$$\begin{cases} x_1 = c_{11} x_{r+1} + c_{12} x_{r+2} + \ldots + c_{1n-} \; x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21} x_{r+1} + c_{22} x_{r+2} + \ldots + c_{2n-r} x_n + d_2 \\ x_r = c_{r1} x_{r+1} + c_{r2} x_{r+2} + \ldots + c_{rn-r} x_n + d \end{cases}$$

(общее решение после перенумерации переменных)

Глава 6. Векторное пространство строк и столбцов.

§1.

При решении СЛУ рассматривали строки длины n

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in}).$$

Делая элементарные преобразования, складывали строки и умножали на скаляры

Определение: Векторным пространством строк длины n наз $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) наз множество $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) рассматриваемое вместе с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр

$X = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ $\qquad$ $Y = (y_1, y_2 \ldots y_n)$

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots x_n + y_n)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots \lambda x_n)$$

Векторное пространство столбцов.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Линейные комбинации строк и столбцов:

Линейная оболочка:

Пусть $x_1 \ldots x_n$ – строки (столбцы) пространства $\mathbb{R}^n$
$\alpha_1 \ldots \alpha_n$ – скаляры

Вектор – строка (столбец)

$$X = x_1 \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

наз. линейной комбинацией векторов x_i с коэфф. α_i

Например: $(2,3,5,5) = 3(1,1,1,1) + 2(1,0,-1,-1) = (1,0,0,0)$

Пусть $Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$

Тогда $\alpha X + \beta Y = \alpha(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n) + \beta(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n) =$

$= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) X_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) X_n$ - тоже линейная комбинация X_i

Пусть V - множество всех лин. комбинаций векторов

$V = \{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

Если $X, Y \in V \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in V \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

V - обозначают символом $V = \langle X_1 \ldots X_k \rangle$ и называют линейной оболочкой систем

Также говорят, что оболочка натянута на $X_1 \ldots X_k$ или порождена векторами $X_1\, X_k$.

Линейная зависимость строк и столбцов

Определение. Строки (столбцы) $X_1 \ldots X_k$ наз линейно зависимыми, если найдутся k чисел $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ одновременно неравных нулю и таких, что

$$\lambda_1 X_1 + \ldots \lambda_n X_n = 0$$ - нуль строка (столбец)

Определения. Строки (столбцы) наз линейно независимыми если равенство

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_k X_k = 0$$

возможно лишь при $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_i = 0$

Теорема (Критерий линейной зависимости)
Строки (столбцы) $X_1 \ldots X_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна (один) из них является линейной комбинацией остальных

Доказательство. Необходимость. Если строки (столбцы) $X_1 \ldots X_k$ лин. зависимые, то
$\exists \lambda_1 \ldots \lambda_k$ не все $= 0$.
Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$

Тогда $X_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) X_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) X_k$, т.е X_1 - лин. комбинация остальных строк (столбц)

Достаточность. Пусть, например, $X_1 = \lambda_2 X_2 + \ldots \lambda_k X_k$

Тогда $\underset{\text{коэф} \neq 0}{1} X_1 - \lambda_2 X_2 - \ldots - \lambda_k X_k = 0$

Теорема: Пусть строки (столбцы) $X_1 \ldots X_k$ лин. зависим. наз строка (столбец) Y линейно выражается через $X_1 \ldots X_k$

тогда и только тогда, когда $x_1 \ldots x_k, Y$ - линейная зависим. система ~~линейно~~

Доказательство:

Если Y линейно выражается через $x_1, \ldots x_k$ то $x_1 \ldots x_k, Y$ - лин. зависимы (теорема 1)

Обратно, пусть $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \beta Y = 0$, не все коэф $= 0$ тогда $\beta \neq 0$ (иначе $x_1 \ldots x_k$ - лин завис)

$$\Rightarrow Y = -\frac{\lambda_1}{\beta} x_1 \ldots - \frac{\lambda_k}{\beta} x_k$$

Теорема 3. Пусть строки (столбцы) Y лин. выражается через $x_1 x_k$. Это выражение единственно тогда и только тогда, когда $x_1 \ldots x_2$ - лин независимые.

Доказательство: 1) Пусть $Y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = \mu_1 x_1 + \ldots \mu_k x_k$

Тогда $(\lambda_1 - m_1) x_1 + \ldots + (\lambda_k - m_k) x_k = 0$, т.е $x_1 \ldots x_k$ - лин зав.

2) Обратно, пусть $\exists \mu_1 \ldots \mu_k$ не все $= 0$ $\mu_1 x_1 \ldots \mu_k x_k = 0$

Тогда если $Y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, то также

$Y = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k) x_k$ - другое выражение Y через $x_1 \ldots x_k$

§2 Базис. Размерность пространства строк (столбцов)

Пусть V - лин. оболочка некоторых строк (столбцов) $\neq 0$

$$V = \langle x_1 \; x_k \rangle$$

Определение Система векторов $x_1 \ldots x_r \in V$ наз. базисом для V, если она линейно независима и ее линейная оболочка совпадает с V $\langle x_1 \; x_k \rangle = V$

<u>Пример</u> Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$

$e_1 = (1, 0 \ldots 0)$ $e_2 = (0, 1 \ldots 0)$ ... $e_n (0, 0 \ldots 1)$

лин. независима и $\langle e_1 \ldots e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Координаты вектора $X \in V$ в базисе $x_1 \ldots x_r$

$\forall x \in V$ $\exists! \lambda_1 \ldots \lambda_r \mid X = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r$

($\lambda_1 \ldots \lambda_r$ - координаты x в базисе $x_1 \ldots x_r$)

Лемма. Пусть $V = \langle X_1 \ldots X_r \rangle$ и $x_1 \ldots x_r$ - базис V и пусть $Y_1 \ldots Y_s$ - лин. независимая система из V

Тогда $s \leq r$

Доказательство: Векторы $y_1 \ldots y_s \in V \Rightarrow$ яв. лин. комбинациями базисных векторов

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{r1} x_r$$
$$y_2 = a_{12} x_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{r2} y_r$$
$$\vdots$$
$$y_s = a_{1s} x_1 + a_{2s} y_2 + \ldots + a_{rs} y_r$$

Составим лин комбинацию вида y_i с коэф x_i

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_s y_s = x_1(a_{11} x_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{r1} x_r) + x_2(a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{r2} y_r) + x_s (a_{1s} x_1 + \ldots + a_{rs} x_s) =$$

$$= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1s} x_s) x_1 + \ldots + (a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rs} x_s) x_r =$$

рассмотрим СЛУ $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1s} x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rs} x_s = 0 \end{cases}$

Если $s > r$ (число неизв > числа уравнений), то эта система имеет ненулевое решение $(x_1^0 \ldots x_s^0)$, тогда имеем нетривиальную лин. зависимость

$$x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_s^0 y_s = 0$$

противоречит условию леммы.

Теорема 1. Пусть V - лин. оболочка некоторого конечного числа строк (столбцов). $\forall\, V$ имеется базис.

Доказательство: Пусть $V = \langle x_1 \ldots x_k \rangle$

Если множество $x_1 \ldots x_k$ лин. зависимо, то в этом множестве найдется вектор, линейно выражающийся через остальные

Выкинем этот вектор (например, x_k)

Линейная оболочка не изменится

$$V = \langle x_1 \ldots x_{k-1} \rangle \quad \text{и т.д.}$$

В итоге, получим линейно независимое множество порождающее V, т.е базис

Теорема 2. Пусть $V = \langle x_1 \ldots x_k \rangle$

Все базисы в V содержат одно и тоже число векторов.

Это число наз. размерностью V. Обозначение: $\dim V$ (dimension)

Доказательство: Если бы сущ. два базиса с разными количеством векторов, то базис с большим количеством векторов был бы линейно зависим

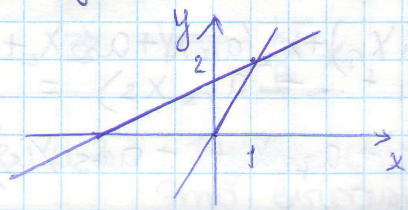
Теорема 3. (о дополнении до базиса) Пусть V - вектор. простран. строк (столбцов)

Всякую лин. независимую систему строк (столбцов) можно дополнить до базиса.

§3. Ранг матрицы
Теорема Кронекера-Капелли.

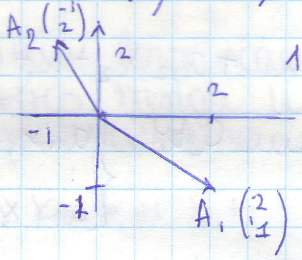
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

взгляд „по строкам"



взгляд „по столбцам"

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

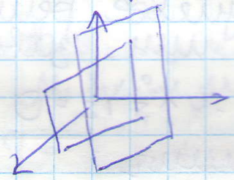


$$1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$n = 3$

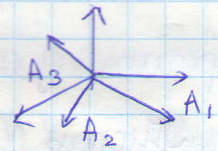
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$$

по строкам



по столбцам

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим столбцы

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки $A_1 = (a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n})$

$A_m = (a_{m1} \; a_{m2} \dots a_{mn})$

Их лин. оболочка $V_r = \langle A_1 \dots A_m \rangle$ горизонт.

Новый взгляд на СЛУ

Пусть $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор столбец правой части

? Принадлежит ли $B \in V_b$?

т.е явл. ли B лин. комбинацией $A^1 \dots A^n$?

$$\sim B = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n \sim x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

СЛУ

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Ранг матрицы

Размерность пространства столбцов $\dim V_B = rk_B(A)$
наз. рангом по столбцам

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} V_B = \langle A^1 \dots A^n \rangle \\ V_r = \langle A_1 \dots A_n \rangle \end{matrix}$$

Размерность пространства строк $\dim V_r = rk_r(A)$
назовем рангом по строкам матрицы A

Элемент пр-я строк R_1 R_2 R_3

Лемма Если матрица A' получена из матрицы A с помощью конечной последовательности элементарных преобразований над строками, то

а) $rk_r(A') = rk_r(A)$

б) $rk_B(A') = rk_B(A)$

Доказательство а) элементарные преобразования

R_3 $\quad A_s \leftrightarrow A_t.$

$$\langle A_1 \dots A_s \dots A_t \dots A_m \rangle = \langle A_1 \; A_t \dots A_s \; A_m \rangle$$

R_2 $\quad A'_s = A_s + \lambda A_t \Rightarrow A_s = A'_s - \lambda A_t.$

$$\langle A_1 \; A_s + \lambda A_t \; A_t \; A_m \rangle = \langle A_1 \dots A_s \dots A_t \dots A_m \rangle$$

б) Покажем, что элем. преобразования строк сохраняют лин. зависимости между столбцами.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A^j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A'^j = 0$$

Рассмотрим 2 СЛУ

$\sum_{j=1}^{n} x_j A^j = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} x_j A'^j = 0$. Они эквивалентны, т.е решение первой явл. решением второй и наоборот.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Теорема. Ранги по строкам и столбцам равны

$$rk_B(A) = rk_r(A) = rk(A)$$

ранг матрицы

Доказательство: Пусть A' - ступенчатый вид матрицы A.

По лемме $rk_В(A') = rk_В(A)$, $rk_Г(A) = rk_Г(A')$

Проверим равенство $rk_В(A') = rk_Г(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{1j1} & & & \\ & 0\ 0 & a_{2j2} & & \\ & & & a_{rjr} & \\ & & & 0\ 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Строки $A_1 \ldots A_r$ лин. независимы

$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r = (0 \ldots 0, \lambda_1 a_{1j1} \ldots) = (0 \ldots 0) \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и т.д.

$rk_Г(A) = r$

Рассмотрим столбцы $A^{j1} \ldots A^{jr}$ - лин. независимы.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1j1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{1j1} \\ a_{2j2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1j1} \\ a_{2j2} \\ a_{rjr} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_r = 0 \text{ и т.д.}$$

Получим $\lambda_r a_{rjr} = 0 \Rightarrow \lambda_r = 0$ и т.д, все $\lambda_i = 0$.

$rk\langle A^{j1} \ldots A^{jr} \rangle = r \Rightarrow rk_В(A') \geq r$

С другой стороны, любой столбец матрицы A' имеет вид $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно отождествить с $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_r \end{pmatrix} \Rightarrow rk_В(A') \leq r$

$\Rightarrow rk_В(A') = r$

Следствие Количество главных переменных не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.

Теорема (Кронекера - Капелли)

(Л. Кронекер (1823 - 1891) - немецкий математик
А. Капелли (1855 - 1910) - итальянский матем.

СЛУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство: СЛУ совместна $\Leftrightarrow \underset{\text{вектор столбец}}{B} \in \langle A^1, A^2 \ldots A^n \rangle$

Если система совместна, то

$B = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n$, т.е $B \in \langle A^1, A^2 \ldots A^n \rangle$

$\Rightarrow rk\langle A^1 \ldots A^n \rangle = rk\langle A^1 \ldots A^n B \rangle$

Обратно, если $rkA = rk(A(B))$

$A^{j1} \ldots A^{jr}$ - базис $\langle A^1 \ldots A^n \rangle$ то система $\langle A^{j1} \ldots A^{j2}, B \rangle$ линейно зависима.

$\Downarrow$

$\Rightarrow B$ - лин. комбинация $A^{j1} \ldots A^{j2}$ (тем более всех)

§ Фундаментальная система решений СЛУ (ФСР)

Рассмотрим однородную СЛУ $AX=0$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - решение однор. СЛУ $AX=0$

Тогда их линейная комбинация $\alpha X + \beta Y$ - тоже решение.

Действительно, $A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = 0$

Поэтому можем говорить о пространстве решений V_A

$$V_A = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \}$$

Теорема. $r + S = n$ (размерность пространства решений равна $n - r$)

n - число неизвестных

r - ранг матрицы A

Доказательство: Пространство столбцов матрицы A - лин. оболочка столбцов $A^1 \ldots A^n$

$\dim V_B(A) = r$ $\quad V_B(A) = \langle A^1 \ldots A^n \rangle = \langle x_1 A^1 + x_2 A^2 \ldots x_n A^n \rangle$

Заметим, что $V_B(A) = \langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle$ $\quad AX = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пусть $X^1 \ldots X^S$ - базис пространства V_A

Дополним его до базиса $\mathbb{R}^n$: $X^1 \ldots X^S, X^{S+1} \ldots X^n$

Очевидно, $\langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle = \langle AX^{S+1} \ldots AX^n \rangle$

(действ. $X = \alpha_1 X^1 + \ldots + \alpha_S X^S + \alpha_{S+1} X^{S+1} + \ldots + \alpha_n X^n$, $AX = \alpha_{S+1} AX^{S+1} + \ldots + \alpha_n X^n A$)

Векторы AX^{S+1} AX^n - лин. независимы

Пусть $\lambda_1 AX^{S+1} + \ldots + \lambda_{n-S} AX^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(\lambda_1 X^{S+1} \ldots \lambda_{n-S} X^n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 X^{S+1} + \ldots + \lambda_{n-S} X^n \in V_A$

Значит $r = n - S$

Определение Базис пр-ва решений однородной СЛУ наз. фундаментальной системой решений (ФСР)

Базисов много. Стандартный способ нахождения ФСР

Приведем матрицу к ступенчатому виду.

Пусть переменные $x_1 \ldots x_r$ - главные

$$x_1 = c_{1,r+1} x_{r+1} + \ldots + c_{1n} x_n$$
$$\vdots$$
$$x_r = c_{r,r+1} x_{r+1} + \ldots + c_{rn} x_n$$

Будем придавать свободным переменным значение

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Получим $n-r$ решений

$$X^1 = \begin{pmatrix}x_1^1\\x_2^1\\\vdots\\x_r^1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\\\vdots\\x_r^2\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \ldots X^{n-r} = \begin{pmatrix}x_1^{n-r}\\x_2^{n-r}\\\vdots\\x_r^{n-r}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} - \text{ФСР}$$

Ясно, что $X^1 \ldots X^{n-r}$ лин. независимы

Неоднородная система $AX = B$

Пусть X_0 – частное решение, $AX_0 = B$

$X_1 \ldots X_m$ – ФСР $AX = 0$

Общее решение неоднородной системы $X = X_0 + c_1 X_1 + \ldots + c_m X_m$

Глава 7. Определители. Обратная матрица

§ 1 Определители n-го порядка.

Определение. Всякое расположение чисел $1\,2 \ldots n$ в некотором порядке наз. перестановкой из n чисел

Обознач. $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$

Из n чисел можно образовать $n!$ перестановок

Определение. Два числа α_i и α_j в перестановке α образуют инверсию, если $i > j$, но $\alpha_i < \alpha_j$

например, $\alpha = (3, 2, 1)$

Общее количество инверсий в перестановке обозн. $|\alpha|$

Определение. Перестановка наз. четной, если $|\alpha|$ – четное число, нечетной, если $|\alpha|$ – нечетное число.

пример. $\alpha = (4, 5, 1, 3, 2)$

$|\alpha| = 3 + 3 + 1 = 7$ – нечетная.

Транспозиция перестановки – 2 элемента меняются местами