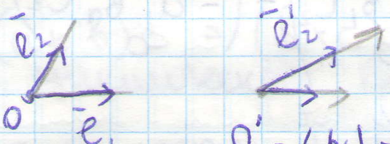
Сдвиг:



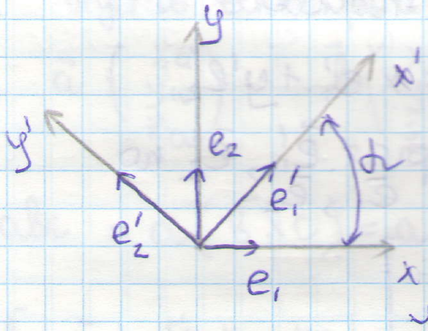

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

$O' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - координаты относ. $(e_1; e_2)$

В пространстве (добавится 3 координата)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad [\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'] = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3]\, T$$

Преобразование прямоугольной системы координат на плоскости




$$e_1' = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha\, e_2$$

$$e_2' = -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2$$

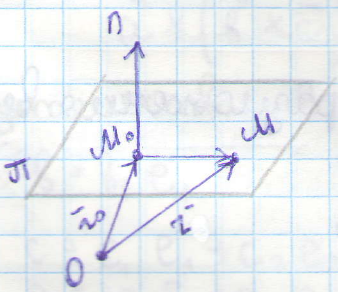
Матрица T
матрица поворота $= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{T^{-1} = T^{T}}$$

# Глава 2. Прямые и плоскости

## §1 Плоскость. Векторное и общее уравнение плоскости




$n$ - нормаль к плоскости

$M_0$ - фиксированная точка плоскости

произвольная точка $M$ лежит в плоскости $\pi$ $\Leftrightarrow$ вектор $M_0M \perp \bar{n}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$
ортогон.

Если $r_0$, $r$ - радиусы-векторы точек $M_0$ и $M$, то $M_0M = \bar{r} - \bar{r}_0$

векторное уравнение плоскости $\bar{n}(r - r_0) = 0$.

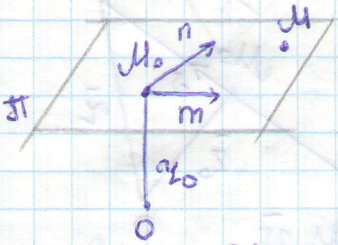
в координатах: $M(x, y, z)$ $M_0(x_0\ y_0\ z_0)$
$n = (A, B, C)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

общее уравнение плоскости

## параметрическое уравнение плоскости



На плоскости даны пара неколлинеарн векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$ и точка $M_0$

Если точка $M\in\pi$, то $\exists$ числа $t$ и $s$ такие, что

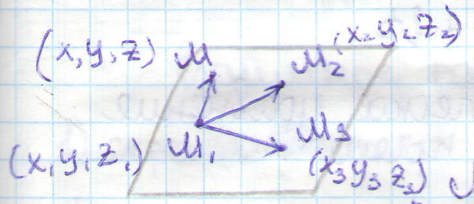
$$\overline{MM_0}=t\bar{m}+s\bar{n}$$ - (линейная комб)

Векторное параметрическое уравнение плоскости

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\bar{m}+s\bar{n}$$

Вектора $\bar{m}$ и $\bar{n}$ наз. направляющими векторами плоскости

## Плоскость, проходящая через 3 точки



Пусть 3 точки: $M_1, M_2, M_3$ - не лежат на одной прямой.

$M$ - произвольная точка плоскости

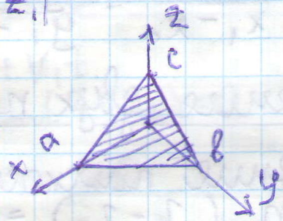
Вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M}$ $\overrightarrow{M_1M_3}$ - компланарны

смешанное произведение $=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Рассмотрим частный случай

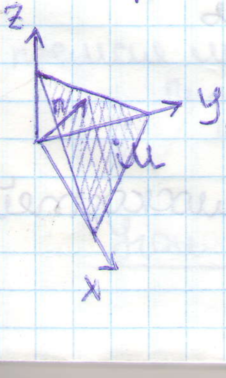
$M_1(a,0,0)$ $M_2(0,b,0)$ $M_3(0,0,c)$



$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix}=0 \sim \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

уравнение плоскости в отрезках

## Нормальное уравнение плоскости



Пусть $\bar{n}$ - единичный вектор нормали, направл. из начала координат в сторону плоскости

$p$ - расстояние от $O$ до плоскости $\pi$

$M\in\pi \sim$ ортогональная проекция вектора $\overline{OM}$ на направление $\bar{n}$ равна $p$, т.е.

$$\bar{n}\,\overline{OM}=|\text{pr}_n\,\overline{OM}|=p$$

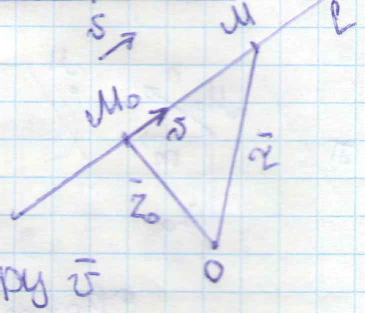
$M(x, y, z)$ $\quad n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - направляющие косинусы

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

## §2 Прямая в пространстве

### Параметрическое и каноническое уравнение прямой

Всякий вектор, не равный нулю, направленный вдоль прямой наз. её направляющим вектором




Точка $M \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\vec{M_0M}$ коллинеарен вектору $\bar{v}$ т.е существует число $t$, такое, что

$$\vec{M_0M} = t\vec{v}$$

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}}$$ $t \in (-\infty; +\infty)$ - параметр

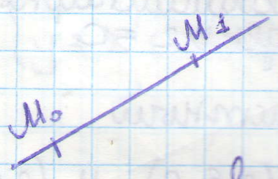
уравнение прямой в параметрической форме

в координатах: $\bar{v} = (m, n, l)$

$$x = x_0 + mt \qquad y = y_0 + nt \qquad z = z_0 + lt$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}}$$ - кононическое уравнение прямой

### Прямая, проходящая через 2 точки

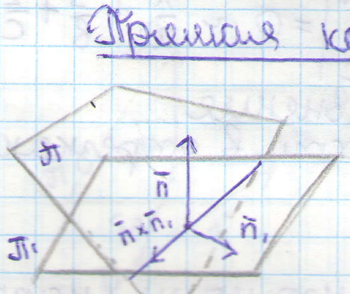



Можно взять $\bar{v} = \vec{M_0M_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)t = (1-t)\bar{r}_0 + t\bar{r}_1$$

в координатах: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

### Прямая как пересечение двух плоскостей




Уравнение плоскостей

$$n(r - r_0) = 0$$
$$n_1(r - r_1) = 0$$

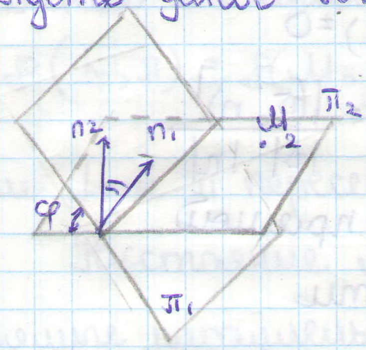
Если $r_0$ - общая точка плоскостей, то прямую можно задать

$$\boxed{r = (n \times n_1)t + r_0}$$

## §3 Взаимное расположение прямых и плоскостей

### Взаимное расположение плоскостей

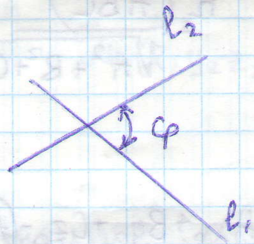
Пусть даны 2 плоскости $\pi_1 : n_1(r - r_1) = 0$
и $\pi_2 : n_2(r - r_2) = 0$




$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} \qquad \Delta r = r_2 - r_1$$

| Расположение | условие |
|---|---|
| 1) пересекаются | $n_1 \times n_2 \neq 0$ |
| 2) параллельны | $n_1 \times n_2 = 0 \quad n_1 \Delta r \neq 0$ |
| 3) совпадают | $n_1 \times n_2 = 0 \quad n_1 \cdot \Delta r = 0$ |

## Угол между прямыми




$l_1 : r = r_1 + v_1 t_1$

$l_2 : r = r_2 + v_2 t_2$

$\Delta r = r_2 - r_1$

$$\cos\varphi = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}$$

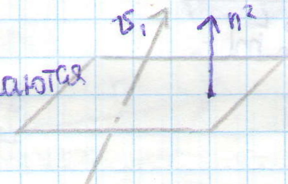
## Взаимное расположение прямых

1) скрещиваются $\quad (v_1, v_2, \Delta r) \neq 0$
2) пересекаются $\quad (v_1, v_2, \Delta r) = 0$ и $v_1 \times v_2 \neq 0$
3) параллельны $\quad v_1 \times v_2 = 0$ и $v_1 \times \Delta r \neq 0$
4) совпадают $\quad v_1 \times v_2 = 0$ и $v_1 \times \Delta r = 0$

## Взаимное расположение прямой и плоскости

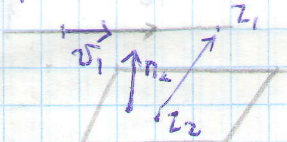
прямая $l$: $\quad r = r_1 + v_1 t$
плоскость $\pi$: $\quad n_2(r - r_2) = 0$

1) пересекаются



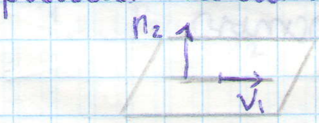

$v_1 \cdot n_2 \neq 0$

2) параллельны



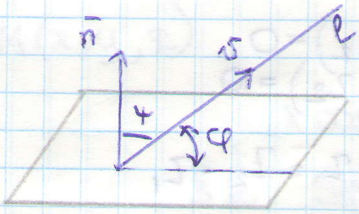

$v_1 \cdot n_2 = 0$
$\Delta r \cdot n_2 \neq 0$

3) прямая лежит в плоскости




$v_1 \cdot n_2 = 0 \qquad \Delta r \cdot n_2 = 0$

## Угол между прямой и плоскостью.




$l: \ r = r_0 + t\bar{v}$

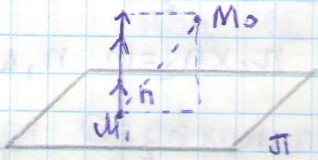
$\pi: \ n(r - r_1) = 0$

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{|(v, n)|}{|v|\,|n|}$

## §4. Расстояние до плоскости и до прямой

### Расстояние от точки до плоскости




точка $(\cdot) M_1 \in \pi$, $n$, $|n| = 1$ - единичный вектор нормали

$$\rho(M_0, \pi) = |пр_n \overline{M_1 M_0}| = |(n, M_1 M_0)|$$

Если плоскость $\pi$ задана в ПСК уравнением

$Ax + By + Cz + D = 0$, то $n = \frac{(ABC)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$M_0(x_0\, y_0\, z_0)$ $\quad M_1(x_1 y_1 z_1)$

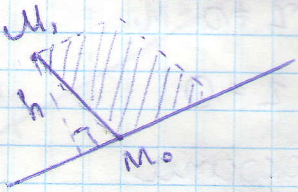
$$\overline{M_1 M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$$

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(чтобы найти расстояние надо подставить координаты точки в уравнение плоскости и разделить на $|n|$)

### Расстояние от точки до прямой




$M_1(x_1 y_1 z_1)$ $\quad L: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ $\quad v(l\,m\,n)$

$M_0(x_0\, y_0\, z_0)$

Построим параллелограмм на векторах $v$ и $\overline{M_0 M_1}$

$$h = \frac{|\overline{M_0 M_1} \times \bar{v}|}{|v|}$$

В координатах: $h = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & m \\ z_1 - z_0 & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & l \\ z_1 - z_0 & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & l \\ y_1 - y_0 & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & x_1 - x_0 & l \\ \vec{j} & y_1 - y_0 & m \\ \vec{k} & z_1 - z_0 & n \end{vmatrix}$$

### Расстояние между прямой и плоскостью

$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$

$L: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

если параллельны, то расстояние от $L$ до $\pi$, есть расстояние от любой точки прямой до плоскости

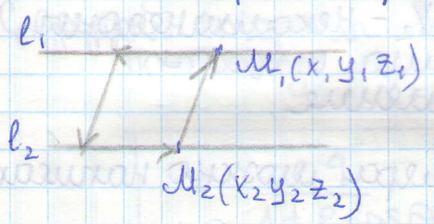
$$\rho(l,\pi)=\rho(M_0;\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Если $l$ и $\pi$ пересекаются, то расстояние $=0$

## Расстояние между прямыми

1) прямые параллельны

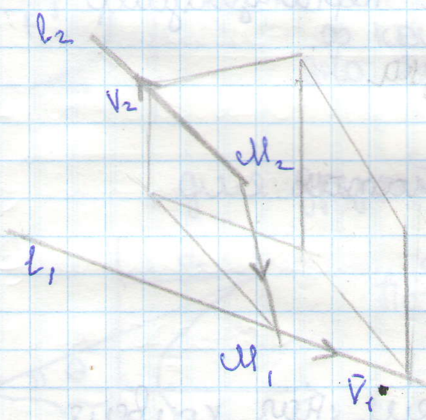
$l_1:\ \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}\qquad l_2:\ \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_1}{n_2}$




достаточно вычислить расстояния от произвольной точки прямой $l_2$ до прямой $l_1$

$$\rho(l_1l_2)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & m\\ z_2-z_1 & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & l\\ z_2-z_1 & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & l\\ y_2-y_1 & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

2) прямые скрещиваются



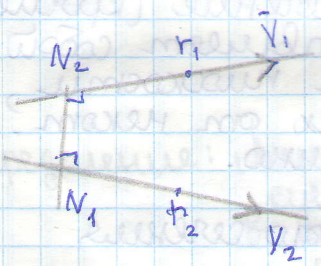

векторы $\bar V_1,\ \bar V_2$ и $\overline{M_1M_2}$ некомпланарны

$$\rho(l_1l_2)=\frac{|(V_1V_2\ M_1M_2)|}{|V_1\times V_2|}$$

в координатах:

$$\rho(l_1l_2)=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & x_2-x_1\\ m_1 & m_2 & y_2-y_1\\ n_1 & n_2 & z_2-z_1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}m_1 & m_2\\ n_1 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}l_1 & l_2\\ n_1 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}l_1 & l_2\\ m_1 & m_2\end{vmatrix}^2}}$$

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым.




$$\begin{cases}\bar r=\bar r_1+s\bar V_1\\ \bar r=\bar r_2+s\bar V_2\end{cases}$$

Сущ. единственная пара чисел $s_0,t_0$, такая что прямая $N_1N_2$ проходящая через точки $N_1(r_1+s_0V_1)$ $N_2(r_2+s_0V_2)$ перпендикулярна обеим прямым

Прямая $N_1N_2$ имеет направляющий вектор

$$n_2-n_1=(r_2-r_1)+t_0V_2-s_0V_1$$

Прямая $N_1N_2$ перпендикулярна $l_1$ и $l_2$, т.е.

$$\begin{cases}(n_2-n_1)N_1=0\\(n_2-n_1)N_2=0\end{cases}\qquad \begin{cases}(z_2-z_1)V_1+t_0V_1V_2-s_0V_1^2=0\\(z_2-z_1)V_2+t_0V_2^2-s_0V_1V_2=0\end{cases}$$

2 линейных уравнения отн. $s_0, t_0$

$$\begin{cases}s_0V_1^2-t_0V_1V_2=(z_2-z_1)V_1\\s_0V_1V_2-t_0V_2^2=(z_2-z_1)V_2\end{cases}$$

определитель данной системы:

$$\begin{vmatrix}V_1^2 & -V_1V_2\\ V_1V_2 & -V_2^2\end{vmatrix}\neq 0$$

, т.к. векторы $\bar{V}_1$ $V_2$ - неколлинеарны, поэтому система имеет единственное решение.

Уравнение общего перпендикуляра можно написать и не находя оснований (пересечение двух плоскостей)

$$\begin{cases}(V_1\times V_2,\ V_1,\ z-z_1)=0\\(V_1\times V_2;\ V_2;\ z-z_2)=0\end{cases}$$

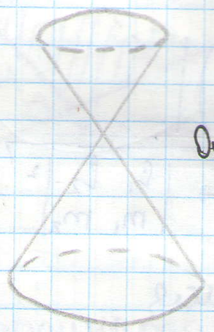
каждое из двух уравнений задает плоскость, сод. одну из скрещивающихся прямых и искомый общий перпендикуляр

## Глава 3. Кривые второго порядка

### §1 Конические сечения

Уравнения в полярных координатах.

Прямой круговой конус



$$x^2+y^2=R^2z^2$$

**Определение:** Коническим сечением наз. кривая, по которой пересекает прямой круговой конус произвольная плоскость не проходящая через его вершину.

**Свойство:** Каждое коническое сечение (кроме окружности) представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний, которых от некот. точки $F$ и некоторой прямой $\delta$ постоянно.

Точка $F$ называется фокусом конического сечения, а прямая $\delta$ - директрисой

$e$ - эксцентриситет $\qquad$ $e<1$ эллипс

$e=1$ парабола

$e>1$ гипербола