1 Эллипс
2. Парабола
3. Гипербола
4. Пара пересекающихся прямых
5. Пара параллельных прямых
6. Одна прямая
7. Одна точка
8. Пустое множество

Глава 4. Комплексные числа. Многочлен

§1 Определение комплексного числа. Операции с компл. числами

Уравнение $x^2+1=0$ формальное решение $x=\pm\sqrt{-1}$

Определение: Комплексным числом z наз. пара (a,b) действительных чисел

$a = \mathrm{Re}\, z$ (real) – действительная часть z (вещественная)

$b = \mathrm{Im}\, z$ (imaginary) – мнимая часть

при $b=0$ $z=(a,0)$ отождествляет с действ. числами

при $a=0$ $z=(0,b)$ наз. мнимым

Числа $(0,0)=0$ нуль
$(1;0)=1$ – единица
$(0;1)=i$ – мнимая единица

1 Два комплексных числа равны $z_1=(a_1b_1)$ $z_2(a_2b_2)$ тогда и только тогда когда их вещественные и мнимые части равны $a_1=a_2$ $b_1=b_2$

2. Суммой двух комплексных чисел $z_1=(a_1 b_1)$ $z_2=(a_2 b_2)$ наз. комплексное число

$$z_1+z_2=(a_1+a_2\,;\,b_1+b_2)$$

3. Произведением $z_1=(a_1b_1)$ и $z_2=(a_2b_2)$ наз. число

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2\,,\,a_1b_2+a_2b_1)$$

Вычислим $i^2=(0;1)(0;1)=(-1,0)=-1$

$(0,b)=(0,1)(b;0)=ib$

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib$

Таким образом, каждое комплексное число (a,b) можно представить в виде $a+ib$ — алгебраическая формула компл. числа

1. $a+ib = c+id \Leftrightarrow a=c \quad b=d$
2. $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
3. $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$

$z = a+ib \qquad \bar{z} = a-ib$ сопряженное к z.

Свойства:

$\bar{\bar{z}} = z \qquad z+\bar{z} = 2a$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2 \qquad z-\bar{z} = 2ib$

$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \qquad z\bar{z} = a^2+b^2 \geq 0$

модуль $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| = |\bar{z}| \qquad z\cdot\bar{z} = |z|^2$

деление $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

вычитание $\forall z_1, z_2 \quad \exists!\, z \mid z+z_2 = z_1$

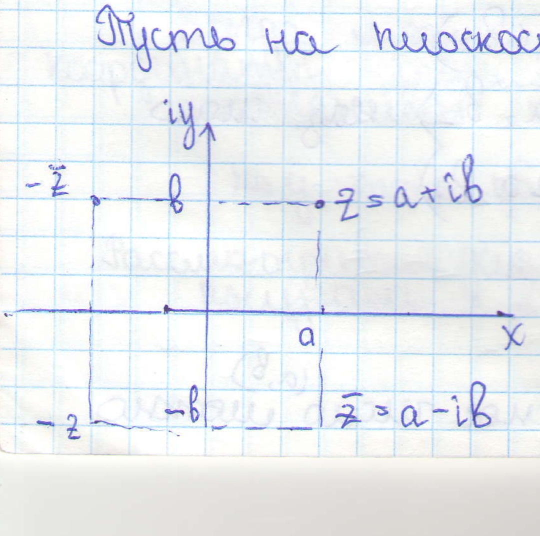
$z = z_1 - z_2$

Свойства операций над компл. числами

1) коммутативность $z_1+z_2 = z_2+z_1 \qquad z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$
2) Ассоциативность $z_1+(z_2+z_3) = z_1+(z_2+z_3) \qquad (z_1\cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$
3) Дистрибутивность $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

§2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат



Комплексное число $z = a+ib$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b)

Действительные числа — точки оси абсцисс

Чисто мнимые — точки оси ординат

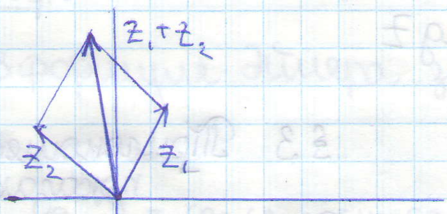
ось Ox — действит. ось Oy — мнимая

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа наз. комплексной плоскостью

Длина вектора z равна $|z|$

$|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$

$|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$



Число z_1+z_2 изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов.

Расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1-z_2|$

Неравенство треугольника:

Для любых компл. чисел выполняются неравенства:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

Доказательство: Рассмотрим Δ с вершинами в точках 0, z_1, z_2+z.

Длины сторон этого Δ-ка равны

$|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1+z_2|$

Это известные неравенства для длин сторон Δ

Следствие: Для любых комплексных чисел $z_1, z_2 \ldots z_n$ имеет место неравенство

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

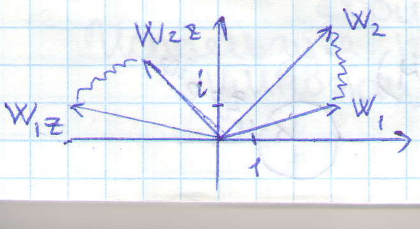
Движение плоскости

Комплексные числа - матем. аппарат для описания движений плоскости

1)

$\bar{K}$ - комплексное сопряжение

2) Умножение на комплексное число с модулем 1 является поворотом плоскости.



$$|wz|^2 = wz\bar{w}\bar{z} = w\underbrace{z\bar{z}}_{1}\bar{w} = w\bar{w} = |w|^2$$

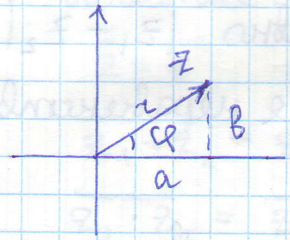
сохраняются длины векторов

$$|w_1 z - w_2 z| = |(w_1 - w_2)z| = |w_1 - w_2|\underbrace{|z|}_{1} = |w_1 - w_2|$$

сохр. расстояния между концами векторов.

поворот на угол α $\rightarrow$ $\alpha = \arg z$

§3 Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Извлечение корня.



$z = a + bi$

В полярной системе координат z определяется числами $(r;\varphi)$

$r = |z|$

φ – угол между действительной осью и вектором z

$\varphi > 0$, если отсчет против часовой ст.

φ называется аргументом комплексного числа z

обозначается: $\varphi = \arg z$

$a = r\cos\varphi \qquad b = r\cdot\sin\varphi \qquad (1)$

Следовательно, любое комплексное число можно представить в виде:

$$\boxed{z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \qquad (2)$$

Эта запись наз. тригонометрической формой комплексного числа

Из (1) следует, что если $z = a + ib$, $\varphi = \arg z$, то

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (3)$$

Верно и обратное φ явл аргументом $z \Leftrightarrow$ вып ~~не~~равенства (3)

След, для нахождения $\arg z$ надо решить систему (3)

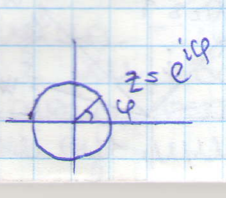
Система (3) имеет бесконечно много решений

$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, φ_0 – одно из решений системы (3)

Если $|z| = 1$

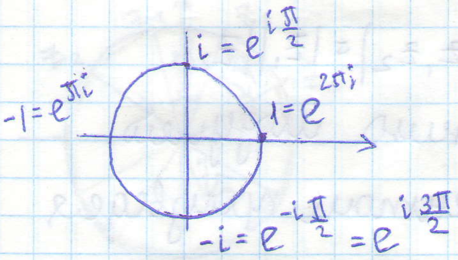
$\varphi = \arg z$, то $\boxed{z = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ (4)

компл. число обозн. $e^{i\varphi}$



т.е функция $e^{i\varphi}$ определяется формулой

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \quad (5) \text{ - формула Эйлера}$$



В формуле Эйлера заменим $\varphi \to -\varphi$

Получим:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$(4)+(5)$ $\quad (4)-(5)$

получим. формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показат. функции

(как если бы число i было действительным)

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Доказательство: $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi n}$ - доказательство по индукции

Формула Муавра

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi} \qquad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2$$

Любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде:

$$z = re^{i\varphi}, \text{ где } r = |z|;\ \varphi = \arg z$$

Запись компл. числа в таком виде наз. показательной формой комплексного числа

Используя показат. форму можно легко умножать и делить компл. числа

$$z_1 z_2 = z_1 e^{i\varphi_1} z_2 e^{i\varphi_2} = z_1 z_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 e^{i\varphi_1}}{z_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Из первой формулы следует, что $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Модуль произведения равен произведению модулей.

Сумма аргументов является аргументом произведения

$$\varphi_1 = \arg z_1 \quad \varphi_2 = \arg z_2$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2) \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}$$

Извлечение корня

Рассмотрим уравнение $z^n = a$, где $a \neq 0$ компл. число $a \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$

(например $z^3 = 8$)

Пусть $a = \rho e^{i\theta}$ Ищем z в виде $z = r e^{i\varphi}$

Тогда $r^n e^{i\varphi n} = \rho e^{i\theta}$

Следовательно, $r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$

$$n\varphi = \theta + 2\pi k \Rightarrow \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad k = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}} \quad k = 0; \pm 1; \pm 2$$

Среди комплексных чисел z_k ровно n различных

$k = 0$ $\quad z_0$ $\quad k=0$ $\quad \varphi_0 = \frac{\theta}{n}$

$k = 1$ $\quad z_1$ $\quad \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}$

$k = n-1$ $\quad z_{n-1}$ $\quad \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$

$k = n$ $\quad z_n$ $\quad \varphi_n = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$

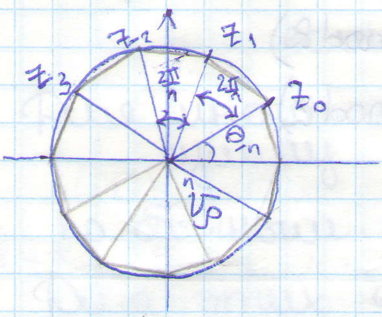
Числа $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ различны, т.к. у них разные аргументы

$$z_n = z_0 \qquad z_{n+1} = z_1$$

То. уравнение $z^n = a$ при $a \neq 0$ имеет ровно n-различных корней

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots n-1.$$

На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$



Следствие Корни n-ой степени из 1

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

$k = 0, 1 \quad n = 1$

§4 Кольца и поля.

Кольцом наз. алгебраическая система $K = (K, +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями - сложением $x+y$ и умножением (xy) удовлетворяющие след. свойства (аксиомы кольца)

K1) $\forall x, y, z \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ - ассоциативность

K2) $\forall x, y \quad x+y = y+z$ - коммутативность слож)

K3) $\exists! 0 \quad \forall x \quad x+0 = x$
* нуль кольца

K4) $\forall x \quad \exists! (-x)$ - противопол. эл-т. $x+(-x)=0$

{(K1 - K4) - абелева группа по сложению}

K5) $\forall x, y, z \quad (x+y)z = xz + yz$ - дистрибутивный закон

если выполняется K6) $\forall x, y, z \quad (xy)z = x(yz)$ - ассоциативный закон для умножения

K - наз. ассоциативным кольцом

если выполняется K7) $\exists! 1 \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ 1 - единица кольца
то K - кольцо с единицей

если выполняется K8) $\forall x y \quad xy = yx$ - коммут. закон для умн.
то K - коммут. кольцо $K_1 - K_5 + K_8$

<u>примеры</u>

1) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ - кольцо целых чисел с обычным сложением и умножением

2) $M_n(\mathbb{R})$ - кольцо квадратных матриц порядка n над $\mathbb{R}$

3) Кольцо вычетов по модулю m - $\mathbb{Z}_m$ m - целое число

$n \equiv k \pmod m$ - если они дают одинаковый остаток при делении на m

$\mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$2 \equiv 0 \pmod 2$

$4 \equiv 0 \pmod 2$

$\mathbb{Z}_3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$3 \equiv 1 \pmod 2$

$5 \equiv 1 \pmod 2$

$7 \equiv 1 \pmod 2$

Определение: Поле - ассоциативное кольцо и коммутативное с 1, в котором $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ - обратный элемент

Пример: 1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ - поле вещественных чисел

2) $(\mathbb{Q}, +; \cdot)$ - поле рациональных чисел

3) $\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел

$\mathbb{Z}$ - не является полем.

§5 Многочлены от одной переменной. Деление многочленов.

Пусть K - одна из числовых систем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$ (Можно и в общем случае, K - коммутативное ассоциативное кольцо с 1)

Определение: Многочлен от x с коэф. из K - формальное выражение вида

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ где $n \geqslant 0$

- целое число $a_0, a_1, a_n \in K$

a_k - коэффициент при x^k

Равенство многочленов $f(x) = g(x)$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots b_m x^m$$

если $\forall k$ коэф. $a_k = b_k$

Для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно определить суммму $f(x) + g(x)$ и произведение $f(x) \cdot g(x)$ по обычным правилам (стандартным образом)

Для этих операций выполняют свойства 1-5 в определении кольца

1. ассоциативность $(f+g)+u = f+(g+u)$
2. коммутативность $f+g = g+f$
3. существование нуля
4. существование противоположного элемента
5. дистрибутивность умножения отн. сложения $(f+g)h = hg + hf$

т.е многочлен с коэф из K сами образуют кольцо многочленов от x $\Rightarrow$ обозначается $K[x]$ есть 1.

Определение: Степень ненулевого многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g)$$

$$\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$$

<u>Деление многочленов.</u>

Теорема: Пусть $f, g \in K[x]$ при чем $g \neq 0$

Тогда $\exists$ многочлен q и r такие, что $f = gq + r$

либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$

Многочлены q и r (частное и остаток) определяются однозначно.

Нахождение q и r называется делением с остатком

Доказательство: 1) Если $\deg f \leq \deg g$, то можно взять:
~~$\deg f < \deg g$~~ $q = 0$ $r = f$

2) Если $\deg f \geq \deg g$, то делим „уголком"

Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$

$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$, где $a_0, b_0 \neq 0$

Делим $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \,\big|\, b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$

$\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$

Рассмотрим многочлен $f_1 = f - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g$ $\deg f_1 < \deg f$

В этом случае $q = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$, $r = f_1$, иначе делим дальше

Докажем, что q и r определены однозначно

2) Пусть $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$,

$\deg r_1 < \deg g$, $\deg r_2 < \deg g$

Тогда $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) g$ и $\deg(r_1 - r_2) = \deg(q_2 - q_1) + \deg g \geq \deg g$.

противоречие (q и r однозначны)

Следствие (теорема Безу)

Деление с остатком на многочлен $x - c$

$f(x) = (x-c) q(x) + r$ $(r \in K)$

$f(c) = r$, то есть остаток равен значению многочлена в точке c.

§6. Корни многочлена. Основная теорема алгебры. Формулы Виета. Рациональные корни.

Определение. Элемент c наз. корнем многочлена $f = K\{x\}$ если $f(c) = 0$

Из теоремы Безу следует:

T1 c корень $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ делится на $x - c$

T2 Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени

Доказательство: пусть c_1 – корень f

Тогда $f(x) = (x - c_1) f_1(x)$

пусть c_2 – корень f_1

Тогда $f_1(x) = (x-c_2) f_2(x)$

$\vdots$

пока корни есть

В итоге: $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_m)g$

где многочлен g не имеет корней

$$m = \deg f - \deg g \leqslant \deg f.$$

Корень наз. простым, если $f(x)$ не делится на $(x-c)^2$, иначе c — кратный корень.

Кратностью корня наз. наибольшее k такое, что f делится на $(x-c)^k$

(Т3) (уточнее Т2) Число корней ненулевого многочлена с учетом их кратностей не превосходит степень многочлена. Равенство имеет место когда многочлен разлагается на линейные множители.

Доказательство: $f = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_m)^{k_m} g$

где $c_1 \dots c_m$ — различные корни

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = \deg f - \deg g.$$

Основная теорема алгебры

(Впервые строго доказал Гаусс в 1779г)

Всякий многочлен (положительной степени) наз. полем комплексных чисел имеет корень.
(Алгебраическая замкнутость поля C)

Следствие 1 Всякий многочлен с комплексными коэф. (из $C[x]$) разлагается на линейные множители

Следствие 2 Всякий многочлен степени n над C имеет n корней (с учетом кратности)

Формула Виета.

Пусть многочлен $f(x)$ степени n —

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

имеет n корней (с учетом кратностей) и пусть

$x_1, x_2 \dots x_n$ — корни многочлена
(повторенное с учетом кратностей)

Формулы Виета: $x + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0} \quad \text{и тд.}$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < i \ldots < i} x_{i1} x_{i2} \ldots x_{ik} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

сумма возможных

произведение корней

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Доказательство: Многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

$\underline{x^{n-k}}$ члены содержащие x^{n-m} получаются при перемножении первых слагаемых из остальных k скобок коэффициент каждого такого члена равен произведению каких-то k элементов из $x_1 \ldots x_n$ умноженные $(-1)^k a_0$

При x^{n-k} получается коэффициент

$$\sum x_{i1} \ldots x_{ik} (-1)^k a_0 = a_k$$

<u>пример</u> 1) $n = 3$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$\underline{x}$ $\quad x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2$

В частности, для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

2) $n = 4$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

x^2: $\quad x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4$

x: $\quad -x_2 x_3 x_4 - x_1 x_3 x_4 \ldots$

Рациональные корни

Теорема. Пусть $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Если рациональное число $x_0 = \frac{p}{q}$, где p и q - взаимно простые целые числа (т.е нет общих делителей) является корнем многочлена $f(x)$, то q делит старший коэффициент этого многочлена и p делит его свободный член

(т.к целое число имеет лишь конечное число делителей, теорема позволяет путем конечного перебора найти все рациональные корни.)

Доказательство Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n+1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0,a_1\dots a_n\in\mathbb{Z})$

$x_0=\frac{p}{q}$ - корень, то

$$f(x_0)=a_0\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0\ \Big|\cdot q^n$$

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_n\cdot q^n=0.$$

Все слагаемые (кроме первого) делятся на q => первое слагаемое тоже делится на q

p и q взаимно простые => a_0 делится на q

Аналогично, можно доказать, что a_n делится на p.

пример $3x^4-2x^3+3x^2+x-2=0.$

Делители старшего коэф 3 : ±1 ±3

делители свободного члена: $\pm1;\pm2$

=> рац. корнями $\pm\frac{1}{3}$ $\pm\frac{2}{3}$

проверка: $x_0=\frac{2}{3}$

Следствие: Если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни - есть целые числа являются делителями свободного члена.

пример: $x^4-x^2+x-10=0$

$10: \pm1;\pm2;\pm5;\pm10$ $x_0=-2.$

Глава 5. Системы линейных уравнений

Пусть P - поле (у нас $P=\mathbb{R}$ или $P=\mathbb{C}$)

определение Линейным уравнением с неизвестными $x_1\dots x_n$ называется уравнение вида

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$, где коэф $a_1\dots a_n\in P$ и свободный член $b\in P$

Если $b=0$, то уравнение называется однородным

Система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$