Глава 8. Квадратичные формы. Поверхности 2 порядка

§1 Квадратичные формы

Определение Однородный многочлен второй степени $(f(tx) = t^2 f(x))$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} x_i x_j \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$ наз. квадратичной формой

Квадратичную форму можно записать в матричном виде $x^T A x$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ $A = (a_{ij})$ - симметричная матрица кв. формы

Ранг матрицы A наз. рангом кв. формы

пример: $x_1^2 + 4x_1x_3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Если матрица A имеет максимальный ранг равный числу переменных, то квадратичная форма наз. невырожденной

Преобразования квадратичных форм

Пусть $e = (e_1 \dots e_n)$ - базис.

$x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_e$ - координаты вектора $\bar{x}$ в базисе e

$$\bar{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Квадратичная форма - функция $f(x) = x_e^T A x_e$

Пусть $e' = (e'_1 \dots e'_n)$ - другой базис, U - матрица перехода

$$[e'_1 \dots e'_n] = [e_1 \dots e_n] U$$

$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_n \end{pmatrix}$ - координаты вектора $\bar{x}$ в базисе e'

$$x_e = U x'$$

$$f(x) = x^T A x = (U x')^T A (U x') = x'^T U^T A U x' = x'^T A' x'$$

$A' = U' A U$ - закон преобразования квадратичных форм.

Квадратичные формы канонического вида

Определение Кв. форму $\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ наз. кв. форма канонического вида

Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении полных квадратов.

<u>пример</u> $x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_1^2$

$z_1 = x_1 - 2x_2$ $\qquad z_1^2 - z_2^2$

$z_2 = 2x^2$

В общем случае.

Пусть $a_{11} \neq 0$ $\quad f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} a_{ii}x_i + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j =$

$$= a_{11}(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n)^2 - a_{11}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}^2x_j^2 - 2a_{11}\sum_{2\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j x_ix_j +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j\right)^2 + f_1(x_2, x_n)$$

$\alpha_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ $\qquad f_1$ – кв. форма не сод x_1

Если все $a_{ii} = 0$

пусть, например, $a_{12} \neq 0$

замена $\qquad x_1 = x_1' + x_2'$

$x_2 = x_1' - x_2'$

$x_3 = x_3'$

$x_n = x_n'$

Замечание. Канонический вид, к кот. приводится кв. форма определяется неоднозначно

§2. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма может быть приведена к различным каноническим видам

Важная характеристика – ранг кв. формы

Ранг кв. формы не меняется при невырожденных линейных заменах переменных и равен числу отличных от нуля коэф. в любом её каноническом виде

При изменении базиса матрица кв. форма

$$A' = U^T A U$$

U – матрица перехода, невырожденная

$\mathrm{rk}\, A' = \mathrm{rk}\, A$ т.к. при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется (без док-ва)

Пусть кв форма имеет 2 канонических вида
($\mathrm{rk}\, AB \leq \min(\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B)$)

$f_1(y_1 \ldots y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2$ Все коэф $\lambda_i, \mu_i \neq 0$

$f_2(z_1 \ldots z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2$

Для f_1 матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_m & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}\, A_1 = m$$

Для f_2 матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_k & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}\, A_2 = k$$

$m = k$.

В различных канонических видах остается неизменным не только кол-во ненулевых коэф, но и кол-во положительных и отрицательных

Теорема (Закон инерции кв. форм)

Для любых двух канонических видов $f_1(y_1 \ldots y_m) = \lambda_1 y_1^2 \ldots + \lambda_m y_m^2$
одной и той же кв. формы $f_2(z_1 \ldots z_k) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_k z_k^2$

$m = k$ (= рангу кв. форм)

кол-во положительных коэф λ_i совпадает с кол-вом положительных коэф μ_i

кол-во отрицательных коэф λ_i совпадает с кол-вом отрицательных коэф μ_i

Доказательство. По предыдущей теореме: $m = k$

Пусть $f_1(y) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 - \alpha_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - \alpha_k y_k^2$ сигнатура: $\underbrace{++\,+}_{p}\,\underbrace{-\,-\,-}_{k-p}\,0\ldots0$

$f_2(z) = \beta_1 z_1^2 + \ldots + \beta_q z_q^2 - \beta_{q+1} z_{q+1} - \ldots - \beta_k z_k$ сигнатура $\underbrace{++\,+}_{q}\,\underbrace{-\,-\,-}_{k-q}\,0\ldots0$

$e(e_1 \ldots e_n)$, $f = (f_1 \ldots f_n)$ – базисы, в которых записаны канонические виды f_1, f_2

Пусть $p > q$. Покажем, что существует вектор $x \neq 0$ для которого выполняются условия

$x_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ $x_f = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_n \end{pmatrix}$,

$y_i = 0$, $i = p+1 \ldots n$

$z_j = 0$, $j = 1 \ldots q$

При переходе к другой с.к. $x_f = U x_e$, U – матрица перехода от f к e

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad z_j = u_{j1} y_1 + \ldots + u_{jn} y_n$$

Условия на вектор x:

$$\begin{cases} y_{p+1} = 0 \\ y_n = 0 \\ u_{11} y_1 + \ldots + u_{1n} y_n = 0 \\ \vdots \\ u_{q1} y_1 + \ldots + u_{qn} y_n = 0 \end{cases}$$

Это однородная СЛУ отн. y:

неизвестных $- n$
уравнений $- n - p + q$ | урав < неизв. $n - p + q < n$

Поэтому эта система имеет ненулевое решение.

Для этого вектора x:

$$f(x) = f_1(y_1 \ldots y_n) = \alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_p y_p^2 > 0$$

$$f(x) = f_2(z_1 \ldots z_n) = -\beta_{q+1} z_{q+1} + \ldots + \beta_k z_k^2 < 0$$

Значит предположение $p \neq q$ неверно $\Rightarrow p = q$

§3. Критерий Сильвестра

Определение Квадратичная форма наз. положительно (отриц) определенной $(f(x) = x^T A x)$
если $\forall x \neq 0 \quad f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$

неположительно (неотрицательно) определенной, если
$\forall x \neq 0 \quad f(x) \leq 0 \quad (f(x) \geq 0)$

Знакопеременной (неопределенной) если $\exists x, y \quad f(x) > 0$, $f(y) < 0$

Пусть A - матрица кв. формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1 \ldots n$$

Рассмотрим угловые миноры (также они наз. главные миноры)

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема (Критерий Сильвестра)

Для того, чтобы кв форма была положительно определенной, необходимо и достаточно чтобы
$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \ldots \Delta_n > 0$.

Следствие Для того, чтобы кв. форма n перем. была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ -\Delta_3 > 0 \dots -\Delta_n > 0$$

(знаки главных миноров чередуются)

§4. Поверхности второго порядка (ПВП)

Определение ПВП наз множество точек, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

(! хотя бы один из коэф при членах 2 степени $\neq 0$)

$$(x\,y\,z)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (a_1\,a_2\,a_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

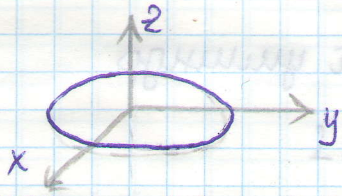
При преобразовании координат степень ур-я сохр

Лемма Пересечение ПВП с плоскостью яви КВП (кроме особого случая, когда оно оказ. плоскостью)

Имеется 15 типов ПВП
Запишем их в канонической с.к.

1. Эллипсоид

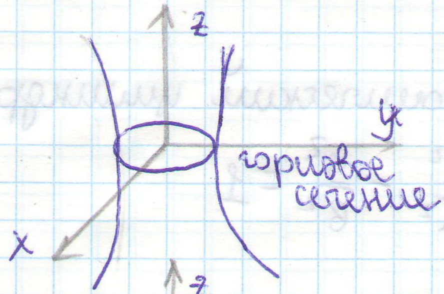
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



a, b, c – полуоси
линия пересечения с плоскостью – эллипс

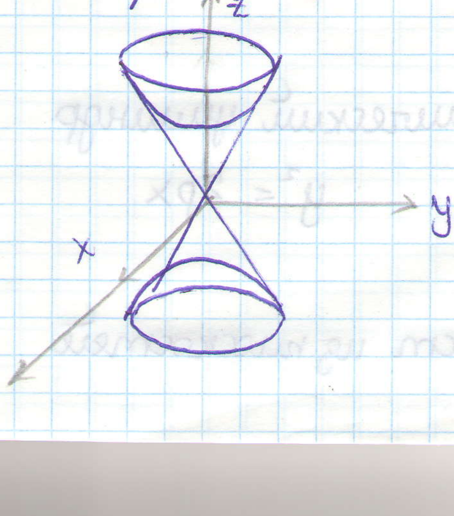
2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



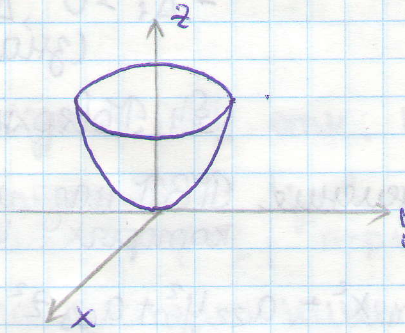
3. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Далее поверхности каноническое уравнение которых не содержит z^2

5. Эллиптический параболоид.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

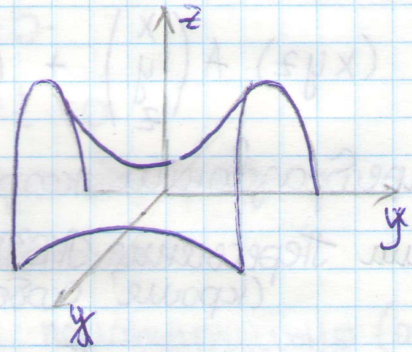
сечение пл $z=p$ - эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2p$$

сечение пл. $x=0$ $y=0$ - парабола

$$x^2=2a^2z$$
$$y^2=2a^2z$$

6. Гиперболический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

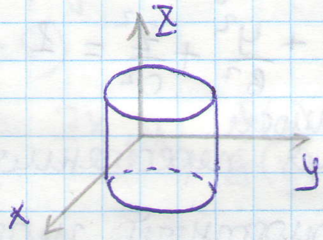
сечение плоск $z=p\neq 0$ - гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2p$$

сечение плоск $z=0$ пара прямых

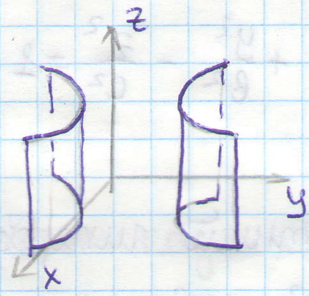
Цилиндры

7. Эллиптический цилиндр



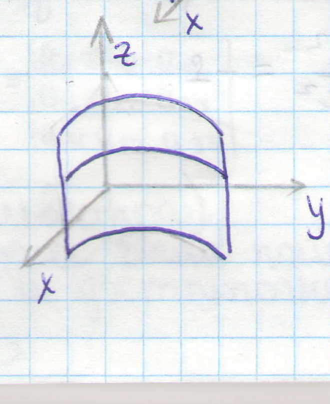
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

8. Гиперболический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

9. Параболический цилиндр



$$y^2=2px$$

ПВП, сост из плоскостей

10. Пара пересекающихся плоскостей

$$y^2-k^2x^2=0$$

11. Пара параллельных плоскостей

$$y^2-k^2=0$$

12. Плоскость $y^2=0$

13. Прямая $x^2+y^2=0$

14. Одна точка $x^2+y^2+z^2=0$

15. Пустое множество $x^2+y^2+z^2=-1$

$x^2+y^2=-1$ $x^2=-1$