Будем придавать свободным переменным значение

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Получим $n-r$ решений

$$X^1 = \begin{pmatrix}x_1^1\\x_2^1\\\vdots\\x_r^1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\\\vdots\\x_r^2\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \dots X^{n-r} = \begin{pmatrix}x_1^{n-r}\\x_2^{n-r}\\\vdots\\x_r^{n-r}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \text{ - ФСР}$$

Ясно, что $X^1 \dots X^{n-r}$ лин. независимы

Неоднородная система $AX=B$

Пусть X_0 - частное решение, $AX_0 = B$

$X_1 \dots X_m$ - ФСР $AX=0$

Общее решение неоднородной системы $X = X_0 + c_1X_1 + \dots + c_mX_m$

Глава 7. Определители. Обратная матрица

§1 Определители n-го порядка.

Определение. Всякое расположение чисел $1, 2 \dots n$ в некотором порядке наз. перестановкой из n чисел

Обознач. $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

Из n чисел можно образовать $n!$ перестановок

Определение. Два числа α_i и α_j в перестановке α образуют инверсию, если $i>j$, но $\alpha_i < \alpha_j$

например, $\alpha = (3, 2, 1)$

Общее количество инверсий в перестановке обозн. $|\alpha|$

Определение. Перестановка наз. четной, если $|\alpha|$ - четное число, нечетной, если $|\alpha|$ - нечетное число.

пример. $\alpha = (4, 5, 1, 3, 2)$

$|\alpha| = 3 + 3 + 1 = 7$ - нечетная.

Транспозиция перестановки - 2 элемента меняются местами

$\beta = (1, 5, 4, 3, 2)$ $\quad |\beta| = 3+2+1 = 6$

Утверждение: Транспозиция меняет четность подстановки

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

S_n - все подстановки из n чисел (симметрическая группа подстановок)

В определении det каждое слагаемое является произведением n элементов матрицы. Все сомножители находятся в разных строках и столбцах, по одному в каждой строке и столбце

$n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ четная $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ нечетная

$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

§2 Свойства определителя

Свойство 1 Определитель не меняется при транспонировании

$$\det A = \det A^T$$

Если произведение $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ является слагаемым в $\det A$, то оно является слагаемым и в $\det A^T$

Действительно, если сомножители расположены в разных строках и столбцах матрицы A, то они расположены в разных строках и столбцах A^T

Знак определяется подстановкой $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

Четность α и $\bar{\alpha}$ равна числу инверсий - одинакова

Свойство 2 При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противопол.

Док-во Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta 1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если произведение $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ явл. слагаемым в определителе Δ, то оно явл. слагаемым и в $\Delta 1$ и наоборот

(т.к. если эл-ты были в Δ в разных строках и столбцах, то это же верно и для Δ_1)

Знак этого слагаемого определяется подстановкой

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i & j & n \\ \alpha_1 & \alpha_i & \alpha_j & \alpha_n \end{pmatrix}$$

в Δ_1 подстановка $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & i & j & n \\ \alpha_1 & \alpha_j & \alpha_i & \alpha_n \end{pmatrix}$

α и $\tilde{\alpha}$ отличаются на 1 транспозицию $\Rightarrow$ имеют разные знаки

Значит Δ и Δ_1 содержат одинаковые по абс. величине слагаемые, но с противоположными знаком)

свойство 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{ij} + a''_{ij} & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{2j} + a''_{2j} & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a'_{nj} + a''_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a'_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1n} & a''_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a''_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Док-во: Покажем, например, для строки

$$\Delta = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma 1} \dots (a'_{i\sigma i} + a''_{i\sigma i}) + a_{n\sigma n} =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma 1} \dots a'_{i\sigma i} \dots a_{n\sigma n} + \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma 1} \ a''_{i\sigma i} \ a_{n\sigma n}$$

свойство 4 общий множитель элементов строки или столбца может быть вынесен за знак определит.

Док-во: для строки $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} (\lambda a_{i\sigma i}) \dots a_{n\sigma_n} =$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие $\Rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

свойство 5 Определитель равен нулю, если он имеет:
1) нулевую строку (столбец)
2) хотя бы две одинаковые строки (столбца)

3) хотя бы две строки (столбца), элементы которых пропорциональны
4) хотя бы одну строку (столбец) яви. линейной комбинацией остальных

Док-во: (из св. 1-4)

свойство 6 Определитель не изменится, если к любой его строке (или столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов)

Док-во: Например, для 1 столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_{1k} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_{2k} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_{nk} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{св.3}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_{1k} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=2}^{n}\lambda_k a_{nk} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & & a_{ij} & & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ В матрице A вычеркнем i-ю строку и j-столбец.

Получится матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. Определитель этой матрицы обозначим M_{ij} наз. минором, соотв. элементу a_{ij}

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ наз. алгебраическим дополнением к элементу a_{ij}

свойство 7 (теорема Лапласа с разложением определителя по строке или столбцу)

$$\det = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ разложение определителя по i строке и j столбцу.

Док-во: Сначала докажем, что $\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{ij} & & a_{in} \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}$

Поменяем i-ю строку со всеми предыдущими и j-столбец со всеми предыдущими определитель умножится на $\dots (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$

В результате получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 \\ a_{ij} & a_{11} & a_{1n} \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|} b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n} = \text{ т.к. в 1 строке только } b_{11}\neq 0$$

$$\| $$

$$b_{11}\sum (-1)^{|\sigma|} b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n} = a_{ij}M_{ij}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ a_{i1}+0 & a_{i2}+0 & a_{in}+0\\ a_{n1} & & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n}\\ a_{i1} & 0 & 0\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{in}\\ a_{n1} & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Свойство 8 Определитель верхне (нижне)-треугольной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали.

Док-во:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & a_{2n}\\ & & \vdots\\ 0 & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{расклад}\\ \text{по 1 стл.}}}{=} a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & & a_{2n}\\ 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{расклад}\\ \text{по стл.}}}{=} \text{ и т.д. } = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Свойство 9 false determinant

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \quad k\neq i\ ; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}=0 \quad k\neq j$$

сумма произведений какой-либо строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения, соответствующие элементам другой строки (столбца) равна 0

Док-во рассмотрим определитель
$$\begin{array}{c} 1\\ i\\ k\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in}\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{kn}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}\end{vmatrix} = 0$$
разложим по k-ой строке

Свойство 10 (определитель матрицы с углом нулей)

Пусть
$$A = \begin{pmatrix} B & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$$
где B, C − квадратные матрицы $\Rightarrow \det A = \det B\cdot\det C$

Док-во: С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $(B D)$ к ступенчатому виду (B', D')

$\det B' = \det B$

Затем матрицу $(0\ C)$ приведем к ступенчатому виду $(0, C')$

$\det C' = \det C$

Тогда матрица $A' = \begin{pmatrix} B' & D'\\ 0 & C'\end{pmatrix}$ будет верхне-треугольной

По свойству 8 $\det A'$ = произведение диагональных элементов =

= произведение диаг. элементов B' · произведению диаг. элем. C'

$\det B \overset{\shortparallel}{=} \det B'$ $\quad$ $\det C = \det C'$

Теорема. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

определитель произведения матриц равен произведению определителей.

Доказательство: Пусть $C = A \cdot B$

Рассмотрим 2 матрицы

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

E – единичная матрица порядка n

$$\det M_1 = \det M_1^T = \det A^T \cdot \det B^T = \det A \cdot \det B$$

В матрице M_2 сделаем n перестановок строк

$(n+1)$ строку умножим на (-1) и поменяем местами с 1 строкой

$(n+2)$ $\quad$ (-1) $\quad$ со 2 строкой

В результате M_2 примет вид: $M_3 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A & C \end{pmatrix}$

$$\det M_2 = \det M_3 = \det E \cdot \det C = \det C$$

покажем теперь, что матрицу M_1 элементарными преобраз. строк можно преобразовать в M_2

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & 0 \dots 0 \\ -1 \quad 0 \quad 0 & b_{11} \dots b_{1n} \\ 0 \quad -1 \quad 0 & b_{21} \dots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad -1 & b_{n1} \quad b_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & c_{11} \quad c_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \quad a_{nn} & c_{n1} \quad c_{nn} \\ -1 \quad 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ 0 \quad -1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что первые n столбцов совпадают.

В матрице M_1 к $(n+1)$ столбцу прибавим 1-ый, умнож на b_{11}, 2-ой, умнож на b_{21}, n-ый, умнож b_{n1}

в результате в $(n+1)$ столбце в строках $n+1 \dots 2n$ станут нули, в остальных строках, например, в i-ой строке

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} = c_{i1}$$

повторим аналогичные преобразования с $n+2 \dots 2n$ столбцами

§3 Обратная матрица и её свойства

Определение Пусть A – квадратная матрица порядка n, квадр. матрица B порядка n наз. обратной к A, если

$$AB = BA = E \qquad \text{Обознач: } A^{-1}$$

Теорема. Если матрица A имеет обратную, то она единственна

Доказательство: Пусть $AB = BA = E$ и $AB' = B'A = E$

Имеем: $B = BE = B(AB') \underset{\text{ассоц. умнож}}{=} (BA)B' = EB' = B'$

Теорема (критерий невырожденности)

Для того, чтобы квадр. матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$

Доказательство "$\Rightarrow$" необходимость. Пусть A^{-1} - обратная матрица

Тогда $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$

$\det A \cdot \det A^{-1}$ $\Rightarrow \det A \neq 0$

"$\Leftarrow$" Достаточность. Рассмотрим присоединенную матрицу

$$A^{\vee} = \underset{(\text{adjoint})}{\operatorname{adj} A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{n1} \\ A_{1n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Покажем, что $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}$

Рассмотрим матрицу $C = A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}\right)$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ijk} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \text{ св. 9.}$$

аналогично, $C' = \frac{1}{\det A} A^{\vee}) \cdot A$

$$C'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ik}}{\det A} \cdot a_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0; & k \neq j \end{cases}$$

Теорема 2 дает способ вычисления обратной матрицы

<u>пример</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

Теорема. Если матрицы A и B имеют обратные, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Доказательство:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$$

Теорема Если матрица A имеет обратную, то A^T также имеет обратную и $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\quad (AB)^T = B^T A^T$

Доказательство $(AB)^T = B^T A^T$

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$$

2 способ вычисления обратной матрицы

Найдем элементарные матрицы

$$F_{st} = \begin{array}{c} \\ s \\ \\ t \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & s & t & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad s \neq t \qquad F_{st} = E - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts}$$

$$F_{st}(\lambda) = E + \lambda E_{st} \quad \begin{array}{c} s \\ \\ s \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & t & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_s(\lambda) = E + (\lambda - 1) E_{ss} = \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, \lambda, 1)$$

$F_s(\lambda) \cdot A$ = s-ая строка матрицы A умножится на λ

$A \cdot F_s(\lambda)$ = s-ый столбец матрицы A умножается на λ

$F_{st} \cdot A$ = строки s и t меняются местами

$A \cdot F_{st}$ = строк s и t меняются местами

$F_{st}(\lambda) \cdot A$ - к s-ой строке прибавляется t строка, умнож на λ

$A \cdot F_{st}(\lambda)$ к s-ому столбцу прибавляется t столбец, умнож на λ

Записываем $(A|E)$ → начинает делать элемент. преобразования (строк или столбцов) с матрицами A и E одновременно. Приводим A к единичной $(E|A^{-1})$

$$\underbrace{p_k \dots p_2 p_1}_{p} A = E \qquad p = A^{-1} \qquad p_k \dots p_2 p_1 E = pE = p = A^{-1}$$

Заметим, что все элементарные матрицы обратимы. Обратные к ним - тоже элементарные матрицы

§4. Решение матричных уравнений

Формулы Крамера

Рассмотрим уравнение $A \cdot X = B$ $(XA = B)$ матрица A - квадратная невырожденная

Умножим обе части равенства A^{-1}

$$X = A^{-1} B \qquad (X = B A^{-1})$$

Теорема (Формула Крамера)

Если СЛУ
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет отличный от нуля определитель, то её единственное решение вычисляется по формулам

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \quad k = 1 \ldots n$$

A_k – из матрицы A (замена k-ого столбца на столбец свободных членов)

$$\begin{array}{c} \phantom{A_k = (a_{11}\ a_{12} \ldots}\ k \\ A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ & & b_2 & & \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Доказательство $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = (\alpha_{ij}) \quad \alpha_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

например, $x_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det A}$

Числитель разложение по 1 столбцу определителя

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ b_n & a_{n1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ранг матрицы по минорам

Определение Минором порядка k матрицы $A(m \times n)$ наз. определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов

$$M = \begin{pmatrix} i_1 & i_k \\ j_1 & j_k \end{pmatrix}$$

Определение Ранг матрицы (по минорам) наз. число, которое равно максимальному порядку ее ненулевых миноров: $rk_M(A)$

Теорема. $rk_M(A) = rk(A)$

Определение M-базисный минор, если 1) $M \neq 0$
2) порядок $M = rk(A)$