной функции на границе

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_2.$$

Двумерные стоячие волны

Пусть задана двумерная область – прямоугольник (от 0 до a_x по x, от 0 до a_y по y). Найдем решение волнового уравнения в этой области при нулевых граничных условиях. Представляем

$$f(x, y, t) = F(x, y)T(t),$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = const = -k^2,$$

$$\Delta F + k^2 F = 0,$$

$$F(x, y) = F_x(x)F_y(y),$$

$$\frac{F_x''}{F_x} + \frac{F_y''}{F_y} + k^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$F_x'' + k_x^2 F_x = 0, \ F_y'' + k_y^2 F_y = 0, \ k_y^2 + k_y^2 = k^2$$

Граничные условия можно записать в виде

F = 0для $\forall x$ при y = 0 или $y = a_y$,

F = 0для $\forall y$ при x = 0или $x = a_x$.

Таким граничным условиям и уравнениям удовлетворяют

$$F_x = A_n \sin(k_n x), \quad F_y = A_m \sin(k_m y),$$
$$k_{nx} = \frac{\pi n}{a_x}, \quad k_m = \frac{\pi m}{a_y}.$$

Окончательно получаем

$$f(x, y, t) = \sum_{n,m} f_{nm} \sin(k_n x) \sin(k_m y) \cos(k\nu t + \varphi_{nm}).$$

Стоячие волны есть ненулевые решения волнового уравнения без источников поля при нулевых условиях на границе. Важно отметить, что стоячая волна с постоянной амплитудой может существовать только при отсутствии потерь в среде и полном отражении волн от границы.

При заданных размерах и форме полости уравнения имеют решения только при некоторых значениях ω собственных частотах резонатора. Основные черты явлений в электродинамике видны на примере полости, имеющей вид прямоугольного параллелепипеда $0 < x_1 < a_1, 0 < x_2 < a_2, 0 < x_3 < a_3$.

Задача нахождения полей для такой полости решается методом разделения переменных. Ищем решение в виде $E_i = A_1(x_1)A_2(x_2)A_3(x_3)e^{-i\omega t}$

Волновое уравнение при этом преобразуется к виду

$$\frac{A_1''(x_1)}{A_1(x_1)} + \frac{A_2''(x_2)}{A_2(x_2)} + \frac{A_3''(x_3)}{A_3(x_3)} + k^2 = 0$$

В последнем уравнении сумма трех функций от трех разных переменных дает константу. Это может быть только если каждая из этих функций тоже константа, мы обозначим эти константы $-k_1^2$, $-k_2^2$, $-k_3^2$. При этом получится, что $A_i(x_i) = B_i \sin(k_i x_i + \varphi_i)$.

Представим

 $E_1 = E_1^0 \sin(k_1 x_1 + \varphi_{11}) \sin(k_2 x_2 + \varphi_{12}) \sin(k_3 x_3 + \varphi_{13})$

Из граничных условий следует, что $\varphi_{12} = \varphi_{13} = 0$, $k_{2,3} = \pi n_{2,3}/a_{2,3}$. Из условия $div \mathbf{E} = 0$ следует, что для всех компонентов полей k_j одинаковы, а $\varphi_{jj} = \pi/2$.

Таким образом окончательное решение имеет вид трехмерной стоячей волны с целым числом полуволн между стенками

$$E_{1} = E_{1}^{0} \cos(k_{1}x_{1}) \sin(k_{2}x_{2}) \sin(k_{3}x_{3}),$$

$$E_{2} = E_{2}^{0} \sin(k_{1}x_{1}) \cos(k_{2}x_{2}) \sin(k_{3}x_{3}),$$

$$E_{3} = E_{3}^{0} \sin(k_{1}x_{1}) \sin(k_{2}x_{2}) \cos(k_{3}x_{3}),$$

$$k_{i} = \pi n_{i}/a_{i}, \omega^{2}/c^{2} = k^{2} = \sum k_{i}^{2}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

В этом решении квадрат волнового числа складывается из квадратов волновых чисел для каждого направления, каждое из этих чисел пробегает дискретный ряд значений, т. е. дискретным является и получающийся набор частот (собственные значения волнового уравнения в конечном объеме). Существует минимальная частота, которая отвечает одному из наборов вида $n_1 = 0$, $n_2 = n_3 = 1$, $E_2 = E_3 = 0$.

Общим решением для электромагнитного поля в полости является суперпозиция решений, удовлетворяющая начальным условиям. Для решений с небольшими n_1 , n_2 , n_3 (низшие гармоники) небольшие искажения в форме границ могут сильно модифицировать решения. Эти искажения несущественны для решений с большими n_1 , n_2 , n_3 (высшие гармоники).

2.17. Волноводы

Для направленной передачи энергии СВЧ на большие расстояния используются волноводы. Типичным примером волновода является бесконечная труба постоянного сечения с идеально проводящими стенками. Конструкция такого волновода изображена на рисунке 30. Ось *z* направим вдоль волновода, оси *x* и *y* будут находиться в плоскости его поперечного сечения.



Рисунок 30. Волноводы. Конструкция и поле внутри.

Уравнения Максвелла приводят к волновым уравнениям (для случая в вакууме)

$$\left(c^{2}\Delta - \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\mathbf{E} = 0, \quad \left(c^{2}\Delta - \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\mathbf{H} = 0.$$

Будем искать решения в виде

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i^0 e_i(x, y) e^{-i\omega t + ik_z z},$$

$$H_i(\mathbf{r}, t) = H_i^0 h_i(x, y) e^{-i\omega t + ik_z z},$$

$$i = x, y, z.$$

Подставив эти выражения в волновое уравнение, получим, что функции e_i , h_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_2 e_i + K_\perp^2 e_i = 0, \quad \Delta_2 h_i + K_\perp^2 h_i = 0.$$

 Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, $\omega^2/c^2 = K_{\perp}^2 + k_z^2$. Эти уравнения имеют ненулевые решения только при некоторых значениях K_{\perp}^2 , которые определяются формой границ и условиями на границе. Важно отметить, что в законе дисперсии собственные значения K_{\perp}^2 образуют дискретную совокупность, не зависящую от частоты ω и продольного волнового вектора k_z .

Вернемся к уравнениям Максвелла. Векторные уравнения

$$rot \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \ rot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

приводят к шести уравнениям для компонент. Запишем четыре из них, для $\frac{\partial}{\partial t} E_{x,y}, \frac{\partial}{\partial t} H_{x,y}$:

$$+ \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = i\frac{\omega}{c}H_x, -\frac{\partial H_z}{\partial x} + ik_z H_x = -i\frac{\omega}{c}E_y \\ - \frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = i\frac{\omega}{c}H_y, + \frac{\partial H_z}{\partial y} - ik_z H_y = -i\frac{\omega}{c}E_x$$

Преобразованиями из этой системы можно получить

$$E_{x} = \frac{ik_{z}}{K_{\perp}^{2}} \frac{\partial E_{z}}{\partial x} + \frac{i\omega}{cK_{\perp}^{2}} \frac{\partial H_{z}}{\partial y}, \quad E_{y} = \frac{ik_{z}}{K_{\perp}^{2}} \frac{\partial E_{z}}{\partial y} - \frac{i\omega}{cK_{\perp}^{2}} \frac{\partial H_{z}}{\partial x}$$
$$H_{x} = \frac{ik_{z}}{K_{\perp}^{2}} \frac{\partial H_{z}}{\partial x} - \frac{i\omega}{cK_{\perp}^{2}} \frac{\partial E_{z}}{\partial y}, \quad H_{y} = \frac{ik_{z}}{K_{\perp}^{2}} \frac{\partial H_{z}}{\partial y} - \frac{i\omega}{cK_{\perp}^{2}} \frac{\partial E_{z}}{\partial x}$$

53

Все поперечные компоненты полей выражаются через E_z и H_z . Остаются только две независимые функции: $e_z(x, y)$ и $h_z(x, y)$. Как их найти?

Как и для плоской волны, можно выделить два линейно независимых решения. Принято выбирать их следующим образом:

$$H_z = 0$$
 (Е-волна, или ТМ),
 $E_z = 0$ (Н-волна, или ТЕ).

Эти решения определяются из условий на границе

TM:
$$E_z|_{\text{граница}} = 0$$
,
TE: $\frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_{\text{граница}} = 0$.

Поскольку граничные условия разные, то и собственные значения K_{\perp}^2 для ТЕ и ТМ волн различаются.

При заданной геометрии волновода для каждого из решений существует минимальное значение величины $K_{\perp, minH}^2$ и $K_{\perp, minE}^2$. Это означает, что в волноводе могут распространятся только волны, частота которых не меньше граничных частот $\omega_{min}^H = c K_{\perp, min}^H$ или $\omega_{min}^E = c K_{\perp, min}^E$.

Получившееся решение можно представлять себе как бегущую в направлении z волну, модулированную стоячей волной в поперечном направлении. В отличие от волны в вакууме, в ТМ-волне только магнитное поле поперечно направлению распространения, а электрическое поле имеет отличную от нуля компоненту E_z . Подобное можно сказать и о ТЕ-волне.

Для волны, бегущей вдоль волновода, фазовая скорость

$$v_{\Phi} = \omega/k_z > c$$
,

групповая скорость

 $d(\omega^2) = 2\omega d\omega = 2c^2 k_z dk_z, v_{\Gamma} = d\omega/dk_z = c^2 k_z/\omega < c.$

Рассмотрим волновод прямоугольного сечения $0 \le x \le a_1$, $0 \le y \le a_2$ с металлическими стенками. Здесь граничные условия записываются отдельно для направления x и для направления y. Величины e_z , h_z можно искать в виде произведения двух синусоид, каждая из которых отвечает целому числу полуволн, укладывающихся между стенками в точной аналогии с тем, как это делалось для резонатора.

Для волны с $H_z = 0$ (ТМ-волна, или Е-волна) на границах расположены узлы получающихся поперечных волн; для волны с $E_z = 0$ (ТЕ-волна, или Нволна) на границах расположены пучности получающихся поперечных волн

TM:
$$E_z = E_0 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) e^{i(k_z z - \omega t)}, H_z = 0,$$

TE: $H_z = H_0 \cos(k_1 x) \cos(k_2 y) e^{i(k_z z - \omega t)}, E_z = 0,$
 $k_1 = \pi n_1 / a_1, k_2 = \pi n_2 / a_2, K_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2.$

Эти волны обозначают соответственно En_1n_2 и Hn_1n_2 .

Для ТМ-волны каждое из целых чисел n_1 и n_2 должно быть не меньше единицы. Это определяет граничную частоту ТМ-волны как минимальную частоту E_{11} -волны

$$\omega_{min}^{\rm TM} = c \sqrt{(\pi/a_1)^2 + (\pi/a_2)^2}.$$

Для ТЕ-волны одно из целых чисел n_1 или n_2 может быть равно нулю. Это определяет граничную частоту ТЕ-волны как минимальную частоту H_{10} -волны

$$\omega_{min}^{\rm TE} = c\pi/a_1.$$

Конфигурации полей в волнах с минимальной частотой представлены на рисунке 31.



Рисунок 31. Конфигурация полей в прямоугольном волноводе: а - *H*₁₀, б - *E*₁₁; сплошные линии - силовые линии электрического поля, пунктирные - магнитного поля

ТЕМ-волна

Все вышесказанное о ТМ- и ТЕ-волнах относилось к волноводам с односвязной формой поперечного сечения. Положение совершенно меняется при многосвязной форме сечения. В таких волноводах, наряду с описанными Е- и H-волнами, оказывается возможным распространение еще одного типа волн, частота которых не ограничена никакими условиями. Это ТЕМ-волна, в которой и $H_z = 0$, и $E_z = 0$.

В ТЕМ-волне нет дисперсии, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega = kc.$$

В ТЕМ-волне в каждой точке пространства поля **H**, **E** и $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ взаимно перпендикулярны и связаны

$$\mathbf{H}=\mathbf{e}_{z}\times\mathbf{E},$$

как и в плоской монохроматической волне. В отличие от плоской волны, амплитуды полей не постоянны, а убывают до нуля на стенках волновода.

Часть 3. Оптика

3.1. Геометрическая оптика

Давайте от плоских волн в однородных средах перейдем к более общему случаю неоднородных сред $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$. Прямой путь – решение системы уравнений Максвелла с какими-то (как правило, заранее неизвестными) граничными и начальными условиями – крайне сложен. Есть, однако, приближение, которое значительно упрощает расчеты – это приближение *геометрической оптики*. Это приближение изучает принципы построения изображений в оптических системах и законы распространения света без учета его волновых свойств. Иначе говоря, в этом приближении длина волны принимается пренебрежимо малой.

Как мы увидим далее, в этом приближении волна распространяется в пространстве подобно пучку частиц, движущихся по некоторым траекториям – световым лучам. Световые лучи распространяются прямолинейно в однородной среде и меняют направление по известным законам при переходе из одной среды в другую или при отражении.

Таким образом, приближение геометрической оптики есть приближение лучей света. Если в какую-то область пространства не попадают лучи света, то там электрическое поле полностью отсутствует. Если ходу световых лучей мешает какой-либо предмет, то говорят, что он создает (отбрасывает) *тень* (пример на рисунке 32).



Рисунок 32. Тень и полутень.

Волновое уравнение, описывающее поле Е в однородной среде

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0.$$

В неоднородной среде это уравнение усложняется, однако оно в приближении геометрической оптики остается верным для амплитуды волн:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Будем искать решение волнового уравнения при помощи метода комплексных амплитуд

$$E(\mathbf{r},t) = Re[\hat{E}(\mathbf{r},t)], \quad \hat{E}(\mathbf{r},t) = \hat{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}.$$

Подставляя это выражение в волновое уравнение, получаем, что комплексная амплитуда $\hat{E}(r)$ должна удовлетворять следующему уравнению

$$\Delta \hat{E} + k^2 \hat{E} = 0,$$

называемому уравнением Гельмгольца.

Если представить комплексную амплитуду в виде

$$\widehat{E}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ik_0\Phi(\mathbf{r})}, \ k_0 = \frac{\omega}{c}$$

и подставить это выражение в уравнение Гельмгольца, то в левой части получим комплексное выражение. Оно равно нулю, только если его действительная и мнимая части равны нулю, т.е. получаем два уравнения, в которых входят функции $A(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$.

Получающиеся уравнения можно значительно упростить, если использовать приближение геометрической оптики:

$$\lambda |\nabla A| \ll A, \ \lambda |\nabla n| \ll n.$$

Амплитуда волны и показатель преломления среды должны слабо меняться на расстоянии порядка длины волны. — это и есть условие малой длины волны. При таком приближении получаются следующие уравнения:

$$(grad\Phi)^2 = n^2, \quad A\Delta\Phi + 2gradA \cdot grad\Phi = 0.$$
 (3.1)

Эти уравнения составляют систему уравнений геометрической оптики. При получении уравнений геометрической оптики было использовано, что амплитуда волны и ее первые пространственные производные мало изменяются на протяжении длины волны – условие применимости геометрической оптики. Отступления от геометрической оптики возникают в следующих случаях:

- на границе геометрической тени;
- вблизи фокуса, т.е. геометрической точки схождения лучей;
- при распространении света в среде с резко меняющимся показателем преломления (например, в мутной среде);
- при распространении света в сильно поглощающих средах (например, металлах).

Эйконал

Функция $\Phi(\mathbf{r})$ имеет собственное название – эйконал. Эта функция описывается первым из уравнений (3.1); это уравнение называется уравнением эйконала. Условие

$$\Phi(\mathbf{r}) = const$$

задает *волновой фронт* – поверхность, колебания электрического поля в точках которой происходят синфазно. Уравнение эйконала можно записать следую-щим образом:

$$grad\Phi = n\mathbf{s}$$
,

s – вектор нормали к фронту волны, направленный в сторону ее распространения. Это уравнение определяет скорость распространения волнового фронта.

Уравнение эйконала можно записать в виде

$$d\Phi/ds = n$$
,

где *s* – длина вдоль линии. Распространение волнового фронта определяется из условия постоянства полной фазы колебаний $\omega t - k_0 \Phi(\mathbf{r}) = const$. Дифференцируя это условие, находим

$$\omega dt = k_0 d\Phi = \frac{\omega}{c} \frac{d\Phi}{ds} ds = \frac{\omega}{c} n ds = \frac{\omega}{v} ds.$$

Отсюда для скорости распространения волнового фронта

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Эта скорость такая же, как у плоской волны. Малый участок волнового фронта приблизительно похож на плоскую волну.

Принцип Гюйгенса, световой луч



Рисунок 33. Распространение границы волнового фронта.

Полученный результат позволяет построить волновой фронт в момент времени t + dt, если известно его положение в момент t. Для этого из каждой точки исходного волнового фронта следует отложить в направлении нормали отрезок длиной v dt. Соединив концы всех таких отрезков, мы и получим новое положение волнового фронта. Вместо этого можно из каждой точки волнового фронта, как из центра, описать сферы радиусом v dt, как показано на рисунке 33. Новым волновым фронтом будет огибающая сфер. Такой метод нахождения распространения волнового фронта называется *принципом Гюйгенса*.

Определим *световой луч* как ортогональную траекторию к семейству волновых фронтов. Второе из уравнений геометрической оптики (3.1) можно преобразовать к виду

$$A\Delta\Phi + 2n\frac{dA}{ds} = 0$$

и проинтегрировать вдоль луча

$$A = A_0 exp\left(-\int_0^s \frac{\Delta\Phi}{2n} ds\right).$$

Здесь A_0 – амплитуда в точке луча, от которой отсчитывается длина *s*. Эта формула показывает, что для определения волнового поля во всех точках луча достаточно знать его значение в какой-либо одной точке того же луча. Геометрическая оптика ничего не может сказать относительно изменения амплитуды поля при переходе от одного луча к соседнему.

В приближении геометрической оптики световое поле на всяком луче совершенно не зависит от полей других лучей. Отсюда следует основное представление геометрической оптики о том, что энергия свет распространяется вдоль лучей, точнее – вдоль "лучевых трубок", образованных лучами. Можно выделить отдельную световую трубку, поставив на пути распространяющейся волны узкую диафрагму. Только диафрагма не должна быть особенно узкой, а световая трубка слишком длинной. На краях диафрагмы и вблизи боковых границ трубки амплитуда поля меняется резко, т.е. условия применимости геометрической оптики не выполняются. Возникает дифракция света, приводящая к уширению светового пучка.

Принцип Ферма

В однородной среде траектория светового луча представляет собой прямую линию. В неоднородной среде эту траекторию можно найти исходя из *принципа Ферма*. Его простейшая форма: луч света распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, по которому время его прохождения меньше, чем по любому из других соединяющих это точки путей. Рассчитаем время прохождения луча из точки A в точку B:

$$t = \int_{A}^{B} dt = \int_{A}^{B} \frac{ds}{v(s)} = \frac{1}{c} \int_{A}^{B} n(s) ds = \frac{1}{c} \int_{A}^{B} (n(s)\mathbf{s}) \cdot \mathbf{ds} = \frac{1}{c} \int_{A}^{B} grad\Phi \cdot \mathbf{ds}$$
$$= \frac{1}{c} (\Phi(B) - \Phi(A)).$$

Величина $d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$ имеет размерность длины и называется *оптической длиной пути*. Это есть расстояние, на которое свет распространился бы в вакууме за время его прохождения от *A* до *B*.

Из принципа Ферма можно получить уравнение распространения луча $\mathbf{r}(s)$ в неоднородной среде

$$\frac{d}{ds}\left(n(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n(\mathbf{r}).$$

59

Существует более строгая формулировка принципа Ферма: любое малое изменение пути не приводит в первом порядке к изменению времени прохождения. Математическая запись этой формулировки

$\delta t = 0.$

Законы распространения света

Из принципа Ферма легко получить, что лучи света подчиняются следующим законам:

- лучи света распространяются независимо друг от друга;
- в однородной среде лучи света распространяются прямолинейно;
- угол падения равен углу отражения;
- угол преломления определяется из закона Снеллиуса.

Луч света, распространившийся по определённой траектории в одном направлении, повторит свой ход в точности при распространении и в обратном направлении.

3.2. Оптические системы

Оптическая система состоит из нескольких оптических элементов, таких как линзы, зеркала, призмы и т.д. Телескоп, микроскоп – примеры оптических систем. Очень много оптических элементов имеют ось симметрии. Если система состоит из нескольких таких элементов, то их устанавливают так, чтобы их оси симметрии совпадали – появляется *оптическая ось системы*.

Будем рассматривать движение лучей света вдоль оси системы (выберем ее за ось z) в приближении геометрической оптики.

Пустой промежуток

Пусть луч на входе в систему имеет какую-то координату и угол наклона x_0, x'_0 . Координата и угол наклона этого луча на выходе из системы будут, очевидно, какими-то функциями от этих величин:

$$x = x(x_0, x'_0), \ x' = x'(x_0, x'_0).$$

Как именно связаны входные и выходные координаты для промежутка длиной *d* с однородным показателем преломления?

$$x = x_0 + dx'_0, \ x' = x'_0.$$

Эта связь является линейной!

Параксиальное приближение

Параксиальное приближение описывает луч, распространяющийся вблизи оптической оси, для него все углы наклона к оси z:

$\theta \ll 1$

В параксиальном приближении связь между входными и выходными координаты является линейной для любой системы. Для описания этой связи используется матричная форма записи

Сферическая граница

Рассмотрим прохождение луча через сферическую границу радиуса R с центром справа от границы (если центр слева, говорим, что радиус отрицателен, -R), слева показатель преломления n_1 , справа n_2 . Эта граница осуществляет преобразование луча

$$x_1, x_1', z \rightarrow x_2 = x_1, x_2', z.$$

В параксиальном приближении

$$n_2 x_2' = n_1 x_1' - (n_2 - n_1) x_1 / R.$$

Обычно используют следующую запись в виде матрицы

$$\binom{x_2}{n_2 x_2'} = M_{c\phi} \binom{x_1}{n_1 x_1'}, \quad M_{c\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица оптической системы

Перемещение луча вдоль оптической оси это последовательностью преобразований, и его можно записать как произведение матриц отдельных элементов

$$\binom{x_{n+1}}{n_{n+1}x'_{n+1}} = M_n M_{n-1} \dots M_1 \binom{x_1}{n_1 x'_1}$$

Определитель всех отдельных матриц равен ± 1 , следовательно, и определитель матрицы всей системы так же равен ± 1 . Это есть *теорема Лагранжа-Гельмгольца*. Она связывает линейный размер предмета и угловой размер пучка лучей.

Линза

Линза – деталь из прозрачного материала, ограниченная двумя поверхностями вращения, например, сферическими или плоской и сферической. Различные типы линз показаны на рисунке 34. Применяются и «асферические линзы», форма поверхности которых отличается от сферы.



Рисунок 34. Типы линз. 1 – двояковыпуклая, 2 – плоско-выпуклая, 3 – вогнуто-выпуклая, 4 – двояковогнутая, 5 – плоско-вогнутая, 6 – выпукло-вогнутая.



Рисунок 35. Фокусирующие свойства линейной системы.

Если переход между плоскостями 1 и 2 описывается матрицей, то для точки P_1 можно найти оптически сопряженную точку P_2 , как показано на рисунке 35. Точка P_1 , лежащая на оси линзы, для которой точка P_2 находится на бесконечности, называется фокусом линзы. Фокусов у линзы два.



Рисунок 36. Основные элементы толстой линзы.

Для построения изображения в линзе вводят (см. рисунок 36):

- *H*₁ и *H*₂ главные плоскости;
- *N*₁ и *N*₂ главные точки;
- *F*₁ и *F*₂ левый и правый фокусы;
- $f_1 = F_1 N_1$ и $f_2 = F_2 N_2 фокусные расстояния$

Оптически сопряжённые точки лежат на пересечении лучей 1 и 2.

Если определить матрицу перехода как мы делали, с det M = 1, то $f_1 = f_2 = f$.

Основное уравнение линзы

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

p – расстояние от точки P_{l} , лежащей слева от линзы, до главной плоскости H_{l} , q – расстояние от главной плоскости H_{2} до точки P_{2} , которая оптически сопряжена точке P_{l} .

Если известна матрица толстой линзы

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

то можно сразу определить фокусное расстояние

$$f = -\frac{n}{C},$$

n – показатель преломления окружающей среды

Величина n/f называется оптической силой линзы. Если f > 0 – линза фокусирующая (собирающая), f < 0 – линза дефокусирующая (рассеивающая).

Тонкая линза

Если при прохождении через линзу расстояние от луча до оси системы остается приблизительно постоянным, то такую линзу называют *тонкой*. В тонкой линзе главные плоскости совпадают,

$$A = 1, B = 0, D = 1, C = -\frac{n}{f}.$$

Фокусное расстояние тонкой линзы можно найти, если рассмотреть две сферические границы с пренебрежимо малым зазором между ними. Тогда

$$\frac{1}{f} = \frac{n_{\pi} - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

 $n_{\rm n}$ – показатель преломления материала линзы. Необходимо учитывать знаки у R_1 и R_2 .

Построение изображения тонкой собирающей линзой



Рисунок 37. Изображение бесконечно далекого предмета.

Если предмет находится на бесконечно далёком от линзы расстоянии, то его изображение получается в заднем фокусе линзы F' уменьшенным до точки.



Рисунок 38. Предмет на расстоянии, превышающем двойное фокусное расстояние линзы.

Если предмет приближён к линзе и находится на расстоянии, превышающем двойное фокусное расстояние линзы, то изображение его будет действительным, перевёрнутым и уменьшенным и расположится за главным фокусом на отрезке между ним и двойным фокусным расстоянием.



Рисунок 39. Предмет на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию линзы.

Если предмет помещён на двойном фокусном расстоянии от линзы, то полученное изображение находится по другую сторону линзы на двойном фокусном расстоянии от неё. Изображение получается действительным, перевёрнутым и равным по величине предмету.



Рисунок 40. Предмет между передним фокусом и двойным фокусным расстоянием.

Если предмет помещён между передним фокусом и двойным фокусным расстоянием, то изображение будет получено за двойным фокусным расстоянием и будет действительным, перевёрнутым и увеличенным.



Рисунок 41. Предмет в плоскости переднего главного фокуса линзы.

Если предмет находится в плоскости переднего главного фокуса линзы, то лучи, пройдя через линзу, пойдут параллельно, и изображение может получиться лишь в бесконечности.



Рисунок 42. Предмет на расстоянии, меньшем главного фокусного расстояния.

Если предмет поместить на расстоянии, меньшем главного фокусного расстояния, то лучи выйдут из линзы расходящимся пучком, нигде не пересекаясь. Изображение при этом получается **мнимое**, **прямое** и **увеличенное**, т. е. в данном случае линза работает как лупа.

Лупа

Лупа – оптическая система, состоящая из линзы или нескольких линз, предназначенная для увеличения и наблюдения мелких предметов, расположенных на конечном расстоянии. Именно лупу мы применяем при рассматривании мелких предметов и деталей, как на рисунке 43.



Рисунок 43. Лупа.

Комбинация нескольких линз

А что если рассмотреть две тонкие линзы, расположенные на некотором расстоянии d друг от друга. Для нахождения фокусного расстояния такой системы необходимо найти ее матрицу, которая будет равна произведению трех матриц – две линзы и пустой промежуток между ними. Можно показать, что

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Аберрации

Аберрация оптической системы – ошибка изображения в оптической системе, вызываемая отклонением луча от того направления, по которому он должен был бы идти в идеальной оптической системе.

Геометрические аберрации вызваны отклонением от параксиального приближения. Примеры двух типов геометрической аберрации – сферической аберрации и комы – приведены на рисунке 44.



Рисунок 44. Геометрические аберрации.

Хроматические аберрации, обусловлены дисперсией оптических сред, из которых образована оптическая система. Они могут проявляться в постороннем окрашивании изображения, и в появлении у изображения предмета цветных контуров. На рисунке 45 показаны влияние хроматической аберрации и использование дуплета (двух линз) для ее устранения.



Рисунок 45. Хроматическая аберрация и ее коррекция.

3.3. Интерференция

Прежде чем рассматривать явление интерференции, необходимо изучить понятие интенсивности света. Вспомним, что частоты электромагнитных волн оптического диапазона составляют порядка 10¹⁴ Гц, так что зарегистрировать мгновенные значения электрического и магнитного полей таких волн нельзя. Любой измерительный прибор – будь то глаз, фотопленка или ячейка ПЗС матрицы – выдает лишь усредненный по времени результат, определяемый величиной потока энергии волны. Вводят *интенсивность света* – усредненную по времени величину плотности потока энергии:

$$I(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{t}^{t+\tau_0} S(\mathbf{r},t') dt',$$

 τ_0 – разрешающее время измерительного прибора, которое практически всегда много больше периода электромагнитных колебаний. В большинстве задач, связанных с интерференцией и дифракцией света, исследуется в основном пространственное положение максимумов и минимумов и их относительная

интенсивность, постоянные множители часто не учитываются. По этой причине часто полагают:

$$I(\mathbf{r}) = \langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Что если в пространстве распространяются две электромагнитные волны? Согласно принципу суперпозиции

$$E = E_1 + E_2, \ H = H_1 + H_2.$$

Поток энергии, описываемый вектором Пойнтинга:

$$S = \frac{c}{4\pi}E \times H = S_1 + S_2 + S_{12}, \quad S_{12} = \frac{c}{4\pi}(E_1 \times H_2 + E_2 \times H_1).$$

Интенсивность суммарной волны также не будет равна сумме интенсивностей отдельных волн и, следовательно, принцип суперпозиции для интенсивности не верен:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}.$$

Дополнительный член I_{12} называют интерференционным членом. Если он не равен нулю, то говорят, что волны интерферируют друг с другом (от английского to interfere – пересекаться, служить препятствием, помехой). Дадим определение: интерференция – изменение средней плотности потока энергии, обусловленное суперпозицией волн. Интерференция может наблюдаться у любого распространяющегося волнового процесса, например, у волн на поверхности воды – простейший опыт показан на рисунке 46.



Рисунок 46. Интерференция волн на поверхности воды.

В обычной жизни интерференцию света заметить труднее, чем интерференцию волн на поверхности воды, но ее можно наблюдать в виде радужных разводов на поверхности нефтяной пленки и в виде колец на границе двух почти соприкасающихся поверхностей (см. рисунок 47).



Рисунок 47. Наблюдение интерференции в повседневной жизни.

Интерференция двух монохроматических волн

Рассмотрим сложение волн от двух источников, излучающих линейно поляризованные волны с частотой ω . Обозначим точку наблюдения как *P*, электрические поля от источников в этой точке можно записать как

$$E_1 = E_{10}(P)e^{i\varphi_1(P) - i\omega t}, \ E_2 = E_{20}(P)e^{i\varphi_2(P) - i\omega t},$$

 E_{10}, E_{20} – амплитуды, φ_1, φ_2 – фазы волн в точке P. Суммарное поле

$$\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}_{10}(P)e^{i\varphi_1(P)} + \boldsymbol{E}_{20}(P)e^{i\varphi_2(P)}\right)e^{-i\omega t} = \widehat{\boldsymbol{E}}(P)e^{-i\omega t},$$

 $\widehat{E}(P)$ – комплексная амплитуда поля в точке P.

Находим интенсивность

$$I = \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \left| \widehat{E} \right|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \widehat{E} \widehat{E}^* \rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \langle \left(E_{01} e^{i\varphi_1} + E_{02} e^{i\varphi_2} \right) \left(E_{01} e^{-i\varphi_1} + E_{02} e^{-i\varphi_2} \right) \rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \langle E_{01}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle E_{02}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle E_{01} \cdot E_{02} \left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right) \rangle.$$

Видно, что при перпендикулярной поляризации $I_{12} = 0$, интерференция отсутствует. Интерференция также отсутствует, если частоты источников не равны друг другу. При параллельной поляризации выражение для интенсивности приобретает следующий вид:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta \varphi) \rangle.$$

Разность фаз $\Delta \varphi(P) = \varphi_1(P) - \varphi_2(P)$ в точке наблюдения определяется как разностью фаз источников, так и тем, что свет до нее проходит от разных источников разное расстояние.

Рассмотрим случай полностью синфазных источников. Тогда $\Delta \phi$ полностью определяется разностью расстояний

$$\Delta \varphi = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} n(r_1 - r_2),$$

 r_1, r_2 – расстояния от источников до точки наблюдения, λ – длина волны соответствующей частоты в вакууме. Величина $n(r_1 - r_2)$ называется *оптической разностью хода*. В рассматриваемом случае $\Delta \varphi$ не зависит от времени, следовательно $(cos(\Delta \varphi)) = cos(\Delta \varphi)$. В зависимости от величины $\Delta \varphi$ значение $cos(\Delta \varphi)$ может меняться от -1 до +1. В каких-то точках на экране интенсивность максимальна, в каких-то – минимальна:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 \quad \text{при } \Delta \varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$
$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 \quad \text{при } \Delta \varphi = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$$

Число m, определяемое выражением

$$m(P) = \frac{\Delta \varphi(P)}{2\pi}$$

называют *порядком интерференционной полосы*. Условию m(P) = const отвечает обычно какая-то линия (полоса) на экране, интенсивность света в разных точках на одной линии одинакова. Светлым полосам соответствуют целые порядки, темным – полуцелые.

Видность

Качество интерференционной картины определяется величиной, называемой *видностью*. Выражение для видности

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

В разных областях экрана эта величина может различаться, при ее вычислении *I_{max}* и *I_{min}* надо брать в непосредственной близости от точки наблюдения. Для рассматриваемого случая

$$V = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} = const$$

Рассмотрим случай синфазных источников, дающих одинаковые интенсивности на экране $I_1 = I_2 = I_0$. В этом случае

$$I(P) = 2I_0 \left(1 + 2\cos(\Delta \varphi(P)) \right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta \varphi(P)}{2}\right), \quad V = 1.$$

3.4. Когерентность

Мы рассмотрели случай полностью синфазных источников. Если у источников есть постоянная разность фаз, то

$$\Delta \varphi = (\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \frac{2\pi}{\lambda} n(r_1 - r_2),$$

интерференционная картина в целом не изменится, а только сдвинется на экране. Следовательно, при постоянной разнице фаз монохроматических точечных источников на экране наблюдается стабильная картина, состоящая из светлых и темных участков.

Когерентность это согласованность нескольких (многих) колебательных или волновых процессов во времени, проявляющаяся при их сложении, которое и обеспечивает ненулевую видность интерференционной картины. Источники, обеспечивающие такие колебания, называют когерентными источниками.

Рассмотрим случай, если разность фаз источников претерпевает хаотические скачки, интерференционная картина при этом "мелькает" по экрану. Если период этих скачков много меньше времени разрешения регистрирующего прибора, то он может зарегистрировать только какую-то одинаковую среднюю освещенность. Математически это выражается тем, что

$$\langle cos(\Delta \varphi) \rangle = 0,$$

видность V = 0. Такие источники не являются когерентными.

Рассмотрим излучение реального источника света, состоящего из большого числа атомов. Эти атомы могут переходить в возбужденное состояние за счет столкновений или другими способами. При переходе из возбужденного состояния обратно в основное (или другое возбужденное) атомы излучают свет. Процесс излучения света отдельным атомом не может продолжаться бесконечно долго – обычно время излучения ~ 10^{-8} с. "Кусок" волны, образующейся в процессе акта излучения одного атома, называется *цугом волн* или *волновым цугом*. Крайне схематично пример цуга волны показан на рисунке 48.



Рисунок 48. Волновой цуг.

После излучения атом через какой-то промежуток времени опять может перейти в возбужденное состояние, излучить свет и т.д. Различные атомы обычных (не лазерных) источников начинают излучать свет независимо друг от друга в случайные моменты времени. Поскольку длительность колебаний, испускаемых атомами, обычно много меньше времени наблюдения, то приемник регистрирует очень большое количество цугов конечной длины со случайным значением фазы колебаний.

Интерференция реальных источников

Пусть на экран приходят волны от двух независимых источников света. При наложении двух цугов получаем интерференционную картину, которая зависит от разности фаз складываемых колебаний. Однако разность фаз при переходе от одной пары складываемых цугов волн к другой меняется хаотически.

Среднее время жизни получающейся интерференционной картины много меньше времени разрешения регистрирующего прибора, поэтому два независимых источника излучения оптического спектра не являются когерентными, интерференция от них не наблюдается.

3.5. Основные методы получения интерференционной картины

Все интерференционные схемы основаны на сложении ранее каким-либо способом разделенного излучения одного источника. При этом, несмотря на хаотическое изменение фаз у отдельных цугов, разность фаз в расщепленных волнах остается постоянной, случайные изменения фазы и амплитуды световых колебаний в этих волнах протекают согласованно, и интерференционная картина может быть устойчивой. Существуют два основных метода разделения:

- деление волнового фронта, к которому относятся схема опыта Юнга, бипризма Френеля, зеркало Ллойда и т.д.;
- деление амплитуды волны кольца Ньютона, интерферометр Майкельсона, линии равной толщины / равного наклона и т.д.

Схема опыта Юнга



Рисунок 49. Схема опыта Юнга.

Пусть экран, как показано на рисунке 49, освещается двумя точечными синфазными источниками одинаковой интенсивности, расстояние между которыми d много меньше расстояния от них до экрана L. Распределение интенсивности на экране описывается выражением

$$I(P) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda}n(r_1(P) - r_2(P))\right),$$

х – координата точек на экране вдоль плоскости наблюдения.

$$r_{2} = \sqrt{L^{2} + \left(x - \frac{d}{2}\right)^{2}} \approx L + \frac{1}{2} \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^{2}}{L}, \quad r_{1} = \sqrt{L^{2} + \left(x + \frac{d}{2}\right)^{2}} \approx L + \frac{1}{2} \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^{2}}{L},$$
$$r_{1} - r_{2} \approx \frac{xd}{L}, \quad I(x) = 4I_{0} \cos^{2}\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{xd}{L}n\right),$$

Вдоль плоскости наблюдения светлые полосы чередуются с темными, координаты светлых полос

$$x_m = \frac{mL\lambda}{nd}.$$

Расстояние между полосами равно длине волны в веществе, увеличенной в L/d раз, что делает их заметными даже без сильного увеличения.

3.6. Пространственная когерентность

На примере схемы опыта Юнга более подробно рассмотрим явление когерентности и его влияние на качество наблюдаемой интерференционной картины. Пусть в этой схеме исходный источник света является не точечным, а протяженным. Каждый малый элемент площади источника можно рассматривать как отдельный точечный источник, дающий свою интерференционную картину на экране. Эти картины от разных источников сдвинуты между собой. Поскольку отдельные источники не когерентны между собой, интенсивности от них на экране складываются, и общая картина получается размытой. Видность этой картины тем меньше, чем больше размер исходного источника.



Рисунок 50. Определение пространственной когерентности.

Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 50. Точка A источника находится на оптической оси системы. Расстояния AS_1 и AS_2 совпадают, S_1 и S_2 источники являются синфазными. Точка B отстоит от оптической оси, расстояния BS_1 и BS_2 различаются, различаться будут и фазы вторичных источников. Если разность хода $BS_2 - BS_1 = \lambda/2$, то максимумы интерференционной картины от B накладываются на минимумы картины от A и наоборот, общая картина размывается. Условие получения относительно четкой картины

$$BS_2 - BS_1 \le \lambda/2,$$

a – поперечный размер источника, d – расстояние между вторичными источниками, L – расстояние между исходным источником и экраном с отверстиями. Условие можно представить в виде (при $a, d \ll L$):

$$a\alpha \leq \lambda, \ \alpha = \frac{d}{L}$$

Это определяет угол $\alpha \leq \lambda/a$, внутрь которого источник излучает когерентно. Максимальное расстояние *d* определяется как

$$d \leq d_{\scriptscriptstyle \Pi K} = \alpha L = \frac{\lambda L}{a} = \frac{\lambda}{\beta},$$

 $\beta = a/L - угловой размер источника. Длину <math>d_{nk}$ называют *длиной пространственной когерентности*, она определяет размер области волнового фронта, в котором излучение протяженного источника когерентно.

3.7. Временная когерентность

Любая монохроматическая волна бесконечна во времени. С другой стороны, как мы видели, излучение атомов источников света идет в течение определенного времени. В точку наблюдения приходит огромное количество разных цугов, которые быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Такое случайное поле уже не будет монохроматической волной, для его описания и работы с ним необходимо привлекать сложные математические методы.

Примем, что испускаемая источником волна состоит из последовательности цугов, внутри которых поле меняется по гармоническому закону
$$E(t) = E_0 cos(\omega t + \varphi).$$

Фаза φ колебаний остается постоянной в течение длительности цуга, а потом резко изменяется. Среднее время длительности одного цуга обозначим как τ . Для обычных источников τ по порядку совпадает с длительностью излучения света отдельными атомами.

Ограниченное во времени возмущение есть сумма многих монохроматических колебаний с разными частотами. Ширина спектра $\Delta \omega$ связана с характерной длительностью процесса τ

$$\Delta \omega \tau \geq 2\pi$$

Область частот шириной $\Delta \omega$ расположена вокруг частоты сигнала ω . Если отношение $\Delta \omega / \omega$ мало, то излучение реального источника можно представить как *квазимонохроматическое излучение*, т.е. как сумму монохроматических волн с близкими значениями частот.

Поскольку волны разной частоты не интерферируют друг с другом, то общая интенсивность света на экране есть сумма интенсивностей волн каждой их частот – полное распределение освещенности экрана определяется простым наложением картин, даваемых отдельными монохроматическими волнами.

Каждая монохроматическая волна создает свою картину полос. Полосы для разных частот смещены друг относительно друга, причем это смещение тем сильнее, чем больше их порядок *m*. При малых разностях хода интерферирующих волн (от нуля до несколько длин волн) положение полос практически одинаково, поэтому полосы наблюдаемой интерференционной картины видны отчетливо. По мере увеличения разности хода из-за различия в длинах волн происходит смещение картин отдельных полос относительно друг друга. Для больших значений *m* суммарная картина оказывается полностью размытой.

Пусть в спектре источника света присутствуют волны с длинами волн от λ до $\lambda + \Delta \lambda$. Найдем максимально наблюдаемый порядок интерференции. Интерференционная картина полностью исчезнет, когда весь промежуток между соседними максимумами волны с длиной волны λ будет заполнен максимумами волны с длиной волны λ будет заполнен максимумами волн с длиной волны $\lambda + \Delta \lambda$ – когда максимум *m* волны $\lambda + \Delta \lambda$ совпадет с максимумом *m* + 1 волны λ . Так как это одна и та же точка, оптическая разность путей интерферирующих лучей должна быть одинакова для этих волн:

$$m = \frac{\Delta \varphi(P)}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} n(r_1 - r_2), \quad n(r_1 - r_2) = m\lambda, \quad (m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda),$$
$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Максимальная оптическая разность хода, при которой наблюдается интерференционная картина для квазимонохроматического света:

$$n(r_1 - r_2)_{max} = m_{max}\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = d_{\rm BK}$$

Расстояние $d_{\rm BK}$ называют длиной временной когерентности.

Найдем среднюю длительность одного цуга τ , если известен диапазон длин волн $\Delta \lambda$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{v}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda n'},$$
$$\frac{2\pi}{\lambda + \Delta \lambda} \frac{c}{n} = \frac{2\pi c}{\lambda n'} \frac{1}{1 + \Delta \lambda / \lambda} \approx \frac{2\pi c}{\lambda n'} \left(1 - \frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right) = \omega - \Delta \omega,$$
$$\Delta \omega = 2\pi \frac{c}{\lambda n'} \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\Delta \omega} = \frac{n}{c} \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}.$$

Волна за это время пройдет расстояние

$$\tau v = \tau \frac{c}{n} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda},$$

равное средней длине одного цуга. Эта длина совпадает с длиной временной когерентности. Ясно, что есть связь между $d_{\rm BK}$ и τ , которое так же называют *временем когерентности*. Действительно, интерферометр формирует из каждого волнового цуга начальной волны два одинаковых цуга. Эти цуги вновь складываются в плоскости наблюдения, однако они оказываются сдвинутыми друг относительно друга, поскольку до точки сложения они проходят разные расстояния.

Корреляция между двумя волнами будет иметь место в том случае, если время задержки меньше времени когерентности, т.е. когда налагаются части одного и того же цуга. Если же время задержки больше, чем время когерентности, то корреляция будет отсутствовать, так как налагаются разные цуги.

Рассмотрим три характерных примера. Для белого света, занимающего весь видимый диапазон от 400 нм до 800 нм, получаем среднюю длину волны $\lambda = 600$ нм, $\Delta \lambda = 400$ нм, и $d_{\rm BK} \cong 900$ нм. Таким образом, длина когерентности белого света оказывается порядка длины световой волны. Достаточно монохроматический источник света (ртутная лампа) с длиной волны $\lambda = 500$ нм имеет $\Delta \lambda = 10$ нм, длина когерентности равна 25 мкм. Для лазерного излучения схожей длины волны $\Delta \lambda$ составляет порядка 10^{-3} нм, а длина когерентности – 25 см.



Рисунок 51. Схема опыта с зеркалом Ллойда.

Еще одной схемой, основанной на методе деление волнового фронта, является опыт с зеркалом Ллойда. В этом опыте свет от источника монохроматического излучения частью попадает непосредственно на экран, частью – отражается на него от поверхности зеркала под небольшим углом – схема приведена на рисунке 51.

Отраженную часть света можно рассматривать как излученную мнимым источником, отраженным от плоскости зеркала вниз от реального источника. Это позволяет рассматривать эту схему как аналог схемы опыта Юнга.

Схема опыта с бипризмой Френеля



Рисунок 52. Схема опыта с бипризмой Френеля.



Рисунок 53. Вид и сечение бипризмы.

Еще один способ наблюдения интерференционной картины заключается в том, чтобы на пути света от монохроматического источника поместить тонкую прозрачную бипризму (см. рисунок 52). Вид и сечение бипризмы показаны на рисунке 53.

Луч света, проходя через слега непараллельную пластинку, изменяет угол своего наклона. Лучи, исходящие из точечного источника, выглядят при этом за пластинкой как исходящие от мнимого источника, смещенного по вертикали. В случае бипризмы образуется два мнимых источника лучей, излученных в верхнюю и нижнюю полуплоскости. В области пересечения потоков от этих источников наблюдается устойчивая интерференционная картина.

Полосы равного наклона

Направим луч света под углом на тонкую стеклянную пластинку постоянной толщины. Мы изучали, что при падении на поверхность вещества волна частично отражается, частично преломляется, проходя внутрь вещества. Начальная энергия волны делится между этими двумя волнами. Преломленная волна отражается от второй поверхности пластины и опять выходит наружу, как показано на рисунке 54. Угол наклона выходящей волны совпадает с углом наклона отраженной волны – они параллельны, но разница пути вносит разность фаз между ними. Интерференционную картину наблюдают на экране, фокусируя на него волны собирающей линзой.



Рисунок 54. Формирование полос равного наклона.

Пусть на поверхность пластины падает рассеянный свет, в котором есть волны с различными углам падения. Соответственно, и на линзу лучи света будут падать под разными углами, линза же будет собирать этот свет в разные точки на экране в зависимость от угла падения. Поскольку разность хода отраженного и преломленного лучей зависит от угла падения, то и интенсивность на экране будет периодически меняться от точки к точке. Если лучи под разными углами падения падают со всех сторон, то на экране после собирающей линзы получим темные и светлые кольца.

Получающиеся интерференционные полосы носят название *полос равного наклона*, т.к. они образованы светом, падающим пол одним углом падения к нормали.



Рисунок 55. Локализация полос равной толщины.

Разность фаз отраженного и преломленного лучей зависит так же и от толщины пластинки. Если эта толщина постепенно меняется, то возможно наблюдать интерференцию параллельных лучей света (см. рисунок 55). Каждая из интерференционных полос возникает в результате отражении от участков клина с одинаковой толщиной, поэтому их называют полосами равной толщины.

Кольца Ньютона

Интерференционная картина в виде концентрических колец (колец Ньютона) возникает между поверхностями одна из которых плоская, а другая имеет большой радиус кривизны (например, стеклянная пластинка и плосковыпуклая линза – см. рисунок 56). Волна 1 появляется в результате отражения от выпуклой поверхности линзы на границе стекло - воздух, а волна 2 – в результате отражения от пластины на границе воздух - стекло. Разность фаз возникает изза того, что волна 2 проходит больший путь, чем волна 1. Если вторая волна отстает от первой на целое число длин волн, то, складываясь, волны усиливают друг друга.



Рисунок 56. Схема наблюдения колец Ньютона.

Радиус светлого кольца с номером *т* находим из условия

$$2h = m\lambda.$$

Если кривизна линзы *R* большая, то

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R},$$
$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R}.$$

Поскольку r_m зависит от длины волны, то при освещении белым светом образуется множество цветных колец, их радиус возрастает с увеличением длины волны (от фиолетового к красному).

Контроль качества обработки поверхностей

Часто бывает необходимым, чтобы поверхности линз или зеркал были идеально гладкими и ровными. Для контроля качества обработки поверхности

используется интерференция. Схема такого контроля и проявление дефекта на поверхности показаны на рисунке 57.





3.8. Интерферометры

Интерферометры – оптические приборы на основе явления интерференции. Интерферометры используют

- для измерения показателей преломления прозрачных сред;
- для измерения длин и перемещений;
- определения угловых размеров звёзд;
- для контроля формы и поверхностей оптических деталей.

Основное достоинство интерферометров – чрезвычайно высокая точность измерений.

В двухлучевых интерферометрах каким-либо способом разделяют в пространстве пучок света на два когерентных, а затем сводят их вместе. Любые изменения величин, определяющих разность хода интерферирующих волн, приведут к изменению интерференционной картины – как правило, к смещению полос интерференции.

Интерферометр Рэлея



Рисунок 58. Интерферометр Рэлея.

Впервые такой интерферометр был предложен лордом Рэлеем в 1886 году; он использовался для определения показателей преломления газов. Чувствительность этого интерферометра определяется длиной пути, которую проходят разделенные лучи – чем больше путь, тем больше набирается разность фаз, и тем больше смещение полос интерференционной картины. Максимальная длина определяется возможностью контроля за температурой, так как тепловые флуктуации будут искажать показатели преломления.

Рисунок 59. Интерферометр Жамена.

Интерферометр Жамена показан на рисунке 59. В отличие от интерферометра Релея в нем используется весь начальный световой поток, а не его малая часть, проходящая через узкие отверстия в экране. Недостатком же этого интерферометра является слишком близкое расположение обоих световых лучей. Пластины должны быть толстые, они очень медленно приходят в состояние теплового равновесия, нагреваясь во время эксперимента, и интерференционная картина при этом смещается.



Рисунок 60. Интерферометр Маха – Цендера.

Этот интерферометр применяется при экспериментальном изучении различных волновых процессов в газовых средах и плазме. A_1 и A_2 – стеклянные пластины, покрытые с одной стороны тонкой отражающей пленкой. Пленка настолько тонка, что частично отражает и частично пропускает свет. Такие пластины называются полупрозрачными зеркалами. Важным достоинством является возможность широкого разведения интерферирующих лучей, что принципиально недоступно рассмотренным выше интерферометрам.

Интерферометр Майкельсона



Рисунок 61. Схема интерферометра Майкельсона.

Схема интерферометра Майкельсона изображена на рисунке 61. Пучок света от монохроматического источника направляется на полупрозрачное зеркало, на котором он делится на две примерно равные части. Пройдя некоторые расстояния, эти пучки попадают на зеркала, отражаются и вновь падают на делительную пластинку. Пластинка снова частично отражает и пропускает свет, в результате чего образуется смесь пучков, интерференцию которых можно наблюдать на экране.

Дополнительная пластинка *P*, показанная на рисунке 62, служит для компенсации разности фаз, которая вносится на пути к зеркалу при прохождении светом стеклянной пластинки зеркала. Одни лучи проходят ее дважды, тогда как другие лучи – только один раз.



Рисунок 62. Формирование интерференционной картины в интерферометре Майкельсона.

Если сделать интерферометр Майкельсона так, как это показано на рисунке 62, то на экране получится не интерференционная картина, а точка, яркость которой зависит от разности плеч. Для получения интерференционной картины используют один из двух возможных режимов работы интерферометра, которые называются: 1) полосы (линии) равной толщины, 2) полосы (пинии) равного наклона.



Рисунок 63. Полосы равной толщины.

В первом случае (см. рисунок 63) интерференционная картина создается за счет поворота на малый угол одного из зеркал вокруг оси, перпендикулярной рисунку. Точечный источник света S_0 помещают в фокусе линзы L_1 – интерферометр освещается параллельным пучком света. Линзу L_2 размещают так, чтобы на экране возникло изображение зеркала M_1 , на которое налагается изображение зеркала M_2 .



Рисунок 64. Полосы равного наклона.

Во втором случае интерферометр освещается непараллельным пучком света, а экран расположен в фокальной плоскости линзы L_2 . Схема этого опыта изображена на рисунке 64.

Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри – Перо



Рисунок 65. Интерферометр Фабри – Перо.

Интерферометр Фабри – Перо, схема и ход лучей в котором показаны на рисунке 65, является прибором высокого разрешения. Он представляет собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала. Этот интерферометр относится к оптическим приборам, работающим в режиме полос равного наклона.

У разных лучей, выходящих из интерферометра, не только разные амплитуды, но и фазы. Для нахождения их суммы воспользуемся методом комплексных амплитуд. Пусть τ – амплитудный коэффициент преломления отражающей поверхности, ρ – амплитудный коэффициент отражения. E_0 - амплитуда падающей волны. Тогда комплексная амплитуда выходящих волн будет равна

$$\hat{E}_1 = E_0 \tau^2, \hat{E}_2 = E_0 \tau^2 \rho^2 e^{ik\Delta}, \hat{E}_3 = E_0 \tau^2 (\rho^2 e^{ik\Delta})^2, \dots$$
$$\Delta = 2a\cos\theta, \quad \delta = k\Delta = 4\pi \frac{a}{\lambda}\cos\theta$$

Комплексная амплитуда волны есть сумма

$$\hat{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{E}_n = E_0 \tau^2 \left(1 + \rho^2 e^{ik\Delta} + \left(\rho^2 e^{ik\Delta}\right)^2 + \cdots \right) = E_0 \frac{\tau^2}{1 - \rho^2 e^{ik\Delta}}$$

Перейдем к коэффициенту отражения по энергии

$$R = \rho^2, \ \tau^2 = 1 - R.$$

Тогда

$$I(\theta) = |\hat{E}|^{2} = E_{0}^{2} \frac{(1-R)^{2}}{1+R^{2}-2R\cos(k\Delta(\theta))}$$

Окончательно получаем

$$I = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Это выражение называют *формулой Эйри*, ее график показан на рисунке 66. Видно, что при приближении R к единице на графике образуются узкие максимумы при δ кратном 2π . Ширина этих максимумов на полувысоте равна



Рисунок 66. Распределение интенсивности, задаваемое формулой Эйри.

Пусть интерферометр освещается расходящимся пучком света, который после прохождения интерферометра собирается линзой на экран, находящийся в ее фокальной плоскости (см. рисунок 67). Тогда на экране возникнет картина в виде светлых и темных колец. Радиус светлых колец вычисляется из условия

 $r_m = f \cdot \theta_m, \ \delta(\theta_m) = 2\pi m, \ m$ - целое число.

Для малых углов формула для вычисления θ_m принимает вид

$$2\frac{a}{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}\theta_m^2\right)=m.$$

Важно отметить, что центральному кольцу соответствует наибольшее значение *m*, равное целому от $2a/\lambda$. Если a = 0,5 мм, $\lambda = 500$ нм, то $m_{max} = 2000$. Радиус центрального кольца можно оценить, взяв



Рисунок 67. Схема опыта с интерферометром Фабри – Перо.



Рисунок 68. Картины дифракции плоской волны на отверстии.

Дифракция – явление отклонения волн от прямолинейного распространения, если только это не вызвано законами геометрической оптики (отражением, преломлением, рефракцией). Дифракция приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Характерные картины дифракции плоской волны на большом и малом отверстиях в непрозрачном экране показаны на рисунке 68. Видно, что чем сильнее ограничены поперечные размеры для прохождения света, тем сильнее проявляется дифракция. Нет оптических приборов, полностью свободных от дифракции. В частности, далее мы увидим, что именно дифракционные эффекты определяют разрешающую способность спектральных приборов.

Рассмотрим пример – пусть плоская монохроматическая волна падает перпендикулярно на экран, в котором вырезана длинная щель определенной ширины. Геометрическая оптика определяет, что за экраном лучи света, прошедшие через щель, также будут распространяться прямолинейно, по нормали к плоскости экрана, без изменения своей интенсивности. За пределами вырезанной области света не будет, амплитуда поля равна нулю. Условие применимости законов геометрической оптики есть малое изменение амплитуды поля в пространстве – очевидно, что здесь это условие нарушается.

Чтобы определить, как именно ведет себя поле за экраном, где приближение геометрической оптики работает, а где – нет, необходимо развить теорию дифракции.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Строгое решение задачи дифракции – это решение системы уравнений Максвелла с соответствующими начальными и граничными условиями. Это очень сложная задача. К счастью, многие важные задачи могут быть решены приближенным методом, в основе которого лежит *принцип Гюйгенса-Френеля*. Этот принцип состоит из двух положений:

• Каждая малая по сравнению с длиной волны площадка поверхности волнового фронта может рассматриваться как источник вторичных сферических

волн. Фронт волны в последующие моменты времени представляет собой огибающую фронтов волн этих источников.

 Вторичные волны интерферируют между собой, т.е. результирующее поле в любой точке пространства есть векторная сумма полей, создаваемых этими вторичными источниками.

Немецкий физик Густав Кирхгоф дал математическое обоснование принципа Гюйгенса-Френеля и нашел те приближенные условия, когда он может считаться справедливым при решении задач дифракции. Эти условия можно свести к требованию малости длины волны λ по сравнению с характерными размерами *D* препятствия (или, наоборот, отверстия в экране)

 $\lambda \ll D$

Рассмотрим дифракцию волны на отверстии произвольной формы, которое вырезает из волнового фронта какую-то область (см. рисунок 69). Обозначим x, y, z – координаты точки на поверхности волнового фронта, x_P, y_P, z_P – координаты точки наблюдения P, в которой вычисляем значение поля. Возьмем малый участок поверхности волнового фронта площадью dS. Какое поле создаст этот участок в точке наблюдения?



Рисунок 69. К выводу интеграла Кирхгофа.

Это поле должно быть:

- пропорциональным амплитуде поля в рассматриваемой точке на поверхности волнового фронта E(x, y, z),
- пропорциональным площади рассматриваемого участка *dS*,
- как и в любой сферической волне, поле должно быть пропорциональным *e^{ikR}* (соответственно, будем рассматривать комплексные амплитуды) и обратно пропорциональным *R*, где *R* – расстояние от рассматриваемой точки на поверхности волнового фронта до точки наблюдения,
- содержать какую-либо функцию *K*(*θ*) угла между нормалью к поверхности волнового фронта и направлением на точку наблюдения.

Полная комплексная амплитуда поля в этом случае есть сумма полей, создаваемых всеми участками вырезаемой отверстием поверхности волнового фронта, сумма переходит в интеграл

$$E(P) = A \iint E(S) \frac{e^{ikR}}{R} K(\theta) \, dS \qquad A = \frac{1}{i\lambda}.$$

Этот интеграл называется интегралом Кирхгофа. Константа A определяется из условия, что при бесконечных размерах отверстия и постоянной амплитуде E(S) поле в точке наблюдения равно полю перед экраном: E(P) = E(S).

Если вырезанная поверхность волнового фронта мало отличается от плоскости, то

$$K(\theta) = \cos(\theta).$$

Суммирование комплексных амплитуд с разными фазами

Прежде чем начать анализировать решение задачи дифракции, определяемое интегралом Кирхгофа, разберемся с задачей нахождения суммы многих колебаний с различными фазами. Требуется найти

$$E(t) = \sum_{i} E_{i}(t) = \sum_{i} E_{0i} cos(\omega t + \varphi_{i})$$

Очевидно, что итоговый результат будет так же колебанием с той же частотой $E(t) = E_0 cos(\omega t + \varphi_0)$

Амплитуду E_0 находим методом комплексных амплитуд

$$\hat{E}(t) = \sum_{i} \hat{E}_{i}(t) = \sum_{i} E_{0i}(t)e^{i(\omega t + \varphi_{i})} = e^{i\omega t}\sum_{i} E_{0i}e^{i\varphi_{i}},$$
$$\sum_{i} E_{0i}e^{i\varphi_{i}} = |E_{0i}e^{i\varphi_{i}}|e^{i\varphi_{0}},$$
$$E(t) = Re[\hat{E}(t)] = |E_{0i}e^{i\varphi_{i}}|cos(\omega t + \varphi_{0}).$$

 E_0 есть модуль суммы комплексных амплитуд отдельных колебаний. Каждое комплексное число можно представить как вектор на комплексной плоскости, а сумму таких чисел – как векторное сложение.

Пусть амплитуды отдельных колебаний одинаковы, их фазы линейно увеличиваются, а наименьшая из фаз φ_1 равна нулю. Как будет изменяться амплитуда итоговых колебаний при сложении все большего и большего числа колебаний? Пока мы складываем колебания, фазы которых отличаются не больше чем на π , то итоговая амплитуда возрастает (см. рисунок 70).



Рисунок 70. Суммирование амплитуд с малой разницей фаз.

При прибавлении колебаний, фазы которых отличаются от начальной на величину от π до 2π , эта амплитуда уменьшается. Она достигает нуля, если

суммируются колебания с фазами, разность между которым равномерно распределена от 0 до 2π (см. рисунок 71). При дальнейшем увеличении слагаемых колебаний E_0 периодически изменяется от нуля до максимального значения.



Рисунок 71. Суммирование амплитуд с большой разницей фаз.

Пусть амплитуда отдельных колебаний слабо убывает с увеличением фазы. Из рисунка 72 видно, что при достижении разности фаз в 2π суммарная амплитуда уже будет малой, но ненулевой – вследствие падения амплитуды колебания из области фаз от π до 2π не смогут полностью скомпенсировать колебания из области фаз от 0 до π . По мере дальнейшего возрастания числа слагаемых колебаний со все большими фазами и все меньшими амплитудами максимум итоговой амплитуды становится все меньше, а минимум – все больше. В пределе очень многих колебаний итоговая амплитуда равна половине от ее максимального значения.



Рисунок 72. Амплитуда суммы колебаний с уменьшающейся амплитудой.

Приближения интеграла Кирхгофа

Возвращаясь обратно к задаче дифракции, становится очевидно, что интеграл Кирхгофа выражает подобную ситуацию – колебания волн, приходящих от разных участков поверхности, имеют различные фазы. Эта разность фаз может быть мала, тогда их можно условно считать синфазными; она может быть порядка нескольких π , и в этом случае амплитуда итоговых колебаний сильно изменяется при изменении этой разности фаз; и она может быть очень велика, итоговая амплитуда при этом постоянна. Как мы увидим далее, эти три случая соответствуют различным областям дифракции.

Рассмотрим наиболее часто встречающуюся постановку задачи дифракции – точка наблюдения находится достаточно далеко от отверстия, волновой фронт можно считать приблизительно плоским, совпадающим с плоскостью отверстия, а угол между нормалью к волновому фронту и направлением на точку наблюдения мал. Тогда соотношения между координатами можно записать как:

$$z \approx 0, \quad z_P \gg |x - x_P|, |y - y_P|,$$

$$R = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2} \approx z_P + \frac{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2}{2z_P},$$

$$cos(\theta) \approx 1.$$

Такое приближение называется параксиальным.

Дифракция Френеля

В параксиальном приближении интеграл Кирхгофа значительно упрощается и становится равным

$$E(P) = \frac{e^{ikz_P}}{i\lambda z_P} \iint E(x,y) \exp\left(ik\frac{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2}{2z_P}\right) dxdy.$$

где интегрирование идет по площади отверстия в экране. Это приближение называется *приближением Френеля*. Дифракция, рассматриваемая в этом приближении, называется *дифракцией Френеля*.

Дифракция Фраунгофера

Полученное выражение в некоторых случаях можно упростить и далее. Давайте распишем

$$\frac{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2}{2z_P} = \frac{x^2 + y^2}{2z_P} + \frac{x_P^2 + y_P^2}{2z_P} - \frac{xx_P + yy_P}{z_P},$$
$$E(P) =$$

$$=\frac{e^{ikz_P}}{i\lambda z_P}exp\left(ik\frac{x_P^2+y_P^2}{2z_P}\right)\iint E(x,y)exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z_P}\right)exp\left(-ik\frac{xx_P+yy_P}{z_P}\right)dxdy.$$

Множитель $exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z_P}\right)$ определяет, насколько разная в точке наблюдения будет фаза волн, порожденных разными участками волнового фронта. Если эта разность мала, то он приблизительно равен единице. Обычно требуют, чтобы

$$k\frac{max(x^2+y^2)}{2z_P} \le \frac{\pi}{4}.$$

Этот критерий есть критерий *приближения Фраунгофера*, дифракция при выполнении этого условия называется *дифракцией Фраунгофера*. При этом приближении

$$E(P) = \frac{1}{\lambda z_P} \iint E(x, y) exp\left(-ik \frac{xx_P + yy_P}{z_P}\right) dxdy.$$

В этой мы пренебреги всем фазовыми множителями, поскольку в конечном итоге нас интересует интенсивность света, пропорциональная квадрату модуля E(P), модуль же любого множителя вида $e^{i\varphi}$ равен единице. Видно,

что подынтегральное выражение зависит только от x_P/z_P и y_P/z_P . Это означает, что дифракционная картина увеличивается подобно самой себе пропорционально расстоянию z_P от экрана до плоскости наблюдения, т.е. в приближении Фраунгофера устанавливается устойчивое угловое распределение поля.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера с другой точки зрения. Пусть R_0 – вектор, направленный из центральной точки отверстия в точку наблюдения, а R_1 направлен в эту точку из какой-либо другой точки отверстия. Амплитуда итогового колебания в точке наблюдения, где сходятся волны, излучаемые участками волнового фронта вокруг данных точек, будет определяться разностью фаз между этими волнами:

$$E \sim \left| E_0 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + E_1 \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right| \approx \frac{1}{R_0} \left| E_0 + E_1 e^{ik(R_1 - R_0)} \right|.$$

Единичный вектор в направлении точки наблюдения от точки 0

$$\boldsymbol{e}_{P} = \frac{\boldsymbol{R}_{0}}{R_{0}} = \frac{x_{P}\boldsymbol{e}_{x} + y_{P}\boldsymbol{e}_{y} + z_{P}\boldsymbol{e}_{z}}{\left|x_{P}\boldsymbol{e}_{x} + y_{P}\boldsymbol{e}_{y} + z_{P}\boldsymbol{e}_{z}\right|} \approx \frac{x_{P}\boldsymbol{e}_{x} + y_{P}\boldsymbol{e}_{y} + z_{P}\boldsymbol{e}_{z}}{z_{P}}.$$

Вектор r_{\perp} , направленный из точки 0 в точку 1. С учетом того, что точка 0 – центральная точка, ее координаты равны нулю, то

$$\boldsymbol{r}_{\perp} = x_1 \boldsymbol{e}_x + y_1 \boldsymbol{e}_y,$$
$$R_1 = |\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_{\perp}| \approx R_0 - \boldsymbol{r}_{\perp} \cdot \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0} = R_0 - \boldsymbol{r}_{\perp} \cdot \boldsymbol{e}_P,$$

Окончательно находим разность фаз

$$k(R_1-R_0) = -k(\boldsymbol{r}_{\perp} \cdot \boldsymbol{e}_P) = -k\left(x_1\frac{x_P}{z_P} + y_1\frac{y_P}{z_P}\right),$$

что совпадает с подынтегральным выражением интеграла Кирхгофа в приближении Фраунгофера.

Фактически, мы приняли, что вектора R_0 и R_1 являются параллельными. Это и выполняется в приближении Фраунгофера, когда точка наблюдения отстоит от отверстия очень далеко. Волны, порожденные различными участками волнового фронта, идут параллельно друг другу, поэтому дифракцию Фраунгофера называют также *дифракцией в параллельных лучах*. Разность фаз этих волн такая же, как и у плоских волн, порождаемых находящимися на некотором расстоянии друг от друга синфазными источниками. Дифракция Фраунгофера определяется интерференцией плоских волн, синхронно излучаемых поверхностью волнового фронта в заданном направлении. Вывод - об устойчивом при данной дифракции фиксировано угловом распределении поля.

Зоны Френеля

Осталось выяснить, при каких расстояниях выполняются полученные приближения, и связать их с рассмотренной ранее величиной разности фаз волн в точке наблюдения от разных участков волнового фронта. Давайте дадим определение: *зона Френеля* – область поверхности волнового фронта, фазы волн в точке наблюдения от различных участков которой различаются не более

чем на π . Для этого разность расстояний от различных точек зоны Френеля до точки наблюдения не должна превышать $\lambda/2$. Из рассмотренного ранее следует, что волны от одной зоны Френеля, складываясь, усиливают друг друга.

Пусть характерный размер отверстия в экране равен *D*. Тогда разность максимального и минимального расстояний от разных точек экрана до точки наблюдения будет порядка

$$r_{max} - r_{min} \sim \sqrt{z_P^2 + D^2} - z_p \approx \frac{D^2}{2z_p}.$$

Эта разность зависит от расстояния z_p . Так же с увеличением этого расстояния увеличивается размер зон Френеля. Возможно три случая



Рисунок 73. Формирование изображения в случае геометрической оптики.

Для первого случая

$$z_p \ll \frac{D^2}{\lambda}.$$

Это случай геометрической оптики, лучи света распространяются прямолинейно (см. рисунок 73). Открыто очень много зон Френеля, амплитуда поля в каждой точке плоскости наблюдения не меняется при изменении размеров отверстия в экране или изменении расстояния z_p , пока выполняется соответствующее условие. Эта амплитуда равна амплитуде поля перед экраном (или равна нулю, если точка наблюдения лежит в области геометрической тени). Дифракционная картина при изменении z_p не изменяется.

Для третьего случая расстояние z_p должно быть

$$z_p \gg \frac{D^2}{\lambda},$$

фазы различных волн практически совпадают. Это есть условие дифракции Фраунгофера. Эту дифракцию наблюдают, либо помещая экран на большое расстояние от отверстия, либо размещая фокусирующую линзу перед экраном на расстоянии, равном фокусному расстоянию, как показано на рисунке 74. Отверстие в экране составляет только малую часть зоны Френеля; говорят, что отверстием в экране открыта только часть первой зоны Френеля. Дифракционная картина изменяется подобно самой себе в зависимости от z_p . Интенсивность поля в подобных точках дифракционной картины монотонно спадает по мере удаления точки наблюдения от экрана и монотонно возрастает при увеличении размера отверстия.



Рисунок 74. Наблюдение дифракции Фраунгофера.

Второй случай является промежуточным. При этом

$$z_p \sim \frac{D^2}{\lambda},$$

открыто несколько зон Френеля, дифракцию необходимо рассматривать в приближении Френеля. Интенсивность поля в точке наблюдения периодически меняется от минимальной до максимальной при изменении положения этой точки или изменении размеров отверстия (если при этом последовательно открываются и закрываются зоны Френеля). Таким образом, дифракционная картина существенным образом зависит от z_p .

Дифракция Френеля на щели

Рассмотрим падение плоской монохроматической волны на длинную прямоугольную щель. Направим координату x вдоль щели, тогда по этой координате пределы интегрирования будут приближенно равны от минус до плюс бесконечности. Если разделить подынтегральную функцию в интеграле Кирхгофа по переменным x и y, то по x можно сразу проинтегрировать:

$$E(P) = \frac{e^{ikz_P}}{i\lambda z_P} E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(ik\frac{(x-x_P)^2}{2z_P}\right) dx \int_{-d/2}^{d/2} exp\left(ik\frac{(y-y_P)^2}{2z_P}\right) dy =$$
$$= \frac{e^{ikz_P}}{\sqrt{i\lambda z_P}} E_0 \int_{-d/2}^{d/2} exp\left(ik\frac{(y-y_P)^2}{2z_P}\right) dy.$$

Введем переменную

$$v = \sqrt{\frac{k}{\pi z_P}} (y - y_P).$$

Тогда

$$E(P) = \frac{e^{ikz_P}}{\sqrt{2i}} E_0 \int_{v_1}^{v_2} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dy = \frac{e^{ikz_P}}{\sqrt{2i}} E_0 (C(v) + iS(v)) \Big|_{v_1}^{v_2}$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi z_P}} \left(-\frac{d}{2} - y_P\right) \quad v_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi z_P}} \left(\frac{d}{2} - y_P\right).$$

Здесь введены так называемые интегралы Френеля:

$$C(v) = \int_{0}^{v} \cos\left(\frac{\pi\alpha^{2}}{2}\right) d\alpha \qquad S(v) = \int_{0}^{v} \sin\left(\frac{\pi\alpha^{2}}{2}\right) d\alpha$$

Комплексная функция z(v) = C(v) + iS(v) описывает кривую на комплексной плоскости, называемую *спиралью Корню*; эта кривая изображена на рисунке 75. Итоговую амплитуду колебаний найдем в виде модуля вектора на комплексной плоскости, соединяющего две точки $z(v_1)$ и $z(v_2)$ на этой спирали.



Рисунок 75. Спираль Корню.

Найдем распределение интенсивности тени от края полубесконечного экрана. Совместим начало системы координат с краем экрана

$$v_{1} = v_{1}(y_{P}) = -\sqrt{\frac{k}{\pi z_{P}}} y_{P}, \quad v_{2} = \infty, \quad C(v_{2}) = S(v_{2}) = \frac{1}{2}.$$

$$E(y_{P}) = \frac{e^{ikz_{P}}}{\sqrt{2i}} E_{0} \left[\left(\frac{1}{2} - C(v_{1}) \right) + i \left(\frac{1}{2} - S(v_{1}) \right) \right],$$

$$I(y_{P}) = \frac{E_{0}^{2}}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - C(v_{1}) \right)^{2} + \left(\frac{1}{2} - S(v_{1}) \right)^{2} \right].$$

92

Такое распределение интенсивности показано на рисунке 76. Величина $\sqrt{\lambda z_P}$, которая задает масштаб дифракционной картины, определяет ширину зон Френеля.



Рисунок 76. Распределение интенсивности на экране при дифракции от края полубесконечного экрана.

Переход от дифракции Френеля к дифракции Фраунгофера Отношение $\frac{D^2}{z_p\lambda}$ называют *параметром* Френеля. Он характеризует число открытых зон Френеля в экране с характерным размером отверстия *D* для наблюдателя, находящегося на расстоянии z_p от экрана. На рисунке 77 изображено, как меняется дифракционная картина с ростом z_p (и, соответственно, с уменьшением параметра Френеля).



Рисунок 77. Переход от дифракции Френеля к дифракции Фраунгофера.

Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии

Рассмотрим, как преобразуется ранее полученный результат с ростом расстояния от экрана. В этом случае воспользуемся интегралом Кирхгофа в приближении Фраунгофера:

$$E(P) = \frac{E_0}{\lambda z_P} \int_{-D_x/2}^{D_x/2} exp\left(-ik\frac{xx_P}{z_P}\right) dx \int_{-D_y/2}^{D_y/2} exp\left(-ik\frac{yy_P}{z_P}\right) dy = \frac{E_0 D_x D_y}{\lambda z_P} \frac{sin(\alpha_x) sin(\alpha_y)}{\alpha_x \alpha_y},$$

где введены обозначения

$$\alpha_x = \frac{kx_P}{z_P} \frac{D_x}{2}, \quad \alpha_y = \frac{ky_P}{z_P} \frac{D_y}{2}.$$

Окончательно находим распределение интенсивности на экране

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha_x)}{\alpha_x^2} \frac{\sin^2(\alpha_y)}{\alpha_y^2}$$

 I_0 – интенсивность в центре (см. рисунок 78). Основная доля световой энергии сосредоточена в области, ограниченной по α от – π до π . Волна расширяется с углом расходимости θ , определяемым из условия

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_P}{z_P} D_{\chi} \sim \pi, \quad \theta = \frac{x_P}{z_P} \sim \frac{\lambda}{D_{\chi}}$$

Это соотношение верно не только щели, но и приближенно выполняется для любых форм отверстий в экране.



Рисунок 78. Распределение интенсивности на экране при дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

3.10. Спектры излучения

Спектральный анализ

Спектральный анализ – метод определения химического состава вещества по его спектру. Оказывается, что атомы каждого химического элемента имеют строго определённый набор резонансных частот, причем эти частоты совершенно не зависят от способа возбуждения свечения атомов. Именно на этих частотах атомы вещества излучают или поглощают свет. Соответственно различают

- спектр излучения, когда исследуется излучение, испускаемое непосредственно самим веществом. На спектре излучения видны светлые линии в определённых местах, характерных для каждого вещества;
- спектр поглощения, получающийся в результате пропускания через вещество белого света, имеющего непрерывный спектр. Вещество наиболее интенсивно поглощает свет на тех же резонансных частотах, на которых само излучает. На фоне непрерывного спектра появляются темные линии – это линии поглощения, которые и образуют спектр поглощения.

Наглядно спектры излучения и поглощения показаны на рисунке 79.



Рисунок 79. Спектр поглощения и спектр излучения.

Интенсивность спектральных линий зависит от количества вещества и его состояния. Выделяя эти длины волн, можно обнаружить данный элемент в составе сложного вещества, даже если масса вещества меньше 10⁻¹⁰ грамм. Применение спектрального анализа:

- открываются новые элементы: рубидий, цезий и др;
- определяется химический состав Солнца и звезд;
- определяется химический состав руд и минералов;
- используется как метод контроля состава вещества в металлургии, машиностроении, атомной индустрии;
- анализируется состав сложных смесей.

Линейчатый спектр



Рисунок 80. Линейчатый спектр.

Линейчатый спектр дают все вещества в газообразном атомарном (но не молекулярном) состоянии, когда атомы практически не взаимодействуют друг с другом. Для наблюдения такого спектра используют свечение паров вещества

в пламени или свечение газового разряда в трубке, наполненной исследуемым газом низкой плотности. При увеличении плотности атомарного газа отдельные спектральные линии расширяются.







Спектр молекул вещества, не связанных или слабосвязанных друг с другом (газ в молекулярном состоянии), уже не будет являться линейчатым. Будет наблюдаться полосатый спектр, состоящий из отдельных полос, разделенных темными промежутками. Каждая полоса представляет собой совокупность большого числа очень тесно расположенных линий.

Рисунок 82. Непрерывный спектр.

Непрерывный спектр дают тела, находящиеся в твердом, жидком состоянии, а также плотные газы. Чтобы получить такой спектр, надо нагреть тело до высокой температуры. Характер спектра зависит не только от свойств отдельных излучающих атомов, но и от взаимодействия атомов друг с другом. В спектре представлены волны всех длин и нет разрывов.

Оптическая спектроскопия

Для определения спектра вещества используют спектральные приборы (спектрометры). Наиболее распространенные приборы – спектрометры с пространственным разделением излучения по длинам волн, для чего в их включен диспергирующий элемент. Схема таких спектрометров приведена на рисунке 83. В качестве такого элемента используют дифракционные решетки, спектральные призмы и интерферометры Фабри-Перо.



Рисунок 83. Схема спектрометра с пространственным разделением излучения.

Первым известным диспергирующим элементом является стеклянная призма – т.е. многогранник, сделанный из прозрачного вещества, обладающего значительной дисперсией. При прохождении через призму поток лучей меняет свое направление, причем угол выхода лучей зависит от величины показателя преломления вещества призмы на данной длине волны. Получается хорошо известное спектральное разложение света; оно показано на рисунке 84.



Рисунок 84. Разложение спектра в спектральной призме.

Спектральная призма

Пусть на боковую сторону призмы под углом α_1 падает луч света (см. рисунок 85). Используя геометрические построения и закон Снеллиуса, можно записать:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - A, \quad A = \beta_1 + \beta_2, \quad \sin(\alpha_1) = n \sin(\beta_1),$$

$$\sin(\alpha_2) = n \sin(\beta_2).$$

$$A$$

$$N_1$$

$$\beta_1$$

$$\beta_2$$

$$\alpha_2$$

Рисунок 85. К расчету хода лучей с спектральной призме.

Полагая величины углов α_1 , α_2 , β_1 , β_2 малыми, можно считать, что значения синусов этих углов приближенно равны самим этим углам. Отсюда находим угол отклонения луча в линзе и его производную по длине волны

$$\varphi = (n-1)A, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = D_{\varphi} = A \frac{dn}{d\lambda}$$

Величина D_{φ} называется *угловой дисперсией* и является важной характеристикой любого диспергирующего элемента. Именно она определяет разницу углов, на которую элемент преломляет волны с разной длиной волны. Какая минимальная разница длин волн может быть зарегистрирована при помощи призмы? Отнесем подальше экран, на котором будем наблюдать световую картину после призмы. На большом расстоянии преломленные под разными углами волны разойдутся достаточно сильно, чтобы их можно было различить – и так для какой угодно малой разницы!

Не учитывается влияние дифракции. Экран наблюдения находится далеко от призмы, и можно воспользоваться приближением Фраунгофера. Вспомним, что при этом интенсивность света на экране для одной монохроматической волны задается следующей формулой:

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)^2, \ \ \alpha = \frac{k\varphi d}{2},$$

 φ — величина угла, под которым наблюдается дифракция, относительно направления выхода исследуемой волны, d — характерный размер боковой поверхности призмы.

Эта формула задает центральный максимум (при $\varphi = 0$) какой-то конечной ширины и последующие боковые минимумы и максимумы. Волны разных частот некогерентны, поэтому их интенсивности суммируются. Если эти длины волн очень близки друг к другу, то их центральные максимумы также будут близко друг к другу, и вследствие конечной толщины центральных максимумов их будет очень трудно отличить. С увеличением расстояния между призмой и экраном положение их центральных максимумов расходится, но и ширина максимумов тоже увеличивается, дифракционная картина увеличивается.

Критерий Релея

Для условия разрешения двух близко стоящих спектральных линий в спектрометрах вводится *критерий Penen* – такие линии могут быть разрешены, если центральный максимум одной из этих линий находится не ближе к центральному максимуму другой линии, чем ее первый минимум (см. рисунок 86). Провал в распределении интенсивности между максимумами составляет в этом случае порядка 20 процентов.



Рисунок 86. Критерий Релея.

Первый минимум наблюдается при $\alpha = \pi$, отсюда согласно критерию Релея для волн с длинами волн λ и $\lambda + \Delta \lambda$ находим минимальную разность $\Delta \lambda$, которую еще можно зарегистрировать

$$\frac{kd}{2} \Delta \varphi_{min} = \pi, \quad \Delta \lambda_{min} = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^{-1} \Delta \varphi_{min} = \frac{\lambda}{d} \frac{1}{A \frac{dn}{d\lambda}}.$$

Вводят разрешающую силу (или спектральное разрешение):

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda_{min}}$$

Для призмы

$$R = Ad \frac{dn}{d\lambda}.$$

Величина Ad есть характерная длина основания призмы, обычно она не превышает 10 см, для оптического стекла $\frac{dn}{d\lambda} \sim 1,5 \cdot 10^3$ см⁻¹. Отсюда теоретический предел разрешающей силы призмы $R \sim 10^4$, в реальности же эта сила гораздо меньше.



Рисунок 87. Дифракционная решетка, работающая на просвет.

Дифракционная решетка представляет собой периодическую структуру прозрачных и непрозрачных щелей или штрихов, нанесенных на плоскую или цилиндрическую поверхность. Решетка может работать или на "просвет", или в отраженном свете. Первый вариант изображен на рисунке 87.

Поскольку щели очень длинные, по одному из направлений можно проинтегрировать с бесконечными пределами, после интегрирования интеграл приобретает вид

$$E(\varphi) = A \int E(x) exp\left(-ikx \sin(\varphi)\right) dx.$$

Если *х* принадлежит непрозрачному промежутку между щелями, то при этом E(x) = 0, и этот интеграл разбивается на сумму интегралов по отдельным щелям решетки. Интенсивность света на экране



Рисунок 89. Итоговое распределение интенсивности при a = b.



Рисунок 90. Зависимость дифракционной картины от числа щелей (N = 2,3,4).

При $v = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, ...$ в $I(\varphi)$ присутствуют резкие максимумы, называемые главными, в остальных точках значение этой функции мало. Ширина главных максимумов тем меньше, чем больше число периодов решетки N, пример уменьшения ширины максимумов с ростом N показан на рисунке 90. При $\varphi = 0$ наблюдается центральный главный максимум, амплитуда остальных главных максимумов с ростом φ резко уменьшается, но вблизи центрального есть по крайней один или несколько боковых главных максимумов с еще значительной амплитудой. Номер (порядок) m главных максимумов определяется из условия

$$v = m\pi$$
, $t \sin(\varphi) = m\lambda$.

Таким образом, если сквозь решетку направить луч монохроматического света, то на экране мы увидим не одно, а несколько светлых пятен, вытянутых в ряд перпендикулярно штрихам решетки. Центральное пятно, соответствующее прямому прохождению света, не зависит от длины волны пропускаемого света, а вот положение боковых пятен, образованных боковыми главными максимумами, зависит! Таким образом, дифракционная решетка обладает ненулевой угловой дисперсией $D_{\varphi} \neq 0$ для боковых максимумов. Разложение белого света на дифракционной решетке показано на рисунке 91.



Рисунок 91. Разложение белого света на дифракционной решетке.

Рассмотрим отражающую дифракционную решетку при падении на нее света под углом ψ (см. рисунок 92). В этом случае

$$v = \frac{\pi t}{\lambda} (\sin(\varphi) + \sin(\psi)), \quad u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\varphi + \psi) \cos(\psi).$$

Условие главных максимумов

$$t\big(\sin(\varphi)+\sin(\psi)\big)=m\lambda,$$

нулевой максимум наблюдается для угла $\varphi = -\psi$.



Рисунок 92. Дифракционная решетка, работающая на отражение.

Угловая дисперсия тем сильнее, чем больше номер m главного максимума, для которого она наблюдается. С другой стороны, интенсивность главных максимумов быстро падает с увеличением их номера. Этот недостаток устранен в другом типе дифракционных решеток, а именно в отражательных решетках с профилированной поверхностью. Такую решетку также называют *эшелетт*, она показана на рисунке 93.



Рисунок 93. Эшелетт.

Разность хода лучей от соседних периодов в ней зависит от высоты ступеньки штриха, зависимость $v(\varphi)$ не изменяется по сравнению с предыдущим случаем, а

$$u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\varphi + \psi + 2\alpha) \cos(\psi).$$

Центральный максимум функции $I_1(u)$ располагается при $\varphi = -(\psi + 2\alpha)$. Этот угол соответствует зеркальному отражению от наклонной грани штриха и носит название *угол блеска*. Подбирая величину α , можно добиться совпадения главного максимума $I_1(u)$ и главного максимума функции $I_2(v)$ с номером m.

Рассчитаем основные характеристики дифракционной решетки. Для нахождения угловой дисперсии продифференцируем условие главных максимумов:

$$d[t(\sin(\varphi) + \sin(\psi))] = t\cos(\varphi) \, d\varphi = m \, d\lambda,$$
$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{t\cos(\varphi)}.$$

Угловая дисперсия решетки пропорциональна порядку главного максимума и обратно пропорциональна расстоянию между штрихами (т.е., пропорциональна плотности штрихов).

Для разрешающей силы необходим критерий Релея. Положение главного максимума определяется функцией $I_2(v)$, в которой расстояние от максимума до минимума равно π/N . Найдем, на сколько изменится угол φ при изменении v на эту, достаточно малую величину:

$$dv_{min} = \frac{\pi}{N} = d \left[\frac{\pi t}{\lambda} \left(sin(\varphi) + sin(\psi) \right) \right] = \frac{\pi t}{\lambda} cos(\varphi) \, d\varphi_{min},$$
$$d\varphi_{min} = \frac{\lambda}{tN \cos(\varphi)}.$$
$$\Delta\lambda_{min} = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^{-1} \Delta\varphi_{min} = \frac{\lambda}{Nm}, \quad R = Nm.$$

103

Так как число N периодов решетки очень велико, то ее разрешающая сила может достигать 10^6 .

При использовании дифракционной решетки на экране наблюдается несколько вытянутых в ряд узких светлых участков, отвечающих разным порядкам *m*. При изменении длины волны света эти участки сдвигаются. Если есть сразу две волны с разными, но близкими длинами волн, то отвечающие одинаковому порядку светлые участки, образованные этими волнами, находятся близко друг к другу, и далеко от других светлых участков. При увеличении разности длин волн эти близкие когда-то участки разъезжаются, приближаются к другим, и расшифровка дифракционной картины становится затруднительной.

Областью свободной дисперсии называется диапазон частот $G = \lambda_{max} - \lambda_{min}$, в котором главный максимум порядка m волны λ_{max} не перекрывает главный максимум порядка m + 1 волны λ_{min} . Уравнение на границу этой области относительно ее средней частоты λ определяется из условия совпадения углов φ этих волн:

$$m\left(\lambda + \frac{G}{2}\right) = (m+1)\left(\lambda - \frac{G}{2}\right).$$

Область свободной дисперсии дифракционной решетки

$$G=\frac{\lambda}{m+1/2}.$$

Спектральный интервал, занимаемый исследуемым излучением, не должен превышать этой величины.

Спектрометр Черни-Тернера

Рисунок 94. Схема спектрометра Черни-Тернера. 1 – вход света, 4 – входное зеркало, 5 – дифракционная решетка, 6 – выходное зеркало, 8 – детектор излучения, 7 – электроника.

Для исследования спектра излучения применяют различные спектрометры, однако в последнее время широкое распространение получили спектрометры Черни-Тернера, схема которых показана на рисунке 94. Это малогабаритные (занимающие мало места) спектрометры, в которых свет с плоской дифракционной решетки через зеркало падает на многоэлементный детектор излучения. Данная схема имеет много достоинств, одним из которых является возможность исследуемого спектрального диапазона и разрешения путем установки решетки с нужной плотностью штрихов под нужным углом.

3.11. Дифракция Брэгга

Дифракция от трехмерной периодической структуры, такой как атомы в кристалле называется дифракцией Брэгга. Это похоже на то, что происходит, когда волны рассеиваются на дифракционной решётке.

В кристалле можно выбрать три кристаллические оси с ортами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 и три смещения d_1 , d_2 , d_3 такие, что при смещении решетки на величину

$$n_1\mathbf{e}_1d_1 + n_2\mathbf{e}_2d_2 + n_3\mathbf{e}_3d_3$$

решетка совпадает сама с собой. Далее считаем решетку прямоугольной.

Пусть на нее падает пучок параллельных лучей, образующий с осями X, У, Z углы α_0 , β_0 , γ_0 , a отраженный пучок распространяется в направлении, заданном углами α , β , γ . Тогда условия возникновения главных максимумов для каждой из осей координат имеют вид:

$$d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m_1 \lambda$$
$$d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = m_2 \lambda$$
$$d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = m_3 \lambda$$

Углы α , β , γ не являются независимыми, поскольку для них выполняется соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Таким образом, при заданных α_0 , β_0 , γ_0 и λ углы, определяющие направления максимумов, находятся из решения системы четырех уравнений. Для ее разрешения необходимо равенство нулю определителя.

При распространении волны вдоль Z ($\cos \alpha_0 = \cos \beta_0 = 0$, $\cos \gamma_0 = 1$) должно выполняться равенство

$$\left(\frac{m_1\lambda}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2\lambda}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3+m_3\lambda}{d_3}\right)^2 = 1.$$

Это условие, накладываемое на длину волны λ , при выполнении которого существует дифракционный максимум. При освещении немонохроматическим светом образуется система главных максимумов, каждому из которых соответствует определенная длина волны.

Периоды кристаллических решеток (единицы ангстрем) не позволяют наблюдать дифракцию в оптическом диапазоне. Длина волны рентгеновских лучей имеет тот же масштаб; они подходят для исследования внутренней структуры веществ.



Рисунок 95. Дифракция на периодической структуре.

Если представить кристалл в виде набора атомных слоев (как показано на рисунке 95), то интерференционное усиление волн, отразившихся от разных слоев, будет происходить при выполнении условия Вульфа-Брэгга:

$$2d\sin\theta = m\lambda.$$

Часть 4. Электродинамика частиц и волн

4.1. Волновое уравнение для потенциалов

Система уравнений Максвелла при наличии токов и зарядов имеет вид

$$rot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad div \boldsymbol{B} = 0,$$
$$rot \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad div \boldsymbol{D} = 4\pi\rho.$$

Можно показать, что любое соленоидальное векторное поле можно представить как ротор векторного потенциала

$$\boldsymbol{B} = rot \boldsymbol{A}.$$

Подставив это выражение в 1-е уравнение Максвелла, поменяем в нем порядок дифференцирования и перенесем в левую часть

$$rot\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Если ротор векторного поля в каждой точке пространства равен нулю, то это векторное поле можно представить как градиент скалярного поля

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -grad \,\varphi.$$

Таким образом, можно ввести такие скалярный и векторный потенциалы, что

$$\boldsymbol{B} = rot \boldsymbol{A}, \, \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - grad \, \varphi.$$

Эти потенциалы определены неоднозначно. Если провести следующее калибровочное преобразование

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad f(\mathbf{r}, t), \ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ – произвольная скалярная функция, то поля **B** и **E** не изменятся (т.е. поля инвариантны относительно этих преобразований).

Потенциалы φ и **A** допускают наложение дополнительного требования в виде скалярного уравнения (*условия калибровки*). Рациональный выбор этого условия существенно упрощает получающиеся уравнения для потенциалов.

При использовании калибровки Лоренца

$$div\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

вторая пара уравнений Максвелла в вакууме сводится просто к системе двух независимых неоднородных волновых уравнений

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho.$$

107

4.2. Запаздывающие потенциалы

Найдем решения уравнений для потенциалов в безграничном пространстве, считая, что токи и заряды, входящие в правые части уравнений, занимают ограниченную область пространства.

В стационарном случае рассматриваемые уравнения сводятся к уравнениям электростатики и магнитостатики

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \varphi = -4\pi \rho.$$

Эти уравнения при заданных функциях $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ имеют решения

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') \, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Для общего случая функций $\rho(\mathbf{r}, t)$, **j**(**r**, *t*) зависящих от времени, решения волновых уравнений для потенциалов имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV',$$
$$\varphi(\mathbf{r},t) = \iiint \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'.$$

Токи и заряды элемента объема dV' в точке наблюдения **r** сказываются с некоторым запаздыванием по времени, равным времени прохождения световым сигналом расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Эти выражения называются запаздывающими потенциалами.

Мультипольное разложение запаздывающих потенциалов

Аналогично случаю электро- и магнитостатики, общие решения можно упростить при вычислении потенциалов на больших расстояниях от системы движущихся зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Ограничимся векторным потенциалом и поставим задачу выразить $A(\mathbf{r}, t)$ через изменяющиеся во времени дипольные и квадрупольные моменты системы. Для этого расстояние $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и множитель 1/R, входящие в подынтегральное выражение для потенциалов, примем в виде разложений

$$R = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Разложение проведем с удержанием первых малых добавок, пропорциональных малому параметру a/r (a – характерный размер системы).

Плотность тока записывается в виде

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \ t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \ t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \ t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right),$$
$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

108
Примем допущение, что характерное время T изменения плотности тока **j** в системе существенно превышает величину a/c времени, необходимого световому сигналу для прохождения расстояний порядка размеров системы

$$\frac{a}{cT} \ll 1.$$

Рассматривая плотность тока как функцию времени, разложим ее в ряд Тейлора относительно точки t' и с удержанием первой малой добавки представим в виде

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t'\right) + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}.$$

Подставив это выражение в исходный интеграл, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr} \left\{ \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') dV' + \frac{1}{r} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') dV' \right\}.$$

В магнитостатике первый из интегралов тождественно равен нулю, а интеграл, входящий во второе и третье слагаемые, выражается через магнитный момент системы. В случае переменных полей это не так. Первый из интегралов сводится к сумме, равной скорости изменения дипольного момента системы в момент времени t'

$$\iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')dV' = \sum q_i \mathbf{v}_i(t') = \frac{d}{dt'} \sum q_i \mathbf{r}_i(t') = \dot{\mathbf{d}}(t')$$

Второй интеграл после ряда преобразований можно представить в виде

$$\frac{1}{c} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' = \frac{1}{2c} \sum q_i [\mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t')] \times \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \frac{d}{dt'} \sum q_i \mathbf{r}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t')) = \mathbf{m}(t') \times \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \dot{\mathbf{Q}}(t').$$

Здесь использовали вектор **Q**, определенный как

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha\beta}n_{\beta}, \quad Q_{\alpha\beta} = \sum q x_{\alpha}x_{\beta}$$

Следовательно

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cr} + \left(\frac{\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t') \times \mathbf{n}}{cr}\right) + \frac{1}{2c} \left(\frac{\dot{\mathbf{Q}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t')}{cr}\right).$$

Вектор-потенциал состоит из трех членов разложения, соответствующих дипольному, магнитно-дипольному и квадрупольному моментам системы зарядов.

Каждый из магнитно-дипольного и квадрупольного членов разложения состоит из двух слагаемых. Только в виде соответствующих сумм они удовлетворяют однородному волновому уравнению (при $\mathbf{j} = 0$) и пригодны для вы-

числения полей во всем пространстве $r \gg a$. Обычно используемые разложения с удержанием только последних слагаемых в каждой сумме такую задачу не решают. Они применимы для определения полей вдали от источника и вычисления угловой и полной интенсивности излучения, поскольку неучитываемые слагаемые с расстоянием спадают как $1/r^2$ и на характеристики излучения влияния не оказывают.

Обычно в качестве тензора квадрупольных моментов используют

$$D_{\alpha\beta} = \sum q (3x_{\alpha}x_{\beta} - r^{2}\delta_{\alpha\beta}) = 3Q_{\alpha\beta} - \sum qr^{2}\delta_{\alpha\beta}$$

Удобство такого тензора состоит в том, что его след (сумма диагональных элементов) равен нулю. Квадрупольный член в разложении потенциала имеет вид

$$\varphi^2 = \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}.$$

Тогда последний член в разложении излучения заменяется на

$$\frac{1}{6c}\left(\frac{\dot{\mathbf{D}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t')}{cr}\right).$$

4.3. Дипольное излучение

Воспользуемся разложением вектор-потенциала для исследования поля, создаваемого системой движущихся зарядов, на больших расстояниях. Как уже отмечалось, система обладает двумя характерными размерами. Один из них *а* определяет протяженность системы, а другой есть характерная длина λ излучаемой электромагнитной волны, причем разложение вектор-потенциала справедливо при выполнении условия *а* $\ll \lambda$.

На область наблюдения наложено ограничение $r \gg a$. Что касается соотношения между r и λ ; то оно произвольно: r может быть не только больше, но и меньше λ .

- *r* << λ область квазистационарности, в которой явления запаздывания несущественны.
- *r*~λ ближняя зона. Здесь явление запаздывания уже проявляется в полной мере, но и характерные черты квазистационарного поля еще сохраняются.
- r >> λ волновая зона. Поле излучения сформировано и в малой окрестности любой точки наблюдения представляет собой плоскую электромагнитную волну, уходящую от источника.

Дипольный член разложения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cr}.$$

После ряда преобразований можно получить

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = rot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}}{cr^2}.$$

110

Первое слагаемое, спадающее с расстоянием как 1/r обеспечивает отличный от нуля поток энергии электромагнитного поля на бесконечности, т. е. создает излучение. Вторым слагаемым, затухающим как $1/r^2$ на больших расстояниях можно пренебречь, но в ближней зоне они одинаковы по порядку величины.

В волновой зоне

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{n}.$$

Излучаемая системой электромагнитная волна уносит с собой определенную энергию. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} B^2 \mathbf{n}.$$

Интенсивность излучения в элемент телесного угла $d\Omega$, т. е. поток энергии, переносимой через элемент поверхности $dS = r^2 d\Omega$ за единицу времени, равна

$$dJ = S \, dS = \frac{c}{4\pi} B^2 r^2 d\Omega.$$

Угловое распределение интенсивности дипольного излучения (при фиксированном значении *t*) определяется выражением

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n} \right]^2 d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t')^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \, d\Omega$$

Распределение излучения по направлениям осесимметрично относительно направления вектора $\ddot{\mathbf{d}}(t')$, задается множителем $\sin^2 \theta$ и визуально характеризуется диаграммой направленности. Излучение максимально в плоскости, перпендикулярной вектору $\ddot{\mathbf{d}}(t')$, а в направлении этого вектора равно нулю. Диаграмма направленности дипольного излучения представлена на рисунке 96, картина поля – на рисунке 97.



Рисунок 96. Диаграмма направленности излучения диполя.



Рисунок 97. Поле излучения диполя.

Полная интенсивность дипольного излучения

$$J = \int dJ = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t')^2}{4\pi c^3} \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}(t')^2}{c^3}.$$

Если дипольный момент системы меняется по гармоническому закону $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}$, то интерес представляет результат усреднения по периоду. Угловое распределение при этом равно

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{|\mathbf{d}_0|^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta.$$

4.4. Магнитно-дипольное излучение

Рассмотрим излучение, обусловленное магнитно-дипольным и квадрупольным членами разложения векторного потенциала. Эти члены разложения являются малыми добавками, пропорциональными отношению a/λ и поэтому их вклад в излучение, вообще говоря, мал по сравнению с дипольным. Но они становятся главными, когда дипольный момент системы равен нулю и дипольное излучение отсутствует.

Установим соответствие между полями от электрического и магнитного диполей. Для этого возьмем фурье-составляющие электрического и магнитного дипольных моментов на произвольной частоте ω : $\hat{\mathbf{d}}e^{-i\omega t}$, $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$, и рассмотрим соответствующие поля.

$$\widehat{\mathbf{B}}_{d}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{i\omega}{c}\frac{\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{r^{2}} - \frac{\omega^{2}}{c^{2}}\frac{\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{r}\right)e^{ikr} = -\left(\frac{k^{2}}{r} + \frac{ik}{r^{2}}\right)\left[\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}\right]e^{ikr},$$
$$\widehat{\mathbf{E}}_{d}(\mathbf{r}) = (i/k)\operatorname{rot}\widehat{\mathbf{B}}_{d}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\left(\left(-\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^{2}}\right)\left[\hat{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}\right]e^{ikr}\right).$$

Вектор-потенциал магнитного диполя характеризуется комплексной амплитудой и соответствующим магнитным полем

$$\widehat{\mathbf{A}}_{m}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\widehat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{r^{2}} - \frac{i\omega}{c} \frac{\widehat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{r}\right) e^{ikr}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{m}(\mathbf{r}) = rot\left(\left(-\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^{2}}\right) [\widehat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}\right)$$

Тождественность формул показывает, что магнитное поле $\widehat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r})$ магнитного диполя совпадает с электрическим полем $\widehat{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r})$ электрического диполя. Поскольку данное совпадение имеет место при всех ω , полученное соответствие справедливо для произвольных зависимостей $\mathbf{d}(t)$ и $\mathbf{m}(t)$.

Опуская достаточно громоздкие вычисления, сразу приведем результат взятия ротора

$$\widehat{\mathbf{B}}_{m}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{ik}{r^{2}}\right) [3(\widehat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \widehat{\mathbf{m}}]e^{ikr} + k^{2} [[\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{m}}] \times \mathbf{n}] \frac{1}{r} e^{ikr},$$
$$\widehat{\mathbf{E}}_{d}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r^{3}} - \frac{ik}{r^{2}}\right) [3(\widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \widehat{\mathbf{d}}]e^{ikr} + k^{2} [[\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{d}}] \times \mathbf{n}] \frac{1}{r} e^{ikr}.$$

Первые слагаемые в полученных выражениях, являющиеся главными при $kr \ll 1$, совпадают с полями стационарных диполей. Вторые слагаемые, главные в волновой зоне, представляют собой поля расходящихся сферических волн, перпендикулярные направлению **n**.

Аналогично электрическое поле магнитного диполя равно взятому с обратным знаком магнитному полю электрического диполя

$$\widehat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) = -k^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{i}{kr^2}\right) [\widehat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_d(\mathbf{r}) = -k^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{i}{kr^2}\right) [\widehat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}.$$

И угловое, и полное излучение обоих диполей одинаковы. Единственное различие полей излучения связано с их поляризацией. Следовательно, полная интенсивность дипольного излучения

$$J = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t')^2}{c^3}$$

4.5. Квадрупольное излучение

Квадрупольное излучение описывается слагаемым векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{6} \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t')}{c^2 r}$$

Вычисление *rot* **A** в данном случае усложнено тем, что вектор **D** зависит от угловых координат точки наблюдения, т.е. от вектора **n**. Но для волновой зоны изменениями как множителя 1/r, так и вектора **n** можно пренебречь и вектор-потенциал считать функцией только t' = t - r/c

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(t-r/c), \quad \mathbf{B} = rot \, \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{n}}{c},$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}}{6c^3 r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{n}.$$

Угловая интенсивность излучения определяется выражением

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{\left| \ddot{\boldsymbol{D}}(t') \times \mathbf{n} \right|^2}{36c^6}$$

113

Полная интенсивность квадрупольного излучения

$$J=\frac{1}{180c^5} \overleftrightarrow{D}^2_{\alpha\beta}(t'),$$

необходимо суммирование по α и β от 1 до 3.

Возьмем осесимметричный квадруполь, в нем компоненты тензора квадрупольных моментов равны

$$D_{11} = D_{22} = D_0 e^{-i\omega t}, D_{33} = -2D_0 e^{-i\omega t}.$$

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} \frac{\omega^6}{180c^5} (D_0^2 + D_0^2 + 4D_0^2) = \frac{\omega^6}{60c^5} D_0^2.$$

4.6. Излучение антенны

Из большого многообразия антенн рассмотрим линейную антенну с центральным возбуждением, так называемую вибраторную антенну. Эта антенна представляет собой два прямых отрезка провода с небольшим зазором в центре, на который подается возбуждающее напряжение от стороннего источника – см. рисунок 98.



Рисунок 98. Линейная антенна с центральным возбуждением.

В строгой постановке задача излучения такой антенны под действием внешней ЭДС должна заключаться в одновременном определении как распределения тока в элементах антенны, так и возбуждаемой антенной электромагнитной волны. Но обычно распределение тока по антенне задаются, а затем по известному току находят поле излучаемой электромагнитной волны. Примем, что ток вдоль антенны синусоидальный, симметричный в обоих плечах и обращается в нуль на ее концах.

$$I(z,t) = I_1 \sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right)e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Возможны следующие случаи:

- $kl \ge \pi$ тогда I_1 максимальная величина амплитуды тока в антенне;
- $kl < \pi$ амплитуда тока максимальна в зазоре, ее величина $I_0 = I_1 \sin(kl/2);$

• $kl \ll 1$, распределение тока можно записать как

$$I(z,t) = I_0 \left(1 - \frac{2}{l} |z| \right) e^{-i\omega t}.$$

Вибратор Герца

Исследование поля излучения рассматриваемой антенны начнем с предельного случая $l \ll \lambda$ ($kl \ll 1$), когда антенну называют вибратором Герца. Это типичный дипольный излучатель, поле излучения которого определяется второй производной дипольного момента. Эта производная может быть найдена по известному распределению тока в излучателе

$$\dot{\mathbf{d}}(t') = \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}',t') \, dV'.$$

В случае линейного тока I(z, t) объемный интеграл сводится к одномерному

В рассматриваемом приближении можно принять, что

$$\dot{d}_{z}(t) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z,t) dz = \frac{1}{2} l I_{0} e^{-i\omega t}, \quad \dot{d}_{z}(t) = -\frac{i\omega}{2} l I_{0} e^{-i\omega t}.$$

Усредненное угловое распределение типичной диаграммой направленности, задаваемой множителем $\sin^2 \theta$

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{32\pi c} (kl)^2 I_0^2 \sin^2\theta.$$

Полная мощность излучения

$$\langle J \rangle = \frac{1}{3} \frac{(\omega l)^2}{4c^3} I_0^2 = \frac{\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2.$$

Эту мощность можно представить в виде

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} R_{{}_{\rm H}{}_{\rm S}\pi} I_0^2,$$

коэффициент при $I_0^2/2$, имеющий размерность сопротивления, называется *сопротивлением излучения*. Для рассматриваемой антенны

$$R_{_{\rm ИЗЛ}} = rac{2\pi^2}{3c} \Big(rac{l}{\lambda}\Big)^2 = 200 \left(rac{l}{\lambda}\Big)^2$$
 Ом.

Общий случай

$$\begin{array}{c} z \\ l/2 \\ dz \\ \theta \\ 0 \\ -l/2 \end{array}$$

Рисунок 99. Длина антенны сопоставима с длиной волны.

При длине антенны, сопоставимой с длиной волны, антенна в целом не является дипольным излучателем. Теперь каждый элемент антенны *dz* можно рассматривать как элементарный диполь, как показано на рисунке 99:

$$d\dot{p}_{z}(t) = I(z,t)dz,$$

$$d\ddot{p}_{z}(t) = -i\omega I_{1} \sin\left(k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right)e^{-i\omega t}dz.$$

Магнитное поле от этого элемента в точке наблюдения с координатами (r, θ) есть

$$dB_{\alpha}(r,\theta,t) = \frac{d\ddot{p}_{z}(t)}{c^{2}r'}\sin\theta, t' = t - \frac{r'^{(z)}}{c} = \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c}z\cos\theta$$

В знаменателе выражения dB_{α} различием r' и r можно пренебречь и отсюда для суммарного поля получить

1/2

$$B_{\alpha}(r,\theta,t) = -\frac{i\omega I_1}{c^2 r} e^{i(kr-\omega t)} \sin \theta \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(k\left(\frac{l}{2}-|z|\right)\right) e^{-ikz\cos\theta} dz$$

После интегрирования

$$B(r,\theta,t) = -\frac{2iI_1}{cr}e^{i(kr-\omega t)}\frac{\cos\left(k\frac{l}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(k\frac{l}{2}\right)}{\sin\theta}$$

Угловая интенсивность равна

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle B^2 \rangle r^2 = \frac{I_1^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos\left(k\frac{l}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(k\frac{l}{2}\right)}{\sin\theta} \right|^2.$$

Характер углового распределения зависит от величины kl. В частных случаях полуволнового ($kl = \pi$) и полноволнового ($kl = 2\pi$) вибраторов

$$\left(\frac{dJ}{d\Omega}\right) = \frac{I_1^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} & \text{при } kl = \pi\\ \frac{4\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} & \text{при } kl = 2\pi \end{cases}$$

Рисунок 100. Диаграммы направленности при различных значениях kl.

Соответствующие диаграммы направленности представлены на рисунке 100, где для сравнения пунктирной линией нанесена также соответствующая диаграмма для дипольного излучения. Видно, что угловое распределение излучения полуволновой антенны очень близко к излучению диполя, а диаграмма направленности полноволновой антенны имеет существенно более острую направленность.

4.7. Интерференционный способ управления диаграммой направленности

Используя множество отдельных простых излучателей (например, полуволновых вибраторов), можно создать излучающую систему, обладающую необходимой диаграммой направленности. В примерах, которые рассматриваются далее, получим остронаправленное излучение.

В качестве элементарного излучателя выберем дипольный излучатель, имея в виду, что полуволновой вибратор по диаграмме направленности мало отличается от диполя. Заметив, что для эффективной интерференции полей диполи должны быть параллельны, примем, что все они параллельны оси z.

Рассмотрение начнем с простейшего случая, когда результат интерференции легко представить наглядно. Пусть *N* интерферирующих диполей расположены вдоль оси z с координатами $z_j = ja$ (см. рисунок 101), имея постоянный сдвиг по фазе между соседними диполями $\Delta \chi$, $\chi_j = j\Delta \chi$:



Рисунок 101. К расчету излучения N диполей вдоль оси z.

Диполи создают осесимметричное излучение, в котором вклад каждого из диполей в точке наблюдения с координатами (r, θ) в волновой зоне равен

$$B_{\alpha}^{(j)}(r,\theta,t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} d_0 \sin \theta \, e^{i\chi_j} e^{-i\omega(t-r_j/c)},$$
$$r_j = r - ja \cos \theta$$

Суммарная комплексная амплитуда поля

$$\left|B_{\alpha}^{(j)}(r,\theta)\right| = \frac{k^2 d_0}{r} \sin \theta \left|\frac{\sin(N\left(ka\cos\theta - \Delta\chi\right)/2\right)}{\sin((ka\cos\theta - \Delta\chi)/2)}\right|.$$

Угловая интенсивность

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} \left| B_{\alpha}^{(j)}(r,\theta) \right|^2 r^2 =$$
$$= \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin(N \left(ka \cos \theta - \Delta \chi\right)/2)}{\sin((ka \cos \theta - \Delta \chi)/2)} \right)^2$$

Вид диаграммы направленности, в основном определяемый последним множителем выражения (*интерференционный множитель*), зависит от числа N диполей, отношения a/λ и разности фаз $\Delta \chi$.

При $a > \lambda$ излучение характеризуется наличием интерференционных максимумов нескольких порядков от m = 0 до $m = m_0 = a/\lambda$ с соответствующими лепестками в диаграмме направленности. Для создания излучателя с остронаправленным излучением примем $a < \lambda$.

В составе излучения будет только максимум нулевого порядка, который при $\Delta \chi = 0$ занимает положение $\theta = \theta_0 = \pi/2$. Угловая ширина $\Delta \theta$ этого максимума, т. е. разброс углов относительно θ_0 , на котором $\langle dJ/d\Omega \rangle$ от максимального значения при $\theta = \theta_0$ первый раз спадает до нуля при $\theta = \theta_0 \pm \Delta \theta$, определяется условием равенства нулю числителя интерференционного множителя

$$\sin\left(\frac{\pi Na}{\lambda}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0, \qquad \theta = 2\frac{\lambda}{Na}.$$

Для получения остронаправленного излучения необходимо, чтобы общая длина дипольной решетки удовлетворяла условию $Na \gg \lambda$.

Рассмотрим случай $\Delta \chi \neq 0$. Поскольку величина $\Delta \chi$ управляет направлением максимума излучения, удобно ее выразить как

$$\Delta \chi = ka \cos \theta_0,$$

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin(N ka(\cos \theta - \cos \theta_0)/2)}{\sin(ka(\cos \theta - \cos \theta_0)/2)} \right)^2$$

Видно, что угол θ_0 определяет положение максимума диаграммы направленности излучения. При этом угловая ширина этого максимума будет равна

$$\Delta\theta = 2\frac{\lambda}{Na\sin\theta_0}.$$

Соответствующая диаграмма направленности представлена на рисунке 102.



Рисунок 102. Диаграмма направленности N диполей вдоль оси z.

Создадим излучение с максимальной интенсивностью только в направлениях, ограниченных определенным угловым размером по сферической координате α . Расположим диполи в плоскости (*x*, *y*) в точках

$$\mathbf{r}^{(j)} = ja\mathbf{e}_x, a < \lambda,$$

как показано на рисунке 103.



Рисунок 103. К расчету излучения N диполей вдоль оси х.

Расстояние от *j*-го диполя до точки наблюдения (r, θ, α) определяется как

 $r_i = r - ja\sin\theta\cos\alpha$.

Можно показать, что угловая интенсивность определяется выражением

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin(N \left(ka \sin \theta \cos \alpha - \Delta \chi \right)/2)}{\sin((ka \sin \theta \cos \alpha - \Delta \chi)/2)} \right)^2$$

Рассмотрим характер излучения при небольших *N*. Возьмем два диода

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = 4 \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \cos \alpha - \frac{\Delta \chi}{2} \right).$$

Если взять два синфазных диполя ($\Delta \chi = 0$) и расположить их на расстоянии $a = \lambda/2$, то излучение вдоль и против оси *x* должно отсутствовать. При этом распределение интенсивности в плоскости *xy*

$$\left. \left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle \right|_{\theta=\pi/2} \sim \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right),$$

диаграмма направленности показана на рисунке 104.



Рисунок 104. Диаграмма направленности двух диполей при $a = \lambda/2$.

Можно создать систему из двух диполей так, чтобы волны от отдельных диполей усиливали друг друга при распространении в одном направлении (например, вдоль оси х) и подавляли в другом. Для этого надо взять $a = \lambda/4$, а разность фаз принять $\Delta \chi = \pi/2$, чтобы для волн, бегущих вдоль оси x амплитуды складывались, а в противоположном направлении вычитались. Диаграмма направленности имеет вид, показанный на рисунке 105, и выражается формулой



Рисунок 105. Диаграмма направленности двух диполей при $a = \lambda/4$.

Рассмотрим случай N >> 1 при соблюдении условий

$a < \lambda$, $Na \gg \lambda$.

У излучения такой системы существует единственный главный максимум (в полупространстве y > 0), направление которого определяется из условия равенства нулю знаменателя интерференционного множителя. Угловая ширина $\Delta \alpha$ главного максимума задается числителем интерференционного множителя

$$\Delta \alpha = 2 \frac{\lambda}{Na\sin\theta}.$$

На рисунке 106 окружность соответствует излучению единичной антенны, а узкие лепестки отвечают излучению решетки при $\Delta \chi = 0$ и $\Delta \chi = ka$.



Рисунок 106. Диаграмма направленности при $a < \lambda$, $Na \gg \lambda$.

4.8. Антенны

Антенна «волновой канал» (антенна Удо-Яги)



Рисунок 107. Схема антенны Удо-Яги.



Рисунок 108. Антенна Удо-Яги.

Антенна состоит из расположенных вдоль линии излучения параллельно друг другу активного (A) и ряда пассивных вибраторов — рефлекторов (R), расположенных относительно направления излучения за активным вибратором, а также директоров (D), расположенных перед активным вибратором. Чаще всего применяется один рефлектор, число директоров меняется от нуля до десятков. Активный вибратор имеет длину около полуволны (0,5 λ), рефлектор длину немного большую 0,5 λ , директоры имеют длину, меньшую 0,5 λ . Расстояния от активного вибратора до рефлектора и до первого директора составляют около 0,25 λ .

Схема подобной антенны представлена на рисунке 107, а фотография реальной антенны – на рисунке 108.



Рисунок 109. Ослабление и усиление полей в антенне Удо-Яги.

Ток, наведенный излучением активного вибратора в рефлекторе, наводит в нем напряжение. Длина рефлектора больше 0.5λ, напряжение отстает по фазе от напряжения в активном вибраторе. В результате излучение активного вибратора и рефлектора в направлении рефлектора складывается в противофазе, а в направлении активного вибратора — в фазе, что приводит к усилению излучения в направлении активного вибратора приблизительно вдвое – см. рисунок 109. Аналогично рефлектору работают директоры, однако из-за того, что их длина меньше 0.5λ, излучение усиливается в направлении директоров.



Рисунок 110. Диаграмма направленности антенны Удо-Яги.

Зеркальная (параболическая) антенна



Рисунок 111. Большая параболическая антенна.

Электромагнитное поле антенны образуется за счет отражения электромагнитной волны от металлической поверхности специального зеркала (рефлектора). В качестве источника волны обычно выступает небольшой излучатель, располагаемый в фокусе зеркала. В его роли может быть любая другая антенна с фазовым центром, излучающая сферическую волну.



Офсетная (асимметричная) антенна

Рисунок 112. Спутниковая офсетная антенна.

Антенна представляет собой несимметричную вырезку из параболоида вращения с облучателем в фокусе параболоида. Фокус такого сегмента расположен ниже геометрического центра антенны. Это устраняет затенение полезной площади антенны облучателем и его опорами.

Фазированная антенная решетка



Рисунок 113. Фазированная антенная решетка.



Рисунок 114. Стационарная радиолокационная станция на основе фазированной антенной решетки.

Фазированная антенная решетка состоит из целой группы отдельных излучателей, в которых относительные фазы сигналов так, что эффективное излучение антенны усиливается в каком-то одном, желаемом направлении и подавляется во всех остальных направлениях.

4.9. Радиотелескоп

Радиотелескоп – астрономический инструмент для приёма радиоизлучения небесных объектов. Он состоит из двух основных элементов: антенного устройства и очень чувствительного приёмного устройства – радиометра. Радиометр усиливает принятое антенной радиоизлучение. Радиотелескоп не может строить изображение непосредственно, он лишь измеряет энергию излучения, приходящего с направления, в котором «смотрит» телескоп.



Рисунок 115. Радиотелескоп.

Чем больше диаметр антенны радиотелескопа, тем больше его разрешающая способность. Если взять две антенны, расположенных на расстоянии d (база) друг от друга, то сигнал от источника до одной из них будет приходить чуть раньше, чем до другой. С помощью специальной математической процедуры можно будет восстановить информацию об источнике с эффективным разрешением λ/d .

Возможно создать систему, которая включает в себя телескопы, расположенные на разных материках и разнесенные на несколько тысяч километров (Радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами).