

Вопросы к экзамену по линейной алгебре в осеннем семестре 2018 – 2019 уч.г.

для студентов I курса ФФ НГУ

1. Матрицы—определение, виды матриц. Действия с матрицами—сравнение, сложение, умножение на число. Умножение матриц. Транспонирование.
2. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков, теорема о разложении по строке или столбцу. Формулы Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
3. Геометрический вектор как направленный отрезок. Длина вектора. Нулевой вектор. Операции с направленными отрезками: сравнение, сложение и умножение на число.
4. Определение множества векторов, свободный вектор. Свойства линейных операций с векторами.
5. Коллинеарные и компланарные векторы. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Теоремы о линейно зависимых векторах.
6. Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Существование и единственность разложения вектора по базису. Определение ортогонального и ортонормированного базиса.
7. Координатное представление векторов. Действия с векторами в координатном представлении. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатном представлении.
8. Общая декартова система координат. Прямоугольная система координат. Радиус—вектор и координаты точки. Направляющие косинусы.
9. Скалярное произведение. Свойства скалярного произведения. Представление скалярного произведения в координатах. Выражение длины и угла между векторами через скалярное произведение.
10. Ортогональная проекция точки на прямую. Ортогональная проекция вектора на ось и ее свойства.
11. Левая и правая тройки векторов. Векторное произведение и его свойства.
12. Геометрическое построение векторного произведения. Координатное представление векторного произведения в ортонормированном базисе.
13. Смешанное произведение тройки векторов. Свойства смешанного произведения.
14. Координатное представление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Двойное векторное произведение. Тождество Лагранжа. Тождество Якоби.
15. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Матрица перехода. Формулы перехода. Поворот на плоскости в прямоугольной системе координат.
16. Векторное и общее уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости.
17. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.

18. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая как пересечение двух плоскостей.
19. Взаимное расположение плоскостей. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
20. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между прямой и плоскостью.
21. Расстояние между прямыми. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.
22. Кривые второго порядка как конические сечения. Полярная система координат. Полярные уравнения кривых второго порядка: эллипса, гиперболы, параболы. Фокусы и директрисы, эксцентриситет.
23. Эллипс–каноническое уравнение, фокальное свойство эллипса, директориальное свойство эллипса.
24. Касательная к эллипсу, оптическое свойство эллипса.
25. Гипербола–каноническое уравнение, фокальное свойство. Касательная к гиперболе, оптическое свойство.
26. Парабола–каноническое уравнение, фокальное свойство. Касательная к параболе, оптическое свойство параболы.
27. Кривые второго порядка. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
28. Комплексные числа–определение, операции над комплексными числами.
29. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Неравенство треугольника.
30. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Эйлера, формула Муавра.
31. Извлечение корня из комплексного числа.
32. Кольца и поля–определение, примеры.
33. Многочлены от одной переменной, кольцо многочленов. Деление многочленов. Теорема Безу.
34. Корни многочлена. Число корней многочлена. Основная теорема алгебры.
35. Формулы Виета .
36. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
37. Системы линейных уравнений.Примеры совместных и несовместных систем.
38. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Ступенчатые матрицы.Зависимость количества решений от количества ненулевых строк ступенчатой матрицы и расширенной матрицы. Свободные и базисные переменные.
39. Векторные пространства строк и столбцов. Линейные комбинации. Линейная оболочка.
40. Линейная зависимость и независимость строк и столбцов. Критерий линейной зависимости.

41. Определение базиса пространства строк(столбцов). Теорема о количестве векторов в базисе и линейно независимой системе векторов. Теорема о существовании базиса. Размерность пространства строк(столбцов). Теорема о дополнении до базиса.
42. Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о равенстве ранга по строкам и по столбцам.
43. Теорема Кронекера–Капелли.
44. Однородная система линейных уравнений. Размерность пространства решений.
45. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Решения неоднородной системы.
46. Подстановки и перестановки. Определение определителя.
47. Свойства определителя 1–6.
48. Теорема Лапласа о разложении определителя по строке или по столбцу.
49. Свойства 8-10 определителя(определитель верхнетреугольной матрицы, определитель матрицы с углом нулей).
50. Теорема об определителе произведения матриц.
51. Обратная матрица—определения и свойства. Присоединенная матрица. Нахождение обратной матрицы через присоединенную.
52. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных матриц.
53. Решение матричных уравнений. Формулы Крамера. Ранг матрицы по минорам.
54. Квадратичные формы—определение, матричная запись, ранг квадратичной формы. Преобразование квадратичных форм при переходе к другому базису. Канонический вид. Метод Лагранжа.
55. Закон инерции квадратичных форм.
56. Положительная определенность квадратичных форм, критерий Сильвестра.
57. Поверхности второго порядка: вид и канонические уравнения.

Список литературы:

- [1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.
- [2] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть I.
- [3] *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
- [4] *Ульянов А. П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии.
- [5] *Долгунцева И. А., Ульянов А. П.* Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре.

Лектор — Кудрявцева Наталья Анатольевна.

29 декабря 2018 г.