Статистическая физика. Часть I

Основные законы термодинамики

1. Термодинамические системы. Релаксация и термодинамическое равновесие. Равновесные состояния и равновесные процессы, обратимость. Термодинамические переменные.
2. Термостат и изотермический процесс. PV-диаграммы, свойства изотерм, изотермы идеального газа. Условная температура и уравнение состояния вещества.
3. Адиабатический процесс. PV-диаграммы, свойства адиабат, совершенный газ. Условная энтропия, калорическое уравнение состояние вещества.
4. Абсолютная температура и абсолютная энтропия. Эквивалентность PV- и TS-плоскостей. Уравнения состояния и энтропия идеального газа. Работа. Внутренняя энергия,
5. Количество теплоты. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость газа. Начало отсчёта температуры.
6. Круговые процессы. Цикл Карно. КПД тепловых машин. Второе начало термодинамики. Теорема Нернста, третье начало термодинамики.
7. Термодинамика газа Ван-дер-Ваальса. Охлаждение газа. Процессы Гей-Люссака и Джоуля-Томсона. Энтальпия.
8. Термодинамические потенциалы. Внутренняя энергия, свободная энергия, энтальпия, термодинамический потенциал Гиббса. Преобразование Лежандра.
9. Процессы выравнивания. Рост энтропии. Экстремальные свойства термодинамических потенциалов. Термодинамические неравенства.

Статистические ансамбли

1. Статистический подход к описанию сложных систем. Статистические ансамбли. Статистический вес макроскопического состояния системы. Микроканоническое распределение. Энтропия. Условие теплового равновесия. Вывод уравнений термодинамики.
2. Каноническое распределение Гиббса. Распределение по энергиям для тела в термостате. Статистическая сумма и свободная энергия. Вывод равенства $dF=-SdT-PdV$ из канонического распределения.
3. Классический идеальный газ. Распределение Максвелла-Больцмана.
4. Классический идеальный газ молекул с внутренними степенями свободы. Колебательные и вращательные спектры молекул.
5. Системы с переменным числом частиц. Химический потенциал. Ω -потенциал. Равновесие фаз. Фазовые переходы первого рода. Условия равновесия фаз. Примеры диаграмм состояния. Тройная точка.
6. Тепловая ионизация атомов. Тепловая диссоциация молекул. Химическое равновесие. Закон действующих масс.
7. Флуктуации энергии в каноническом ансамбле. Флуктуации числа частиц в большом каноническом ансамбле.

Задачи по курсу статистическая физика I

1. Термодинамика

1.1 Идеальный газ расширяется от объёма V_1 до V_2. Процесс происходит:

1) изобарически (p = const); 2) изотермически (T = const); 3) адиабатически (S = const). Начертить графики этих процессов на pV- и EV-диаграммах.

   Определить:

   а) при каком процессе произведённая газом работа наименьшая.

   б) знак изменения ΔE внутренней энергии газа в каждом процессе.

1.2 Температура одного моля идеального газа повышается от T_1 до T_2. Процесс происходит: а) изохорически ($V = const$); б) изобарически ($p = const$); в) адиабатически ($S = const$). Построить графики этих процессов на pV-диаграмме. Вычислить совершённую газом работу, количество подведённого тепла и изменение внутренней энергии в каждом процессе.

1.3 Из сосуда откачан воздух. Приоткрыв на короткое время кран, сосуд заполняют атмосферным воздухом. Какой будет температура вошедшего в сосуд воздуха, если теплообмен со стенками сосуда не успевает произойти. Каким будет давление воздуха в сосуде, когда температура его за счет теплообмена сравняется с температурой атмосферного воздуха?

1.4 Найти соотношение между изотермическим и адиабатическим коэффициентами сжимаемости, если известен показатель адиабаты γ. $K_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$, $K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

1.5 Идеальный газ находится в эластичной адиабатической оболочке под давлением P_1 при температуре T_1, объём газа V_1. Внешнее давление меняется скачком $P_1 \rightarrow P_2$. Определить установившуюся температуру T_2 и объём V_2. Найти изменение энтропии для этого процесса.

1.6 Найти к.п.д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат (цикл Джоуля).

1.7 Найти к.п.д. цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат (цикл Отто).

1.8 Найти изменение температуры и изменение энтропии одного моля газа Ван-дер-Ваальса при расширении от V_0 до V_1, если начальная температура равнаT_0.

1.9 Два разных газа в двух сосудах с объемами V_1 и V_2 имеют одинаковые давления и температуры. Газы смешали, как изменится энтропия ΔS = ?

1.10 Два одинаковых газа в двух сосудах с объемами V_1 и V_2 имеют одинаковые давления, но разные температуры. Число молей газов одинаково. Газы смешали. Чему равно изменение энтропии ΔS = ?

1.11 Два одинаковых газа в адиабатически изолированных сосудах разных объемов. Давления p_1 и p_2 различны. Число молей газов и температуры одинаковы. Газы смешали. Чему равно изменение энтропии ΔS = ?

1.12 Два одинаковых адиабатически изолированных сосуда, содержат равное число молей идеального газа при разных давлениях. Газы смешали, как изменилась энтропия, ΔS = ?

1.13 Два тела с температурами T_{01} и T_{02} и теплоемкостями C_1 и C_2 привели в тепловой контакт. Как изменилась энтропия этих тел? Показать, что всегда $\Delta S \geq 0$.

1.14 Используя свободную энергию F, доказать справедливость соотношения

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p.$$

1.15 Используя термодинамический потенциал Гиббса, доказать справедливость соотношения

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V,$$

где H – энтальпия.

1.16 Показать, что из условий $\left(\partial E / \partial V\right)_T = 0$ и $\left(\partial H / \partial p\right)_T = 0$ следует уравнение состояния идеального газа.

2. Элементы статистики

2.2 Материальная точка колеблется по закону $x = \sin \omega t$. Найти вероятность того, что при случайном измерении её положения она будет обнаружена в интервале $x, x + dx$.

2.3 Найти среднее значение величины x, её среднее квадратичное значение, среднюю квадратичную флуктуацию $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ и относительную флуктуацию $\delta x = \sqrt{\overline{\Delta x^2}} / \overline{x}$, если $dw = const \cdot \exp(-\alpha x) dx, \alpha > 0$.

2.4 Идеальный газ содержит N молекул, заключённых в объёме V. Найти вероятность того, что в выделенной части объёма v содержится n молекул. Рассмотреть предельные случаи:
а) $N \gg n$ (малый объём: $v \ll V$);
б) среднее число частиц в выделенном объёме велико (малый, но макроскопический объём): $\overline{n} \sim n \gg 1, |\Delta n| = |\overline{n} - n| \ll \overline{n}$.

3. Распределение Максвелла

3.1 Записать распределение Максвелла в сферической и цилиндрической системах координат. Получить отсюда распределение по абсолютной величине скорости v, распределения по углам ϑ и φ.

3.2 По распределению Максвелла найти средние значения x-компоненты скорости $\overline{v_x}$, среднеквадратичной скорости $\sqrt{\overline{v^2}}$; определить наиболее вероятную скорость v_m.

3.3 Найти распределение частиц газа по энергиям $\varepsilon = mv^2/2$. Рассчитать наиболее вероятную и среднюю энергии. Сравнить их с величинами соответственно $m{v_m}^2/2$ и $m\overline{v}^2/2$. Объяснить различие.

3.4 Найти относительную флуктуацию $\delta\varepsilon$ энергии одной молекулы идеального газа и относительную флуктуацию δE энергии газа, состоящего из N молекул.

3.5 Плёнки некоторых нерастворимых органических кислот и спиртов на воде можно моделировать идеальным двумерным газом. Написать распределение по скоростям в таком газе в декартовых и полярных координатах. Найти среднюю энергию одной молекулы.

3.6 Газ состоит из атомов, излучающих свет с длиной волны λ_0. Найти закон распределения измеряемой в спектроскопе интенсивности излучения газа $I(\lambda)$ в зависимости от длины волны. Учесть эффект Допплера.

3.7 Найти распределение по скоростям частиц газа, вылетающих из тонкостенного сосуда через малое отверстие, а также полный поток частиц j, если температура газа в сосуде T, площадь отверстия s.

3.8 Рассчитать среднюю и среднеквадратичную скорость частиц в молекулярном пучке, а также их среднюю энергию.

3.9 Оценить время τ, за которое Земля потеряет атмосферу. При оценке приближённо считать атмосферу однородным по плотности плоским слоем толщины $h_{эфф} \cong kT/mg$. $T \cong 300^\circ K, g \cong 10$ м/сек$^2, m = 5\cdot 10^{-26}$ *кг*. За время существования атмосферы принять время в течение которого плотность атмосферы уменьшится в e раз.

Указание. Молекула покидает атмосферу (плоский слой), когда её тепловая скорость больше второй космической скорости $v_2 \cong 11$ км/сек.

3.10 Из малого отверстия площадью s в стенке сосуда происходит стационарное истечение газа в вакуум (в сосуде давление и температура поддерживаются постоянными). Найти распределение плотности частиц n в окружающем сосуд пространстве, если плотность их в сосуде n_0.

4. Распределение Больцмана

4.1 Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность в зависимости от высоты удовлетворяют соотношению $p\rho^{-\gamma} = const$. Показать, что температура такой атмосферы линейно уменьшается с высотой. Найти температурный градиент для земной атмосферы.

4.2 Идеальный газ находится в поле тяжести в закрытом сосуде высотой h. Во сколько раз изменится давление на дно сосуда, если его температуру T_0 увеличить в два раза. Масса молекулы m.

4.3 Как изменяется с высотой удельный объём v жидкости в поле тяжести? Температуру жидкости считать постоянной, её изотермическая сжимаемость $\kappa_T = -v^{-1}\left(\partial v/\partial p\right)_T$ задана.

4.4 Найти распределение плотности газа по радиусу во вращающейся с угловой скоростью ω цилиндрической центрифуге. Внешний радиус центрифуги r_0, внутренний равен нулю, высота её h. В центрифуге находится N частиц.

4.5 В центрифуге радиуса r, вращающейся с угловой скоростью ω, находится смесь двух газов с молекулярными весами μ_1 и μ_2 и количеством молекул N_1 и N_2. Найти отношение концентраций газов у внешней стенки и на оси центрифуги. Сделать оценки для смесей H_2 - D_2 и ^{235}U - ^{238}U ; $r = 10$ см, ω=10^4 $1/сек$.

4.6 Примесный атом находится в межузельной полости в кристалле с потенциалом $u(r) = ar^4$ (ангармонический потенциал). Найти его среднюю энергию при температуре T.

4.7 Найти среднюю энергию взаимодействия молекулы, обладающей дипольным моментом d, с зарядом q, отстоящим от неё на большом расстоянии r.

5. Микроканоническое и каноническое распределения. Внутренние степени свободы

5.1 . Цепочка состоит из *N* звеньев длины *a*. Каждое звено может свободно поворачиваться, ориентируясь по или против оси *x* направленной вверх. Верхний конец цепочки закреплён, к нижнему − подвешен груз веса *f*. Найти зависимость среднего значения длины цепочки от температуры. (Это примитивная модель молекулы каучука. Она «улавливает» необычную зависимость длины молекул от температуры).

5.2 Для получения низких ("гелиевых") температур $T_0 \geq 1K$ используют контакт тела с кипящим при низком давлении гелием. Для получения еще более низких температур часто используют метод адиабатического размагничивания. Кристалл, в который введена примесь парамагнитной соли, намагничивают при температуре $T_0 \leq 1K$, теплоизолируют, а затем медленно выключают внешнее магнитное поле. Происходит **адиабатическое размагничивание** кристалла, и он охлаждается. При низких температурах теплоёмкость кристалла $C = AT^3$.
Найти температуру кристалла после выключения магнитного поля. Считать, что атомы примеси имеют спин 1/2.

5.3 Найти теплоемкость двухуровневой системы, у которой кратность вырождения возбужденного состояния очень велика, $ln(g_1) >> 1$. Энергия возбужденного состояния равна ε.

5.4 Найти, какой вращательный уровень двухатомной молекулы имеет наибольшую заселенность при температуре $T >> T_R$. $kT_R = \hbar^2 / 2\mu r_0^2$

5.5 Пользуясь законом равнораспределения энергии по степеням свободы, вычислить молярную теплоёмкость n-атомного газа при высоких температурах, $kT \gg \hbar\omega$, где ω- характерные частоты колебаний молекул.

Рассмотреть случаи линейных и нелинейных молекул.

5.6 В закрытом сосуде находится один моль идеального газа трёхатомных нелинейных молекул ABC. Под действием света происходит полная диссоциация газа: $ABC \to A + BC$. Найти суммарную теплоёмкость газа в сосуде до и после воздействия света. Температура газа $kT \gg \hbar\omega$, где ω- характерные частоты колебаний молекул.

5.7 Характеристическая температура колебательного движения молекул O_2, $\theta = \hbar\omega / k$, равна 2250° К. Какой вклад в молярную теплоёмкость вносит это движение при температуре 300° К? Какая доля всех молекул будет находиться в первом возбуждённом состоянии? Как изменятся результаты, если температура будет 600° К?

Литература

1. **Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин**. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Новосибирск, Изд. НГУ, 2000.

2. **Г.Л. Коткин.** Лекции по статистической физике. Новосибирск: НГУ, 2003.

3. **Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.** Статистическая физика. Ч.1, 1978.

4. **В.П. Замураев, А.П. Калинина**. Задачи по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск, НГУ, 2001.

5. **Г. Коткин, Е.Г. Образовский.** Задачи по статистической физике. Новосибирск, НГУ, 2007.

6. **Ч. Киттель** Статистическая термодинамика. М.: Наука, 1977.

7. **Р. Кубо.** Термодинамика, - М.: «Мир», 1970.

8. **Р. Кубо**. Статистическая механика. - М.: «Мир», 1967.