19.12.17

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением.

[5.1] Линейное пространство

Опр. Непустое мн-во L назыв. линейным (векторным) пространством, если оно удовлетв. след. условиям:

[1)] В L введена операция сложения любых двух элементов мн-ва L, которые назыв. векторами, и эта операция обладает след. св-вами:

[1.] Коммутативность

$$\forall x, y \in L \quad x+y=y+x$$

[2.] Ассоциативность

$$\forall x, y, z \in L \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$

[3.] Существование нуля

$$\exists 0 \in L \quad \forall x \in L \quad 0+x=x$$

[4.] Существование обратного элемента

$$\forall x \in L \quad \exists (-x) \quad x+(-x)=0$$

В L введена операция сложения, которая превращает L в абелеву группу.

[2)] В L введена операция умножения вектора на число (вещественное или комплексное) и эта операция обладает след. св-вами:

[5.] $\forall \alpha, \beta$ - числа $\quad \forall x \in L \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

[6.] $\forall x \in L \quad 1 \cdot x = x$

[7.] $\forall \alpha, \beta$ - числа $\quad \forall x \in L \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

[8.] $\forall \alpha$ - число $\quad \forall x, y \in L \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Примеры

[1)] $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ – линейные пространства

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid \forall k = 1, \dots, n \quad x_k \in \mathbb{R} \}$$

Если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, то

$$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

[2)] $$l_2 = \{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \forall k \ x_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \}$$

бесконечная последов.

Сложение и умножение определяются покомпонентно.

Нужно убедиться, что $\forall x, y \in l_2$ и $\forall \alpha$ - число $x+y \in l_2$ и $\alpha x \in l_2$

$$\forall k \quad |x_k + y_k|^2 \le (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + \underbrace{2|x_k| \cdot |y_k|}_{\le |x_k|^2 + |y_k|^2} + |y_k|^2 \le$$

$$\le 2|x_k|^2 + 2|y_k|^2$$

Значит $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \le 2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \in l_2$

[3)] $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ - непрерывна} \}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

[4)] $S(\mathbb{R}^n)$ - мн-во быстроубыв. ф-ций в $\mathbb{R}^n$

Сложение и умножение определяется точно также.

Опр.

Конечный набор векторов $x, y, \dots, z \in L$ назыв. линейно-зависимым, если $\exists \alpha, \beta, \dots, \gamma$ - числа не все равные нулю, такие что $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$. В противном случае система векторов назыв. линейно-независим.

[Другими словами:]

Конечная сист. векторов $x, y, \dots, z \in L$ назыв. лин.-независ., если из $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$ вытекает $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$

Опр.

Бесконечный набор векторов назыв. линейно-незав., если лин.-независ. явл. любое его конечное подмн-во.

Опр. Говорят, что L имеет конечную размерность (обоз. $\dim L = n$), если в L $\exists n$ лин.-независ. векторов и всякие $(n+1)$ векторов из L явл. лин.-зависим.

Опр. Говорят, что L имеет размерность бесконечность или L явл. бесконечномерным (обоз. $\dim L = \infty$), если $\forall n \in N$ в L $\exists$ мн-во n лин.-незав. векторов.

Примеры

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$ и $\dim l_2 = \dim C[a,b] = \dim S(\mathbb{R}^n) = \infty$

Почему $\dim l_2 = \infty$?

Рассмотрим в l_2 векторы $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ое} \\ \text{место}}}{1}, 0, \ldots, 0, \ldots)$

Проверим, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - лин.-независ.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - числа, что да $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) =$
$= 0 = (0, \ldots, 0)$

Тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ ▨

Опр. Говорят, что $L' \subset L$ явл. подлин-вом в L, если L' явл. лин. простр. относит. тех же операций слож. векторов и умнож. вектора на число, котор. определ. в L, т.е. если $\forall x, y \in L'$ и $\forall \alpha$ - число $x + y \in L'$ и $\alpha x \in L'$

Пример

В любом лин. пр-ве L есть два тривиальных подпр-ва: $\{0\}$ и L.

Менее тривиал. пример - совокупность всех многочленов в $C[a, b]$.

5.2 Нормированные линейные пространства

Опр.

Нормой (длиной вектора) в лин. пр-ве L называв. отображение $\|\cdot\| : L \to [0, +\infty)$, которые облад. след. св-вами:

[1)] Положительная определенность нормы

$\forall x \in L \quad \|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

[2)] Неравенство треугольника

$\forall x, y \in L \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

[3)] Положительная однородность нормы

$\forall x \in L \quad \forall \alpha$ - число $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

Примеры

[1)] В $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ нормы можно задать любой из следующих формул:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \text{ - евклидова норма}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

[2)] В l_2 зададим норму формулой:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

[3)] В $C[a,b]$ зададим норму формулой:

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

[4)] В $S(\mathbb{R}^n)$ зададим норму формулой

$$\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \quad \text{или} \quad \|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx}$$

Опр. Говорят, что последов. векторов $x_1, \dots, x_n, \dots$ из лин. нормир. пр-ва L сх-ся к вектору $x \in L$, если $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

[Другими словами:]
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Обоз.: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ или $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Опр.

Пусть $M \subset L$.
Говорят, что x явл. предельной точкой мн-ва M, если $\exists$ последов. точек $x_1, \dots, x_n, \dots$ мн-ва M, т.ч. $\forall n \quad x_n \neq x$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Опр. Замыканием мн-ва M называ. объединение M и мн-ва всех предельных точек M.
Обоз.: $cl(M)$ или $\overline{M}$

Опр.

Говорят, что мн-во M явл. замкнутым, если $M = cl(M)$

Опр. Мн-во $M \subset L$ называ. плотным, если $cl(M) = L$

Пример

Мн-во рацион. чисел $\mathbb{Q}$ явл. плотным подмножеством в $\mathbb{R}$

Опр. Говорят, что нормир. лин. пр-во L явл. сепарабельным, если в L существ. счетное плотное подмн-во.

Пример

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ – сепарабельны; l_2 – сепарабельное; $C[a, b]$ – тоже
$S(\mathbb{R}^n)$ – сепараб.

Замечание

Всякое конечномерное подпр-во замкнуто

Пример незамкн. подпр-ва

$L = C[0, 2\pi]$, $M = \{$ все мн-ны $\}$

Убедимся, что M - незамкн. подпр-во.

Пусть $f(x) = \sin x \in L$

По ф-ле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\xi \in [0, \ ] \colon [0, 2\pi]$

Тогда $$\|f - P_n\| = \max_{\xi, x \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

т.к. $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall a > 0.$

Значит M - незамкнуто ▨