Глава 1. Векторная алгебра. 04.09

§ 1. Матрицы.

Аналитическое описание геометрических фигур и тел может быть упрощено с помощью спец. матем. объекта называется матрицей

Опред. Матрицы размера m на n называются упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащие m строк и n столбцов

Элемент матрицы, находящийся в i-ой строке и j столбце обозначается

$$a_{ij}$$

Числа m, n, $m \times n$ - размеры матрицы

Матрица задается перечислением её элементов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если $m = n$, то матрица наз. квадратной

Матрица размера $m \times 1$ наз. m-мерным (или m-компонентным столбец)

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица размера $1 \times n$ наз n-мерной (или n-компонентной) строкой

$$C = (C_1; C_2 \ldots C_n)$$

Некоторые частоиспользуемые матрицы имеют специальное название:

- матрица, все элементы которой нулевые наз нулевой матрицей. 0

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = (0, 0 \ldots 0)$$

- квадратная матрица наз единичной и обозначается E если она имеет вид:

по диагонали стоят: 1
все остальные 0

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица наз. симметричной, если

$a_{ij} = a_{ji}$; $\forall i, j \in 1 \dots n$ (для всех)

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Операции над матрицами:

Опр. Две матрицы A и B наз. равными, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны

$a_{ij} = b_{ij}$ $\quad \forall i \in \{1 \dots m\}$

$\forall j \in \{1 \dots n\}$

Обозначение: $A = B$

Опред. Матрица C называется суммой матриц A и B, если матрицы A, B и C одинаковых размеров и

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Обозначение: $C = A + B$

Опр. Матрица B называется произведение матрицы A на число λ, если матрицы A и B одинаковых размеров

$b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Обозначение: $B = \lambda A$.

Пусть $A = m \times n$; $B = n \times k$ матрицы

Их произведением наз. $m \times k$ матрица C

$A \begin{array}{c} 1 \dots n \\ \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{array}_m \quad B \begin{array}{c} 1 \dots k \\ \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{array}_n = C \begin{array}{c} 1 \dots k \\ \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{array}_m$

$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$ $\quad 1 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq k$

Обозначение $C = AB$

$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{i1} & b_{2j} & & \\ b_{n1} & b_{nj} & & b_{nk} \end{pmatrix} B$

i-ая строка умножается на j столбец.

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{in} b_{nj}$

Будем говорить, что матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$ размера $m \times n$

и $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$ размера $n \times m$ получаются друг из друга <u>транспонированием</u>

Замена строк на столбцы и столбцов на строки

$B = A^T$, если $b_{ij} = a_{ji}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ b_{n1} & & & b_{nm} \end{pmatrix} \qquad b_{n1} = a_{1n}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T \begin{pmatrix} 14 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

<u>Упр</u> $(AB)^T = B^T A^T$.

Определители (детерминанты) квадратных матриц 2 и 3 порядка

Для квадратных матриц имеется спец. числовая характеристика наз определителем (или детерминантом)

Опр Определителем квадратной матрицы 2-го порядка наз число

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - bc$$

произведение элементов на гл. диагонали минус произведение эл. на побочной диагонали.

Опр Определителем квадратной матрицы 3 порядка наз число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{33} a_{22} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

наглядное правило для вычисления 3 порядка (по одному из каждой строки и каждого столбца)


+


−

Следствие: При транспонировании квадратных матриц второго и третьего порядка их определители не меняются

Другое обозначение определителя: $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$

Теорема Определитель матрицы 3 порядка может быть выражен через определитель 2 порядка след формулой:

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix}a_{2}\\ a_{3}\end{vmatrix}$$

разложение по первой строке

Доказательство: непосредственная проверка.

Система лин. уравнений - применение определителей.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с 2 неизвест.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\end{cases} \quad (1)$$

В матричном виде $AX = B$

$A\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$

Теорема: Для того, чтобы система линейных уравнений (1) имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы

$\Delta = \det A \neq 0$.

Доказательство необходимости:

Умножим 1 уравнение на a_{22} и прибавим 2 уравнение, умноженное на $-a_{12}$

получим:

$$\oplus\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1\\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2\end{cases}$$

$$x_1(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$x_1\det A = \det\begin{pmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{pmatrix} \quad x_1\Delta = \Delta 1$$

аналогично

Аналогично умножим 2 уравнение на a_{11} и вычтем из 1 на a_{21}

получим $x_2\cdot\Delta = \Delta_2 = \det\begin{pmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 \cdot \Delta = \Delta_1 \\ x_2 \cdot \Delta = \Delta_2 \end{cases}$ Если $\Delta = 0$ а $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, то эти равенства не имеют решений

Если $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 = 0$, то коэф. ур-ий системы (1) пропорциональны (две совпадающие прямые) они имеет бесконечное кол-во решений.

Прямая

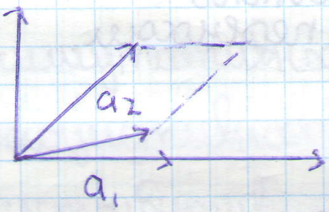
Если реш. существует и единственное, то $\Delta \neq 0$

Если $\Delta \neq 0$, то решение определенно однозначно

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}}$$ - уравнение Крамера

Если определит $= 0$, уравнение пропорционально.

Геометрический смысл определителя



$a_1(x_1; y_1)$ $\quad a_2(x_2\ y_2)$

2 вектора a_1 и a_2 произвольны

составим определ. для координат векторов.

$a_1(x_1\ y_1)$

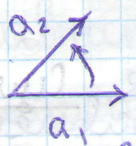
$a_2(y_2\ x_2)$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = S(a_1; a_2)$$

площадь параллелограмма, построенного на векторах $a_1; a_2$

„ориентированная"

положительная ориент.



поворот от a_1 к a_2 против часовой стрелки.

Аналогично для 3 векторов.

$Vol(a_1 a_2 a_3)$ - „ориентированный" объем ~~определителя~~ параллелепипеда

§2. Векторы.

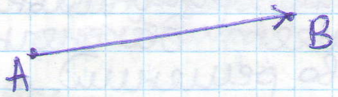
Линейные операции над векторами.

В физике имеются величины разного характера

Масса, объем задаются действительными числом - это скалярные величины

Скорость, ускорение, сила - характеризуются не только числовым значением, но и направлением их называют векторными величинами

Определение: Геометрическим вектором (направленным отрезком) называют любой отрезок, на котором выбрано направление (одно из двух возможных)



Можно определить геометрический вектор, как упорядоченную пару точек

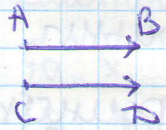
первая точка - начало, вторая - конец
Начало также называют точкой приложения вектора

Обозначение: $\vec{AB}$

Модуль или длина вектора $|\vec{AB}|$ = равен длине отрезка

Вектор называется ненулевым, если его длина $\neq 0$
Если начало и конец совпадают, то имеем нулевой в

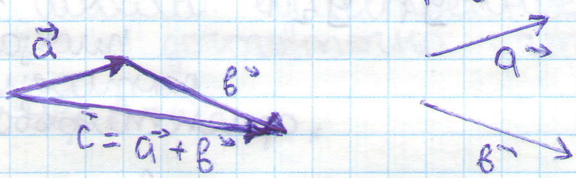
Определение: Два ненулевых направленных отрезка $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называются равными, если (при $A \neq C$) их начала и концы можно соединить параллельным переносом.



Линейные операции над векторами

Пусть даны два направленных отрезка $\vec{a}$ и $\vec{b}$

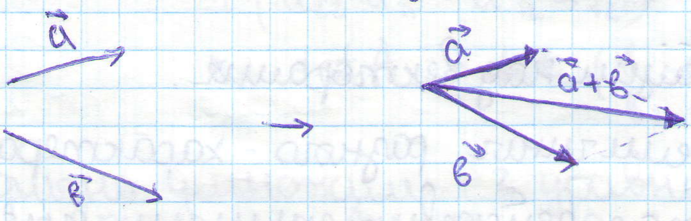
Совместим начало отрезка $\vec{b}$ с концом $\vec{a}$, тогда направленный отрезок $\vec{c}$ начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец с концом $\vec{b}$ называется <u>суммой</u> <u>направленных отрезков $\vec{a}$ и</u>



правило треугольни

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Операция сложения может быть выполнена по правилу параллелограмма



<u>Разностью</u> направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются вектор $\vec{c}$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

$\forall \vec a \quad \vec a + \vec 0 = \vec a$

Произведение $\lambda \vec a$ при $\lambda = 0$ – это нулевой направленный отрезок

при $\lambda \neq 0$ – это направл. отрезок, длина которого равна $|\lambda||\vec a|$

Направление совпадает с направлением $\vec a$ если $\lambda > 0$

противоположно если $\lambda < 0$

Определение множества векторов.

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены операции $\left.\begin{array}{l}\text{равенства}\\ \text{сложения}\\ \text{умножения}\end{array}\right\}$ наз. множеством векторов

Теорема: операции сложения и умножение на скаляр обладают след свойствами:

1) коммутативность: $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$

2) Ассоциативность: $\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c \quad \lambda(\mu \vec a) = (\lambda\mu)\vec a$

3) Дистрибутивность: $\lambda(\vec a + \vec b) = \lambda\vec a + \lambda \vec b$

$$(\lambda+\mu)\vec a = \lambda \vec a + \mu \vec a$$

$$\forall \lambda, \mu \quad \forall \vec a, \vec b, \vec c$$

Отношение равенства векторов является отношением эквивалентности.

1. $a \sim a$ – рефлексивность
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ – симметричность
3. $a \sim b;\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ – транзитивность.

Определение: Свободным вектором называется абстрактный объект, связанный с равными направленными отрезками тем, что каждый из равных друг другу направленных отрезков считается представителем этого свободного вектора

Вектор можно прилагать к разным точкам

представители вектора, приложенных к разным точкам

§3. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение: Два вектора параллельные одной прямой называются коллинеарными

Определение: Три вектора параллельные одной плоскости называются компланарными

Выражение вида $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ называются линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$

λ_i $i \in [1, n]$ - чи[сла]
$\vec{a}_i$ $i \in [1, n]$ - век[торы]

- Если все числа $\lambda_i = 0$, то это тривиальная линейная комбинация
- Если хотя бы одно из чисел $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ отлично от нуля то линейная комбинация называется нетривиальная

Определение линейной зависимости и независимости системы векторов.

¬ Векторы $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ наз. линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, такая что

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

¬ Векторы $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ наз линейно независимыми, если из условия $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, следует, что все $\lambda_i = 0$.
(для того, чтобы линейная комбинация $= \vec{0}$ необходимо и достаточно чтобы все $\lambda = 0$)
лин. комб $= 0 \Leftrightarrow$ все $\lambda = 0$

Теорема:

Для того, чтобы векторы были линейно зависимыми необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных

Доказательство: "Необходимость. „$\Rightarrow$"

Пусть векторы $\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n$ лин. зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1 \ldots \lambda_2$ не все равные 0, такие, что

$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \ldots \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n$$

$\vec{a}_1$ - линейная комбинация оста[льных]

Достаточность $\Leftarrow$

Пусть, например, $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$

Тогда

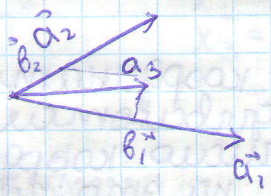
$(-1)\vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ - нетривиальная лин. комбинация $= 0$

Теорема: Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны

Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны

Доказательство:



$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$

§ 4. Базис. Координаты вектора в базисе

Обозначение: V_1 - пространство всех коллинеарных между собой векторов (т.е парал. некоторой прямой)

V_2 - пространство всех компланарных между собой векторов (т.е парал нек. плоск)

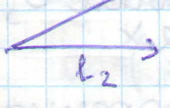
V_3 - пространство всех свободных векторов.

V_1 Любой ненулевой вектор в V_1 наз. базисом в V_1

Выберем и зафиксируем вектор $\vec{e} \in V_1$

Тогда любой вектор $\vec{v} \in V_1$ $\vec{v} = \lambda \vec{e}$ - разложение $\vec{v}$ в базисе $\vec{e}$; λ - координата вектора $\vec{v}$ в базисе $\vec{e}$

V_2 Любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов наз. базисами в V_2



l_1, l_2 - базис - 2 вектора

$\forall \vec{v} \in V_2$ $\vec{v} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2$ $\lambda_1; \lambda_2$ - координаты вектора $\vec{v}$ в базисе $l_1; l_2$

l_1, l_2 - опред. однозначно.

Действительно, если $\bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 = \mu_1 \bar{e}_1 + \mu_2 \bar{e}_2$

то $(\lambda_1 - \mu_1)\bar{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\bar{e}_2 = 0$.

e_1, e_2 - линейно независ. $\Rightarrow$

V_3 Любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов наз. базисом V_3

$\forall \bar{v} \in V_3 \qquad \bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3$

Если векторы базиса взаимно ортогональны (перпен… то базис наз. ортогональным.

Ортогональный базис наз ортонормированным, если векторы имеют единичную длину ОНБ.

Вычисление в координатах.

I При сложении векторов двух их координаты в одном и том же базисе складываются
при умножении вектора на число координаты умножаются на это число.

$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 \qquad \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2 + (x_3 + y_3)\ldots$

$\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + y_3 \bar{e}_3 \qquad \lambda\bar{x} = \lambda x_1 \bar{e}_1 + \lambda x_2 \bar{e}_2 + \lambda x_3 \bar{e}_3$

Теорема:

Для того, чтобы 2 вектора на плоскости были линейно зависимыми (геометр - 2 коллинеар) необходимо и достаточно, чтобы и… координаты в некотором базисе $\bar{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяют условию.

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$$

Теорема:

Для того чтобы 3 вектора $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ были компланарны необходимо и достаточно, чтобы

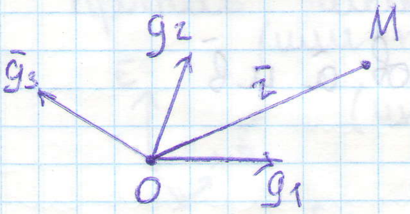
$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

§5. Декартова система координат.

Определение: Совокупность базиса $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2; \bar{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов наз. общей декартовой системы координа…

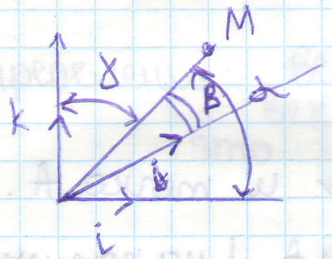
$\{O; \bar{g}_1\, \bar{g}_2\, \bar{g}_3\}$

Определение: Если e_1, e_2, e_3 - ортонормирован. базис (ОН.Б) то система координат $\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2; e_3\}$ называется прямоугольной системой к. (п.с.к)



Вектор $\bar{r} = O\bar{M}$ наз. радиус-вектором точки M

Координаты $\bar{r}$ наз. координатами точки M



$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы

$x_1 = |r|\cos\alpha$

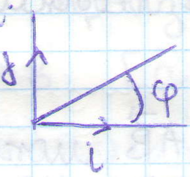
$x_2 = |r|\cos\beta$

$x_3 = |r|\cos\gamma$

$$|\bar{r}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |r|^2\cos^2\alpha + |r|^2\cos^2\beta + |r|^2\cos^2\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

На плоскости:



$x_1 = |r|\cos\varphi$

$x_2 = |r|\sin\varphi$

Полярная с.к.

§6. Скалярное произведение векторов. Ортогональные проекции.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ наз. число равное $|a|\cdot|b|\cos\varphi$ φ-угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$

Обозначение $(\bar{a}, \bar{b})$, $a\cdot b$

Свойства скалярного произведения.

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ - коммутативность.
2. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$
3. $(a+b)c = ac+bc$ - дистрибутивность.

$a^2 = \bar{a}\cdot\bar{a}$ - скалярный квадрат

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами в ОНБ i, j, k

$\bar{a} = (x_a\ y_a\ z_a)$ $\bar{b} = (x_b; y_b; z_b)$

$a \cdot b = x_a x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$ (исп. свойство базиса $ij = ik = jk = 0$, $ii = jj = kk = 1$)

$\bar{a} = x_a i + y_a j + z_a k$

$\bar{b} = x_b i + y_b j + z_b k$

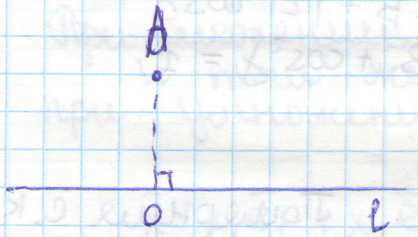
Критерий ортогональности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$x_a x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = 0$$

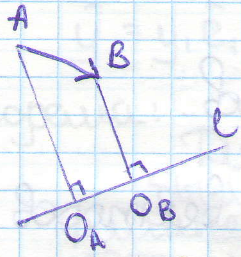
$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a||b|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Ортогональная проекция.

Пусть на плоскости заданы прямая l и точка A.



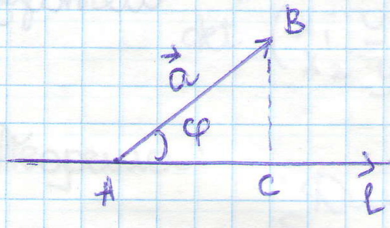
Опустим из точки A $\perp$ на прямую. Его основание O наз. ортогональной проекцией точки A на прямую l



Для вектора $\vec{AB}$ можно построить ортогон. проекции на l его начала и кон...

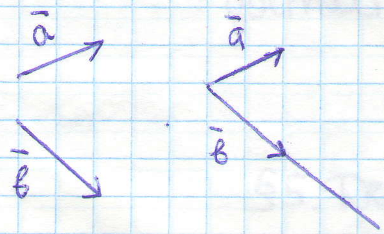
$\vec{O_A O_B}$ – ортогональная проекция вектора $\vec{AB}$ на прямую l

Теорема:



Величина проекции вектора $\bar{a}$

$$|pr_l \bar{a}| = |\bar{a}| \cos(\bar{a}\ \bar{l}) = |\bar{a}| \cos\varphi$$



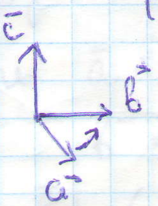
$$pr_b \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{b}, \vec{b})} \cdot \vec{b}$$

$\vec{l} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ – единичный вектор вдоль b

§7. Векторное произведение.

Определение: Упорядоченная тройка векторов некомпланарных $\{a, b, c\}$ наз. правой если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$, совершающимся против часовой стрелки

(или правило правой руки)



(иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ левая тройка)

т.е. мы можем говорить о левых и правых базисах.

Определение: Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. вектор $\vec{c}$, такой что

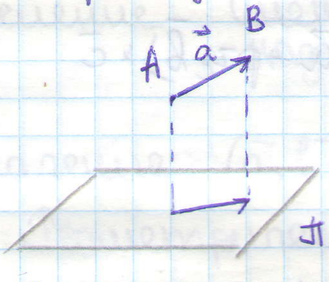
1) $|\vec{c}| = |a|\,|b| \sin\varphi$ φ - угол между $\bar{a}$ и $\vec{b}$
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$
3) Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая

Если вектора коллинеарны или если один из векторов нулевой то векторное произведение равно нулевому вектору

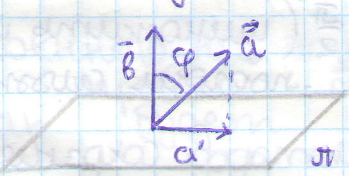
Обозначение: $\bar{a} \times \vec{b}$ $[\bar{a}, \bar{b}]$

Из св. 1) $\Rightarrow$ |величина векторного произведения| площадь параллелограмма построенного на векторах $\bar{a}$ и $\vec{b}$

Проекция вектора на плоскость - это вектор соединяющий ортогональные проекции точки A и B на плоскости π



Утверждение:



Пусть π - плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{b}$. Тогда

$$\bar{a} \times \vec{b} = \underbrace{(pr_\pi a)}_{\bar{a}'} \times \vec{b}$$

Доказательство: Вектора $\bar{a}, \bar{b}, \vec{a}'$ $(pr_\pi \bar{a})$ компланарны (в одной плоскости)

т.к. $\vec{a}' = \vec{a} + \lambda\vec{b}$,

Поэтому вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a}' \times \vec{b}$ - коллинеарны, т.к. они перпендик. плоскости $\bar{a}, \bar{b}$ $\bar{a}'$

Также эти вектора однонаправлены.
равенство длин: $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$ $\quad |\bar{a}'\cdot\bar{b}| = |\bar{a}'|\cdot|\bar{b}|$
но $|\bar{a}'| = |\bar{a}|\sin\varphi$

Геометрическое построение векторного произведения.

$\vec{a}, \vec{b}$ - 2 вектора

- Совместим их начала
- Спроецируем вектор $\vec{a}$ на плоскость π, перпендикулярную вектору $\vec{b}$
- Полученную проекцию в плоскости π надо повернуть вокруг вектора $\vec{b}$ на угол $\pi/2$ по ходу часовой стрелки.
- Результат поворота умножить на $|\vec{b}|$

Свойства векторного произведения.

1. антикоммутативность $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
2. ассоциативность отн. числового множителя
$$\lambda(\bar{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b}$$
3. дистрибутивность отн. сложения.
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$$

Доказательство:

заметим, что проекция суммы равна сумме проекций

$$pr_c(\bar{a}+\bar{b}) = pr_c\bar{a} + pr_c\bar{b}$$
$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = (pr_c(\bar{a}+\bar{b}))\times\bar{c} = (pr_c\vec{a} + pr_c\bar{b})\times\bar{c}$$
$$\vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c} = pr_c\vec{a}\times\vec{c} + pr_c\vec{b}\times\vec{c}$$
$$(pr_c\vec{a} + pr_c\bar{b})\times\bar{c} = \underbrace{pr_c\vec{a}}_{\bar{a}'}\times c + \underbrace{pr_c\vec{b}}_{\bar{b}'}\times\vec{c}$$

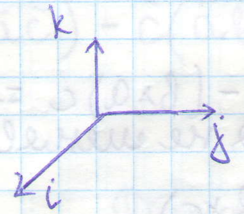
$\bar{a}'\times\vec{c}$ - поворот $\bar{a}'$ на $\frac{\pi}{2}$ (умножаем на $|\vec{c}|$)
$\bar{b}'\times\vec{c}$ - поворот $\bar{b}'$ на $\frac{\pi}{2}$ (умножить на $|\vec{c}|$)

сложим, потом повернем = повернем, потом сложим

при повороте взаимное расположение векторов сохраняется сумма переходит в сумму
(диагональ параллелограмма поворачивается вместе со сторонами)

Векторное произведение в координатах

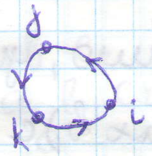
Пусть i, j, k – правый ОНБ,



$i\times j = k \qquad j\times i = -k$

$j\times k = i \qquad k\times j = -i$

$k\times i = j \qquad k\times i = -j$



$i\times i = k\times k = j\times j = 0$

Пусть $\bar a = x_a\vec i + y_a\vec j + z_a\vec k$

$\bar b = x_b i + y_b j + z_b \bar k$

$(\bar a\times\bar b) = (x_a i + y_a j + z_a k)(x_b i + y_b j + z_b k) =$

$= x_a x_b\, i\times i + x_a y_b\, i\times j + x_a z_b\, i\times k + y_a x_b\, j\times i + y_a y_b\, j\times j + y_a z_b\, j\times k +$

$+ z_a x_b\, k\times i + z_a y_b\, k\times j + z_a z_b\, k\times k = (y_a z_b - z_a y_b) i + (z_a x_b - x_a z_b) j +$

$+ (x_a y_b - y_a x_b) k =$

$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k$

$(\bar a\times\bar b) = \begin{vmatrix} i & x_a & x_b \\ j & y_a & y_b \\ k & z_a & z_b \end{vmatrix}$

§8 Смешанное произведение. Двойное векторное произведение.

Определение: Смешанным произведением 3 векторов $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ наз. число, равное

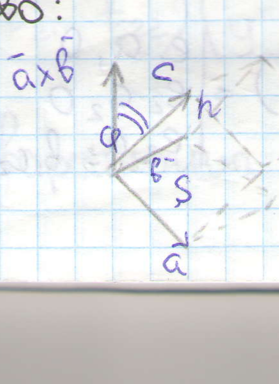
$(\bar a\times\bar b)\vec c$

Обозначение: $(\bar a, \bar b, \bar c) = (\bar a\times\bar b)c$

Геометрический смысл. **Теорема**

Смешанное произведение 3 некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда построенного на этих векторах со знаком „+", если тройка – $\bar a, \bar b, \bar c$ правая, знак будет „–", если тройка левая.

Доказательство:



$|\bar a\times\bar b| = S$

$V = S\times h \qquad h = ||\cos\varphi\cdot|c||$

Свойства смешанного произведения.

1. правило цикличекой перестановки

$$(a\times b)c = (b\times c)a = (c\times a)b = -(c\times b)a = -(b\times a)c = -(a\times c)b$$

при цикличекой перестановке ориентация не меняется

В частности, имеем $abc = (a\times b)c = a(b\times c)$

2. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, когда их смешанное произведение равно 0

3. $(\lambda a)bc = \lambda(abc)$ - ассоциативность

4. $(a_1 + a_2)bc = a_1bc + a_2bc$ - дистрибутивность

Смешанное произведение в координатах:

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в ОНБ

$$\vec{a}\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \quad \vec{b}\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \quad \bar{c}\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$abc = a(\bar{b}\times\bar{c}) = a\left\{\begin{vmatrix} y_b & y_c \\ z_b & z_c \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ z_b & z_c \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_b & x_c \\ y_b & y_c \end{vmatrix}\vec{k}\right\} =$$

$$(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} i & x_b & x_c \\ j & y_b & y_c \\ k & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

$$= x_a\begin{vmatrix} y_b & y_c \\ z_b & z_c \end{vmatrix} - y_a\begin{vmatrix} x_b & x_c \\ z_b & z_c \end{vmatrix} + z_a\begin{vmatrix} x_b & x_c \\ y_b & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

Двойное векторное произведение

3 вектора $\bar{a}, \vec{b}, \vec{c} \rightarrow$ вектор $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

Формула (БАЦ - ЦАБ) - тождество Лагранжа

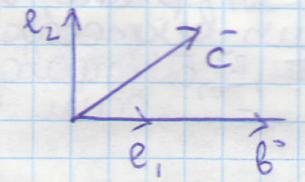
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \bar{b}(\vec{a}\vec{c}) \times \bar{c}(\vec{a}\vec{b})$$

Доказательство: Возьмем О.Н.Б e_1, e_2, e_3

$b = b_1 e_1$

$c = c_1 e_1 + c_2 e_2$

$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$



$$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 \\ e_2 & 0 & c_2 \\ e_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1c_2 \end{pmatrix} \quad \bar{a}\times(b\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & 0 \\ e_2 & a_2 & 0 \\ e_3 & a_3 & b_1c_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 \\ -a_1b_1c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{a}\bar{c} = a_1c_1 + a_2c_2$ $\quad$ $\bar{a}\bar{b} = a_1 b_1$

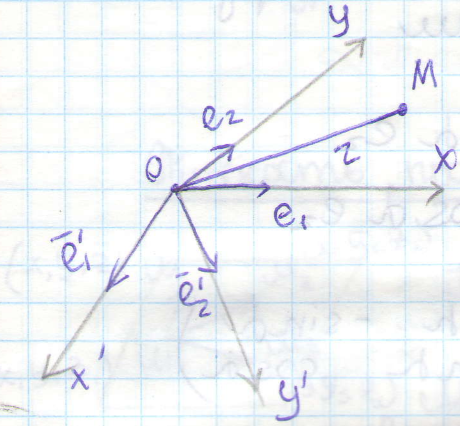
$$\bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}) = \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 a_1 b_1 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 \\ -a_1 b_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тождество Якоби

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) + \bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a}) \times \bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b}) = 0$$

§9. Преобразование Декартовой системы координат на плоскости и в пространстве

Рассмотрим на плоскости 2 Декартовы с.к. с общим началом O



M-произвольная точка

$OM = \bar{r} = xe_1 + ye_2 = x'e_1' + y'e_2'$

Разложим векторы $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$ по векторам $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1' = t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = t_{12}\bar{e}_1' + t_{22}\bar{e}_2 \end{bmatrix}$$

$$[e_1', e_2'] = [e_1, e_2]\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$ T-матрица перехода от e к e'

$$\bar{r} = x'\bar{e}_1' + y'\bar{e}_2' = x'(t_{11}; e_1 + t_{21}e_2) + y'(t_{12}e_1 + t_{22}e_2) =$$
$$= (t_{11}x' + t_{12}y')e_1 + (t_{21}x' + t_{22}y')e_2$$

$\vec{r} = xe_1 + ye_2$

Следовательно, ввиду единственности разложения вектора по базису имеем:

$$x = t_{11}x' + t_{12}y'$$
$$y = t_{21}x' + t_{22}y'$$

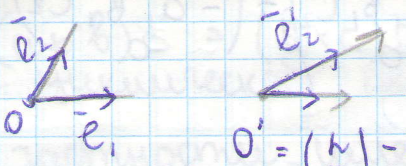
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\det T \neq 0$
т.к. векторы e_1' и e_2' неколлинеарны

Законы ковариантны и контрвариантны

Сдвиг:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

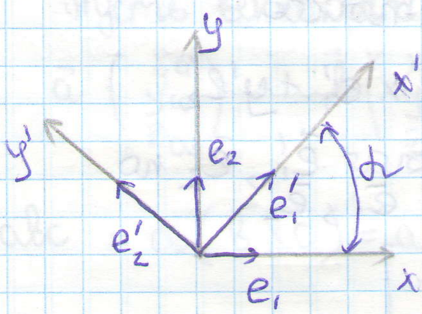


$O' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - координаты относ. $(e_1; e_2)$

В пространстве (добавится 3 координата)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad [\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3] = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3]\, T$$

Преобразование прямоугольной системы координат на плоскости



$$e'_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha\, e_2$$

$$e'_2 = -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2$$

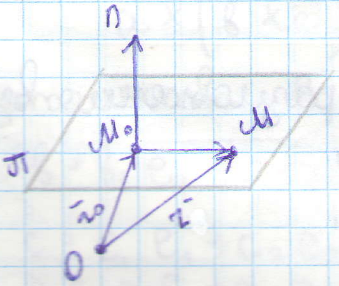
Матрица T = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
матрица поворота

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{T^{-1} = T^{T}}$$

Глава 2. Прямые и плоскости

§1 Плоскость. Векторное и общее уравнение плоскости



n - нормаль к плоскости
M_0 - фиксированная точка плоскости
произвольная точка M лежит в плоскости π $\Leftrightarrow$
вектор $M_0M \perp \vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$
ортогон.

Если r_0, r - радиус-векторы точек M_0 и M, то $\overrightarrow{M_0M} = r - r_0$
векторное уравнение плоскости $\quad \vec{n}(r - r_0) = 0.$

в координатах: $M(x, y, z)$ $\quad M_0(x_0\, y_0\, z_0)$
$n = (A, B, C)$