

Вопросы к экзамену по линейной алгебре в весеннем семестре 2017 – 2018 уч.г.

для студентов I курса ФФ НГУ

1. Абстрактное векторное пространство—определение, примеры.
2. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Определение, примеры. Теорема о линейно зависимых системах векторов. Теорема о количестве векторов в двух системах векторов.
3. Эквивалентные системы векторов. Размерность и базис векторного пространства. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса.
4. Координаты вектора. Переход к другому базису. Матрица перехода, ее невырожденность. Координаты вектора в другом базисе. Связь между координатами вектора в разных базисах. Пример—поворот прямоугольной системы координат на плоскости.
5. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.
6. Сумма и пересечение подпространств—определение, теорема о том, что сумма и пересечение также являются подпространствами. Формула размерностей Грассмана.
7. Прямая сумма подпространств. Критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство.
8. Линейные отображения. Определение, примеры, свойства. Теорема о существовании линейного отображения, переводящего один базис в другой.
9. Матрица линейного отображения. Определение, примеры. Теорема о взаимно-однозначном соответствии между линейными отображениями и матрицами.
10. Координаты образа вектора при линейном отображении.
11. Матрица линейного отображения в разных базисах.
12. Ядро и образ линейного отображения, их свойства. Теорема о размерности ядра и образа.
13. Произведение линейных отображений. Определение, теорема о произведении матриц линейных отображений.
14. Линейное пространство линейных операторов.
15. Линейные формы. Двойственное пространство. Изменение коэффициентов линейной формы при смене базиса.
16. Собственные значения и собственные векторы, собственное подпространство. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям.
17. Характеристический многочлен линейного оператора. Выражение коэффициентов характеристического многочлена через главные миноры матрицы линейного оператора. Характеристические многочлены подобных матриц. Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).
18. Инвариантные подпространства, примеры инвариантных подпространств. Инвариантные подпространства и существование базиса, в котором матрица линейного оператора имеет квазиреугольную форму. Прямая сумма инвариантных подпространств и клеточно-диагональный вид матрицы линейного оператора.
19. Диагонализуемость линейного оператора. Примеры недиагонализуемых операторов. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений. Критерий диагонализуемости линейного оператора.
20. Корневые векторы, корневые подпространства. Теорема о расщеплении линейного оператора (без доказательства).
21. Жорданова клетка. Собственные и присоединенные вектора. Жорданов блок.
22. Теорема о жордановой форме (без доказательства)
23. Функции от матриц. Матричная экспонента.
24. Евклидово пространство, определение скалярного произведения. Примеры евклидовых пространств.

25. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника. Примеры неравенств, получаемых из неравенства Коши–Буняковского.
26. Ортогональные векторы, определение. Теорема Пифагора. Длины векторов и углы в евклидовом пространстве.
27. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
28. Теорема о существовании ортогонального базиса в евклидовом пространстве.
29. Матрица Грама–определение, свойства. Выражение скалярного произведения через матрицу Грама.
30. Связь матриц Грама разных базисов. Определитель матрицы Грама.
31. Изометрический изоморфизм евклидовых пространств одной размерности.
32. Ортогональное дополнение к подпространству. Теорема о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
33. Расстояние от вектора до подпространства. Нахождение ортогональной проекции вектора на подпространство.
34. Единичный куб и параллелепипед. Основание параллелепипеда. Неориентированный объем параллелепипеда. Ориентированный объем параллелепипеда. Искажение объема при линейных отображениях.
35. Сопряженный оператор–определение, примеры, свойства. Теорема о существовании сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения.
36. Ядра и образы операторов A и A^* , связь между ними.
37. Альтернатива Фредгольма.
38. Унитарные операторы, изометричные операторы. Критерии унитарности.
39. Лемма о собственных значениях унитарного оператора. Лемма об инвариантности ортогонального дополнения.
40. Теорема о каноническом виде матрицы унитарного оператора.
41. Матрицы ортогонального оператора размерностей 1 и 2.
42. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора.
43. Геометрическая формулировка теоремы о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Теорема Эйлера.
44. Самосопряженный оператор–определение, примеры. Критерий самосопряженности.
45. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора.
46. Приведение квадратичных форм к главным осям.
47. Приведение пары форм к диагональному виду. Пример из механики.
48. Положительные операторы, критерии положительности оператора. Корень из оператора.
49. Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение.
50. Полярное разложение.
51. Индексные обозначения. Объекты. Операции над объектами. Симметричные и антисимметричные объекты.
52. Символы Кронекера и Леви–Чивиты. Определитель матрицы в индексных обозначениях.
53. Тензоры в линейном пространстве. Примеры–вектор и линейный функционал.
54. Тензоры в линейном пространстве. Примеры–линейное отображение и билинейная форма.

Список литературы:

- [1] *Александров В. А.* Тензоры для физика–первокурсника.
- [2] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.
- [3] *Ильин В. А., Ким Г.Д* Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
- [4] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра.
- [5] *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия.
- [6] *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
- [7] *Ульянов А. П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии. Части II и III.
- [8] *Долгунцева И. А., Ульянов А. П.* Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре.

Лектор — Кудрявцева Наталья Анатольевна.

24 мая 2018 г.