

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 1

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [2; 0; 1; -2]^\top, \mathbf{a}_2 = [2; 3; 3; -1]^\top, \mathbf{a}_3 = [0; 3; 2; 1]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; 2; 2; 0]^\top, \mathbf{a}_5 = [-3; -1; -2; 3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; 0; -1; 1]^\top + \alpha[-1; -1; 1; 0]^\top + \beta[2; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{3k}a_{42}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{63}a_{71}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 2

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [0; 1; -1; 2]^\top, \mathbf{a}_2 = [1; -1; 1; 0]^\top, \mathbf{a}_3 = [2; -3; 3; -2]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; -2; 2; -1]^\top, \mathbf{a}_5 = [2; -4; 4; -3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; 1; 3; -3]^\top + \alpha[1; -1; 1; 0]^\top + \beta[-1; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 7 \\ 9 & -10 & 10 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{35}a_{4k}a_{76}a_{52}a_{1m}a_{24}a_{61}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 3

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [1; 1; 2; 2]^\top, \mathbf{a}_2 = [1; 1; 1; 1]^\top, \mathbf{a}_3 = [-1; -1; 0; 0]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [-1; 0; 2; 2]^\top, \mathbf{a}_5 = [-3; -2; -1; -1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[2; 1; -1; 0]^\top + \alpha[-1; -2; 1; 0]^\top + \beta[2; 1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{33}a_{4k}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{62}a_{71}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 4

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 7, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [1; 1; 1; -1]^\top, \mathbf{a}_2 = [1; -1; -1; 0]^\top, \mathbf{a}_3 = [1; -3; -3; 1]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; 4; 2; -3]^\top, \mathbf{a}_5 = [1; 2; 0; -2]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[-1; 3; 0; 2]^\top + \alpha[2; 2; 1; 0]^\top + \beta[1; -2; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -12 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{72}a_{25}a_{1k}a_{34}a_{56}a_{6m}a_{43}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 5

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [3; 2; 3; -2]^\top, \mathbf{a}_2 = [2; -1; 0; 1]^\top, \mathbf{a}_3 = [4; 5; 6; -5]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [-2; -1; -1; 0]^\top, \mathbf{a}_5 = [-3; 0; -2; 1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[0; 1; 1; -2]^\top + \alpha[-2; -2; 1; 0]^\top + \beta[-1; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{34}a_{4k}a_{72}a_{1m}a_{26}a_{67}a_{51}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 6

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [0; -1; -2; -3]^\top, \mathbf{a}_2 = [2; -1; -1; -1]^\top, \mathbf{a}_3 = [2; -2; -3; -4]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; -1; 2; 2]^\top, \mathbf{a}_5 = [-1; 1; 5; 6]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[3; 1; 0; 2]^\top + \alpha[-2; 1; 1; 0]^\top + \beta[2; 1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & -1 \\ 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{3k}a_{12}a_{47}a_{76}a_{6m}a_{21}a_{53}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 7

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [-2; -2; -3; 4]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [-1; -1; -2; 2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1; 1; 1; -2]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; 2; 2; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [2; 3; 3; -3]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; 1; 1; 1]^\top + \alpha[-2; -1; 1; 0]^\top + \beta[-1; 1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -4 & 7 & 25 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 13 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{36}a_{4k}a_{12}a_{2m}a_{73}a_{64}a_{55}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 8

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [3; -1; 1; 1]^\top, \mathbf{a}_2 = [2; 1; 2; -1]^\top, \mathbf{a}_3 = [1; -2; -1; 2]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [3; 0; 2; 0]^\top, \mathbf{a}_5 = [4; -2; 1; 2]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[2; 1; 2; 1]^\top + \alpha[1; 1; 1; 0]^\top + \beta[1; 2; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{42}a_{3k}a_{75}a_{51}a_{6m}a_{17}a_{23}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 9

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [3; 1; -1; 1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2; 2; 1; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [8; 4; -1; 1]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [0; 1; 2; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [5; 2; -2; 1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; 2; 1; -1]^\top + \alpha[-2; 2; 1; 0]^\top + \beta[2; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -9 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \\ -2 & 14 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{74}a_{5k}a_{45}a_{37}a_{2m}a_{66}a_{13}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 10

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [2; 0; 0; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0; 2; 1; 1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2; 4; -2; -3]^\top, \\ \mathbf{a}_4 &= [1; 2; 1; 0]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [-1; 4; 2; 2]^\top. \end{aligned}$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; -1; 3; 1]^\top + \alpha[-1; -2; 1; 0]^\top + \beta[2; -2; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{46}a_{51}a_{3k}a_{13}a_{24}a_{62}a_{7m}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 11

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [0; -6; 5; 2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [-1; -1; 0; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1; 7; -5; -1]^\top, \\ \mathbf{a}_4 &= [1; -2; 3; 2]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [2; -7; 8; 5]^\top. \end{aligned}$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[3; 1; 1; -1]^\top + \alpha[-2; -1; 1; 0]^\top + \beta[-2; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{42}a_{3k}a_{26}a_{1m}a_{61}a_{75}a_{53}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 12

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 4, \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [1; -2; -1; 2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [-1; 2; 1; -1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [-1; 2; 1; -3]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [-3; 5; 3; -3]^\top, \quad \mathbf{a}_5 = [5; -9; -5; 6]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[1; 0; 1; 0]^\top + \alpha[-1; 2; 1; 0]^\top + \beta[-1; -1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 9 & -9 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{57}a_{2k}a_{43}a_{14}a_{3m}a_{72}a_{66}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 13

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [1; 0; -3; 2]^\top, \mathbf{a}_2 = [0; 1; -1; 1]^\top, \mathbf{a}_3 = [-1; 2; 1; 0]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [-2; -3; 8; -6]^\top, \mathbf{a}_5 = [-3; -2; 10; -7]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[-1; 1; -1; 1]^\top + \alpha[-2; -1; 1; 0]^\top + \beta[-1; 1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 9 & 6 & 7 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{32}a_{41}a_{2k}a_{15}a_{6m}a_{73}a_{56}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 14

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [0; 1; 0; 2]^\top, \mathbf{a}_2 = [-2; 4; -4; 5]^\top, \mathbf{a}_3 = [-4; 6; -8; 6]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [1; -3; 3; -5]^\top, \mathbf{a}_5 = [-3; 8; -7; 12]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[-1; 1; 1; 2]^\top + \alpha[-1; -2; 1; 0]^\top + \beta[1; 1; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 7 & 14 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{63}a_{4k}a_{36}a_{2m}a_{11}a_{74}a_{55}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 3 (сдать к 10 декабря)
Вариант 15

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.
2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

4. Найти какой-нибудь базис системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ и все остальные векторы выразить через него для

$$\mathbf{a}_1 = [-6; 1; -3; -3]^\top, \mathbf{a}_2 = [-4; 1; -1; -2]^\top, \mathbf{a}_3 = [8; -1; 5; 4]^\top, \\ \mathbf{a}_4 = [-2; -1; -2; -2]^\top, \mathbf{a}_5 = [0; -1; 0; -1]^\top.$$

5. Найти систему линейных уравнений, решения которой — элементы линейного многообразия

$$\{[-1; 0; 2; 1]^\top + \alpha[1; 2; 1; 0]^\top + \beta[-2; -2; 0; 1]^\top\}.$$

6. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

8. Найти значения m и k , при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{23}a_{54}a_{1k}a_{71}a_{4m}a_{66}a_{32}$$

со знаком минус.

9. Для всех $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

- 10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нём присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.