конечного перебора найти все рациональные корни.)

Доказательство Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ $(a_0, a_1 \ldots a_n \in \mathbb{Z})$

$x_0 = \frac{p}{q}$ - корень, то

$$f(x_0) = a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0 \; \Big| \cdot q^n$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n \cdot q^n = 0.$$

Все слагаемые (кроме первого) делятся на q $\Rightarrow$ первое слагаемое тоже делится на q

p и q взаимно простые $\Rightarrow$ a_0 делится на q

Аналогично, можно доказать, что a_n делится на p.

пример $\quad 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0.$

Делители старшего коэф 3 : $\pm 1 \; \pm 3$

делители свободного члена : $\pm 1 ; \pm 2$

$\Rightarrow$ рац. корнями $\pm \frac{1}{3} \; \pm \frac{2}{3}$

проверка : $x_0 = \frac{2}{3}$

Следствие: Если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни - есть целые числа являются делителями свободного члена.

пример: $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$

$10 : \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 5 ; \pm 10 \qquad x_0 = -2.$

Глава 5. Системы линейных уравнений

Пусть P - поле (у нас $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$)

определение Линейным уравнением с неизвестными $x_1 \ldots x_n$ называется уравнение вида

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$, где коэф $a_1 \ldots a_n \in P$ и свободный член $b \in P$

Если $b = 0$, то уравнение называется однородным

Система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Матрица A $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов

а матрица $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ - расширенная матрица системы

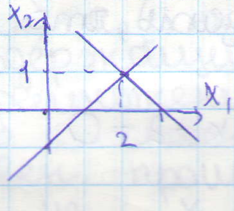
Определение: Система уравнений наз. совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Иначе - несовместной.

Решить систему - значит найти все её решения.

пример. Рассмотрим 3 системы 2 уравнений с 2 неизвестными

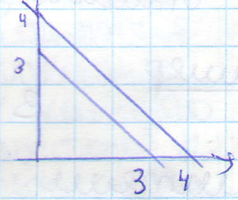
а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

единственное решение



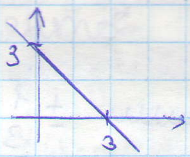
б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

нет решений



в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$

бесконечное множество решений



Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

Идея: привести систему к эквивалентной системе простого вида

Определение: Две системы наз. эквивалентными, если множества их решений совпадают

Определение: Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений наз. преобразования следующих трех типов:

(R1) Уравнение домножаем на число $\neq 0$

(R2) прибавление к одному уравнению другого — комбинация R_1 и R_2

(R2)' прибавление к одному уравнению другого, умноженное на любое число $\lambda \in \mathbb{R}$

(R3) перестановка двух уравнений

Очевидно, что всякое решение исходной системы уравнений является решением новой системы, полученной элементарными преобразованиями. Обратное также верно (т.к всегда можем получить исходную систему из новой подходящим элементарным преобразованием)

Следовательно, при любом элементарном преобразовании мы получаем эквивалентную систему лин. уравнений.

Т.к. нам удобнее работать с матрицей, а не с самими системами, то будем рассматривать элементарное преобразование матриц.

Определение Элементарными преобразованиями строк наз.

R1) умножение строки на число $\neq 0$

R2) прибавление к одной строке другой

R2)' = R1) + R2)

R3) перестановка строк.

С помощью элем. преобразований любую можно привести к достаточно простому виду.

Определение Ведущий элемент ненулевой строки $(a_1\ a_2 \dots a_n)$ – её первый ненулевой элемент.

Определение Матрица наз. ступенчатой, если
1) номера ведущих элементов ненулевых строк образуют строго возраст. последоват.
2) нулевые строки, если они есть, стоят в конце

<u>Ступенчатая матрица</u> – матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_{1j1} \dots & & & \\ 0 \dots 0 & 0 & a_{2j2} \dots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 \dots 0 & \dots 0 & 0 & 0 & a_{rjr} \\ 0 \dots 0 & \dots 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема. Всякую матрицу путем элем. преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство: Если матрица нулевая, то она уже ступенчатая.

Если ненулевая, то пусть $j1$ – номер первого ненулевого столбца. Переставим если надо строки, получим $a_{1j1} \neq 0$. После это прибавим к каждой строке, начиная со второй, прибавить первую строку умноженную на подходящее число, чтобы все элементы столбца $j1$, кроме первого, стали равными нулю.

Получим матрицу вида.

$$\left(\begin{array}{ccc} 0\ldots0 & \bar{a}_{1j1}\ldots & \\ 0\ldots0 & 0 & \\ \vdots & & A_1 \\ 0\ldots0\ldots & 0 & \end{array}\right)$$

Далее проделаем те же операции с матрицей A_1 и т.д.
В итоге получим ступенчатую матрицу

Система в ступенчатом виде

$\bar{a}_{1j1} x_{j1} + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1$

$\bar{a}_{2j2} x_{j2} + \ldots + \bar{a}_{2n} x_{2n} = \bar{b}_2$ $\qquad 0 = \bar{b}_{2+1}$

$\bar{a}_{2j2} x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n = \bar{b}_2$ $\qquad 0 = bm$

Назовем неизвестные $x_{j1} \ldots x_{j2}$ главными, остальные неизвестные - свободными

Пример: Рассмотрим

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x^4 = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

приведем к ступенчатому виду

Вычитаем из 2, 3, 4 строки 1 строку, умножим на 1,2,2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

прибавляем к 3 и 4 строке 2-ю умноженную на 3 и 4

переставим 3 и 4 строки

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_4 = 5 \end{cases}$$

считаем, что перем. $x_1\, x_2\, x_4$ - главные, x_3 - свободный.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

Выделим единичную матрицу. Из (2-3) стр

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

(1 - 2) строки, а 2 строку · 2, 3 строку · на (-1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3\ 8 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ x_4 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 + 8 \\ x_2 = x_3 - 3 \\ x_4 = -5 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_4 - главные переменные
x_3 - свободная

Определение: Система линейных уравнений наз определенной если она имеет единственное решение и, неопределенной, если она имеет более одного решения

Система лин. уравнений в ступенчатом виде.

$$\bar{a}_{1j_1} x_{j_1} + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1$$
$$\bar{a}_{2j_2} x_{j_2} + \ldots + \bar{a}_{2n} x_n = \bar{b}_2$$
$$\bar{a}_{3j_3} x_{j_3} + \ldots + \bar{a}_{3n} x_n = b_3$$
$$\bar{a}_{rj_r} x_{j_r} + \ldots + \bar{a}_{rn} x_n = \bar{b}_r$$
$$0 = \bar{b}_{r+1}$$
$$0 = \bar{b}_m$$

Исследование СЛУ

Рассмотрим произвольную ступенчатую СЛУ

Пусть число ненулевых строк её матрицы коэффициентов равно r, а число ненулевых строк расширенной матрицы равно $\bar{r}$.

Очевидно, что $r = \bar{r}$ или $\bar{r} = r + 1$.

1 случай $\bar{r} = r + 1$

Тогда система содержит уравнение вида

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b; \text{ где } b \neq 0$$

и следовательно, несовместна

2 случай $\bar{r} = r = n$

В этом случае получается строго треугольная система. Из последнего уравнения находится x_n, затем из предпоследнего находится x_{n-1} и т.д. система имеет единственное решение

3 случай $r = \bar{r} < n$

Пусть $j_1 \ldots j_r$ - номера ведущих коэффициентов неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2} \ldots x_{j_r}$ наз. главными, а остальные свободными

Перенесем свободные неизвестные вправо и находим выражения главных неизвестных через свободные.

Эти выражения наз. общим решением системы

Все решения системы получаются из общего решения подстановкой каких-то значений свободных неизвестн.

Система имеет бесконечное множ. решений

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} x_{r+1} + c_{12} x_{r+2} + \ldots + c_{1n-} \quad x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21} x_{r+1} + c_{22} x_{r+2} + \ldots + c_{2n-r} x_n + d_2 \\ x_r = c_{r1} x_{r+1} + c_{r2} x_{r+2} + \ldots + c_{rn-r} x_n + d \end{cases}$$

(общее решение после перенумерации переменных)

Глава 6. Векторное пространство строк и столбцов.

§1.

При решении СЛУ рассматривали строки длины n

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in}).$$

Делая элементарные преобразования, складывали строки и умножали на скаляры

Определение: Векторным пространством строк длины n наз $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) наз множество $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) рассматриваемое вместе с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр

$X = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ $\qquad Y = (y_1, y_2 \ldots y_n)$

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots x_n + y_n)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots \lambda x_n)$$

Векторное пространство столбцов.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Линейные комбинации строк и столбцов:

Линейная оболочка:

Пусть $x_1 \ldots x_n$ - строки (столбцы) пространства $\mathbb{R}^n$

$\lambda_1 \ldots \lambda_n$ - скаляры

Вектор - строка (столбец)

$$X = x_1 \lambda_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

наз. линейной комбинацией векторов x_i с коэфф. λ_i