Прямая $N_1N_2$ перпендикулярна $l_1$ и $l_2$, т.е.

$$\begin{cases}(n_2-n_1)N_1=0\\(n_2-n_1)N_2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}(z_2-z_1)V_1+t_0V_1V_2-S_0V_1^2=0\\(z_2-z_1)V_2+t_0V_2^2-S_0V_1V_2=0\end{cases}$$

2 линейных уравнения отн. $S_0, t_0$

$$\begin{cases}S_0V_1^2-t_0V_1V_2=(z_2-z_1)V_1\\S_0V_1V_2-t_0V_2^2=(z_2-z_1)V_2\end{cases}$$

определитель данной системы:

$$\begin{vmatrix}V_1^2 & -V_1V_2\\V_1V_2 & -V_2^2\end{vmatrix}\neq0$$

, т.к. векторы $\bar{V}_1\ \bar{V}_2$ - неколлинеарны, поэтому система имеет единственное решение.

Уравнение общего перпендикуляра можно написать и не находя оснований (пересечение двух плоскостей)

$$\begin{cases}(V_1\times V_2, V_1, z-z_1)=0\\(V_1\times V_2; V_2; z-z_2)=0\end{cases}$$

каждое из двух уравнений задает плоскость, сод. одну из скрещивающихся прямых и искомый общий перпендикуляр

## Глава 3. Кривые второго порядка

### §1 Конические сечения
Уравнения в полярных координатах.

Прямой круговой конус

$$x^2+y^2=R^2z^2$$

Определение: Коническим сечением наз. кривая, по которой пересекает прямой круговой конус произвольная плоскость не проходящая через его вершину.

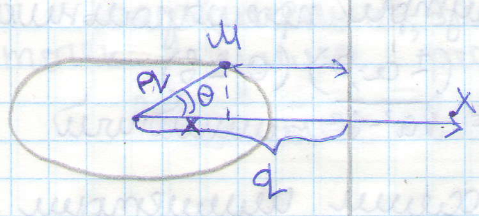
Свойство: Каждое коническое сечение (кроме окружности) представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний, которых от некот. точки $F$ и некоторой прямой $\delta$ постоянно.

Точка $F$ называется фокусом конического сечения, а прямая $\delta$ - директрисой

$e$ - эксцентриситет $\quad e<1$ эллипс

$e=1$ парабола

$e>1$ гипербола




Рассмотрим полярные координаты с началом в фокусе, а начальный луч возьмем перпендикулярно директрисе по свойству конических сечений

$$\frac{r}{d} = e \Rightarrow r = ed.$$

Пусть $q$ – расстояние от фокуса до директрисы.

Если $x < q$, то $d = q - x$ (так будет для эллипса, параболы и той ветви гиперболы, которая ближе к фокусу)

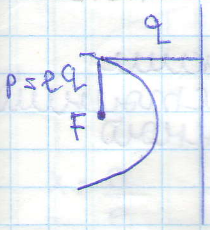
С другой стороны в полярных координатах $x = r\cos\theta$

Поэтому

$$r = ed = e(q - x) = eq - e \cdot r\cos\theta$$

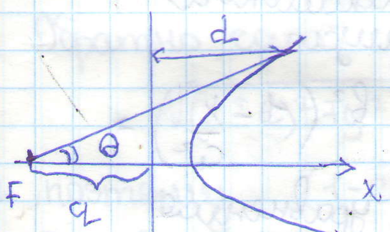
$$\boxed{r = \frac{eq}{1 + e\cos\theta}}$$

Это и есть уравнение эллипса, параболы и одной ветви гиперболы




Величина $eq$ имеет простой геометр. смысл при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $r = eq$ – расстояние от фокуса до кривой по перпендикуляру к оси. Оно называется фокальным параметром и обозначается $p$.

для другой ветви гиперболы




$d = x - q$

Поэтому $r = ed = e(x - q) = er\cos\theta - eq$

$$\boxed{r = \frac{eq}{1 - e\cos\theta} = \frac{eq}{e\cos\theta - 1}}$$

или

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{e\cos\theta - 1}}$$ через фокальный параметр

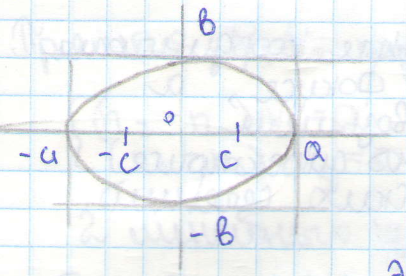
## § Эллипс

Определение: Линия на плоскости наз. эллипсом, если существует система координат (прямоугольн) в которых уравнение этой линии имеет вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \text{ где } a \geq b > 0$$

Каноническое уравнение эллипса

(при $a = b$ имеем окружность: $x^2 + y^2 = a^2$)




Эллипс содержится внутри прямоугольника

вершины эллипса $(\pm a;0)$ $(0 \pm b)$

фокусы $(\mp c;0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ - линейный

оси координат явл. осями симметрии

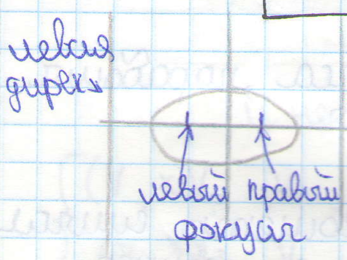
Эллипс можно получить сжатием окружн. к диаметру.

a - большая полуось

b - малая полуось

$\boxed{e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}$ — эксцентриситет $(0\le e<1)$

$\boxed{p=\frac{b^2}{a}}$ — фокальный параметр



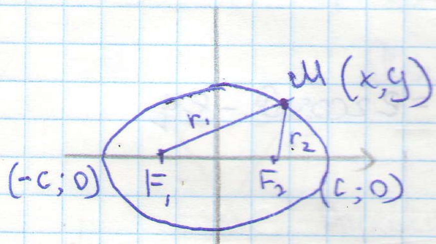

$\boxed{x=\pm\frac{a}{e}}$ директрисы

$(\pm c;0)$ - фокусы

## Директориальное свойство эллипса

Эллипс является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от фокуса до одноименной директрисы равное e

## Фокальное свойство эллипса




$r_1, r_2$ - левые и правые фокальные радиусы

$$r_1^2=(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=$$

из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2=$$

$$=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+a^2=\underbrace{\frac{c^2}{a^2}}_{\text{эксцентриситет}}x^2+2xc+a^2=$$

$$=e^2x^2+2xea+a^2=(ex+a)^2$$

$|x|\le a \Rightarrow |ex|<a \Rightarrow r_1=a+ex$

Аналогично для $r_2 \Rightarrow r_2=a-ex$ } следовательно $r_1+r_2=2a$

Обратное тоже верно, если $M(x,y)$ - такая точка, что $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, то после преобразований получим уравнение эллипса

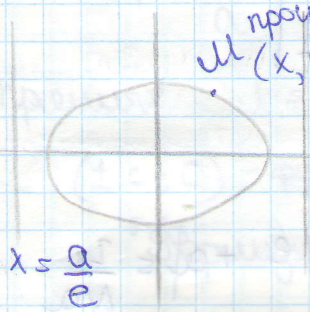
Следовательно, эллипс явл. геометрическим местом точек, сумма расстояний до фокуса равна $2a$

Фокальное свойство дает простой способ чертить эллипс

Воткнуть в бумагу 2 булавки в фокусах эллипса и прикрепить к ним нитку длиной $2a$. Оттягивая нитку острием карандаша рисуем одну половину эллипса, потом другую

## Директориальное свойство эллипса

Эллипс явл. геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от фокуса до одноименной директрисы равное $e$




Расстояние от точки $M(x,y)$ до левой директрисы равно

$$x=-\frac{a}{e}$$

$$\left|x+\frac{a}{e}\right| = \left|\frac{ex+a}{e}\right| = \frac{r_1}{e}$$

а до правой $\left|x-\frac{a}{e}\right| = \frac{ex-a}{e} = \frac{r_2}{e}$

Обратно, если

$$\sqrt{(x\pm e)^2+y^2} = e\left|x\pm\frac{a}{e}\right|, \text{ то } (x\pm e)^2+y^2=(ex\pm a)^2$$

и поэтому $(1-e^2)x^2+y^2=a^2-e^2$,

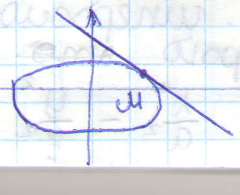
что равносильно уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

## Уравнение касательной к эллипсу

Верхняя половина эллипса явл. графиком функции

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \left(\text{нижнее: } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \quad (\text{для нижней — то же самое})$$



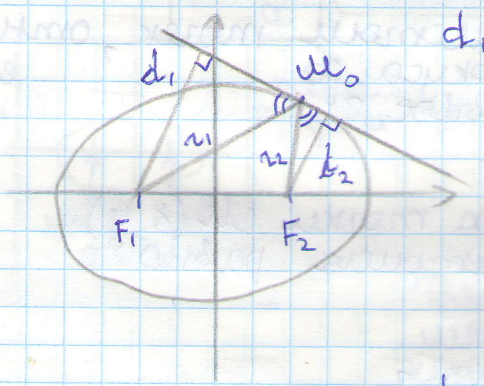

Значит, касательная к эллипсу в любой его точке $M_0(x_0,y_0)$ (отличной от $x=\pm a$) имеет уравнение

$$\boxed{y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)}\;\Big|\cdot y_0 \; : b^2$$ и учтем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)$$ имеем: $$\boxed{\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

в вершинах $(\pm a, 0)$ касательными явл. вертикал. прямые $x=\pm a$ и это урав. годится

Оптическое свойство эллипса:



$d_1$ - расстояние от $F_1$ до касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$d_1=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0(-c)}{a^2}+\frac{y_0\cdot 0}{b^2}-1\right|$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$$

$$d_1=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0c}{a^2}+1\right|=\frac{1}{N\cdot a}\left|x_0 e+a\right|=\frac{r_1}{Na}$$

Аналогично: $d_2=\frac{1}{N}\left|\frac{x_0c}{a^2}-1\right|=\frac{1}{N}\left|x_0e-a\right|=\frac{r_2}{Na}$

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi_1&=\frac{d_1}{r_1}=\frac{1}{Na}\\ \sin\varphi_2&=\frac{d_2}{r_2}=\frac{1}{Na}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sin\varphi_1=\sin\varphi_2\Rightarrow\varphi_1=\varphi_2$$

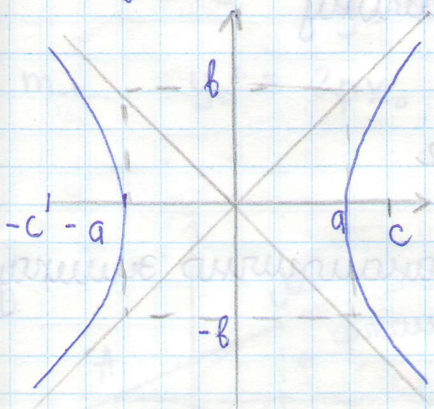
Касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы

Лучи света исходящие из одного фокуса после отражения в эллипсе собираются в другом его фокусе.

## §3 Гипербола

Определение Линия на эвклидовой плоскости наз. гиперболой, если существует п.с.к в которой уравнение этой линии имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

где $a>0$, $b>0$ (при $a=b$ гипербола наз. равнобочной)




2 асимптоты $y = \pm \frac{b}{a}x$

координаты оси - оси симметрии

Точка $O(0,0)$ - центр симметрии

Число $a$ - действительная полуось, число $b$ - мнимая

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ - линейный эксцентриситет

$2c$ - фокусное расстояние

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет $1<e<+\infty$

$p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр

прямые $x = \pm \frac{a}{e}$ - директрисы

$(\pm c; 0)$ - фокусы $(\pm a; 0)$ - вершины

Формулы $r_1^2=(ex+a)^2$ $r_2^2=(ex-a)^2$

доказательство аналогично эллипсу

для гиперболы $e>1 \Rightarrow |ex| \geqslant |x| \geqslant a$, поэтому

$r_1 = \begin{cases} a+ex, & \text{при } x>0 \\ -a-ex, & \text{при } x<0 \end{cases}$

$r_2 = \begin{cases} -a+ex, & \text{при } x>0 \\ a-ex, & \text{при } x<0 \end{cases}$

Следовательно,

$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & \text{при } x>0 \\ -2a, & \text{при } x<0 \end{cases}$

т.е $|r_1 - r_2| = 2a$

Обратно, если абстрактная величина разности расстояний от точки $M(x,y)$ до фокусов равна $2a$

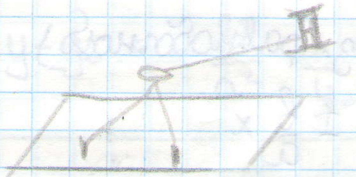
т.е

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

то после преобразования получим уравнение гиперболы

Фокальное свойство гиперболы.

Гипербола явл. геометрическим местом точек абсолютная величина разности расстояний которых от фокусов равна $2a$



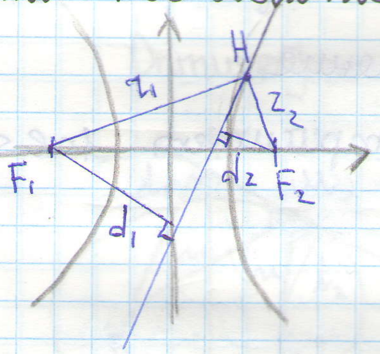
каждая из ниток удлиняется на одинак. величину

## Уравнение касательной к гиперболе

в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$ доказательство аналогично эллипсу

**Оптическое свойство** $d_1 = \frac{r_1}{Na}$ $d_2 = \frac{r_2}{Na}$



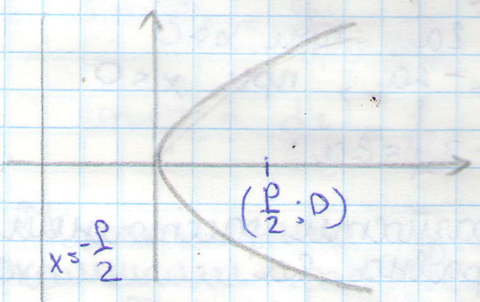

(доказательство аналогично эллипсу)

Касательная в любой точке гиперболы образует с с фокальными радиусами точки касания равные острые углы

Световые лучи, исходящие из одного фокуса после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого фокуса

## §4 Парабола

**Определение:** Линия на эвклидовой плоскости называется параболой если сущ. пск в которой уравнение этой линии имеет вид
$$y^2 = 2px$$
$$p > 0$$




Точка $O(0;0)$ - вершина параболы

$\frac{p}{2}$ - фокусное расстояние

Число $p$ - фокальный параметр

Точка $(\frac{p}{2}; 0)$ - фокус

прямая $x = -\frac{p}{2}$ - директриса

Парабола явл. геометрическим местом точек, равноудаленных от фокуса и директрисы

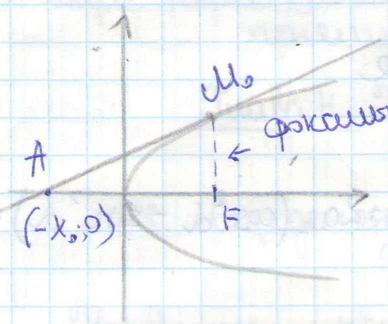
## Уравнение касательной к параболе

$y > 0$ $\quad y = \sqrt{2px} \Rightarrow y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

т.к. $y_0^2 = 2px_0$, то $y_0 y = p(x + x_0)$

при $y < 0$ аналогично




фокальный радиус точки $M_0$, отрезок соед. $M_0$ и F

касательная пересекает ось абсцисс в точке $A(-x_0; 0)$

поэтому

$\angle AM_0F = \angle M_0AF$

(оптич. св.)

$|M_0F| = x_0 + \frac{p}{2}$ (расстояние между двумя точками)

Если представить, что из фокуса F испускаются лучи света, то т.к. угол падения равен углу отражения, все отраженные лучи будут параллельны оси параболы

(На этом свойстве парабол основано устройство параболических зеркал, прожекторов, зеркальных телескопов)

## § 5. Классификация кривых второго порядка

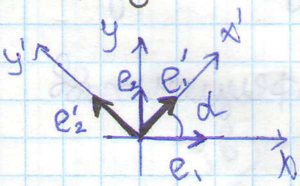
**Определение:** Кривой второго порядка наз. геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

<u>идея</u> С помощью преобразования координат привести уравнение к возможно более простому виду. Перейти к системе координат „естественной" для данной прямой.

**Лемма 1:** Всегда можно повернуть оси координат так, чтобы член с произведением $xy$ исчез

**Доказательство** Допустим, $a_{12} \neq 0$




$e_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ $e_2' \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$[e_1' \; e_2'] = [e_1 \; e_2]\,T$$

Введем координаты $x'y'$, повернув оси на угол $\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Подставим эти выражение в уравнение

Найдем ко $2a'_{12}$ при $x'y'$

$$2a'_{12} = -2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= (a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha$$

т.к $a_{12} \neq 0$, то взяв $\alpha$: $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = ctg 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$

получим $2a'_{12} = 0$

Таким образом, можем считать, что уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0$$

Лемма 2. Если в уравнении $a_{11} \neq 0$ $(a_{22} \neq 0)$, то члены с $x$ (с $y$) можно исключить переносом начала координат

Доказательство: Перенесем начало координат в точку $\left(-\frac{a_1}{a_{11}}; 0\right)$

т.е $x = x' - \frac{a_1}{a_{11}}$ $\quad y = y'$

Тогда

$$a_{11}x^2 + 2a_1 x = \Big\{ a_{11}\underbrace{\left(x^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x + \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2\right)}_{\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2} - a_{11}\left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 = a_{11}(x')^2 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$$

т.е член с $x'$ отсутствует

(отметим, что при переносе начала координат коэф при $x^2$, $y^2$ не измен)

Всегда можно считать, что мы можем выбрать координаты так, чтобы кривая ВП представлялась уравнением такого вида $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_2 y + a = 0$

по $y$ тоже убираем

Рассматривая далее всевозм. случаи коэффециентов получаем 8 видов КВП

1 Эллипс
2. Парабола
3. Гипербола
4. Пара пересекающихся прямых
5. Пара параллельных прямых
6. Одна прямая
7. Одна точка
8. Пустое множество

## Глава 4. Комплексные числа. Многочлен

### §1 Определение комплексного числа. Операции с компл. числами

Уравнение $x^2+1=0$ формальное решение $x = \pm\sqrt{-1}$

Определение: Комплексным числом $z$ наз. пара $(a, b)$ действительных чисел

$a = \text{Re } z$ (real) - действительная часть $z$ (вещественная)

$b = \text{Im } z$ (imaginary) - мнимая часть

при $b=0$ $z=(a,0)$ отождествляют с действ. числами

при $a=0$ $z=(0,b)$ наз. мнимым

Числа $(0,0)=0$ нуль
$(1;0)=1$ - единица
$(0;1)=i$ - мнимая единица

1 Два комплексных числа равны $z_1=(a_1 b_1)$ $z_2(a_2 b_2)$ тогда и только тогда, когда их вещественные и мнимые части равны $a_1=a_2$ $b_1=b_2$

2. Суммой двух комплексных чисел $z_1=(a_1 b_1)$ $z_2=(a_2 b_2)$ наз. комплексное число
$$z_1+z_2=(a_1+a_2\ ;\ b_1+b_2)$$

3. Произведением $z_1=(a_1 b_1)$ и $z_2=(a_2 b_2)$ наз. число
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2\ ,\ a_1b_2+a_2b_1)$$

Вычислим $i^2=(0;1)(0;1)=(-1,0)=-1$
$(0,b)=(0,1)(b;0)=ib$
$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib$

Таким образом, каждое комплексное число $(a,b)$ можно