# Избранные задачи по математическому анализу

Учебно-методическое пособие

Козлов Геннадий Тимофеевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ФФ НГУ

# Предисловие

Одной из актуальных задач университета, как известно, является усиление и улучшение самостоятельной работы студентов. Я придумал алгоритм для решения этой задачи. Он состоит в публикации методических пособий по данному курсу, в котором содержатся избранные задачи вместе с решениями. Студент листает такую методичку, встречает там интересную для себя задачу, старается решить, решает, если сможет, либо после неудачной попытки с интересом (как же, всё-таки она решается?) разбирает опубликованное доказательство. Тем самым студент совершает **акт абсолютно самостоятельной работы**, что и доказывает правильность алгоритма.

В настоящем пособии содержится набор полезных задач с решениями для студентов первого семестра первого курса ФФ. Это пособие — моя первая (экспериментальная) работа по применению указанного алгоритма.

**1** (Теорема Кантора)**.** *Пусть* $A = \{\ldots, a_\alpha, \ldots\}$ *— множество элементов* $a_\alpha$ *и* $\mathcal{P}(A) = \{\ldots, A_\alpha, \ldots\}$ *— множество всех подмножеств* $A_\alpha$ *множества* $A$*. Теорема Кантора утверждает, что не существует взаимно-однозначного соответствия между множествами* $A$ *и* $\mathcal{P}(A)$*.*

*Доказательство.* Для конечных множеств это очевидно: если $A$ содержит $n$ элементов, то $\mathcal{P}(A)$ содержит $2^n$ элементов, $2^n > n$. Даже если $A$ — пустое множество, т. е. в нём нет элементов, то $\mathcal{P}(A)$ содержит один элемент — пустое множество.

Предположим, что для какого-то множества $A$ и множества $\mathcal{P}(A)$ нам удалось построить взаимно-однозначное отображение

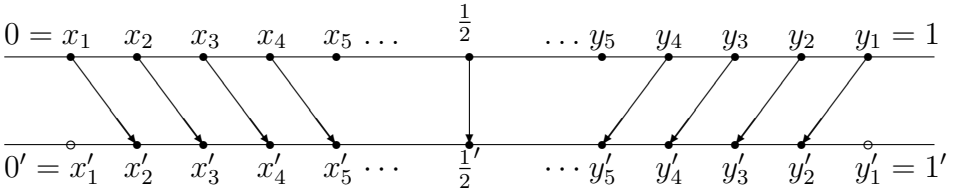
$$\varphi\colon a_\alpha \to A_\alpha \quad (a_\alpha \in A,\ A_\alpha \in \mathcal{P}(A)).$$

Назовём элемент $a_\alpha$ *хорошим*, если он сам лежит в множестве $A_\alpha$ ($a_\alpha \in A_\alpha$), и назовём $a_\alpha$ *плохим* в противном случае (т. е. $a_\alpha \notin A_\alpha$). Таким образом, все элементы из $A$ становятся либо хорошими, либо плохими (если существует отображение $\varphi$). Обозначим через $B$ множество всех плохих элементов из $A$. Ясно, что $B \subset A$ и по нашей гипотезе существует элемент $b \in A$ такой, что $\varphi(b) = B$.

Спрашивается: элемент $b$ хороший или плохой? Хорошим он быть не может, так как в этом случае $b \in B$, а в $B$ собраны все плохие элементы и только они. Но и плохим $b$ не может быть, так как в этом случае $b \in B$ (ведь в $B$ собраны все плохие элементы) и, значит, $b$ хороший. Получили противоречие ($b$ не хороший и не плохой), следовательно, наше предположение о том, что существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon A \to \mathcal{P}(A)$ является ложным. Теорема доказана.

**2.** *Построить взаимно-однозначное отображение отрезка* $[0, 1]$ *на интервал* $(0, 1)$*.*

*Решение.* Нарисуем две прямые, на первой разместим отрезок $[0, 1]$, на второй — интервал $(0, 1)$. Если число $x$ расположено на первой прямой, то равное ему число, расположенное на второй прямой, будем обозначать $x'$.



На этом рисунке последовательность $\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\}$ строго возрастает, а последовательность $\{y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots\}$ строго убывает, причём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

Взаимно-однозначное отображение $\varphi\colon [0,1] \to (0,1)$ определим следующим образом:

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)';$$

$$\forall k, m\, \varphi(x_k) = x'_{k+1},\, \varphi(y_m) = y'_{m+1};$$

на интервалах $(x_k, x_{k+1})$, $(y_{m+1}, y_m)$ $\varphi$ определяется как тождественное отображение, т. е.

$$\forall x \in (x_k, x_{k+1})\, \varphi(x) = x', \quad \forall y \in (y_{m+1}, y_m)\, \varphi(y) = y',$$

при этом $x' \in (x'_k, x'_{k+1})$, $y' \in (y'_{m+1}, y'_m)$.

Отображение $\varphi$ построено.

**3.** *Докажите, что никаким способом нельзя отобразить натуральный ряд* $\mathbb{N}$ *на всю числовую прямую* $\mathbb{R}$.

*Решение.* Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ назовём *$\varepsilon$-окрестностью* точки $a$ множество $\mathrm{B}_\varepsilon(a)$, определяемое следующим образом

$$\mathrm{B}_\varepsilon(a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

`Некто` заявил нам, что ему удалось отобразить натуральный ряд $\mathbb{N}$ на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ с помощью некоторой функции $\varphi$, так что

$$\mathbb{R} = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Но мы не поверим `Некту`, так как помним о существовании бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2^2},\, \ldots,\, \frac{1}{2^n},\, \ldots\}$ со знаменателем $\frac{1}{2}$, сумма которой, как известно, равна числу 2. Заботливо укроем каждое число $\varphi(n)$ $\varepsilon$-одеялом, точнее $\varepsilon$-окрестностью $\mathrm{B}_{\frac{1}{2^n}}(\varphi(n))$. Увы суммарная длина всех $\varepsilon$-одеял, даже если они не пересекаются, равна числу 2. Так что для любой функции $\varphi$ множество $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ — очень малая часть прямой $\mathbb{R}$.

**4.** *Докажите, что для всякого натурального $n$ число $a_n = 5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ нацело делится на* 19.

*Решение.* Заметим, что

$$a_0 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 = 19,$$

$$a_1 = 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 3^3 = (10+9)(2^3 + x) = 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^3 + 10 \cdot x + 9 \cdot x =$$
$$= 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^3 + 19 \cdot x = 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 3^3, \text{ значит } x = \frac{9(3^3 - 2^3)}{19} = 9,$$

т. е. $a_1 = 10 \cdot 2^3 + 9 \cdot 3^3 = 19 \cdot (8+9) = 19 \cdot 17$.

Применим этот подход для любого $n$:

$$a_n = 10 \cdot 2^{3n} + 9 \cdot 3^{3n} = (10+9)(2^{3n} + x) = 10 \cdot 2^{3n} + 9 \cdot 2^{3n} + 19 \cdot x =$$
$$= 10 \cdot 2^3 n + 9 \cdot 3^{3n}, \text{ значит } x = \frac{9(3^{3n} - 2^{3n})}{19}.$$

Осталось доказать, что $\forall n$ $(3^{3n} - 2^{3n})$ делится на 19. Напомним формулу:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}).$$

Тогда

$$3^{3n} - 2^{3n} = \left(3^3\right)^n - \left(2^3\right)^n = 19 \cdot \left(\left(3^3\right)^{n-1} + \left(3^3\right)^{n-2} \cdot 2 + \cdots + \left(2^3\right)^{n-1}\right),$$

что и требовалось доказать.

**5.** *Докажите таким же способом, что для любого натурального $n$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ кратно* 133.

**6.** *Докажите, что при любом натуральном $n$ число $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ делится на* 11.

*Решение.* Вычислим остатки от деления степеней чисел 3, 4, 5 на 11:

$$5^0 \equiv 1(11),\ 5^1 \equiv 5(11),\ 5^2 \equiv 3(11),\ 5^3 \equiv 4(11),\ 5^4 \equiv 9(11),\ 5^5 \equiv 1(11);$$

$$4^0 \equiv 1(11),\ 4^1 \equiv 4(11),\ 4^2 \equiv 5(11),\ 4^3 \equiv 9(11),\ 4^4 \equiv 3(11),\ 4^5 \equiv 1(11);$$

$$3^0 \equiv 1(11),\ 3^1 \equiv 3(11),\ 3^2 \equiv 9(11),\ 3^3 \equiv 5(11),\ 3^4 \equiv 4(11),\ 3^5 \equiv 1(11).$$

Видим, что числа $5^{5n}$, $4^{5n}$, $3^{5n}$ при делении на 11 дают в остатке единицу, поэтому остаток от деления числа $5^{5n+1} + 4^{5n+2} + 3^{5n}$ равен остатку от деления числа $5^1 + 4^2 + 3^0$ на 11, и этот остаток равен 0 $(5 + 16 + 1 = 22)$.

Используя написанную выше таблицу сравнений, можно найти ещё 14 выражений типа $5^{5n+\alpha} + 4^{5n+\beta} + 3^{5n+\gamma}$, делящихся на 11.

**7.** *Докажите формулу*

$$f(n) = 3 + 33 + 333 + \cdots + 333\ldots33 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}. \qquad (*)$$

*Решение (по индукции).* Для $n = 1$ формула $(*)$ верна:

$$\frac{100 - 9 - 20}{27} = \frac{81}{27} = 3.$$

Пусть формула $(*)$ верна для $n$, тогда докажем её для $n + 1$.

$$f(n+1) = f(n) \cdot 10 + 3(n+1) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} \cdot 10 + 3(n+1) =$$
$$= \frac{10^{n+2} - 90n - 100 + 81(n+1)}{27} = \frac{10^{n+2} - 9(n+1) - 10}{27},$$

что и требовалось доказать.

**8.** *Для каждого натурального $n$ докажите неравенство*

$$g(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1. \qquad (*)$$

*Решение (по индукции).* Для $n = 1$ неравенство $(*)$ верно:

$$g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Пусть неравенство $(*)$ доказано для $n$. Докажем тогда, что

$$g(n+1) = \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > g(n) > 1.$$

Действительно,

$$g(n+1) - g(n) = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 0,$$

так как для любого $k > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k(k^2-1)} > 0.$$

**9.** *Пусть*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

*Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

*Решение.* Требуемое легко вытекает из задачи 8. Действительно, начиная с любого $k$ сумма

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1,$$

и пусть $3k+1 = m$, тогда

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{3m+1} > 1,$$

обозначим $3m+1 = l$

$$\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{3l+1} > 1,$$

и т. д.

Можно повторять этот процесс сколько угодно раз и сумма таких кусочков-частичных сумм вида $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ превысит любое наперёд заданное число.

**10.** *В дополнение к задаче 9 докажите такое утверждение:*
*Для любого натурального* $n > 1$ *сумма*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

*не является натуральным числом.*

*Решение.* Пусть $2^k \cdot a$ тот из знаменателей, который делится на наибольшую степень двойки ($a$ — нечётное число). Тогда $a = 1$, поскольку, если бы среди знаменателей (от числа 2 до числа $n$) содержалось большее кратное числа $2^k$, то нечётный коэффициент $a$ был бы больше 2, а это бы означало, что среди знаменателей содержится число $2^{k+1}$, что противоречит максимальности числа $k$.

Следовательно, наименьший общий знаменатель всех дробей из $S_n$ имеет вид $2^k \cdot b$, где $b$ — нечётное число. После приведения к наименьшему общему знаменателю числитель каждой дроби, за исключением $\frac{1}{2^k} = \frac{b}{2^k \cdot b}$ станет чётным. Таким образом, сумма всех числителей после приведения к наименьшему общему знаменателю нечётна и не делится на знаменатель, равный $2^k \cdot b$. Значит сумма $S_n$ никогда не может быть натуральным числом, что и требовалось доказать.

**11.** *Докажите, что при любом натуральном $n$ выражение*

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

*принимает значения, меньшие* 2.

*Решение.* Рассмотрим числовую последовательность, определённую соотношениями

$$a_0 = 2,\ a_k = a_{k-1}^2 - k \text{ при } k \geqslant 1. \tag{1}$$

Докажем, что для любого $k$

$$a_k > k. \tag{2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что неравенство (2) выполняется для $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$. Предположим, что $a_k > k$ для некоторого $k \geqslant 3$. Тогда, в силу определяющих соотношений (1)

$$a_{k+1} = a_k^2 - (k+1) > k^2 - (k+1) = k^2 - k - 1.$$

Поскольку $k \geqslant 3$

$$k^2 - k - 1 > k + 1,$$

(парабола $k^2 - 2k - 2$ имеет корни $1 \pm \sqrt{3}$ меньшие 3) то $a_{k+1} > k + 1$, т. е. неравенство (2) доказано. Из него вытекает, что

$$a_k > 0 \text{ для } k \geqslant 0. \tag{3}$$

Из определяющих соотношений (1) и неравенства (3) получаем последовательную цепочку неравенств

$$a_0 > 0,$$

$$a_1 = a_0^2 - 1 > 0,$$
$$a_2 = (a_0^2 - 1)^2 - 2 > 0,$$
$$a_3 = \big((a_0^2 - 1)^2 - 2\big)^2 - 3 > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разрешая их относительно $a_0$, получаем

$$a_0 > 0,$$

$$a_0 > 1,$$
$$a_0 > \sqrt{1+\sqrt{2}},$$
$$a_0 > \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вообще, для любого натурального $n$

$$a_0 = 2 > \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}},$$

задача решена.

**12.** *На плоскости проведено $n$ прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые?*

*Решение.* Число частей, на которые разбивают плоскость $n$ проведённых прямых, обозначим $f(n)$. Поскольку для небольших $n$ вычисления не сложны, выпишем их результаты в таблицу

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 | ... |
| $C_n^2$ | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... |

где $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — число сочетаний из $n$ по 2.

Из рассмотрения таблицы возникают две гипотезы:

1) $f(n) = f(n-1) + n$,

2) $f(n) = C_{n+1}^2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$,

которые хорошо согласованы, потому что, если $f(n-1) = C_n^2 + 1$, то

$$f(n) = f(n-1) + n = \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Поэтому будем доказывать такое предложение:
Для любого натурального $n$ $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$. Оно проверено для малых $n$, и будем считать, что оно истинно для $n-1$. Проведём на плоскости $n$-ую прямую, которая пересечётся с ранее проведёнными прямыми в точках $A_1$, $A_2$, …, $A_{n-1}$:

Эти точки разделяют прямую на $n$ отрезков, каждый из которых делит на две части ту часть плоскости, которая образовалась на $(n-1)$-ом шаге. Общее число частей нового разбиения увеличилось на $n$,

$$f(n) = f(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

**13.** *Соединяем поочерёдно середины сторон выпуклого четырёхугольника. Мы получим меньший четырёхугольник. Докажите, что он является параллелограммом, площадь которого равна половине площади большого четырёхугольника.*

*Решение.* Меньший четырёхугольник является параллелограммом, так как его стороны попарно параллельны диагоналям первоначального четырёхугольника. Эти диагонали делят большой четырёхугольник на четыре треугольника, а малый — на четыре параллелограмма. Каждый из этих параллелограммов имеет площадь вдвое меньшую площади соответствующего треугольника, следовательно, площадь меньшего четырёхугольника равна половине площади большого четырёхугольника. Сделайте чертёж и решение станет очевидным.

**14.** *Дан произвольный треугольник. На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники. Их центры служат вершинами треугольника $\mathcal{A}$. Центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника внутрь его, служат вершинами другого треугольника $\mathcal{B}$. Докажите, что треугольники $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — равносторонние, а разность площадей треугольников $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна площади исходного треугольника.*

*Комментарий.* Я давно слышал об этой задаче. Мой собеседник, от которого я узнал о ней, утверждал, что задача эта принадлежит французскому императору Наполеону. Мне известно решение этой задачи с использованием теории комплексных чисел. Если вы не сможете решить её элементарными средствами, то пусть условие задачи послужит для вас стимулом для изучения теории комплексных чисел.

**15.** *На плоскости даны $n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что в этом случае всегда можно найти замкнутый $n$-угольник с непересекающимися сторонами, вершинами которого являются эти точки.*

*Комментарий.* Для решения этой задачи я хочу предоставить вам полную свободу, здесь огромное поле для наблюдений, для деятельности. Вы можете рисовать на плоскости как угодно много точек и приобрести основательный опыт в построении требуемого $n$-угольника и в конце концов родить ваше собственное, выстраданное и очевидное решение этой задачи, очевидное для вас и приемлемое для нас.

**16.** *Докажите неравенство Бернулли*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

*где $x > -1$, $n$ — любое натуральное число.*

*Решение.* Докажем неравенство Бернулли в более общей формулировке:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\dots\cdot(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots x_n,$$

где числа $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ — одного знака и большие $-1$.

Для $n=1$ неравенство верно: $1+x_1 \geqslant 1+x_1$. Пусть оно верно для $n$. Докажем его для $n+1$. Умножим обе части неравенства для $n$ на

$(1+x_{n+1})$, где $x_{n+1} > -1$ и знак $x_{n+1}$ совпадает со знаком чисел $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$. Тогда

$$(1+x_1)\cdot\dots\cdot(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\cdots x_n)\cdot(1+x_{n+1}) =$$
$$= 1+x_1+x_2+\cdots x_n+x_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} > 1+x_1+x_2+\cdots x_n+x_{n+1},$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{n+1} > 0$ (все $x_j$ одного знака).

**17.** *Даны две последовательности* $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *и* $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Докажите, что* $x_n$ *монотонно возрастает,* $y_n$ *монотонно убывает,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e,$$

*и для любого натурального* $n$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

*где символом* $\ln(a)$ *обозначается логарифм числа* $a > 0$ *по основанию* $e$ *(*$e \approx 2,718\ldots$*).*

*Решение.* С помощью неравенства Бернулли докажем, что $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, $\dfrac{y_n}{y_{n+1}} > 1$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} >$$
$$> \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+2n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} >$$
$$> \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+3n+1}{n^2+n} > 1.$$

Далее, последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху любым числом $y_m$, последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу любым числом $x_l$, поэтому обе последовательности имеют пределы, покажем, что они равны. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Этот общий предел последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назвали числом $e$, в частности,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Из неравенств

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

путём их логарифмирования получаем неравенства

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

откуда следуют неравенства

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

задача решена.

**18.** *Пусть*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

*Докажите, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots.$$

*Примените это утверждение к ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

*Решение.* Пусть $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$. При $n < 2^k$ имеем

$$S_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

т. е. $S_n \leqslant t_k$.

При $n > 2^k$

$$S_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k,$$

т. е. $2S_n \geqslant t_k$, значит $S_n$ и $t_k$ обе ограничены или не ограничены одновременно, что и доказывает первое утверждение задачи.

Теперь докажем с помощью этого утверждения следующее предложение:

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$.

*Доказательство.* Если $p \leqslant 0$, то нарушается необходимый признак сходимости ряда ($\dfrac{1}{n^p}$ стремится не к 0, а к 1, либо к $\infty$). Пусть $p > 0$, тогда можно применить первое утверждение задачи и мы приходим к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)},$$

который является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $2^{(1-p)}$, которая сходится тогда и только тогда, когда $0 \leqslant 2^{(1-p)} < 1$, т. е. $1 - p < 0$, $p > 1$.

Мы уже знали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, теперь мы знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

Кстати, совсем нетрудно доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < 2$, если воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

**19.** *Докажите, что последовательность*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

*сходится.*

*Таким образом имеет место формула*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

*где* $C = 0.577216\dots$ *— так называемая постоянная Эйлера и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

*Решение.* Представим $n$ в виде произведения

$$n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Тогда

$$\ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

а $x_n$ запишется так:

$$x_n = \left(\frac{1}{1} - \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) + \cdots + \\ + \left(\frac{1}{n-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right) + \frac{1}{n}.$$

Вспомним неравенства

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k},$$

из которых вытекает, что

$$\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}.$$

Отсюда мы видим, что $x_n$ — возрастающая последовательность положительных чисел, ограниченная числом 2, задача решена.

Природа постоянной Эйлера $C$ до сих пор не ясна, алгебраическое это число или трансцендентное — никто не знает.

**20.** *Докажите теорему Штольца:*
*Если*

*а)* $y_{n+1} > y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$,

*б)* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

*в) существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$,

*то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$.

*Решение.* Нам понадобится следующая лемма:
Пусть $y, v > 0$, $\dfrac{x}{y} < \dfrac{u}{v}$, тогда $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+u}{y+v} < \dfrac{u}{v}$. (Действительно, $\dfrac{x}{y} < \dfrac{u}{v}$, значит $x \cdot v < u \cdot y$ (так как $y, v > 0$), тогда $x \cdot y + x \cdot v < y \cdot x + y \cdot u$ и $x \cdot v + u \cdot v < y \cdot u + v \cdot u$).

Теперь, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l < \infty$ (случай первый). Тогда по $\varepsilon > 0$ найдётся $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > m$

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{m+1} - x_m}{y_{m+1} - y_m}, \frac{x_{m+2} - x_{m+1}}{y_{m+2} - y_{m+1}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

и по нашей лемме

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} < l + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Выпишем легко проверяемое тождество Штольца:

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_m - l y_m}{y_n} + \left(1 - \frac{y_m}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - l\right),$$

устремим $n$ к бесконечности. Тогда из неравенства $(*)$ и условия $y_n \to \infty$ следует

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| \leqslant \left|\frac{x_m - l y_m}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассмотрим второй случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \infty$. Так как $y_{n+1} - y_n > 0$, то, начиная с некоторого номера $x_{n+1} - x_n > 0$, т. е. $x_n$ стремится к $\infty$ монотонно. Тогда доказанный первый случай теоремы Штольца можно применить к обратному отношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0\,(< \infty),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty,$$

теорема доказана.

**21.** *Наряду с последовательностью чисел $a_n$ рассмотрим среднее арифметическое $\sigma_n$ первых $n$ её элементов $\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Докажите*

*(1) если* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=l$,

*(2) если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

*Решение.* (1) вытекает из теоремы Штольца, если положим $y_n=n$, $x_n=\sigma_n\cdot n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Очевидно, условия теоремы Штольца при этом соблюдены

а) $y_{n+1}=n+1>n=y_n$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{1}=l$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=l.$$

(2) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}=S$, обозначим $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{i}$, $\alpha_n=\dfrac{a_n}{n}$, т. е. $a_n=n\cdot\alpha_n$, и тогда $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$.

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\frac{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n}{n}=\\&=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+(\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\cdots+(\alpha_n)}{n}=\\&=\frac{S_n+(S_n-S_1)+(S_n-S-2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})}{n}=\\&=\frac{n\cdot S_n}{n}-\frac{S_1+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

Так как $S_n \to S$, $\dfrac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n-1} \to S$ (в силу пункта (1)), $\dfrac{n-1}{n} \to 1$, то $\sigma_n \to S - S \cdot 1 = 0$.

**22.** *Постройте последовательность, имеющую точно три частичных предела* 1, 2, 3.

*Решение.* Пусть $a_k = 1 - \dfrac{1}{k}$ — красная, $b_k = 2 - \dfrac{1}{k}$ — белая, $c_k = 3 - \dfrac{1}{k}$ — синяя последовательности, а искомая разноцветная последовательность $\{x_n\}$ равна

$$\{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_k, b_k, c_k, \dots\}.$$

Тогда сходятся её одноцветные подпоследовательности:

$$x_{3(k-1)+1} = a_k \to 1,$$

$$x_{3(k-1)+2} = b_k \to 2,$$

$$x_{3(k-1)+3} = c_k \to 3,$$

значит числа 1, 2, 3 — частичные пределы последовательности $\{x_n\}$.

Докажем, что других частичных пределов последовательность $\{x_n\}$ не имеет. Действительно, пусть $\{x_{n_i}\}$ $(n_i < n_{i+1} < \cdots)$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Она не будет сходящейся, если любой её бесконечный «хвост» $\{x_{n_j}, x_{n_{j+1}}, \dots\}$ будет разноцветным — она будет сходиться только в том случае, если, начиная с некоторого места, её «хвост» становится одноцветным, т. е. либо красным, либо белым, либо синим, но тогда она сходится, соответственно, к 1, 2 или 3. Других частичных пределов последовательность $\{x_n\}$ не имеет.

**23.** *Постройте последовательность, множество частичных пределов которой равно* $\mathbb{R}$.

*Решение.* Каждое вещественное число можно рассматривать как предел последовательности рациональных чисел. Если оно само рациональное, например $\dfrac{2}{3}$, то последовательность $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dots$ вполне подходит. Если оно иррационально, как, например, $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$, то последовательность всех его рациональных приближений:

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.4142,\ \dots$$

сходится к $\sqrt{2}$. Таким образом, нам нужна последовательность рациональных чисел, в которой каждое рациональное число встречается бесконечное число раз. Тогда любая последовательность рациональных чисел (в частности, сходящаяся) будет её подпоследовательностью. Это можно сделать, например, так:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | $-\frac{3}{3}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{1}$ | 0 | $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | ... |
| ... | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{2}$ | $-\frac{2}{1}$ | 0 | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | ... |
| ... | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{1}$ | 0 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | ... |

△

начало

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | $x_{25}$ | $x_{24}$ | $x_{23}$ | $x_{22}$ | $x_{21}$ | $x_{20}$ | $x_{19}$ | ... |
| ... | $x_{26}$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{18}$ | ... |
| ... | $x_{27}$ | $x_8$ | $x_5$ | $x_4$ | $x_3$ | $x_{14}$ | $x_{17}$ | ... |
| ... | $x_{28}$ | $x_7$ | $x_6$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_{15}$ | $x_{16}$ | ... |

△

начало

Задача решена.

**24.** *Докажите, что функция Римана*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ взаимно просты,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$$

*разрывна при каждом рациональном значении $x$ и непрерывна при каждом иррациональном значении $x$.*

*Решение.* В любой окрестности рациональной точки $\frac{m}{n}$ ($f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$) найдётся иррациональная точка $\alpha$ ($f(\alpha) = 0$), следовательно, $f(x)$ разрывна в точке $\frac{m}{n}$. Чтобы доказать непрерывность функции $f(x)$ в иррациональной точке $\beta$, вспомним определение:
Если $f(\beta) = 0$, то $f(x)$ непрерывна в точке $\beta$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x$ если $|x - \beta| < \delta$, то $|f(x)| < \varepsilon$.

Выберем любое $\varepsilon > 0$, тогда существует натуральное число $n$, что

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}.$$

По этому $\varepsilon$ необходимо найти такое $\delta$, чтобы в $\delta$-окрестности точки $\beta$ не было рациональных чисел, в которых $f(x)$ принимала бы значения 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\ldots$, $\frac{1}{n}$.

Для каждого $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ укажем две рациональные точки $A_k$ и $B_k$, в которых $f(x)$ принимает значение $\frac{1}{k}$, причём $A_k$ — ближайшая из таких точек слева от $\beta$, $B_k$ — ближайшая из таких точек справа от $\beta$. Тогда слева от $\beta$ расположились точки $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, справа от $\beta$ — $B_1$, $B_2$, $\ldots$, $B_n$. Пусть из множества точек $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ближайшей к $\beta$ слева точкой будет $A_i$, а из множества $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ближайшей к $\beta$ справа будет $B_j$. Обозначим $\delta = \min\{|\beta - A_i|, |B_j - \beta|\}$. Тогда именно в $\delta$-окрестности точки $\beta$ нет рациональных точек, в которых $f(x)$ принимала бы значения 1, $\frac{1}{2}$, $\ldots$, $\frac{1}{n}$, значит, $\forall x$ если $|x - \beta| < \delta$, то $f(x) < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

**25.** *Левую и правую производные функции $f$ в точке $x_0$ определяют соотношениями*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Разумеется, эти определения имеют смысл лишь при условии, что множества $X$, на котором задана функция $f$, не только содержит точку $x_0$, но и сгущается в ней с соответствующей стороны.*

*Докажите, что всегда, какова бы ни была функция $f$, множество точек $x_0$, где её односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют, но различны, либо конечно, либо счётно.*

*Решение.* Не ограничивая общности, рассмотрим только тот случай, когда

$$\alpha = f'_-(x_0) < f'_+(x_0) = \beta.$$

Закодируем этот разрыв тройкой рациональных чисел $(\delta, l, r)$. Поскольку может случиться, что этой тройкой мы закодируем и другой разрыв, то мы сразу рассмотрим множество $\mathcal{Y}_{\delta,l,r}$ всех точек, закодированных по единому правилу:

$$\mathcal{Y}_{\delta,l,r} = \{x \in X \mid \forall s, t \text{ если } x - \delta \leqslant s < x < t \leqslant x + \delta, \text{ то}$$
$$\varphi(s) = \frac{f(x) - f(s)}{x - s} < l < r < \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \psi(t)\ \},$$

при этом $\alpha < l < r < \beta$, $\delta > 0$.

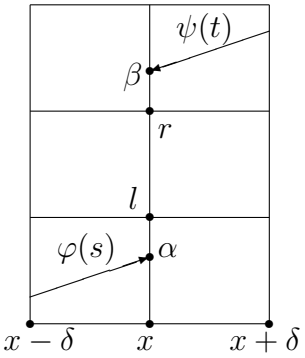



Рисунок хорошо иллюстрирует это правило. Из рисунка видно, что никакая точка $y \in \mathcal{Y}_{\delta,l,r}$ не может принадлежать $\delta$-окрестности точки $x$ (иначе возникает противоречие в неравенствах), но это означает что расстояние между соседними точками из множества $\mathcal{Y}_{\delta,l,r}$ не меньше, чем $\delta$, поэтому само множество $\mathcal{Y}_{\delta,l,r}$ не более, чем счётно. Поскольку множество троек рациональных чисел — счётное, а объединение счётного числа счётных множеств само счётно, то задача решена.

**26.** *Периодические функции $f(x)$ с периодом $F$ и $g(x)$ с периодом $G$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяют условию*

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - g(x)| = 0. \tag{1}$$

*Докажите, что для всех $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

*Решение.* Условие (1) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \text{ если } x > x_0, \text{ то } |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Т. е. это условие формулируется на $\varepsilon$-языке. Чтобы использовать условие (1) для доказательства условия (2), мы должны условие (2) также сформулировать на $\varepsilon$-языке. Это нетрудно.

**Лемма.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = g(x)$,
2. $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R}\, |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Лемма очевидна. И мы теперь заменим условие (2) задачи на второе условие из леммы.

Заметим, что периодичность функций $f$ и $g$ выражается правилом:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{R}\, f(x) = f(x + mF),\ g(x) = g(x + nG).$$

Итак, выберем любое $\varepsilon > 0$ и по условию (1) задачи пусть число $x_0 \in \mathbb{R}$ будет так велико, что

$$\forall x > x_0\ |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| = |f(x + mF) - g(x + nG)| = |f(x + mF) + g(x + mF) - \\ - g(x + mF) + f(x + nG) - f(x + nG) - g(x + nG)| \leqslant \\ \leqslant |f(x + mF) - g(x + mF)| + |f(x + nG) - g(x + nG)| + \\ + |f(x + mF + nG) - g(x + mF + nG)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

как только числа $m$, $n$ настолько большие, что $x + mF$, $x + nG > x_0$.

**27.** *Докажите, что непрерывная функция $f(x)$, определённая на интервале $(a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на нём тогда и только тогда, когда на концах $a$ и $b$ этого интервала она имеет конечные пределы.*

*Решение.* Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = B$ ($A$, $B \in \mathbb{R}$). Введём новую функцию $\bar{f}(x)$ правилом

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (a, b) \\ A & \text{если } x = a \\ B & \text{если } x = b. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{f}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и поэтому по теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[a, b]$. По определению равномерной непрерывности, если $\bar{f}(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна и на $(a, b)$, но на $(a, b)$ $\bar{f}(x) = f(x)$, поэтому $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a, b)$.

Пусть теперь $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a, b)$. Покажем, что при стремлении $x$ к $a$ или к $b$ у функции $f(x)$ существуют конечные пределы.

Воспользуемсядля этого *критерием Коши*:
Конечный предел функции $f(x)$ в точке $a$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где $x'$, $x''$ — любые точки из области определения функции $f(x)$.

Вспомним определение равномерной непрерывности $f(x)$ на $(a, b)$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in (a, b)\, |x' - x''| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Ясно, что $f(x)$ удовлетворяет критерию Коши в окрестности точки $a$ (или $b$), и поэтому существуют конечные пределы $f(x)$ при стремлении $x$ к $a$ (или к $b$).

**28.** *Вычислить производную функции* $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x+1}}}$ *(*$n$ *корней) в точке* $0$.

*Решение (по индукции).* Обозначим

$$y_1 = \sqrt{x+1}, \quad y_n = \sqrt{x + y_{n-1}}.$$

Ясно, что $\forall k\ y_k(0) = 1$.

$$y_1'(0) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$y_2'(0) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}.$$

Предположим, что $y_{n-1}'(0) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Тогда

$$y_n'(0) = \left(\sqrt{x + y_{n-1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + y_{n-1}}}\left(y_{n-1}' + 1\right)\bigg|_{x=0} = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

**29.** *Разные способы задания функций.*

*a) Пусть трижды дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *взаимно однозначна и*

$$f(x_0) = y_0,\ f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 2,\ f'''(x_0) = 3.$$

*Найти первую, вторую и третью производные обратной функции* $x = f^{-1}(y)$ *в точке* $y_0$.

*b) Дважды дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *задана в окрестности точки* $x = 0$ *параметрически*

$$x = t^3 - t^2,\ y = -t^3 + 3t - 1.$$

*Найти* $f'(0)$ *и* $f''(0)$, *если* $f(0) = 1$.

*c) Дважды дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$y^3 + x^3 + 2xy - y^2 + x - 10 = 0$$

*и условию* $f(1) = 2$.

*Найти* $f'(1)$ *и* $f''(1)$.

*Решение.* a) Для удобства обозначим $f^{-1}(y) = g(y)$,

$$f(g(y)) = y. \qquad (*)$$

Дифференцируем тождество $(*)$ по $y$:

$$f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1,\ \text{т. е. } g'(y_0) = 1.$$

Дифференцируем ещё раз:

$$f'' \cdot g'' \cdot g' + f' \cdot g'' = 0,\ \text{т. е. } g''(y_0) = -2.$$

Дифференцируем третий раз

$$f''' \cdot (g')^3 + f'' \cdot 2g' \cdot g'' + f'' \cdot g' \cdot g'' + f' \cdot g''' = 0,$$

$$f''' \cdot (g')^3 + 3f'' \cdot g' \cdot g'' + f' \cdot g''' = 0.$$

Подставляем известные значения:

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot g''' = 0,\ \text{т. е. } g'''(y_0) = 9.$$

b) Если $f(0) = 1$, то $t = 1$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1} = \left.\frac{-3t^2+3}{3t^2-2t}\right|_{t=1} = 0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1} = \left.\frac{-6t^2(3t^2-2t)+(6t^2-2)(3t^2-3)}{(3t^2-2t)^3}\right|_{t=1} = -6.$$

c) Дифференцируем тождество

$$y^3(x) + x^3 + 2xy(x) - y^2(x) + x - 10 = 0 :$$

$$3y^2y' + 3x^2 + 2y + 2xy' - 2yy' + 1 = 0. \qquad (*)$$

Подставляем $x = 1$, $y = 2$:

$$3 \cdot 4 \cdot y' + 3 + 4 + 2y' - 4y' + 1 = 0,$$

$$10y' = -8,$$

$$y'(1) = -\frac{4}{5}.$$

Дифференцируем тождество $(*)$ по $x$:

$$6y(y')^2 + 3y^2y'' + 6x + 2y' + 2y' + 2xy'' - 2(y')^2 - 2yy'' = 0,$$

$$12 \cdot \frac{16}{25} + 12y'' + 6 - \frac{16}{5} + 2y'' - \frac{32}{25} - 4y'' = 0,$$

$$10y'' = -\frac{230}{25},$$

$$y''(1) = -\frac{23}{25}.$$

**30.** *Найдите производные всех порядков функции* $y = \operatorname{arctg} x$ *в точке* $x = 0$, *воспользовавшись для этого формулой Лейбница и соотношением*

$$(1 + x^2) \cdot y' = 1. \qquad (*)$$

*Решение.* Формула Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$

Положим в нашем случае $u(x) = 1 + x^2$, $v(x) = y'(x)$. Заметим, что $u^{(k)} = 0$, если $k > 2$. Применим формулу Лейбница к соотношению $(*)$:

$$(1 + x^2) \cdot y^{(n+1)} + n \cdot 2x \cdot y^{(n)} + n(n-1) \cdot y^{(n-1)} = 0,$$

при $x = 0$ формула укорачивается:

$$y^{(n+1)} = -n(n-1)y^{(n-1)}. \qquad (**)$$

Учитывая, что $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, получаем из формулы $(**)$, что

$$y^{(2k)}(0) = 0,\ y^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!$$

**31.** *Определим на числовой прямой функцию $f$, полагая $f(0) = 0$ и $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ для $x \neq 0$.*

*Докажите, что функция $f$ всюду бесконечно дифференцируема, а значит для неё можно составить ряд Тейлора с «центром» в нуле. Посчитайте сумму этого ряда и сравните её с исходной функцией.*

*Решение.* Нам понадобится теорема Лагранжа:
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Для решения задачи нам надо доказать, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке 0. Это решение опирается на единственное утверждение, которое используется многократно.

**Лемма.** *Пусть при $x$, стремящемся к нулю, $f(x)$ стремится к $y_0$ и $f'(x)$ стремится к $l_0$. Тогда производная $f'(0)$ существует и равна $l_0$.*

*Доказательство.* По определению производной

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - y_0}{x - 0}.$$

По теореме Лагранжа для отрезка $[0, x]$ имеем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - y_0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} f'(\theta x) = l_0,$$

где $0 < \theta < 1$. Лемма доказана

Применим лемму к нашей задаче. У нас функция

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

её производная

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

поэтому по лемме, $f'(0) = 0$. Действительно, первое очевидно,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = /\text{замена } \frac{1}{x} = y/ = \lim_{y\to\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} =$$
$$= /\text{по правилу Лопиталя}/ = \lim_{y\to\infty} \frac{3y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{3}{2ye^{y^2}} = 0.$$

Пусть теперь в лемме участвуют $f'(x)$ и $f''(x)$. Мы уже знаем, что $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, сейчас докажем, что $f''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, тогда по лемме получил, что $f''(0) = 0$. Действительно,

$$f''(x) = (4 - 6x^2) \cdot \frac{1}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} = P(x) \cdot \frac{1}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

потому что $P(x)$ — многочлен, а то что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

доказывается аналогично первому случаю заменой $x = \dfrac{1}{y}$ и применением правила Лопиталя.

Пусть теперь уже доказано, что для всех $k \leqslant n$ $f^{(k)}(0) = 0$ и

$$f^{(n)}(x) = Q(x) \cdot \frac{1}{x^{3\cdot 2^{n-1}}} e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

где $Q(x)$ — многочлен. Тогда

$$f^{(n+1)}(x) =$$
$$= \frac{1}{x^{3\cdot 2^n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \left( (Q'(x) + Q(x) \cdot 2x^{-3}) \cdot x^{3\cdot 2^{n-1}} - Q(x) \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \cdot x^{3\cdot 2^{n-1}-1} \right) =$$
$$= \frac{1}{x^{3\cdot 2^n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot R(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

где $R(x)$ — многочлен, и по лемме $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Ряд Тейлора для $f(x)$ оказывается функцией, равной 0 на всей прямой $\mathbb{R}$, и совпадает с $f(x)$ только при $x = 0$.

**32.** *Докажите неравенство Йенсена:*
*Если* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *— выпуклая вниз функция;* $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ *— точки интервала* $(a,b)$*;* $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ *— неотрицательные числа такие, что*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1,$$

*то справедливо неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \quad (*)$$

*Доказательство.* При $n = 2$ неравенство $(*)$ совпадает с определением выпуклости функции $f(x)$. Покажем, что если $(*)$ справедливо для $n = m - 1$, то оно справедливо и для $n = m$.

Пусть, для определённости, в наборе $\alpha_1$, …, $\alpha_n$ имеем, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$\beta = \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 0 \text{ и } \frac{\alpha_2}{\beta} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1, \text{ а также } \alpha_1 + \beta = 1.$$

Используя выпуклость функции $f(x)$, находим, что

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right),$$

так как $\alpha_1 + \beta = 1$ и $\left(\dfrac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) \in (a,b)$.

Далее, по предположению индукции

$$f\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) \leqslant \frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n),$$

следовательно,

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n),$$

что и требовалось доказать.

Для функции, выпуклой вверх,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

*Пример.* Функция $f(x) = \ln x$ строго выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$, поэтому если $\alpha_i \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, то

$$\ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n \ln x_n = \ln x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

откуда следует, что

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

В частности, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, то среднее арифметическое $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ больше или равно, чем среднее геометрическое $\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$.

**33.** *Докажите красивую теорему:*
*Если*

*1) Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $n$-кратно дифференцируемы,*

*2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ при $k = 0,\ 1,\ n-1$,*

*3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$,*

*то имеет место неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

С одной стороны

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x) - \psi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(x_0) + \psi^{(n-1)}(x_0) = \\ = \varphi^{(n-1)}(x) - \psi^{(n-1)}(x),$$

так как $\varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$ по условию 2) теоремы.

С другой стороны, по теореме Лагранжа о конечном приращении на отрезке $[x_0, x]$

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = u^{(n)}(c)(x - x_0) = \left(\varphi^{(n)}(c) - \psi^{(n)}(c)\right)(x - x_0) > 0$$

по условию 3) теоремы, так как $c \in (x_0, x)$.

Сравнивая эти результаты, мы видим, что

$$\varphi^{(n-1)}(x) - \psi^{(n-1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}(c) - \psi^{(n)}(c)\right)(x - x_0) > 0.$$

Т. е. мы получили, что для всех $x > x_0$

$$\psi^{(n-1)}(x) > \psi^{(n-1)}(x)$$

и дело свелось к первоначальной задаче для $k = n - 1$.

Тогда повторим приведённое доказательство к функции $u^{(n-2)}(x) = \varphi^{(n-2)}(x) - \psi^{(n-2)}(x)$ и так далее. После $n - 1$ шага получим, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$, что и требовалось доказать.