Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 1

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [3; 1; 1]^\top$, $\mathbf{v} = [2; -2; -1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-1; 1; 2]^\top$.

5. Точки $A(1; -3; 1)$, $B(2; -2; 2)$, $C(1; -2; 3)$ и $D(2; -5; 1)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 2; 3]^\top + t[1; 1; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 3; 4]^\top + u[1; 2; 1]^\top + v[2; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 2

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; -1; 0]^\top$, $\mathbf{v} = [3; 2; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; 2; 1]^\top$.

5. Точки $A(1; 1; -2)$, $B(2; 2; -1)$, $C(0; -2; -4)$ и $D(4; -1; -2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [4; 2; 1]^\top + t[3; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 3]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[-2; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 3

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; 1; 4]^\top$, $\mathbf{v} = [4; -2; 3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; -1; 2]^\top$.

5. Точки $A(2; 3; -1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(3; 4; 1)$ и $D(3; 1; 0)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 1; 2]^\top + t[1; 1; -1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [4; 2; 3]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[2; 1; -1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 4

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 1; 4]^\top$, $\mathbf{v} = [2; -7; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[-2; 1; 2]^\top$.

5. Точки $A(2; 1; 1)$, $B(3; 3; -1)$, $C(5; 0; -1)$ и $D(2; 2; 2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 3; 4]^\top + t[3; 1; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [4; 2; 3]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[2; 1; -1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 5

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 2; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 0; 4]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; 1; -1]^\top$.

5. Точки $A(1; 3; 3)$, $B(2; 2; 4)$, $C(2; 4; 5)$ и $D(4; 1; 4)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; 2; 5]^\top + t[2; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 5; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[-1; 1; 3]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 6

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 1; -5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; -2; -3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1; 1; 1]^\top$.

5. Точки $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(2; 3; 3)$ и $D(4; 0; 2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 2; 2]^\top + t[3; 3; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [-1; 3; 2]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 7

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [4; 2; 1]^\top$, $\mathbf{v} = [-1; 3; 5]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; -2; -1]^\top$.

5. Точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 0; -1)$ и $D(1; 2; 2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; -1; 3]^\top + t[-2; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 3; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[-1; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 8

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [3; 2; -1]^\top$, $\mathbf{v} = [5; 3; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1; 1; -2]^\top$.

5. Точки $A(3; -1; 4)$, $B(4; -2; 6)$, $C(4; 0; 6)$ и $D(4; -3; 5)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 0; 3]^\top + t[3; 1; 3]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 4; 4]^\top + u[1; 2; 3]^\top + v[1; 1; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 9

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [5; 2; 2]^\top$, $\mathbf{v} = [-1; 1; -3]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; -1; 2]^\top$.

5. Точки $A(3; 2; 1)$, $B(4; 1; 3)$, $C(4; 3; 3)$ и $D(4; 0; 2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [2; 5; 2]^\top + t[2; -2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 2]^\top + u[1; 1; 1]^\top + v[1; 3; 2]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 10

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [4; 0; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [2; 3; -2]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; -1; 1]^\top$.

5. Точки $A(1; 2; 2)$, $B(2; 3; 3)$, $C(2; 3; 4)$ и $D(2; 0; 2)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1; 3; 4]^\top + t[1; 1; 2]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 2; 3]^\top + u[3; 2; 2]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 11

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [-1; 1; 1]^\top$, $\mathbf{v} = [4; 3; 1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; 1; -2]^\top$.

5. Точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(2; 3; -1)$ и $D(4; 0; 0)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; 2; 4]^\top + t[1; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 3; 3]^\top + u[1; 1; 5]^\top + v[1; 2; 4]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 12

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [0; 3; -2]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 5; -1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; -1; -1]^\top$.

5. Точки $A(2; 4; 1)$, $B(3; 5; 2)$, $C(1; 1; -3)$ и $D(5; 2; 1)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [3; 2; -2]^\top + t[1; 2; 3]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2; 5; -1]^\top + u[2; 1; 2]^\top + v[1; 1; 3]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v}\sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 13

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2;1;2]^\top$, $\mathbf{v} = [5;3;2]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1;1;2]^\top$.

5. Точки $A(3;1;1)$, $B(4;2;2)$, $C(2;-2;-1)$ и $D(0;3;1)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [1;2;3]^\top + t[-1;2;1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [2;5;2]^\top + u[1;4;2]^\top + v[1;2;2]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)

Вариант 14

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [1; 2; 4]^\top$, $\mathbf{v} = [5; 1; -1]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}[2; 1; 2]^\top$.

5. Точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 4; 1)$, $C(4; 1; 1)$ и $D(1; 3; 4)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [-1; 1; 1]^\top + t[3; 4; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 2; 2]^\top + u[2; 3; -1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 1 (сдать к 7 октября)
Вариант 15

1. Найти радиус–вектор точки пересечения биссектрис треугольника ABC, радиус-векторы вершин которого есть $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, а длины противолежащих сторон есть a, b и c.

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для векторов $\mathbf{r}_0 = [2; 3; 5]^\top$, $\mathbf{v} = [1; 1; 4]^\top$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1; 1; 1]^\top$.

5. Точки $A(2; 4; 3)$, $B(1; 3; 2)$, $C(1; 3; 1)$ и $D(3; 2; 3)$ являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для прямой $\mathbf{r} = [-1; 3; 2]^\top + t[2; 2; 1]^\top$ и плоскости $\mathbf{r} = [1; 1; 1]^\top + u[2; 3; -1]^\top + v[1; 2; 1]^\top$.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.