Версия от 17.12.2014

Основы функционального анализа

И. В. Подвигин

Новосибирский государственный университет

физический факультет

кафедра высшей математики

Классический идеал атомистического изложения математики требует, чтобы материал был сгущен в форме постулатов, теорем и доказательств. В противовес этому математическую дисциплину можно рассматривать как непрерывную ткань взаимных связей, при изложении которых метод и мотивировка вступают на передний план

Р. Курант

Глава 1

Ряды Фурье

Введение

Лекция 1

Представление функций в виде функциональных рядов в математике и ее приложениях играют не маловажную роль. К примеру, в курсе математического анализа была изучена тема рядов Тейлора (и Маклорена), из которой известно, что всякая бесконечно дифференцируемая функция $f \in C^{\infty}(a, b)$ может быть представлена в виде специального степенного ряда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

в каждой точке $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, где $\delta = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}}}$. Зная поведение коэффициентов этого ряда можно судить о некоторых свойствах самой функции. Кроме того, использование степенных рядов было полезно при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В комплексном анализе важную роль играют ряды Лорана, частным случаем которых являются ряды Тейлора. В нашем же курсе центральную роль в первой главе будут играть специальные тригонометрические ряды — ряды Фурье. Они также как и степенные ряды будут использоваться нами при решении имеющих физический смысл дифференциальных уравнений, только уже в частных производных. Отметим также простую связь между рядами Фурье и рядами Лорана. Имея для некоторой функции $f(z)$ разложение в ряд Лорана в кольце $r < |z| < R$ комплексной плоскости

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

и рассматривая его на любой окружности $|z| = \rho$ внутри кольца сходимости, мы получаем ряд Фурье в комплексной форме для функции $g(\varphi) = f(\rho e^{i\varphi})$:

$$g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n e^{in\varphi}.$$

1.1 Задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и предположим, что она представляется в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.1.1}$$

Нас будут интересовать два вопроса об этом разложении:

1) Какими свойствами должна обладать функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы разложение (1.1.1) было справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$? Другими словами это означает, определить классы функций для которых функциональный ряд из правой части равенства (1.1.1) с некоторыми определенными коэффициентами a_n и b_n сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и его сумма равна левой части равенства (1.1.1), т.е. значению в той же точке $x \in \mathbb{R}$ функции f.

На этот вопрос мы уже можем частично дать ответ: функция f должна быть 2π-периодической, поскольку правая часть равенства (1.1.1) такова и есть.

2) Как найти коэффициенты a_n, b_n?

Эти два вопроса и есть для нас задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье. Начнем мы со второго вопроса, т.е. с нахождения выражений для коэффициентов a_n и b_n.

Итак, пусть наша функция 2π-периодична и настолько замечательная (т.е. обладает всеми свойствами, необходимыми для строгости рассуждений), что справедливо равенство (1.1.1), которое к тому же мы можем интегрировать (для левой части нет никаких проблем, а вот для правой возникают вопросы о перестановки предельных переходов: бесконечного суммирования и интегрирования).

Проинтегрируем равенство (1.1.1) на периоде, например на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx dx \\ &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= a_0\pi,\end{aligned}$$

откуда находим формулу для коэффициента a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{1.1.2}$$

Домножим теперь равенство (1.1.1) на $\cos mx, m \geq 1$ и снова проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mxdx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mxdx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)dx\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{nm} = a_m \pi.\end{aligned}$$

Отсюда находим формулу для коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx,\ \ m \geq 1. \tag{1.1.3}$$

Умножая равенство (1.1.1) на $\sin mx, m \geq 1$, интегрируя его и проделывая аналогичные выкладки, получаем формулу и для коэффициентов b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx,\ \ m \geq 1. \tag{1.1.4}$$

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n, найденные по формулам (1.1.2), (1.1.3) и (1.1.4), называются *коэффициентами Фурье* функции f, а сами формулы — *формулы Эйлера–Фурье*[1].

Заметим, что в формулах Эйлера–Фурье можно заменить интегрирование на любой отрезок длиной в период функции f.

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Говорят, что ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть *[формальный] ряд Фурье* функции f. При этом пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик, один из самых известных членов Российской Академии Наук; Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик, основоположник теории тригонометрических рядов.

Из формул (1.1.2) и (1.1.3) видно, что первая является частным случаем второй при $m = 1$. Этим объясняется исторически сложившееся написание ряда Фурье с выделенным нулевым коэффициентом $a_0/2$.

Отметим в конце этого параграфа, что все выкладки этого параграфа (перестановка предельных переходов) были справедливы, например, если ряд Фурье сходился равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. О том, для каких функций имеет место такая сходимость ряда Фурье, и ответ на первый сформулированный вначале вопрос, мы будем обсуждать чуть позднее, в следующих параграфах. Отметим лишь, что для равенства (1.1.1) необходимо существование коэффициентов Фурье (1.1.2)–(1.1.4), для чего достаточно потребовать абсолютную интегрируемость функции f на своем периоде. Действительно, если $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty$, то

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||\cos nx|dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty.$$

Аналогично показывается ограниченность коэффициентов b_n. Везде в дальнейшем, если это особо не оговорено, мы будем молчаливо предполагать, что коэффициенты Фурье существуют (читай f – абсолютно интегрируема на промежутке).

1.2 Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Аналогично рассуждениям предыдущего параграфа можно получить ряд Фурье и формулы коэффициентов Фурье для функций с произвольным периодом. Мы получим эти результаты, опираясь на уже имеющиеся формулы. Покажем, как это сделать. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2l$-периодическая (и абсолютно интегрируемая на своем периоде) функция, т.е. $f(x) = f(x + 2l)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Определим 2π-периодическую функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$g(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right).$$

Проверим, что g действительно периода 2π :

$$g(y + 2\pi) = f\left(\frac{l(y + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{ly}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y).$$

Для 2π-периодической функции g мы можем записать (формальный) ряд Фурье:

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny$$

с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny dy,\ \ n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin nydy,\ n \geq 1.$$

Сделав во всех выражениях замену переменной $x = \frac{ly}{\pi}$, получим (формальный) ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l} \tag{1.2.1}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n \geq 0, \tag{1.2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n \geq 1. \tag{1.2.3}$$

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2l$-периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n, найденные по формулам (1.2.2) и (1.2.3) называются *коэффициентами Фурье* функции f. При этом ряд (1.2.1) с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть *[формальный] ряд Фурье* функции f.

1.3 Разложение в ряд Фурье на интервале

1.3.1. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция, абсолютно интегрируемая на нем. Положим $2l = b - a$. Функцию f можно продолжить на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ до $2l$-периодической функции f^*. Для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое единственное число $k_x \in \mathbb{Z}$, что $x + 2lk_x \in (a, b]$ (можно также брать полуоткрытый интервал $[a, b)$) тогда функция f^* определяется равенством

$$f^*(x) = f(x + 2lk_x).$$

Вся эта конструкция изображена на рис. 1.

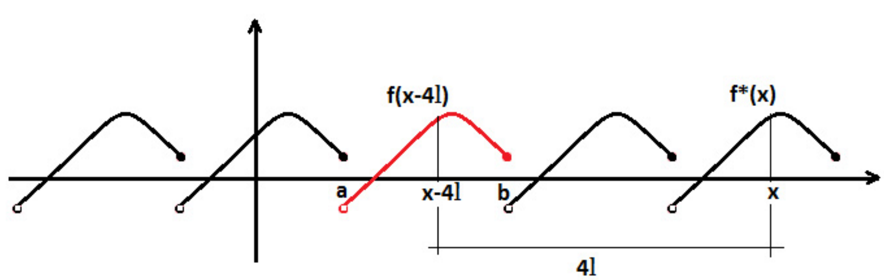


Рис. 1.1: Периодическое продолжение функции f на $\mathbb{R}$

Определение 4. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. *Разложить в [формальный] ряд Фурье* функцию f на отрезке $[a, b]$ означает разложение в [формальный] ряд Фурье $2l$-периодической функции f^*, $2l = b - a$.

При этом формулы (1.2.1)–(1.2.3) переписываются следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{b-a} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{b-a} \tag{1.3.1}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi nx}{b-a} dx, \ n \geq 0, \tag{1.3.2}$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi nx}{b-a} dx, \ n \geq 1. \tag{1.3.3}$$

Отметим, что разница в построении периодической функции f^* заключается в определении ее значений на концах отрезка $[a, b]$ (в описанном выше случае мы брали $f^*(a) = f^*(b) = f(b)$); поскольку интегрирование (по мере Лебега) не зависит от значений в одной точке, то формулы (1.3.1)–(1.3.3) не изменятся при рассмотрении f^* с какими-нибудь другими значениями в этих точках.

1.3.2. Рассмотрим теперь симметричный относительно нуля отрезок $[-a, a]$ и функцию $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$. Ряд Фурье (1.3.1) может выглядеть проще, если функция f обладает дополнительными свойствами четности или нечетности. Предположим, что f — четная функция, т.е. $f(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a, a]$. Тогда для всех $n \geq 1$ коэффициенты $b_n = 0$. Действительно, записывая формулу (1.3.3) (или (1.2.3)), получаем

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx \\
&= \frac{1}{a} \int_{-a}^{0} f(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx + \frac{1}{a} \int_{0}^{a} f(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx \\
&= -\frac{1}{a} \int_{a}^{0} f(-y) \sin \frac{\pi n(-y)}{a} dy + \frac{1}{a} \int_{0}^{a} f(x) \sin \frac{\pi nx}{a} dx = 0.
\end{aligned}$$

Для коэффициентов a_n, $n \geq 0$ в этом случае справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{\pi nx}{a} dx \\
&= \frac{1}{a} \int_{-a}^{0} f(x) \cos \frac{\pi nx}{a} dx + \frac{1}{a} \int_{0}^{a} f(x) \cos \frac{\pi nx}{a} dx \\
&= -\frac{1}{a} \int_{a}^{0} f(-y) \cos \frac{\pi n(-y)}{a} dy + \frac{1}{a} \int_{0}^{a} f(x) \cos \frac{\pi nx}{a} dx \\
&= \frac{2}{a} \int_{0}^{a} f(x) \cos \frac{\pi nx}{a} dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{a} \tag{1.3.4}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx, \; n \geq 0. \tag{1.3.5}$$

Аналогичным образом показывается, что для нечетной функции $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ (т.е. $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a, a]$) ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{a} \tag{1.3.6}$$

с коэффициентами

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \; n \geq 1. \tag{1.3.7}$$

1.3.3. Рассмотрим теперь отрезок $[0, a]$ и функцию $f : [0, a] \to \mathbb{R}$. Помимо разложения в ряд Фурье вида (1.3.1) для этой функции можно получить еще два разложения. Продолжим функцию f на отрезок $[-a, a]$ двумя способами четным и нечетным. Обозначим эти продолжения соответственно f_{even} и f_{odd}; смотрите пример на рис. 2 и 3.

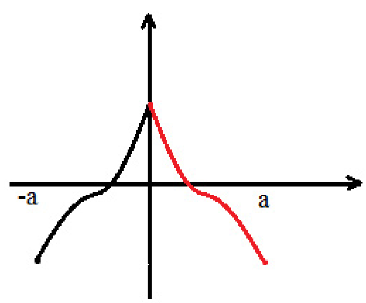


Рис. 1.2: Четное продолжение: $f_{even}(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0]$

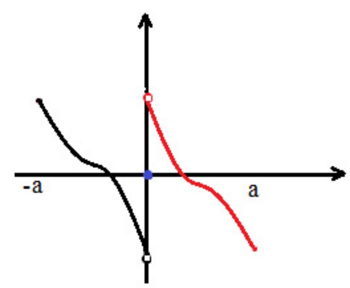


Рис. 1.3: Нечетное продолжение: $f_{odd}(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0)$

Определение 5. Разложение в ряд Фурье функций f_{even} и f_{odd} на отрезке $[-a, a]$ называется *разложением в ряд Фурье функции f по косинусам и по синусам* соответственно на отрезке $[0, a]$.

Принимая во внимание, что $f_{even}(x) = f_{odd}(x) = f(x)$ для любого $x \in (0, a]$, получаем, что непосредственно формулы этих разложений есть (1.3.4), (1.3.5) — по косинусам; (1.3.6), (1.3.7) — по синусам.

1.4 Комплексная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Запишем ее формальный ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

перепишем этот ряд в виде

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \left[\begin{array}{l} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, \ n < 0, \\ \frac{a_0}{2}, \ n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2}, \ n > 0. \end{array} \right.$$

Легко проверить, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.1}$$

К примеру, для $n < 0$ имеем

$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(-n)x + i \sin(-n)x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nx} dx.$$

Ясно, что формулу (1.4.1) можно применять и для комплекснозначных функций, поэтому введем следующее

Определение 6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодическая функция. Рядом Фурье *в комплексной форме* для этой функции называется ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.4.2}$$

с коэффициентами Фурье c_n, найденным по формуле (1.4.1).

По аналогии с предыдущими рассуждениями ряд Фурье в комплексной форме для $2l$-периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ находится по формуле

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} \tag{1.4.3}$$

с коэффициентами Фурье

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{-i\pi n x}{l}} dx,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.4}$$

1.5 Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье

Лекция 2

1.5.1. Лемма Римана–Лебега

Начнем отвечать на первый вопрос, сформулированный в §1. Но сначала докажем одну лемму[2], которую будем использовать в дальнейшем не один раз.

Лемма 1. *Пусть* $[a, b]$ *— отрезок вещественной прямой и* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— абсолютно интегрируемая функция, т.е.* $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$*, тогда* $\int_a^b f(x) \cos px dx \to 0$ *при* $p \to +\infty$.

Доказательство леммы 1. Предположим сначала, что f — гладкая на $[a, b]$ функция (обозначаем $f \in C^1[a, b]$), т.е. у нее существует непрерывная на $[a, b]$ производная f' (иногда так и говорят, f — непрерывно дифференцируема), причем производная на концах интервала понимается как односторонняя производная, и непрерывность в этих точках также односторонняя. Выпишем неравенства

$$\begin{aligned} 0 \le \left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| &= \left| \frac{1}{p} \int_a^b f(x) d \sin px \right| \\ &= \frac{1}{p} \left| f(b) \sin pb - f(a) \sin pa - \int_a^b \sin px f'(x) dx \right| \\ &\le \frac{1}{p} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Поскольку выражение в скобках конечно, то по лемме о двух милиционерах заключаем, что лемма верна для гладкой функции f.

Для любой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ такой, что $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется гладкая функция f_ε такая, что $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$.

[2]Эта лемма называется *леммой Римана–Лебега* в честь выдающихся немецкого и французского математиков Георга Римана (1826–1886) и Анри Лебега (1875–1941).

Мы не будем доказывать этот факт, но будем на него ссылаться (в дальнейшем) как о всюду плотности множества гладких функций в функциональном пространстве Лебега $L_1[a,b]$ (см. 5.3). Тогда получаем

$$\begin{aligned} 0 \le \left| \int_a^b f(x)\cos px dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x))\cos px dx + \int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px dx \right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px dx \right| \\ &\le \varepsilon + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x)\cos px dx \right|. \end{aligned}$$

По уже доказанному второе слагаемое стремится к нулю при $p \to +\infty$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, следовательно, лемма доказана. □

Следствие 1. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, тогда

1) ее коэффициенты Фурье $a_n, b_n \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $\lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\sin px dx = \lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\cos px dx = \lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)e^{ipx} dx = 0.$

1.5.2. Ядра Дирихле

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Используя формулы (1.1.2)–(1.1.4) коэффициентов Фурье, запишем частичную сумму ее ряда Фурье

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{k=1}^n \cos k(y-x)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x)\right)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathcal{D}_n(y-x)dy, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz\right). \qquad (1.5.1)$$

Найдем компактное выражение для функции $\mathcal{D}_n(z)$. Домножим ее на $\sin\frac{z}{2}$ и, воспользовавшись тригонометрической формулой произведения косинус на синус, получим

$$\begin{aligned}\pi\mathcal{D}_n(z)\sin\frac{z}{2} &= \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \cos z\sin\frac{z}{2} + \ldots + \cos nz\sin\frac{z}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{3z}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)z}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)z}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)z}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi\sin\frac{z}{2}},\ z\in\mathbb{R},\ n\geq 1. \tag{1.5.2}$$

Тогда выражение для частичной суммы $T_n(x)$ имеет вид

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin\frac{(2n+1)(y-x)}{2}}{2\pi\sin\frac{y-x}{2}}dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi\sin\frac{z}{2}}dz, \tag{1.5.3}$$

где в последнем равенстве мы сделали замену переменных $z = y - x$ и воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Определение 7. Функция $\mathcal{D}_n(z)$, выражаемая формулами (1.5.1) и (1.5.2), называется n-ым *ядром Дирихле*[3]; а интеграл в формуле (1.5.3) — *интеграл Дирихле*.

Из определения следует, что ядра Дирихле обладают следующим свойством: для любого $n\geq 1$ ядро $\mathcal{D}_n(x)$ — четная функция и

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(z)dz = 1. \tag{1.5.4}$$

1.5.3. Кусочно-гладкие функции

Следующий класс функции играет важную роль на протяжении всей этой главы, а теорема 1 дает ответ на вопрос 1) из первого параграфа.

Определение 8. Функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой*, если существует конечное число точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

таких, что на каждом интервале (x_j, x_{j+1}), $j = 0,\ldots n-1$ функция f будет гладкой, а в точках x_j существуют и конечны следующие односторонние пределы

$$f(x_j\pm 0) := \lim_{x\to 0\pm} f(x_j + x),$$

$$f'(x_j\pm 0) := \lim_{x\to 0\pm}\frac{f(x_j+x) - f(x_j\pm 0)}{x},$$

причем в точках a и b нужно рассматривать только правые и, соответственно, левые пределы.

[3]Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, основные труды по теории чисел и математическому анализу.

Упражнение 1. Верно ли, что $f'(x_j \pm 0) = \lim\limits_{x \to 0\pm} f'(x_j + x)$?

Чтобы лучше понять это определение, приведем несколько примеров, отражающих каждую деталь этого определения.

Пример 1. На отрезке $[-2, 2]$ рассмотрим четыре функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 0), \\ x^2, & x \in [0, 2], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{-2x - x^2}, & x \in [-2, 0), \\ \sqrt{2x - x^2}, & x \in [0, 2], \end{cases}$$

$$f_3(x) = \sin\frac{1}{x}, \;\; f_4(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$

Для каждой из них есть ровно одна особая точка $x_1 = 0$. Первая функция разрывна, но обладает всеми конечными односторонними пределами в x_1, поэтому она кусочно-гладкая. Вторая функция непрерывна, но в x_1 правая и левая производная бесконечны, следовательно, она не является кусочно-гладкой. Третья функция не кусочно-гладкая, поскольку правый и левый пределы функции в x_1 не существуют. Наконец, четвертая функция не является кусочно-гладкой, поскольку правый и левый пределы производной не существует в x_1. Графики функций изображены на рис. 1.4–1.7.

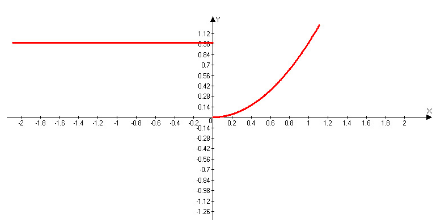


Рис. 1.4: Функция f_1 кусочно-гладкая, поскольку все односторонние пределы в $x_1 = 0$ конечны

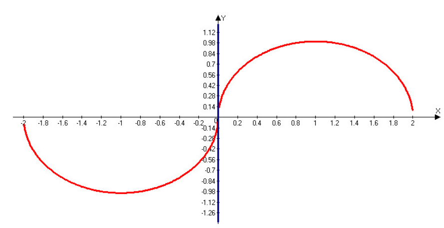


Рис. 1.5: Функция f_2 не кусочно-гладкая, так как пределы производных в $x_1 = 0$ бесконечны

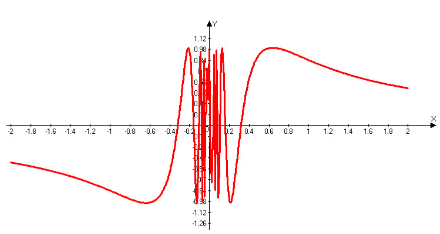


Рис. 1.6: Функция f_3 не кусочно-гладкая, так как пределы функции в $x_1 = 0$ не существуют

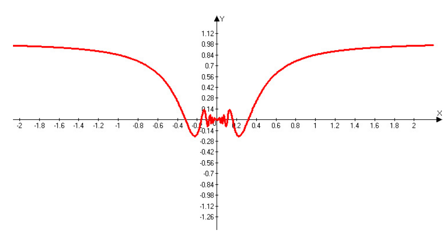


Рис. 1.7: Функция f_4 не кусочно-гладкая, поскольку пределы производной в $x_1 = 0$ не существуют

1.5.4. Теорема о представимости функции своим рядом Фурье

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно-гладкая на периоде функция, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.5.5}$$

Напомним, что $f(x \pm 0) = \lim\limits_{y\to 0\pm} f(x+y)$. Ясно, что для непрерывных функций левая часть равенства (1.5.5) равна $f(x)$. Таким образом, равенство (1.1.1) справедливо, например, для непрерывных кусочно-гладких функций.

Доказательство теоремы 1. Нам нужно доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ равен $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Используя формулу (1.5.3) для выражения $T_n(x)$, а также свойство (1.5.4), получим

$$\begin{aligned}
T_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \\
= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\mathcal{D}_n(z)dz &- \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(z)dz = \\
= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz &= \\
= \underbrace{\int_{-\pi}^{0}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz}_{z=-w} &+ \\
+ \int_{0}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz &= \\
= -\int_{\pi}^{0}\left(f(x-w) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(-w)dw &+ \\
+ \int_{0}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz &= \\
\overset{z=w,\, \mathcal{D}_n(z)=\mathcal{D}_n(-z)}{=} \int_{0}^{\pi}\left(f(x+z)+f(x-z)-f(x+0)-f(x-0)\right)\mathcal{D}_n(z)dz &= \\
= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(z)\sin\frac{2n+1}{2}z dz&,
\end{aligned}$$

где

$$g(z) = \left(\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z} + \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right)\frac{z}{\sin\frac{z}{2}}.$$

Из определения кусочно-гладкости следует, что функция g в окрестности нуля ограничена, а поскольку на остальном множестве интервала $(0,\pi)$

она кусочно-гладкая, то, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому по лемме 1 (Римана–Лебега) интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(z)\sin\frac{2n+1}{2}zdz \to 0$$

при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

1.5.5. Рассмотрим использующийся в дальнейшем пример нахождения ряда Фурье и его применение для суммирования числового ряда.

Пример 2. На интервале $(-\pi, \pi)$ определим функцию $\sigma(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}x$, и продолжим ее по периодичности на всю числовую прямую.

Поскольку $\sigma(x)$ — нечетная функция, то воспользовавшись формулой (1.3.7), получим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sigma(x)\sin nxdx = \int_0^{\pi}\sin nxdx = \frac{1-(-1)^n}{2},\ n \geq 1.$$

Так как $\sigma(x)$ кусочно-гладкая, и в точках разрыва выполняется равенство $\sigma(x) = \frac{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)}{2}$, то по теореме 1 для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x; \tag{1.5.6}$$

в частности, для любого $x \in (-\pi, \pi)$ верно равенство

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x. \tag{1.5.7}$$

Подставляя в равенство (1.5.7), например, точку $x = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

1.6 Дифференцируемость и интегрируемость рядов Фурье

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *—* 2π*-периодическая непрерывно дифференцируемая функция и* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,\ x \in \mathbb{R},$ *тогда*

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n\cos nx + b'_n\sin nx,$$

где

$$a'_n = nb_n,\ b'_n = -na_n,\ n \geq 1. \tag{1.6.1}$$

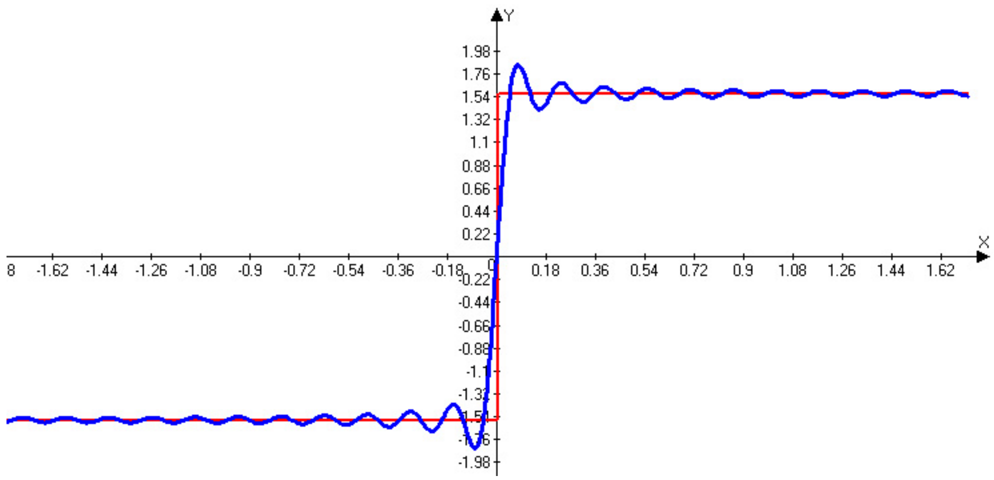


Рис. 1.8: График функции $\sigma(x)$ и частичной суммы $\sigma_{20} = \sum_{k=1}^{20} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x$ ее ряда Фурье в окрестности нуля

Доказательство теоремы 2. Поскольку производная f' непрерывна, то для нее можно построить формальный ряд Фурье. Поэтому остается лишь показать справедливость формул (1.6.1). Имеем

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \\ &= \frac{1}{\pi}\underbrace{\left(f(\pi)\cos\pi x - f(-\pi)\cos(-\pi x)\right)}_{0} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = nb_n. \end{aligned}$$

Второе равенство из (1.6.1) доказывается аналогично. □

Наложенные условия на функцию f в теореме 2 позволяют формально продифференцировать ее ряд Фурье и получить (формальный) ряд Фурье для ее производной f' :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{=} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \Big\downarrow \frac{d}{dx} & & \Big\downarrow \frac{d}{dx} \\ f'(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{nb_n}_{=a_n'} \cos nx + \underbrace{-na_n}_{=b_n'} \sin nx. \end{array}$$

Теорема 3. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π*-периодическая непрерывная функция и* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, *при этом* $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, *тогда для функции* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *и для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

где

$$A_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \ \text{ и } A_n = -\frac{b_n}{n},\ B_n = \frac{a_n}{n},\ n \geq 1. \tag{1.6.2}$$

Доказательство теоремы 3. Поскольку $F(x)$ непрерывно дифференцируема и 2π-периодична:

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = F(x) + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)dt}_{0} = F(x),$$

то для нее применима теорема 2. Поэтому

$$a_n = nB_n \text{ и } b_n = -nA_n,\ n \geq 1,$$

откуда получаем последние два равенства из (1.6.2). Выражение для A_0 находим из следующего соотношения:

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

□

Наложенные условия на функцию f в теореме 3 позволяют формально проинтегрировать ее формальный ряд Фурье и получить ряд Фурье для ее первообразной F :

$$\begin{array}{ccc}
f(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\
\Big\downarrow \int_0^x & & \Big\downarrow \int_0^x \\
F(x) & \xrightarrow{=} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{=B_n} \sin nx + \underbrace{\frac{-b_n}{n}}_{=A_n} \cos nx + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}}_{\frac{A_0}{2}}.
\end{array}$$

1.7 Приближение функций тригонометрическими многочленами

Лекция 3

Определение 9. Выражение вида $\mathcal{T}_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ будем называть вещественным *тригонометрическим многочленом* степени n.

Ясно, что частичная сумма ряда Фурье $T_n(x)$ интегрируемой функции является тригонометрическим многочленом. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Нужно найти тригонометрический многочлен $\mathcal{T}_n(x)$ такой, чтобы квадрат нормы (в $L_2[-\pi, \pi]$) разности

$$\|\mathcal{T}_n(x) - f(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 dx$$

был минимальным.

Имеем

$$(\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 = \mathcal{T}_n^2(x) - 2\mathcal{T}_n(x)f(x) + f^2(x) = f^2(x)+$$
$$+\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right)^2 - 2f(x)\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right) =$$
$$= f^2(x) - \alpha_0 f(x) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x) \cos kx + \beta_k f(x) \sin kx\right) +$$
$$+ \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx + \xi_n(x),$$

где

$$\xi_n(x) = \alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx + \sum_{i \neq j} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)(\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx).$$

Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} \xi_n(x)dx = 0$, то, интегрируя на интервале $(-\pi, \pi)$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + \beta_k b_k + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \beta_k^2 =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Таким образом, минимум нормы разности достигается на тригонометрическом многочлене с коэффициентами $\alpha_0 = a_0,\ \alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k$. В этом случае мы получаем, что

$$\mathcal{T}_n(x) = T_n(x)$$

и для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2,$$

откуда для всех $n \geq 1$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем *неравенство Бесселя*[4]

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \tag{1.7.1}$$

1.8 Равномерная сходимость ряда Фурье

Напомним следующее определение.

Определение 10. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ к функции $S(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| = 0,$$

при этом пишут

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Напомним также достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов — признак Вейерштрасса[5]: если для любого $x \in E$ верно $|f_n(x)| \leq M_n$, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E. Вспомнив определение и признак, мы теперь готовы сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \textit{ при } n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 4. Положим $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ n \geq 1$. Используя признак Вейерштрасса, достаточно найти суммируемую мажоранту для функциональной последовательности $f_n(x)$. Имеем

$$|f_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \overset{(1.6.1)}{=} \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \leq$$
$$\overset{2st \leq s^2+t^2}{\leq} \frac{|b_n'|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{|a_n'|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{|b_n'|^2 + |a_n'|^2}{2} + \frac{1}{n^2}.$$

[4]Фридрих Вильгельм Бессель (1784–1846) — немецкий математик и астроном, был директором обсерватории в городе Кенигсберг (ныне Калининград).

[5]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) — знаменитый немецкий математик, основоположник математического анализа и теории аналитических функций

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся ряд, а по неравенству Бесселя (1.7.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n'|^2 + |a_n'|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx < \infty,$$

то теорема доказана. □

1.9 Равенство Ляпунова

1.9.1. Оказывается в неравенстве Бесселя (1.7.1) на самом деле можно поставить равенство, что означает (как мы узнаем) полноту тригонометрической системы функций на интервале $[-\pi, \pi]$.

Теорема 5. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — *интегрируемая с квадратом функция, т.е.* $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$, *и* a_n, b_n — *ее коэффициенты Фурье, тогда справедливо равенство Ляпунова*[6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{1.9.1}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ такая, что ее 2π-периодическое продолжение f^* на всю числовую прямую будет непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда по теореме 4 ряд Фурье этой функции будет равномерно на всей числовой прямой сходится к ней самой. Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_n^2 + b_n^2,$$

то переходя к пределу при $n \to \infty$ и пронося предел внутрь интеграла ввиду равномерной сходимости, получим требуемое равенство.

Общий случай мы рассматривать не будем; отметим лишь, что его можно получить, приближая произвольную интегрируемую с квадратом функцию указанными в доказательстве гладкими функциями. □

Упражнение 2. Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ и f^* ее 2π-периодическое продолжение на всю числовую прямую. Верно ли следующее утверждение: $f^* \in C^1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $f \in C^1(-\pi, \pi)$ и $f(\pi) = f(\pi - 0) = f(-\pi + 0) = f(-\pi)$ и $f'(\pi - 0) = f'(-\pi + 0)$?

1.9.2. Обобщенное равенство Ляпунова

---

[6] Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) – основатель строгой теории устойчивости равновесия и движения систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

Теорема 6. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *и* $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *— интегрируемые с квадратом функции, т.е.* $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$ *и* $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx < \infty$*. Пусть, далее,* a_n, b_n *— коэффициенты Фурье функции* f*, а* α_n, β_n *— коэффициенты Фурье функции* g*. Тогда справедливо обобщенное равенство Ляпунова*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n + b_n\beta_n. \tag{1.9.2}$$

Доказательство теоремы 6. Легко проверить, что коэффициенты Фурье функций $f \pm g$ будут $a_n \pm \alpha_n$ и $b_n \pm \beta_n$. Кроме того, используя неравенство $(a \pm b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$, можно убедится, что указанные функции $f \pm g$ будут интегрируемые с квадратом. Тогда запишем для обеих функций равенство Ляпунова (1.9.1):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^2 dx = \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx = \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-\alpha_n)^2 + (b_n-\beta_n)^2.$$

Вычитая из первого неравенства второе, и деля получившееся равенство на 4, получаем требуемое равенство. □

1.9.3. Комплексная форма равенства Ляпунова

Если рассмотреть комплекснозначную функцию $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, и сложить равенства Ляпунова для ее вещественной и мнимой частей, то получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2, \tag{1.9.3}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции f. Однако, для комплекснозначных функций ее ряд Фурье записывают обычно в комплексной форме (1.4.2). Используя ее, можно получить и равенство Ляпунова в комплексной форме.

Теорема 7. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *— интегрируемая с квадратом функция, т.е.* $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty$*, и* c_n *— ее коэффициенты Фурье в комплексной форме, тогда справедливо равенство Ляпунова*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{1.9.4}$$

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим правую часть равенства (1.9.4). Вспоминая, что

$$c_n = \left[\begin{array}{l} \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2},\ n < 0, \\ \frac{a_0}{2},\ n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2},\ n > 0, \end{array}\right.$$

получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}\right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2+i(a_n\overline{b_n}-\overline{a_n}b_n)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2-i(a_n\overline{b_n}-\overline{a_n}b_n)}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2\right) \overset{(1.9.3)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx.$$

□

1.10 Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Лекция 4

Лемма 2. *Для любого $\alpha > 0$ при всех $n \geq 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}. \tag{1.10.1}$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 1/x^{\alpha+1}, x > 0$. Поскольку она убывающая, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \int_{n}^{\infty}\varphi(x)dx = \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}.$$

□

Теорема 8. *Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая $(k+1)$ -раз непрерывно дифференцируемая функция, тогда для скорости равномерной сходимости ряда Фурье к функции f*

$$R_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|T_n(x) - f(x)|$$

справедливо асимптотическое соотношение

$$R_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right) \ \text{при} \ \ n\to\infty.$$

Доказательство теоремы 8. Используя теорему 1 о представлении кусочно гладкой функции своим рядом Фурье и теорему 2 о дифференцировании ряда Фурье, получим для всякого $x \in \mathbb{R}$ неравенства

$$|T_n(x) - f(x)| \stackrel{T1}{=} \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j \cos jx| + |b_j \sin jx| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| + |b_j| \stackrel{T2}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} + \frac{|b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}},$$

где $a_j^{(k+1)}$ и $b_j^{(k+1)}$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k+1)}(x)$. Применив к последней сумме неравенство (**??**) Коши–Буняковского

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} u_j v_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2 \right)^{1/2},$$

которое мы докажем позже; взяв за $u_j = |a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|$, а за $v_j = \frac{1}{j^{k+1}}$, получим

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} \leq \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k+2}} \right)^{1/2} \leq$$

$$\stackrel{(1.10.1)}{\leq} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2k+1}\; n^{k+1/2}}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$n^{k+1/2} R_n \leq \frac{\xi_n}{\sqrt{2k+1}},$$

где $\xi_n^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку это "хвост" сходящегося ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^{(k+1)}\right)^2 + \left(b_j^{(k+1)}\right)^2 \stackrel{(1.9.1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(k+1)}\right)^2 dx < \infty.$$

Таким образом мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1/2} R_n = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

1.11 Явление Гиббса

1.11.1. Частный случай

Рассмотрим функцию $\sigma(x)$ из примера 2. Было показано, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье (см. равенство (1.5.6) и график на рис. 1.8

$$\sigma(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Положим

$$\sigma_{2n-1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Найдем ее экстремумы. Имеем $\sigma'_{2n-1}(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$, где последнее равенство доказывается аналогично выводу формулы (1.5.2) для ядра Дирихле. Откуда находим, что точки $x_k = \pi k/2n, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ — это точки экстремума функции $\sigma'_{2n-1}(x)$. Кроме того, из формулы для производной заключаем, что

$$\sigma_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt \overset{2nt=u}{=} \frac{1}{2n}\int_0^{2nx} \frac{\sin u}{\sin u/2n}du. \tag{1.11.1}$$

Поскольку $\sigma_{2n-1}(x)$ нечетна и симметрична относительно $x = \pi/2$

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}(\pi/2 - x) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin((k\pi-\pi/2)-(2k-1)x)}{2k-1} &= \\ = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin((k\pi-\pi/2)+(2k-1)x)}{2k-1} &= \sigma_{2n+1}(\pi/2+x),\end{aligned}$$

достаточно рассмотреть экстремумы на промежутке $[0,\pi/2]$, т.е. $x_k = \pi k/2n$ для $1 \le k \le n$. Подставляя эти точки в (1.11.1), получаем, что

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}(x_{k+1}) &= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi(k+1)}\frac{\sin u}{\sin u/2n}du = \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{1}{2n}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{\sin u}{\sin u/2n}du = \\ &\overset{u=t+\pi k}{=} \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{(-1)^k}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n}dt = \\ &= \sigma_{2n-1}(x_k) + (-1)^k v_k,\end{aligned}$$

где $v_k = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n}dt,\ 1 \le k \le n-1$. Поскольку $v_k > 0$ и $v_{k+1} < v_k$, мы заключаем, что наибольшее значение функции $\sigma_{2n-1}(x)$ достигается в точке $x_1 = \pi/2n$.

Вычислим предел

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n-1}(x_1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin u/2n}du = \\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin u/2n}du = \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du = \mathrm{Si}(\pi),\end{aligned}$$

где $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ — интегральный синус. Мы смогли внести предел под знак интеграла, поскольку по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для этого достаточно иметь интегрируемую мажоранту; для каждого $u \in [0, \pi]$ и $n \geq 1$ имеем

$$\left|\frac{\sin u}{2n \sin u/2n}\right| = \left|\frac{\sin u}{u} \frac{u/2n}{\sin u/2n}\right| \leq \frac{\pi}{2} \left|\frac{\sin u}{u}\right|.$$

Таким образом, мы получили, что в некотором смысле предельным геометрическим образом в точке $x = 0$ является отрезок (вдоль оси OY) $[-\mathrm{Si}(\pi), \mathrm{Si}(\pi)]$ вместо имеющегося у функции σ — $[-\pi/2, \pi/2]$. Используя таблицу значений для интегрального синуса (отметим, что $\pi/2 = \mathrm{Si}(+\infty)$), получаем, что отличие составляет

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Si}(\pi) - \pi/2}{\pi/2} \simeq 0,178, \tag{1.11.2}$$

т.е. на 18%. Ниже мы узнаем, что такой эффект типичен.

Определение 11. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно гладкая функция и x_0 — ее точка разрыва, причем для определенности считаем, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. *Явлением Гиббса* [7] называется свойство

$$\varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} T_n(x) < f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) < \varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0+0}} T_n(x).$$

В рассмотренном нами примере, мы как раз и считали верхний (а ввиду нечетности и нижний) указанные пределы.

1.11.2. Общий случай

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно-гладкая функция и x_0 — ее регулярная точка разрыва, т.е. $f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Без ограничения общности, будем предполагать, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Покажем, что здесь также имеет место явление Гиббса с теми же 18%.

Пусть $D = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции f в точке x_0. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(x - x_0) \tag{1.11.3}$$

и первым делом покажем, что она непрерывна в точке x_0, что нам существенно пригодится в дальнейших рассуждениях.

Имеем

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(0) = 0,$$

[7] Джозайа Уиллард Гиббс (1839–1903) — американский физик, один из основоположников статистической физики. Первоначально за 50 лет до публикации Гиббса описываемое явление было открыто английским математиком Г. Уилбрагамом

$$\varphi(x_0 \pm 0) = f(x_0 \pm 0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(\pm 0) =$$
$$= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}(\pm\frac{\pi}{2}) =$$
$$= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0+0)}{2} - \frac{f(x_0-0)}{2} \mp \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = 0.$$

Поскольку $\varphi(x_0) = \varphi(x_0+0) = \varphi(x_0-0)$, то непрерывность доказана. Из формулы (1.11.3) находим выражение для рассматриваемой функции f :

$$f(x) = \varphi(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi}\sigma(x - x_0),$$

откуда для частичных сумм рядов Фурье имеем равенство

$$T_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi}\sigma_{2n-1}(x - x_0).$$

Здесь $T_{2n-1}(x), \varphi_{2n-1}(x), \sigma_{2n-1}(x)$ — частичные суммы, соответственно, для $f(x), \varphi(x)$ и $\sigma(x)$. Далее, имеем

$$\varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} T_{2n-1}(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi} \varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} \sigma_{2n-1}(x - x_0) =$$
$$= f(x_0) + \frac{D}{\pi} \varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to -0}} \sigma_{2n-1}(-0) \overset{(1.11.2)}{=} f(x_0) - \frac{D}{\pi}\frac{\pi}{2}(\gamma+1) =$$
$$= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \frac{f(x_0+0)-f(x_0+0)}{2} - \frac{D\gamma}{2} =$$
$$= f(x_0-0) - \frac{D\gamma}{2}.$$

Здесь мы воспользовались равномерной сходимостью $\varphi_{2n-1}(x)$ к $\varphi(x)$ и непрерывностью $\varphi(x)$ в точке x_0 с нулевым значением.

Аналогично, имеет место равенство для верхнего предела

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0+0}} T_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{D}{\pi}\frac{\pi}{2}(\gamma+1) = f(x_0+0) + \frac{D\gamma}{2}.$$

Отсюда находим, что предельный геометрический образ отличается от имеющегося у функции f в точке x_0

$$\frac{f(x_0+0) + \frac{D\gamma}{2} - (f(x_0-0) - \frac{D\gamma}{2})}{D} = \gamma\text{-раз},$$

т.е. те же 18%.

Следствие 2. Справедливы формулы

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}\Big(T_{2n-1}(x_0 + \frac{\pi}{2n}) - T_{2n-1}(x_0 - \frac{\pi}{2n})\Big) = D(1 + \frac{\gamma}{2}).$$

1.12 Применение рядов Фурье: решение задачи Дирихле в круге

Напомним следующее определение.

Определение 12. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если она дважды непрерывно дифференцируема в D, т.е. $f \in C^2(D)$, и удовлетворяет в D уравнению Лапласа $\triangle f = 0$.

Напомним также, что лапласиан $\triangle$ выглядит следующим образом:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{в декартовой системе координат,}$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{в полярной системе координат.}$$

Задача Дирихле в области D состоит в нахождении гармонической в области D функции f по ее значениям на границе области ∂D. Пусть $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ – открытый единичный круг. Тогда задача Дирихле состоит в решении уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{cases} \triangle f = 0, \\ f(x,y)|_{x^2+y^2=1} = g(x,y), \end{cases}$$

где $g(x,y)$ — гладкая функция. Поскольку область симметрична относительно нуля, то задачу удобней решать в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0, \\ f(r,\varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \end{cases} \tag{1.12.1}$$

где $g(\varphi)$ — 2π-периодическая гладкая функция, которая раскладывается в ряд Фурье

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi. \tag{1.12.2}$$

Поскольку $f(r,\varphi)$ — гладкая и 2π-периодическая по φ функция, то для каждого $r \in [0,1]$ она представляется рядом Фурье

$$f(r,\varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi. \tag{1.12.3}$$

Предполагая, что ряд (1.12.3) можно почленно дифференцировать по обеим переменным, подставляя его в уравнение (1.12.1), получим равенство

$$\left(r^2\frac{a_0''(r)}{2} + r\frac{a_0'(r)}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r)\Big)\cos n\varphi +$$
$$+ \Big(r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r)\Big)\sin n\varphi = 0,$$

откуда

$$r^2\frac{a_0''(r)}{2}+r\frac{a_0'(r)}{2}=0,$$

$$r^2a_n''(r)+ra_n'(r)-n^2a_n(r)=0,\quad n\ge 1$$

и

$$r^2b_n''(r)+rb_n'(r)-n^2b_n(r)=0,\quad n\ge 1.$$

Переписывая условие $f(1,\varphi)=g(\varphi)$ в терминах рядов (1.12.2) и (1.12.3), получим начальные/граничные условия для этих уравнений:

$$a_n(0)<\infty,\ a_n(1)=\alpha_n,\ n\ge 0;$$

$$b_n(0)<\infty,\ b_n(1)=\beta_n,\ n\ge 1.$$

Первое уравнение легко решается методом разделения переменных и получается выражение

$$a_0(r)=C_1\ln r+C_2,$$

которое при удовлетворении краевых (начальных/граничных) условий становится $a_0(r)=\alpha_0$. Оставшиеся уравнения одного типа и являются уравнениями Эйлера, которые заменой $r=e^t$ сводятся к однородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, решив которое, мы получим

$$a_n(r)=D_1(n)r^n+D_2(n)r^{-n},\ n\ge 1,$$

$$b_n(r)=E_1(r)r^n+E_2(n)r^{-n},\ n\ge 1.$$

Константы D_1,D_2,E_1 и E_2 находятся из граничных условий, откуда получаем

$$a_n=\alpha_nr^n,\quad b_n=\beta_nr^n,\ n\ge 1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (1.12.3), получим решение задачи Дирихле в виде ряда

$$f(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nr^n\cos n\varphi+\beta_nr^n\sin n\varphi,\ r\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi].\quad (1.12.4)$$

Однако, решение задачи можно представить и в интегральном виде. Покажем как это сделать. Подставим в формулу (1.12.4) выражения для коэффициентов α_n,β_n и проделаем простые выкладки, аналогичные тем, которые мы уже проделывали при выводе формулы для ядра Дирихле (1.5.1):

$$\begin{aligned}
f(r,\varphi) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^k \cos k\varphi + \beta_k r^k \sin k\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} g(t) r^k (\cos kt \cos k\varphi + \sin kt \sin k\varphi) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-\varphi) dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-\varphi)\right) dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathcal{P}(r, t-\varphi) dt,
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{P}(r,z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kz. \tag{1.12.5}$$

Пусть $r \in [0,1)$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(r,z) &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikz} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{re^{iz}}_{\substack{=q \\ |q|=|r|<1}})^k = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\frac{re^{iz}}{1-re^{iz}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Re}(re^{iz}(1-re^{-iz}))}{(1-re^{iz})(1-re^{-iz})} = \frac{1}{2} + \frac{r\cos z - r^2}{1-2r\cos z + r^2} = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos z + r^2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $r \in [0,1)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$f(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)(1-r^2)dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}. \tag{1.12.6}$$

Определение 13. Интеграл в формуле (1.12.6) называется *интегралом Пуассона*, а функция $\mathcal{P}(r,z)$, задаваемая формулой (1.12.5) — *ядро Пуассона*.

Можно проверить прямой подстановкой, что функция $f(r,\varphi)$, представляемая своим интегралом Пуассона (1.12.6), действительно удовлетворяет уравнению (1.12.1). Кроме того, известно, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)(1-r^2)dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2} = \frac{g(\varphi+0)+g(\varphi-0)}{2} = g(\varphi).$$

Поскольку задача Дирихле имеет единственное решение, то, следовательно, оно задается формулой (1.12.6).

Упражнение 3. Проверить, что интеграл Пуассона удовлетворяет уравнению Лапласа в единичном круге.

1.13 Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро–Фейера

Лекция 5

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция и $T_n(x)$ — n-ая частичная сумма ее ряда Фурье.

Определение 14. Функция

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) = \frac{T_0(x) + T_1(x) + \ldots + T_{n-1}(x)}{n}$$

называется *чезаровским* средним последовательности T_n, или *суммой Фейера*[8] порядка n.

Упражнение 4. Используя формулу (1.5.3) докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{\sin\frac{n(y-x)}{2}}{\sin\frac{y-x}{2}} \right)^2 dy. \tag{1.13.1}$$

Определение 15. Интеграл (1.13.1) называется *интегралом Фейера*, а функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right)^2$$

называется *ядром Фейера*.

Упражнение 5. Проверьте свойство ядер Фейера

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz = 1.$$

Теорема 9. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция такая, что в точке $x \in \mathbb{R}$ существуют и конечны односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Если функция непрерывна во всех точках, то сходимость равномерная.

Эта теорема называется теоремой Фейера. Она, в частности, утверждает, что если ряд Фурье функции f сходится в какой-нибудь точке $x \in \mathbb{R}$, и при этом пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют и конечны, то он сходится непременно к их полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

[8] Липот Фейер (1880–1959) — венгерский математик, успешно применивший метод средних арифметических для исследования обобщенного суммирования рядов Фурье

1.14 Теоремы Вейерштрасса

1.14.1. Теорема о приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами

Теорема 10. *Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда найдется последовательность тригонометрических многочленов $S_n(x)$, равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.*

$$S_n(x) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 10. Пусть f^* — 2π-периодическое продолжение функции f на всю числовую прямую. Ясно, что f^* непрерывна. Поэтому, взяв в качестве тригонометрических многочленов $S_n(x)$ средние по Чезаро–Фейеру ряда Фурье функции f^* и применив теорему 9, получим требуемое. $\square$

Отметим, что построенная последовательность тригонометрических многочленов не единственна. Можно, например, в качестве $S_n(x)$ взять частичную сумму ряда Фурье функции $F_{1/n}(x) = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f^*(t)dt$. Такие функции называются средним по Стеклову. Доказательство равномерной сходимости можно посмотреть в [A96.2].

1.14.2. Теорема о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами

Теорема 11. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x) = \sum_{k=0}^{M_n} c_{k,n}x^k$, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.*

$$P_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 11. Поскольку линейным (а значит непрерывным) преобразованием мы можем "пересадить" функцию $f(x)$ на любой другой отрезок, будем считать, что $[a, b] = [0, \pi]$. Продолжим функцию четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$. Получившаяся функция будет удовлетворять условию предыдущей теоремы 10, поэтому найдется последовательность $S_n(x)$ тригонометрических многочленов (возьмем такую же, которая строилась в теореме 10), равномерно на $[-\pi, \pi]$ (следовательно, и на $[0, \pi]$) приближающая непрерывную функцию $f(x)$. Пусть

$$S_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} \cos kx,$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $n \geq N_1$

$$\left|\alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} \cos kx - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как для любого $k \geq 1$

$$\cos kx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!},$$

причем степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, в том числе и на $[0, \pi]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых $k, n \geq 1$ найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon, k, n) > 0$ такой, что и для всех $x \in [0, \pi]$ при всех $l \geq N_2$

$$\Big| \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} - \cos kx \Big| < \frac{\varepsilon}{2n|\alpha_{k,n}|}.$$

Без ограничения общности считаем, что все $\alpha_{k,n} \neq 0$. Пусть

$$D_{k,n} = \sum_{m=0}^{N_2(1/n,k,n)} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!}$$

и

$$P_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} D_{k,n}.$$

Покажем, что $P_n(x)$ равномерно сходится на $[0, \pi]$ к $f(x)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), 1/\varepsilon\}$ получим для всех $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &\leq |P_n(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - f(x)| \leq \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}(D_{k,n} - \cos kx) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}|\, |D_{k,n} - \cos kx| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}| \frac{1}{2n^2|\alpha_{k,n}|} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Рекомендуемая литература: [A96.2], [B11], [4], [5], [8].

Глава 2

Преобразование Фурье

2.1 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда для любого $l > 0$ на интервале $[-l, l]$ она представляется своим рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Применяя формулы (1.2.2) и (1.2.3), перепишем это равенство в виде

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(y)\left(\cos\frac{\pi n y}{l}\cos\frac{\pi n x}{l} + \sin\frac{\pi n y}{l}dy\sin\frac{\pi n x}{l}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(y)\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n(y-x)}{l}.$$

Поскольку сумма $\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n(y-x)}{l}$ очень похожа на сумму Римана для функции $\cos z(y-x)$ от переменной z, то при стремлении $l \to \infty$, т.е. при измельчении разбиения всей $\mathbb{R}^+$ на отрезки $[\frac{\pi n}{l}, \frac{\pi(n+1)}{l}]$, мы "получим"интеграл $\int_0^{\infty}\cos z(y-x)dz$. Естественно, это — не строгое рассуждение уже потому, что последний интеграл расходящийся. Однако, оно позволяет увидеть во что переходит ряд Фурье при увеличении периода функции до бесконечности.

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy < \infty$, то первое слагаемое стремится к нулю, и получается равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_0^{\infty}\cos z(y-x)dzdy.$$

Поменяв интегрирование местами, получим

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yxdy, \tag{2.1.1}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos zydz, \tag{2.1.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin zydz. \tag{2.1.3}$$

Определение 16. Функции $a(y)$ и $b(y)$, задаваемые формулами (2.1.2) и (2.1.3) называются *прямым косинус* и *синус-преобразованием Фурье* функции f. Интеграл в правой части (2.1.1) — интеграл Фурье, а сама формула (2.1.1) называется интегральной формулой Фурье, или интегральным представлением Фурье функции f.

2.2 Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье

Теорема 12. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yxdy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

где $a(y)$ и $b(y)$ — прямые косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 12. Нужно доказать, что

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A a(y) \cos yx + b(y) \sin yxdy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(A) = \int_0^A a(y) \cos yx + b(y) \sin yxdy = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos y(z-x) dz \right) dy \overset{\circledast}{=} \\ \overset{T??}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left(\int_0^A \cos y(z-x) dy \right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \frac{\sin A(z-x)}{\pi(z-x)} dz = \\ \overset{z-x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} \right) f(x+y) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = \\ = \int_0^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = I_1(A) + I_2(A),\end{aligned}$$

где

$$I_1(A) = \int_1^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy,$$

$$I_2(A) = \int_0^1 (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy.$$

Первый интеграл $I_1(A)$ по лемме 1 Римана–Лебега сходится к нулю при $A \to +\infty$, поскольку функция $\frac{f(x+y)+f(x-y)}{\pi y}$ абсолютно интегрируема на $[1, +\infty)$:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x+y)+f(x-y)}{\pi y} \right| dy \overset{y \geq 1}{\leq} \frac{1}{\pi} \left(\int_1^{+\infty} |f(x+y)|dy + \int_1^{+\infty} |f(x-y)|dy \right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_{1+x}^{+\infty} |f(y)|dy + \int_{-\infty}^{-1+x} |f(y)|dy \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dy < \infty.$$

Второй интеграл $I_2(A)$ представим в виде суммы трех других интегралов $I_{21}(A)$, $I_{22}(A)$ и $I_{23}(A)$:

$$I_2(A) = \int_0^1 (f(x+y) - f(x+0) + f(x-y) - f(x-0) + f(x+0) + f(x-0)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x+y)-f(x+0)}{y} \sin Ay dy}_{I_{21}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x-y)-f(x-0)}{y} \sin Ay dy}_{I_{22}} +$$
$$+ \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \frac{\sin Ay}{y} dy}_{I_{23}}.$$

Так как f кусочно-гладкая, то для любого $x \in \mathbb{R}$ будут ограниченными и, следовательно, абсолютно интегрируемыми на $[0, 1]$ функции $g_{1,x}(y) = \frac{f(x+y)-f(x+0)}{y}$ и $g_{2,x}(y) = \frac{f(x-y)-f(x-0)}{y}$; поэтому по лемме 1 Римана–Лебега интегралы $I_{21}(A)$ и $I_{22}(A)$ стремятся к нулю при $A \to +\infty$. Предел для интеграла $I_{23}(A)$ находится непосредственным вычислением:

$$\lim_{A \to +\infty} I_{23}(A) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_0^1 \frac{\sin Ay}{y} dy =$$
$$\overset{Ay=z}{=} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin z}{z} dz =$$
$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Для завершения доказательства нам осталось в равенстве $\circledast$ обосновать переход от одного повторного интеграла к другому. Для этого, используя теорему **??** Фубини–Тонелли, достаточно доказать сходимость двойного интеграла $\iint_D f(z) \cos y(z-x) dz dy$, где $D = [0, A] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$. Это будет сделано, если мы докажем абсолютную сходимость этого двойного интеграла, которая в свою очередь ввиду теоремы **??** Фубини–Тонелли будет следовать, например, из сходимости повторного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| \left(\int_0^A |\cos y(z-x)| dy \right) dz \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz < \infty.$$

Теорема доказана. $\square$

2.3 Интеграл Фурье на полупрямой

Пусть $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Продолжив ее четным образом на $(-\infty, 0]$, запишем для нее интегральное представление Фурье: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx dy, \qquad (2.3.1)$$

поскольку из-за четности

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\cos yz dz,$$

и

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{even}(z)\sin yz dz = 0.$$

Аналогичные формулы получаются, если сделать нечетное продолжение функции f на $(-\infty, 0]$: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \int_0^{+\infty} b(y)\sin yx dy, \qquad (2.3.2)$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\sin yz dz,$$

и

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{odd}(z)\cos yz dz = 0.$$

Определение 17. Формулы (2.3.1) и (2.3.2) задают соответственно *обратное косинус-* и *синус-преобразование Фурье*.

Пример 3. Вычислим прямое косинус- и синус-преобразование Фурье, а также само интегральное представление Фурье для функции $f(x) = e^{-ax}$, $x \geq 0$, $a > 0$. Продолжив ее четным и нечетным образом, получим

$$a(y) + ib(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-az}(\cos yz + i\sin yz)dz = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-az}e^{iyz}dz =$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{e^{z(-a+iy)}}{-a+iy}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{a-iy} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{a}{a^2+y^2} + i\frac{2}{\pi}\frac{y}{a^2+y^2},$$

откуда

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\frac{a}{a^2+y^2}, \quad b(y) = \frac{2}{\pi}\frac{y}{a^2+y^2};$$

и для любого $x \geq 0$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{a\cos yx}{a^2+y^2}dy,$$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} b(y)\sin yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{y\sin yx}{a^2+y^2}dy.$$

Эти два последних интеграла называются *интегралами Лапласа.*

2.4 Представление интеграла Фурье в комплексной форме

Лекция 6

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда по теореме 12 для любого $x\in\mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy.$$

Перепишем этот интеграл в комплексной форме, заменяя $\cos yx$ и $\sin yx$ по формулам Эйлера (мы уже проделывали такие выкладки при выводе формулы (1.4.2) для комплексной формы ряда Фурье). Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy} + \frac{a(y)+ib(y)}{2}e^{-ixy}dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{a(-y)+ib(-y)}{2}e^{ixy}dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\begin{aligned} \frac{a(y)-ib(y)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)(\cos zy) - i\sin zy)dz = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iyz}dz = \frac{a(-y)+ib(-y)}{2}. \end{aligned}$$

Определение 18. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy \qquad (2.4.1)$$

называется *комплексной формой интеграла Фурье.*

Определение 19. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_-, переводящие функцию f в функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно, где

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iyx} dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f, а

$$\mathrm{F}_-[f(y)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iyx} dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f.

Используя понятие прямого и обратного преобразования Фурье, формулу (2.4.1) можно переписать в виде

$$f(x) = \mathrm{F}_-[\mathrm{F}_+[f(z)](y)](x) = \mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(z)](y)](x). \tag{2.4.2}$$

Пример 4. Вычислим преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Имеем

$$\mathrm{F}_+[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{-iyx} dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos yx dy + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \sin yx dy}_{=0} \right) =$$
$$\overset{|x|y=z}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{az^2}{|x|^2}} \cos z dz.$$

Таким образом нам нужно вычислить интеграл

$$J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Az^2} \cos z dz$$

в точке $A = \frac{a}{|x|^2}$. Покажем, что $J(A)$ – дифференцируемая функция. Действительно,

$$\frac{d}{dA} J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dA} e^{-Az^2} \cos z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} -z^2 e^{-Az^2} \cos z dz.$$

Смена мест интегрирования и дифференцирования законна, поскольку для любого $A_0 > 0$ и любого $A > A_0$

$$|-z^2 e^{-Az^2} \cos z| < z^2 e^{-A_0 z^2},$$

где последняя функция абсолютно интегрируема и не зависит от A. Далее, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
J(A) &= \underbrace{e^{-Az^2}\sin z\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2A\int_{-\infty}^{+\infty} z\sin z e^{-Az^2}dz = \\
&= -2A\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-Az^2}d\cos z = -2A\underbrace{z\cos ze^{-Az^2}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2A\int_{-\infty}^{+\infty}\cos z d ze^{-Az^2} = \\
&= 2A\int_{-\infty}^{+\infty}\cos ze^{-Az^2}dz - 4A^2\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\cos ze^{-Az^2}dz = \\
&= 2AJ(A) + 4A^2\frac{d}{dA}J(A),
\end{aligned}$$

откуда

$$(1-2A)J = 4A^2J'.$$

Решая это простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$J(A) = \frac{ce^{-1/4A}}{\sqrt{A}},$$

где c — некоторая константа, которую еще предстоит определить. Вспоминая равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}}J\left(\frac{a}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}\cos yxdy,$$

и подставляя после преобразований $x = 0$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

откуда $c = \sqrt{\pi}$ и

$$\mathrm{F}_+[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-x^2}{4a}}. \tag{2.4.3}$$

Поскольку легко проверить, что

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x) = \mathrm{F}_-[f(y)](-x), \tag{2.4.4}$$

то

$$\mathrm{F}_-[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-x^2}{4a}}. \tag{2.4.5}$$

Отметим также, что если $a = 1/2$, то формулы (2.4.3) и (2.4.5) становятся совсем легко запоминаемыми

$$\mathrm{F}_+[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = \mathrm{F}_-[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2.4.6}$$

2.5 Быстроубывающие функции

2.5.1. Здесь мы рассмотрим класс функций в $\mathbb{R}^n$, для которых можно определить преобразование Фурье, обладающее многими замечательными свойствами.

Определение 20. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с целочисленными координатами $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$ называется *мультииндексом.*

С мультииндексами связаны следующие операции и обозначения

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n);\\
&\alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha_k \le \beta_k,\ 1 \le k \le n;\\
&\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!;\\
&|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n;\\
&x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\\
&D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Определение 21. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ n \ge 1$, называется *быстроубывающей*, если

1) f — бесконечно дифференцируемая функция, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) для любых мультииндексов α, β существует константа $c = c(\alpha, \beta) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c < \infty.$$

Условие 2) эквивалентно

2') для любого мультииндекса α и любого $p > 0$ существует константа $k = k(\alpha, p) > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha f(x)| \le \frac{k}{1 + \|x\|^p}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Множество быстроубывающих функций обозначают как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 3. *Условия 2) и 2') эквивалентны.*

Пример 5. Приведем примеры быстроубывающих функций.

1) Функция $f(x) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \ldots - a_n x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a_k > 0$, — быстроубывающая функция. Действительно, она бесконечно дифференцируема и для любого мультииндекса β производная $D^\beta f(x) = P_\beta(x) f(x)$, где $P_\beta(x)$ некоторый полином. Возьмем еще один мультииндекс — α. Поскольку $x^\alpha P_\beta(x) f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то найдется $R > 0$ такое, что

$$|x^\alpha P_\beta(x) f(x)| < 1 \text{ при всех } \|x\| > R.$$

Полагая $M(\alpha, \beta) = \sup\limits_{\|x\| \le R} |x^\alpha P_\beta(x) f(x)|$, получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \le \max\{M, 1\} = c(\alpha, \beta) < \infty.$$

2) Всякая финитная функция в $\mathbb{R}^n$ является быстроубывающей. Чтобы это понять, достаточно вспомнить определение.

Определение 22. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *финитной* в D, если она бесконечно дифференцируема и ее носитель $\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}\{x \in D : f(x \neq 0)\}$ является компактным подмножеством в D. Множество финитных функций обозначают как $C_0^\infty(D)$.

Примером финитной функции может служить

$$\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\varepsilon^2 - \|x-x_0\|^2}}, & \|x-x_0\| \le \varepsilon, \\ 0, & \|x-x_0\| > \varepsilon, \end{cases}$$

поскольку $\operatorname{supp} \omega_{x_0,\varepsilon}$ есть замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0 и радиуса ε. А бесконечная дифференцируемость — это следствие бесконечной дифференцируемости для функции $f(x) = e^{-1/x}H(x)$, где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

а значение $H(0)$ не столь важно и в разных ситуациях полагают равным либо 1, либо 1/2.

Определение 23. Функция $H(x)$ называется *функцией Хевисайда*, или *функцией скачка*.

2.5.2. Свойства быстроубывающих функций

1°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$af + bg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $af + bg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(af(x) + bg(x))| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |ax^\alpha D^\beta f(x) + bx^\alpha D^\beta g(x)| \le \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|ax^\alpha D^\beta f(x)| + |bx^\alpha D^\beta g(x)|) \le \\ &\le |a| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| + |b| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)| \le \\ &\le |a|c(\alpha,\beta,f) + |b|c(\alpha,\beta,g) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — линейное пространство. □

2°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ производная

$$D^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $D^\gamma f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (D^\gamma f(x))| \overset{(2.5.2)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta+\gamma} f(x)| < c(\alpha, \beta+\gamma) < \infty.$$

$\square$

Упражнение 6. Покажите, что для любых мультииндексов α и β верно равенство

$$D^\alpha (D^\beta f(x)) = D^{\alpha+\beta} f(x). \tag{2.5.2}$$

3°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ

$$x^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $x^\gamma f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (x^\gamma f(x))| &\overset{(2.5.4)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{0\le\delta\le\beta} C_\beta^\delta D^\delta x^\gamma D^{\beta-\delta} f(x)| = \\ &\overset{(2.5.3)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{\substack{0\le\delta\le\beta\\ \delta\le\gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta x^{\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| \le \\ &\le \sum_{\substack{0\le\delta\le\beta\\ \delta\le\gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha+\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| < \\ &< \sum_{\substack{0\le\delta\le\beta\\ \delta\le\gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta c(\alpha+\gamma-\delta, \beta-\delta) < \infty.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали легко проверяемое равенство

$$D^\delta x^\gamma = \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\delta)!} x^{\gamma-\delta}, & \text{если } \delta \le \gamma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.5.3}$$

$\square$

Упражнение 7. Докажите многомерный аналог формулы Лейбница

$$D^\beta (f(x)g(x)) = \sum_{0\le\delta\le\beta} C_\beta^\delta D^\delta f(x) D^{\beta-\delta} g(x), \tag{2.5.4}$$

где

$$C_\beta^\delta = \frac{\beta!}{\delta!(\beta-\delta)!} = \prod_{k=1}^n C_{\beta_k}^{\delta_k}.$$

4°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого полинома $P_m(x)$ степени m в $\mathbb{R}^n$

$$P_m(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Поскольку $P_m(x) = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C}$, то это свойство есть следствие свойств **1°** и **3°**. □

Упражнение 8. Докажите, что верно следующее свойство в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x)g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстроубывающих функций замкнуто относительно следующих операций: сложения, умножения, умножения на полином и дифференцирования.

2.6 Преобразование Фурье для быстроубывающих функций

Лекция 7

2.6.1. По аналогии с преобразованием Фурье для абсолютно интегрируемых кусочно гладких функций определим его для быстроубывающих функций.

Определение 24. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_-, переводящие функцию f в функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно, где

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y,x)} dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f, а

$$\mathrm{F}_-[f(y)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i(y,x)} dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f. Здесь (y, x) обозначает скалярное произведение векторов $y, x \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$(y, x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n.$$

Проверим, что интегралы, стоящие в определении функций $\hat{f}$ и $\check{f}$, сходящиеся. Действительно, по пункту 2') определения быстро убывающих функций для любого $p > 0$ существует константа $k > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) e^{\pm i(y,x)}| dy \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k dy}{1 + \|y\|^p}.$$

При подходящем выборе p ($p > n$) этот интеграл сходится.

2.6.2. Свойства преобразования Фурье быстроубывающих функций

1. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{F}_\pm[af(y) + bg(y)](x) = a\mathrm{F}_\pm[f(y)](x) + b\mathrm{F}_\pm[g(y)](x). \tag{2.6.1}$$

Доказательство. Следует из свойства **1**° быстроубывающих функций и линейности интеграла. □

2. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[y^\alpha f(y)](x) = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x).} \tag{2.6.2}$$

Доказательство. Имеем

$$D^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x) = (2\pi)^{-n/2} D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{\mp i(y,x)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^\alpha e^{\mp i(y,x)} dy =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\mp iy)^\alpha e^{\mp i(y,x)} dy = (\mp i)^{|\alpha|} \mathrm{F}_\pm[y^\alpha f(y)](x).$$

Поскольку $|f(y) y^\alpha e^{\mp i(y,x)}| \le |f(y) y^\alpha|$, а $y^\alpha f(y)$ абсолютно интегрируемая (так как по свойству **3**° быстроубывающих функций она быстроубывающая), то дифференцирование под знаком интеграла было законно. □

3. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[D^\alpha f(y)](x) = (\pm ix)^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x).} \tag{2.6.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{F}_\pm[D^\alpha f(y)](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(y) e^{\mp i(y,x)} dy =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}} (\underbrace{D^{(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} f(y)}_{:=g(y)}) e^{\mp i(y,x)} dy_1 \right) dy_2 \ldots dy_n.$$

Рассматривая внутренний интеграл и интегрируя по частям α_1-раз, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{\mp i(y,x)} d\left(\frac{\partial^{\alpha_1 - 1}}{\partial y^{\alpha_1 - 1}} g(y) \right) =$$
$$= \underbrace{e^{\mp i(y,x)} \left. \frac{\partial^{\alpha_1 - 1}}{\partial y^{\alpha_1 - 1}} g(y) \right|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1 - 1}}{\partial y^{\alpha_1 - 1}} g(y) (\mp ix_1) e^{\mp i(y,x)} dy_1 =$$
$$\overset{\alpha_1\text{–раз}}{=} (-1)^{\alpha_1} (\mp ix_1)^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1 = (\pm ix_1)^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1.$$

Внеинтегральные члены занулялись, поскольку по свойству **2**° быстроубывающих функций g — быстроубывающая. Подставляя полученное выражение обратно в n-кратный интеграл, меняя интегрирование местами, проделываем тоже самое по переменной y_2, потом по y_3 и т.д. до y_n. В итоге получим требуемое свойство, выраженное формулой (2.6.3). □

④. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{F}_{\pm}[f(y)](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. По формуле (2.6.2) мы можем найти производную любого порядка для $\mathrm{F}_{\pm}[f(y)](x)$, поэтому она бесконечно дифференцируема. Докажем свойство 2) из определения быстроубывающих функций. Имеем, для любых мультииндексов α и β

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \mathrm{F}_{\pm}[f(y)](x)| \overset{(2.6.2)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \mathrm{F}_{\pm}[y^\beta f(y)](x)| =$$

$$\overset{(2.6.3)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathrm{F}_{\pm}[\underbrace{D^\alpha(y^\beta f(y))}_{:=g(y)}](x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathrm{F}_{\pm}[g(y)](x).$$

Поскольку по свойствам **2**$^\circ$ и **3**$^\circ$ быстроубывающих функций g — быстроубывающая, то для ограниченности последнего супремума, достаточно доказать, что $\mathrm{F}_{\pm}[g(y)](x)$ непрерывная функция, сходящаяся на бесконечности к нулю.

Непрерывность следует уже для абсолютно интегрируемых функций. Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{F}_{\pm}[g(y)](x) = \lim_{x\to x_0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \lim_{x\to x_0} e^{\mp i(y,x)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x_0)} dy =$$

$$= \mathrm{F}_{\pm}[g(y)](x_0).$$

Предел можно было внести под знак интеграла, так как $|g(y)e^{\mp i(y,x)}| \le |g(y)|$. Докажем теперь сходимость к нулю. Пусть $x \to \infty$, следовательно, хотя бы одна координата $x_k \to \infty$. Пусть для определенности это будет координата x_1. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{F}_{\pm}[g(y)](x) = \lim_{x\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i y_1 x_1} dy_1}_{:=v(y_2,\dots,y_n;x_1)} \underbrace{e^{\mp i((y,x)\pm y_1 x_1)}}_{:=u(y_2,\dots,y_n;x_2,\dots,x_n)} dy_2 \dots dy_n =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{x\to\infty} uv dy_2 \dots dy_n = 0,$$

поскольку $|uv| \le |v| \le \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy_1$ и $\lim_{x\to\infty} v = 0$ по лемме Римана–Лебега. □

⑤. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_{\pm}[f(Ay+b)](x) = \frac{e^{\pm i(x,A^{-1}b)}}{|\det A|} \mathrm{F}_{\pm}[f(y)]\left(\left(A^{-1}\right)^* x\right).} \qquad (2.6.4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_\pm[f(Ay+b)](x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(Ay+b)e^{\mp i(y,x)}dy = \\
\overset{Ay+b=u}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(A^{-1}(u-b),x)}\frac{du}{|\det A|} = \\
= (2\pi)^{-n/2}\frac{e^{\pm i(A^{-1}b,x)}}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(A^{-1}u,x)}du = \\
= (2\pi)^{-n/2}\frac{e^{\pm i(A^{-1}b,x)}}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(u,(A^{-1})^*x)}du.
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим частные случаи формулы (2.6.4). Пусть $b = -x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ и A — тождественное преобразование, т.е. $A = I$, и $A^{-1} = I$ и $(A^{-1})^* = I$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[f(y-x_0)](x) = e^{\mp i(x,x_0)}\mathrm{F}_\pm[f(y)](x).} \tag{2.6.5}$$

Если рассмотреть $b = 0$ и $A = aI, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[f(ay)](x) = \frac{1}{|a|^n}\mathrm{F}_\pm[f(y)]\left(\frac{x}{a}\right).} \tag{2.6.6}$$

Упражнение 9. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ доказать, что

$$f(Ax+b) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2.6.3. Формула обращения

Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(z)](y)](x) = \mathrm{F}_-[\mathrm{F}_+[f(z)](y)](x) = f(x).} \tag{2.6.7}$$

Доказательство. Используем индукцию по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ это в точности формула (2.4.2), доказанная для абсолютно интегрируемых кусочно гладких непрерывных функций. Предполагая справедливость формулы для n, докажем ее для $n+1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(z)](y)](x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z)e^{\mp i(z,y)}e^{\pm i(y,x)}dzdy = \\
= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\underbrace{\left((2\pi)^{-n+1}\int_{\mathbb{R}^{2n-2}} f(z)e^{\mp i(\widehat{z},\widehat{y})}e^{\pm i(\widehat{y},\widehat{x})}d\widehat{z}d\widehat{y}\right)}_{:=g(z_n,x_1,\ldots,x_{n-1})}e^{\mp iz_ny_n}e^{\pm iy_nx_n}dy_ndz_n.
\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $\widehat{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ и аналогично для $\widehat{z}$ и $\widehat{x}$. Для функции g по предположению индукции, справедливо равенство

$$g(z_n, x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(\widehat{z}, z_n)](\widehat{y})](\widehat{x}) = f(\widehat{x}, z_n).$$

Подставляя это выражение в первоначальный интеграл, получаем

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} g(z_n, \widehat{x}) e^{\mp i z_n y_n} e^{\pm i y_n x_n} dy_n dz_n = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\widehat{x}, z_n) e^{\mp i z_n y_n} e^{\pm i y_n x_n} dy_n dz_n =$$
$$= \mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(\widehat{x}, z_n)](y_n)](x_n) = f(x).$$

□

2.7 Свертка функций

2.7.1. Введем новую операцию для функций и изучим ее свойства.

Определение 25. Для $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ функция

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

называется *сверткой* функций f и g.

Легко заметить, что свертка двух функций существует, если, например, одна из функций ограничена, а другая — абсолютно интегрируема. Поэтому свертка двух быстроубывающих функций существует, более того, позже мы поймем, что она тоже является быстроубывающей функцией.

Упражнение 10. Доказать, что свертка двух быстроубывающих функций абсолютно интегрируема.

Рассмотрим простейшие свойства свертки, ограничившись рассмотрением быстроубывающих функций.

1) **Линейность свертки по обоим аргументам.** Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(\alpha f + \beta g) * \phi = \alpha(f * \phi) + \beta(g * \phi), \tag{2.7.1}$$

$$\phi * (\alpha f + \beta g) = \alpha(\phi * f) + \beta(\phi * g). \tag{2.7.2}$$

2) **Коммутативность свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f * g = g * f. \tag{2.7.3}$$

3) **Ассоциативность свертки.** Для любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g) * \phi = f * (g * \phi). \tag{2.7.4}$$

4) **Дифференцирование свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f * g) = (f * D^\alpha g). \tag{2.7.5}$$

Доказательство. Первое свойство следует из линейности интеграла и существования свертки для каждого слагаемого. Для второго имеем

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \overset{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz=(g*f)(x).$$

Ассоциативность доказывается аналогично с помощью соответствующих замен переменных. Для дифференцирования имеем

$$D^\alpha(f*g)(x)=D^\alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x-y)g(y)dy=(D^\alpha f*g)(x).$$

Вторая формула следует из коммутативности свертки. □

2.7.2. Свертка и преобразование Фурье

Поскольку свертка двух быстро убывающих функций абсолютно интегрируема, то мы можем определить преобразование Фурье от такой свертки. Для любых $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[(f*g)(y)](x)=(2\pi)^{n/2}\mathrm{F}_\pm[f(y)](x)\cdot\mathrm{F}_\pm[g(y)](x).} \tag{2.7.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_\pm[(f*g)(y)](x)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz\right)e^{\mp i(y,x)}dy=\\ &\overset{T.??}{=}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)e^{\mp i(y,x)}dy\right)g(z)dz=\\ &\overset{y-z=u}{=}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(z+u,x)}du\right)g(z)dz=\\ &=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(u,x)}du\cdot\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{\mp i(z,x)}dz=\\ &=(2\pi)^{n/2}\mathrm{F}_\pm[f(u)](x)\cdot\mathrm{F}_\pm[g(z)](x).\end{aligned}$$

□

Следствием доказанной формулы является формула для преобразования Фурье от произведения быстроубывающих функций. Напомним, что по свойству **5°** быстроубывающих функций произведение быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция и

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[(f\cdot g)(y)](x)=(2\pi)^{-n/2}(\mathrm{F}_\pm[f(y)]*\mathrm{F}_\pm[g(y)])(x).} \tag{2.7.7}$$

Доказательство. Заменим в формуле (2.7.6) функции $f(x)$ и $g(x)$ на их преобразования Фурье — $\mathrm{F}_\pm[f(y)](x)$ и $\mathrm{F}_\pm[g(y)](x)$ соответственно. Далее применим формулу обращения и, навесив преобразование Фурье к получившемуся равенству, получим требуемое равенство. □

Упражнение 11. Используя формулу (2.7.6) докажите, что свертка быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция.

В связи с этим упражнением отметим в заключение, что к дополнению к уже обсуждавшимся свойствам пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, оно замкнуто относительно взятия преобразования Фурье и операции свертки.

2.8 Равенство Парсеваля

Лекция 8

Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx. \tag{2.8.1}$$

Доказательство. Докажем равенство для обратного преобразования Фурье, для прямого доказательство аналогично. Покажем сначала, что для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx. \tag{2.8.2}$$

Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(y,x)}dy\right)g(x)dx =$$
$$\overset{T.??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i(x,y)}dx\right)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Далее, легко проверить, что справедливы также формулы

$$\overline{\hat{f}(x)} = \check{\overline{f}}(x), \ \ \overline{\check{f}(x)} = \hat{\overline{f}}(x) \tag{2.8.3}$$

Применяя обе формулы, а также формулу обращения, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \overset{(2.6.7)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\check{f}}(x)\overline{g(x)}dx \overset{(2.8.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\hat{\overline{g}}(x)dx \overset{(2.8.3)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx.$$

$\square$

2.9 Формула Пуассона

Теорема 13. *Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедлива формула Пуассона*

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n). \tag{2.9.1}$$

Доказательство теоремы 13. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x)$$

вещественного переменного x. Поскольку

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(2\pi n + x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k(p)}{1 + |2\pi n + x|^p},$$

то функция F определена для всех $x \in \mathbb{R}$, более того эта функция непрерывно дифференцируема и 2π-периодична. Действительно,

$$F(x + 2\pi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x + 2\pi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi(n+1) + x) =$$

$$\stackrel{n+1=m}{=} \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(2\pi m + x) = F(x)$$

и

$$F'(x) = \sqrt{2\pi} \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(2\pi n + x).$$

Справедливость последнего равенства будет доказана, если мы покажем, что ряд из производных сходится равномерно в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ — этого будет достаточно. По определению быстроубывающей функции найдется константа $k > 0$ такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f'(2\pi n + x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} =$$

$$= \frac{k}{1 + x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} + \frac{k}{1 + (2\pi n - x)^2} =$$

$$\leq k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2k}{1 + (2\pi)^2 (n-1)^2} < 3k + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k}{2\pi^2 n^2} < \infty.$$

По признаку Вейерштрасса ряд из производных сходится равномерно на $[-2\pi, 2\pi]$ и, следовательно, $F(x)$ непрерывно дифференцируема. Поэтому для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье в комплексной форме (1.4.2):

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Подставляя в это равенство значение $x = 0$, получаем

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.$$

Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что $c_n = \hat{f}(n)$. Имеем

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x)\right)e^{-inx}dx = \\
&\overset{\text{равн.сх.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(2\pi n + x)e^{-inx}dx = \\
&\overset{x+2\pi n=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n}}_{=\int_{\mathbb{R}}} f(y)e^{-iny}\underbrace{e^{i2\pi n^2}}_{=1}dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iny}dy = \hat{f}(n).
\end{aligned}$$

□

2.10 Теорема Котельникова–Шеннона

Теорема 14. *Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ зануляется вне некоторого интервала $[-a, a]$, $a > 0$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right)\operatorname{sinc}(ax - \pi n),$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ — функция отсчетов.

Доказательство теоремы 14. Имеем

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{(2.6.7)}{=} \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{iyx}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\hat{f}(y)e^{iyx}dy = \\
&\overset{(1.4.3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{-i\pi ny}{a}}e^{iyx}dy \overset{T.4}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\int_{-a}^{a} e^{\frac{-i\pi ny}{a}}e^{iyx}dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2a\frac{\sin(ax - \pi n)}{ax - \pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sinc}(ax - \pi n).
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались разложением гладкой функции $\hat{f}(x)$ в комплексный ряд Фурье на отрезке $[-a, a]$. Остается только показать, что $\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} = f\left(\frac{\pi n}{a}\right)$:

$$\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} \overset{(1.4.4)}{=} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\hat{f}(x)e^{\frac{i\pi nx}{a}}dx = \check{\hat{f}}\left(\frac{\pi n}{a}\right) = f\left(\frac{\pi n}{a}\right).$$

□

2.11 Решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу о распределении температуры в пространстве без источников тепла или холода. Обозначим через $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — температуру в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ в момент времени $t \geq 0$. Известно, что закон изменения температуры определяется *уравнением теплопроводности* и начальным распределением температуры:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u = a^2 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right),\ a > 0; \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{2.11.1}$$

Предположим, что f достаточно хорошая (гладкая и абсолютно интегрируемая), чтобы можно было применить преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Естественно предполагать, что функция $u(x,t)$ унаследует эти свойства. Обозначим через

$$v(x,t) = \mathrm{F}_+[u(z,t)](x)$$

прямое преобразование Фурье функции $u(x,t)$ по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Применив такое преобразование Фурье к уравнению (2.11.1), получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{F}_+[u(z,t)](x) = \mathrm{F}_+\left[\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right](x) \overset{(2.11.1)}{=} \mathrm{F}_+[a^2 \triangle u(z,t)](x) =$$
$$\overset{(2.6.1)}{=} a^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_+\left[\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z_k^2}\right](x) \overset{(2.6.3)}{=} a^2 \sum_{k=1}^{n} (ix_k)^2 \mathrm{F}_+[u(z,t)](x) = -\|x\|^2 v$$

и $v(x,0) = \hat{f}(x)$. Таким образом, мы получили параметрическое семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (с параметром $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -a^2\|x\|^2 v, \\ v(0) = \hat{f}(x), \end{cases}$$

решая которые, получаем

$$v(x,t) = \hat{f}(x) e^{-a^2\|x\|^2 t},\ x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Применив к последнему соотношению обратное преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$u(x,t) \overset{(2.6.7)}{=} \mathrm{F}_-[\mathrm{F}_+[u(z,t)](y)](x) = \mathrm{F}_-[v(y,t)](x) = \mathrm{F}_-[\hat{f}(y) e^{-a^2\|y\|^2 t}](x) =$$
$$\overset{(2.7.7)}{=} (2\pi)^{-n/2} (\mathrm{F}_-[\hat{f}] * \mathrm{F}_-[e^{-a^2\|y\|^2 t}])(x) = (2\pi)^{-n/2} (f * \mathrm{F}_-[e^{-a^2\|y\|^2 t}])(x) =$$
$$\overset{(2.4.5)}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)(2a^2 t)^{-n/2} e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2 t}}\, dz =$$
$$= (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2 t}}\, dz.$$

Полученная формула для $u(x,t)$ называется *формулой Пуассона* решения уравнения теплопроводности (2.11.1). Поскольку решение единственно, то подставив это решение, можно убедиться, что оно действительно удовлетворяет уравнению и начальному условию.

2.12 Понятие о дискретном преобразовании Фурье

Смотрите [A02, с.52].

Рекомендуемая литература: [A02], [B14.2], [4], [5], [8], [7].

Глава 3

Преобразование Лапласа

3.1 Оригиналы и изображения

Лекция 9

Определение 26. Непрерывная всюду за исключением изолированных точек функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ называется *оригиналом*, если существует вещественное число α такое, что

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t}\,dt < \infty.$$

Инфимум всех таких α называется *показателем роста* функции f и обозначается как $\alpha(f)$.

Из определения показателя роста видно, что сходимость интеграла будет справедлива для каждого $\alpha > \alpha(f)$. Действительно, возьмем такое α, тогда на интервале $[\alpha(f), \alpha)$ найдется β для которого интеграл $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t}\,dt < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t}\,dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t}e^{-(\alpha-\beta)t}\,dt < \int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t}\,dt < \infty.$$

Оригиналы $f(t)$ могут быть определены и на всей числовой прямой, однако нам важны значения, которые они принимают только на положительной полуоси, поэтому в таких случаях мы рассматриваем функцию $f(t)H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда с единичным значением в нуле (2.5.1).

Определение 27. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, определенная в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$ равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{3.1.1}$$

Коротко, связь между оригиналом и изображением записывают как $f(t) \risingdotseq F(p)$. Эту же связь определяют с помощью *преобразования Лапласа* $\mathcal{L}$, сопоставляющего оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, т.е.

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = F(p). \tag{3.1.2}$$

Из определения преобразования Лапласа очевидна его связь с преобразованием Фурье, выражаемая следующей формулой

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v), \ p = u + iv, \ u > \alpha(f). \tag{3.1.3}$$

Пример 6. Пусть $f(t) = 1$. На самом деле как оригинал это функция $H(t)$. Найдем показатель роста. Очевидно, что интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$ сходится для всех $\alpha > 0$ и расходится во всех остальных случаях, поэтому $\alpha(1) = 0$. Таким образом преобразование Лапласа определено в правой комплексной полуплоскости и

$$\mathcal{L}[1](p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

3.2 Простейшие свойства преобразования Лапласа

1. Линейность преобразования Лапласа.

Теорема 15. *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы с показателями роста $\alpha(f)$ и $\alpha(g)$ соответственно, тогда их линейная комбинация $af(t) + bg(t), a, b \in \mathbb{C}$ тоже оригинал с показателем роста $\alpha(af + bg) \le \max\{\alpha(f), \alpha(g)\}$ и*

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](p) = a\mathcal{L}[f(t)](p) + b\mathcal{L}[g(t)](p). \tag{3.2.1}$$

Доказательство теоремы 15. Неравенство для показателя роста следует из рассуждений о показателе роста, приведенных выше. А линейность доказывается либо непосредственно, либо через связь с преобразованием Фурье (3.1.3) и линейности самого преобразования Фурье. □

2. Свойство подобия для преобразования Лапласа.

Теорема 16. *Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста $\alpha(f)$, тогда $f(at)$ тоже оригинал для любого $a > 0$ с показателем роста $\alpha(f(at)) = \frac{\alpha(f)}{a}$ и*

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right). \tag{3.2.2}$$

Доказательство теоремы 16. Имеем

$$\mathcal{L}[f(at)](p) \overset{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(at)H(t)e^{-ut}](v) = \sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(at)H(at)e^{-\frac{u}{a}at}](v) =$$
$$\overset{(2.6.6)}{=} \frac{1}{a}\sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(t)H(t)e^{-\frac{u}{a}t}]\left(\frac{v}{a}\right) \overset{(3.1.3)}{=} \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right).$$

□

3. Смещение изображения.

Теорема 17. *Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста $\alpha(f)$, тогда $e^{-\alpha t}f(t)$ тоже оригинал для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ с показателем роста $\alpha(f) - \operatorname{Re}\alpha$ и*

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p+\alpha). \tag{3.2.3}$$

Доказательство теоремы 17. При $\operatorname{Re}(p+\alpha) > \alpha(f)$ имеем

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)](p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p+\alpha)t}\,dt = \mathcal{L}[f(t)](p+\alpha).$$

□

4. Запаздывание оригинала. Здесь мы рассмотрим взаимосвязь изображений оригинала $f(t)$ и оригинала с запаздывающим аргументом

$$f(t-a)H(t-a),\ a > 0.$$

Их графики представлены на рис. 3.1.

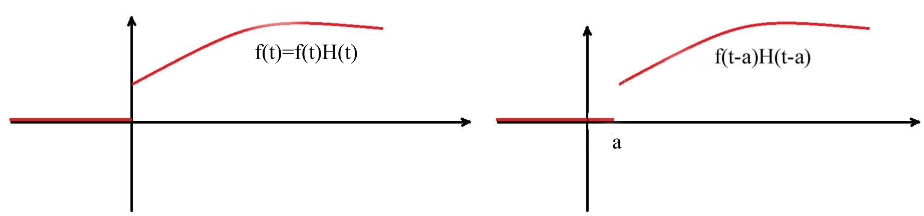


Рис. 3.1: Запаздывание оригинала

Теорема 18. *Пусть $f(t)$ — оригинал, тогда $f(t-a)H(t-a)$ — тоже оригинал для любого $a > 0$ и*

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)](p) = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p). \tag{3.2.4}$$

Доказательство теоремы 18. Опять используя связь с преобразованием Фурье, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)](p) &\overset{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(t-a)H(t-a)e^{-ut}](v) = \\ &= e^{-ua}\sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(t-a)H(t-a)e^{-u(t-a)}](v) = \\ &\overset{(2.6.5)}{=} e^{-ua}e^{-iav}\sqrt{2\pi}\mathrm{F}_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v) = \\ &= e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p).\end{aligned}$$

□

3.3 Аналитичность изображения и формула обращения

Одним из важных свойств преобразования Лапласа является аналитичность изображения. Приведем точную формулировку без доказательства (доказательство возможно будет приведено в курсе ТФКП).

Теорема 19. *Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$. Кроме того,*

$$F(p) \to 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re} p \to \infty.$$

Связь между преобразованием Лапласа и преобразованием Фурье приводит к следующей формуле обращения для преобразования Лапласа.

Теорема 20. *Если $f(t)$ — кусочно-гладкий непрерывный оригинал с изображением $F(p)$, то для любого $u > \alpha(f)$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \tag{3.3.1}$$

Доказательство теоремы 20. Пусть $p = u + iv$ и $u > \alpha(f)$, тогда

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](u + iv) \overset{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi} \mathrm{F}_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v).$$

Применяя формулу обращения (2.4.2) для преобразования Фурье кусочно-гладкой непрерывной функции $f(t)H(t)e^{-ut}$, получаем

$$\sqrt{2\pi} f(t)H(t)e^{-ut} = \mathrm{F}_-[F(p)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u + iv)e^{ivt} dv,$$

откуда при $t \geq 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u + iv)e^{(u+iv)t} dv \overset{p=u+iv}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

□

3.4 Преобразование Лапласа производных и интегралов

Следующим важным свойством является теорема о дифференцировании оригинала.

Теорема 21. *Пусть $f(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ и дифференцируемая при $t > 0$ функция такая, что $f'(t)$ — оригинал. Тогда $f(t)$ тоже оригинал и*

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+). \tag{3.4.1}$$

Доказательство теоремы 21. Докажем, что $f(t)$ есть оригинал. Для этого зафиксируем $\alpha > \alpha(f')$ и $\alpha > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\alpha - \varepsilon > \alpha(f')$ и $\alpha - \varepsilon > 0$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left| \int_0^t f'(s)\, ds + f(0+) \right| e^{-\alpha t}\, dt \le$$
$$\le \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)|\, ds \right) e^{-\alpha t}\, dt + |f(0+)| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)t}\, ds \right) e^{-\varepsilon t}\, dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} \le$$
$$\overset{s \le t}{\le} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s}\, ds \right) e^{-\varepsilon t}\, dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} \le$$
$$\overset{t<+\infty}{\le} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s}\, ds \right) e^{-\varepsilon t}\, dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s}\, ds + \frac{|f(0+)|}{\alpha} < \infty.$$

Из приведенного рассуждения видно, что показатель роста

$$\alpha(f) \le \max\{\alpha(f'), 0\}. \tag{3.4.2}$$

Докажем теперь формулу (3.4.1). Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^b f'(t) e^{-pt}\, dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^b + p \int_0^b f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Пусть $p = u + iv$, $u > \alpha(f')$ и $u > \alpha(f)$. Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-ut}\, dt$ сходится, то величина $|f(t)| e^{-ut}$ не может быть отделена от нуля, следовательно, найдется последовательность $t_n \to \infty$ такая, что

$$|f(t_n) e^{-pt_n}| = |f(t_n)| e^{-ut_n} \to 0.$$

Тогда, взяв $b = t_n$ и перейдя к пределу при $t_n \to \infty$, получаем равенство (3.4.1).

$\square$

Следствие 3. Индукцией по количеству производных можно показать, что справедлива формула

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0+). \tag{3.4.3}$$

Следующее утверждение называется теоремой об интегрировании оригинала.

Теорема 22. *Пусть $f(t)$ — непрерывный при $t \ge 0$ оригинал, тогда $\int_0^t f(s)\, ds$ — тоже оригинал и*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\, ds \right](p) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](p)}{p}. \tag{3.4.4}$$

Доказательство теоремы 22. Положим $g(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, тогда $g'(t) = f(t)$, $g(0+) = 0$ и по предыдущей теореме 21 имеем

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[g'(t)](p) \overset{(3.4.1)}{=} p\mathcal{L}[g(t)](p).$$

□

Следствие 4. Из формулы (3.4.2) вытекает неравенство

$$\alpha\left(\int_0^t f(s)\,ds\right) \le \max\{\alpha(f), 0\}. \tag{3.4.5}$$

3.5 Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема 23. *Если $f(t)$ и $tf(t)$ являются оригиналами, и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то*

$$tf(t) \risingdotseq -F'(p). \tag{3.5.1}$$

Доказательство теоремы 23. Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}\,dt = -\mathcal{L}[tf(t)](p).$$

Операция законна, поскольку интеграл $\mathcal{L}[tf(t)](p)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $p \in \{\operatorname{Re} p \ge \alpha_0\}$ для любого $\alpha_0 > \alpha(tf(t))$. □

Теорема 24. *Если $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ являются оригиналами, и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то*

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(q)\,dq = \lim_{\operatorname{Re} P\to\infty} \int_p^P F(q)\,dq. \tag{3.5.2}$$

Доказательство теоремы 24. Положим $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, тогда $tg(t) = f(t)$ и, применяя теорему 23, получаем

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[tg(t)](p) \overset{(3.5.1)}{=} -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[g(t)](p).$$

Интегрируя по произвольному контуру с концевыми точками p и P, получаем

$$\mathcal{L}[g(t)](p) - \mathcal{L}[g(t)](P) = \int_p^P F(q)\,dq.$$

Из теоремы 19 следует, что

$$\mathcal{L}[g(t)](P) \to 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} P \to \infty.$$

Переходя к пределу, получаем требуемое. □

3.6 Свертка оригиналов и теорема Бореля

Определение 28. *Сверткой* оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $(f_1 * f_2)(t)$, определяемая равенством

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(s) f_2(t-s)\, ds. \tag{3.6.1}$$

Заметим, что это определение согласовано со старым определением свертки 25, если в качестве оригиналов рассматривать, как мы уже делали, функции $f_1(t)H(t)$ и $f_2(t)H(t)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}(f_1 H * f_2 H)(t) &\overset{O.25}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)H(s) f_2(t-s)H(t-s)\, ds = \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s) H(t-s)\, ds = \\ &= \int_0^t f_1(s) f_2(t-s)\, ds \overset{(3.6.1)}{=} (f_1 * f_2)(t).\end{aligned}$$

Следующая теорема называется теоремой Бореля об умножении изображений.

Теорема 25. *Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы с показателями роста $\alpha(f_1)$ и $\alpha(f_2)$ соответственно, тогда их свертка $(f_1 * f_2)(t)$ — тоже оригинал с показателем роста*

$$\alpha(f_1 * f_2) \le \max\{\alpha(f_1), \alpha(f_2)\}$$

и

$$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)](p) = \mathcal{L}[f_1(t)](p) \mathcal{L}[f_2(t)](p). \tag{3.6.2}$$

Доказательство теоремы 25. Для вещественного $\alpha > \max\{\alpha(f_1), \alpha(f_2)\}$ имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| e^{-\alpha t}\, dt &\le \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f_1(s)||f_2(t-s)|\, ds \right) e^{-\alpha t}\, dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s} |f_2(t-s)| H(t-s) e^{-\alpha(t-s)}\, ds \right) dt = \\ &\overset{T.??}{=} \int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s} \left(\int_0^{+\infty} |f_2(t-s)| H(t-s) e^{-\alpha(t-s)}\, dt \right) ds = \\ &\overset{t-s=u}{=} \int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s}\, ds \int_0^{+\infty} |f_2(u)| e^{-\alpha u}\, du < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, свертка есть оригинал. Формула (3.6.2) доказывается аналогично предыдущим рассуждениям: без модулей с заменой α на p. $\square$

Следствие 5. Если $f_1(t)$ непрерывный при $t \geq 0$ оригинал, а $f_2(t)$ непрерывно дифференцируем, то

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)(t)\right](p) = p\mathcal{L}[f_1(t)](p)\mathcal{L}[f_2(t)](p), \tag{3.6.3}$$

Эта формула называется формулой Дюамеля.

Доказательство следствия 5.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)(t)\right](p) \overset{(3.4.1)}{=} p\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)](p) - (f_1 * f_2)(0) =$$
$$\overset{(3.6.2)}{=} p\mathcal{L}[f_1(t)](p)\mathcal{L}[f_2(t)](p).$$

□

3.7 Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \tag{3.7.1}$$
$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},\ a_k, c_k \in \mathbb{C}.$$

Предположим, что правая часть f и решение $y(t)$ со всеми его производными являются оригиналами. Применим к этому уравнению преобразование Лапласа. Используя обозначения $Y(p) \risingdotseq y(t)$ и $F(p) \risingdotseq f(t)$, а также формулу (3.4.3), получаем

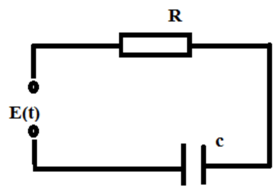
$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)Y(p) - c_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) -$$
$$- c_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) - \ldots - c_{n-2}(a_0 p + a_1) - c_{n-1} a_0 = F(p).$$

Откуда

$$Y(p) = \frac{F(p) + c_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \ldots + c_{n-1} a_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, например, по теореме 20, находим решение $y(t)$. Таким образом, применение преобразования Лапласа сводит дифференциальное уравнение к алгебраическому, решая которое, находим и решение задачи Коши. Аналогичный метод применим и к решению задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Также можно решать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, если входящие интегралы имеют вид свертки. Рассмотрим пример интегрального уравнения из теории электрических цепей.

Пример 7. Рассмотрим простейший RC-контур, состоящий из сопротивления R и конденсатора ёмкости c. К контуру подводится напряжением $E(t)$.



Электрический ток $I(t)$ в контуре будет удовлетворять уравнению

$$RI(t) + \frac{1}{c}\int_0^t I(s)\,ds = E(t).$$

Предположим, что напряжение подводится постоянным $E(t) = E$. Определим какой будет ток $I(t)$. Обозначим $\mathcal{L}[I(t)] = \mathcal{I}$ и применим преобразование Лапласа к этому уравнению. Применяя теорему Бореля и зная изображение 1, находим

$$R\mathcal{L}[I(t)](p) + \frac{1}{c}\mathcal{L}\left[(I * 1)(t)\right](p) = E\mathcal{L}[1](p),$$

$$R\mathcal{I} + \frac{\mathcal{I}}{cp} = \frac{E}{p}.$$

Откуда

$$\mathcal{I} = \frac{E}{R}\frac{1}{p + \frac{1}{cR}} = \frac{E}{R}\mathcal{L}[1]\left(p + \frac{1}{cR}\right) \overset{(3.2.3)}{=} \mathcal{L}\left[\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{cR}}\right](p).$$

Следовательно,

$$I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{cR}},$$

т.е. ток будет постепенно затухать.

Глава 4

Обобщенные функции

4.1 Основные и обобщенные функции

4.1.1. Пробные функции. На протяжении этой главы $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ — это открытое множество.

Определение 29. Функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ называется *основной*, или *пробной*, в G, если она финитна в G, т.е. если она бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель в G.

Определение 30. Пусть φ_n, φ – пробные функции в G. Говорят, что φ_n *сходится* к φ в пространстве основных функций, если

1) существует компакт $K \subset G$, содержащий носители функций φ и φ_n, $n \in \mathbb{N}$,

2) для любого мультииндекса α

$$D^\alpha \varphi(x) \overset{G}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi(x)$$

при $n \to \infty$. Множество основных функций с такой сходимостью обозначают как $\mathcal{D}(G)$, при этом сходимость обозначают как

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} \varphi(x).$$

Пример 8. Пусть $\varphi_n(x) = \omega_{n,1}(x)$. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $\varphi_n(x)$ финитна и $\operatorname{supp} \varphi = [n-1, n+1]$. Легко проверить, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$\varphi_n(x) \to 0,$$

но

$$\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\not\longrightarrow} 0.$$

4.1.2. Обобщенные функции.

Определение 31. Отображение $F : \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ называется *обобщенной функцией*, или *распределением*, если

1) F — линейное отображение, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi);$$

2) F — непрерывное отображение, т.е.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} \varphi(x) \Rightarrow F(\varphi_n) \to F(\varphi).$$

Множество всех обобщенных функций обозначают через $\mathcal{D}'(G)$. Кратко, обобщенные функции можно называть линейными непрерывными функционалами на $\mathcal{D}(G)$.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных функций.

Пример 9. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — локально (абсолютно) интегрируемая функция. Это значит, что для любой точки $x \in G$ существует открытая окрестность U_x в G такая, что $\int_{U_x} |f(x)|dx < \infty$. Множество таких функций обозначают как $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$. С помощью функции f определим обобщенную функцию F_f (обозначаемую часто той же буквой f), действующую по правилу

$$F_f(\varphi) := f(\varphi) := (f, \varphi) := \int_G f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G). \tag{4.1.1}$$

Покажем, что это, действительно, обобщенная функция. Сначала нужно убедиться, что интеграл в (4.1.1) сходится для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Для этого достаточно доказать, что всякая локально интегрируемая функция абсолютно интегрируема на любом компакте $K \subset G$. Поскольку

$$K \subset G = \bigcup_{x \in G} U_x \Rightarrow K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k},$$

тогда

$$\int_K |f(x)|dx \le \sum_{k=1}^{m} \int_{U_{x_k}} |f(x)|dx < \infty.$$

Взяв теперь произвольную $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, получим

$$\left| \int_G f(x)\varphi(x)dx \right| \le \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)||\varphi(x)|dx \le \max|\varphi(x)| \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)|dx < \infty.$$

Линейность функционала F_f следует из линейности интеграла. Осталось проверить непрерывность. Пусть $\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\to} \varphi(x)$, и K — компакт, содержащий носители этих функций. Тогда

$$|(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| = |(f, \varphi_n - \varphi)| \le \int_K |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx,$$

поскольку подинтегральная функция не превосходит абсолютно интегрируемую на K функцию $C|f(x)|$ с константой $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить требуемый ноль.

Определение 32. Всякая обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(G)$, для которой найдется функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ такая, что $F = F_f$ называется *регулярной* обобщенной функцией (распределением). Если такой функции f нет, то обобщенная функция называется *сингулярной*.

Пример 10. Пусть $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\delta \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$\delta(\varphi) = \varphi(0). \tag{4.1.2}$$

Эта сингулярная обобщенная функция называется *δ-функцией Дирака.* В физической литературе часто про действие такой функции пишут

$$\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

однако, пользуясь такой записью, всегда нужно четко понимать, что это означает (4.1.2). Сингулярность δ следует из следующих рассуждений. Предположим, что существует $f_\delta \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ такая, что для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(\delta, \varphi) = \int_G f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Тогда функция $\sin x_1 f_\delta(x)$ будет нулевой почти всюду по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$0 = \sin 0\varphi(0) = (\delta, \sin x_1\varphi(x)) = \int_G \sin x_1 f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Таким образом, $f_\delta(x) = 0$ почти всюду, что противоречит определению для δ.

Упражнение 12. Доказать, что $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 11. Пусть $G = \mathbb{R}$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \frac{\varphi(x)}{x}dx. \tag{4.1.3}$$

Символ $\mathcal{P}$ показывает, что $1/x$ не является локально интегрируемой, поэтому нужно использовать предел в виде главного значения по Коши. В дальнейшем, при возникновении функций, не являющихся локально интегрируемыми, мы уже не будем использовать этот символ, но будем понимать действие порождаемых ими обобщенных функций в виде соответствующего предела.

Поскольку функция φ финитна, то начиная с некоторого $R > 0$ будем иметь включение $\mathrm{supp}\varphi \subset [-R, R]$, поэтому предел по R можно не рассматривать. А предел при $\varepsilon \to +0$ существует и конечен, поскольку

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(-y)}{y}dy + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx,$$

а функция $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ интегрируема на отрезке $[0, R]$.

Линейность и непрерывность $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ практически очевидна.

Упражнение 13. Показать, что

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx. \tag{4.1.4}$$

4.2 Сходимость обобщенных функций

4.2.1. Все операции, определяемые для обобщенных функций, мотивированы аналогиями, возникающими при рассмотрении регулярных обобщенных функции. Мы будем называть такие аналогии наводящими соображениями. Первой операцией рассмотрим предельный переход в $\mathcal{D}'(G)$.

Наводящие соображения. Пусть f_n, f — абсолютно интегрируемые на G функции, и $f_n \to f$ почти всюду, причем $|f_n| < |f|$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(f_n, \varphi) = \int_G f_n(x)\varphi(x)dx \to \int_G f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi).$$

Определение 33. Пусть $F_n, F \in \mathcal{D}'(G)$. Говорят, что F_n *сходится* к F при $n \to \infty$, если

$$(F_n, \varphi) \to (F, \varphi) \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

При этом пишут $F_n \overset{\mathcal{D}'(G)}{\longrightarrow} F$.

Лекция 11

4.2.2. Дельта-образные последовательности. Рассмотрим несколько примеров сходимости обобщенных функций.

Определение 34. Последовательность функций $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *дельта -образной последовательностью*, если выполнены следующие условия:

1) $h_k(x) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^n$;

2) существует последовательность $\varepsilon_k > 0$ такая, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, и для всех $k \in \mathbb{N}$ носитель $\mathrm{supp}\, h_k = \overline{B}(0, \varepsilon_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon_k\}$;

3) $\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)dx = 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 26. *Всякая дельта-образная последовательность сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ-функции.*

Доказательство теоремы 26. Пусть $h_k(x)$ — дельта-образная последовательность. Нужно показать, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(h_k, \varphi) \to (\delta, \varphi) \quad \text{т.е.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0).$$

Используя теорему о среднем и свойства дельта-образной последовательности, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\overline{B}(0,\varepsilon_k)} h_k(x)\varphi(x)dx =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi_k) \int_{\overline{B}(0,\varepsilon_k)} h_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi_k) = \varphi(0),$$

поскольку $\xi_k \in \overline{B}(0,\varepsilon_k)$ и $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$. □

Поскольку предельным геометрическим образом графиков функций из дельтаобразной последовательности (см., например, рис. 4.1) является $+\infty$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) = 0$, то часто δ-функцию графически так и изображают — вертикальной стрелкой $x_k = 0, k = 1, \ldots, n-1$ по x_n от 0 до $+\infty$.

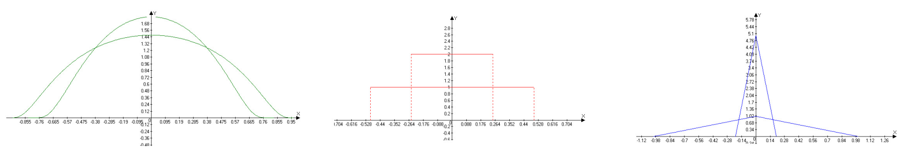


Рис. 4.1: Графики дельта-образных последовательностей в $\mathbb{R}$ $h_k(x) = c_k e^{\frac{-1}{\varepsilon_k^2 - x^2}} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$, $h_k(x) = \frac{H(\varepsilon_k^2 - x^2)}{2\varepsilon_k}$, $h_k(x) = \frac{\varepsilon_k - |x|}{\varepsilon_k^2} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$.

4.2.3. Формулы Сохоцкого.

Теорема 27. *В $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливы формулы Сохоцкого*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} := \frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{4.2.1}$$

Доказательство теоремы 27. Для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$ имеем

$$(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0} (\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}\varphi(x)dx =$$
$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}dx}_{I_1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon}dx}_{I_2},$$

где

$$I_2 = \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} dx}_{=0} +$$

$$+ \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{\mp i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx \overset{x=y\varepsilon}{=} \mp i\varphi(0) \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} \frac{dy}{y^2+1} =$$

$$= \mp i\varphi(0) \mathrm{arctg} \,|_{-\infty}^{+\infty} = \mp i\varphi(0)\pi = (\mp i\pi\delta, \varphi).$$

Для вычисления первого предела воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \le \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|},$$

а интеграл от последней функции конечен, то

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx \overset{R\to\infty}{=}$$

$$= \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx \overset{(4.1.4)}{=} (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi).$$

□

4.3 Операции с обобщенными функциями

4.3.1. Линейная замена переменных. Начнем с наводящих соображений. Пусть $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, A — невырожденная $n \times n$ матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f(Ax+b)$ на $\varphi(x)$:

$$(f(Ax+b), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\varphi(x)dx \overset{Ax+b=y}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b)) \frac{dy}{|\det A|} = \left(f(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|} \right).$$

Определение 35. Для любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, невырожденной $n \times n$ матрицы A и вектора $b \in \mathbb{R}^n$ определена новая обобщенная функция $F(Ax+b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(F(Ax+b), \varphi(x)) = \left(F(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|} \right). \qquad (4.3.1)$$

Упражнение 14. Доказать, что $F(Ax+b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 12. $(\delta(x-x_0),\varphi(x)) \overset{(4.3.1)}{=} (\delta(x),\varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$.

4.3.2. Нелинейная замена переменных в δ-функции.

Определение 36. Пусть $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и h_k — произвольная дельта-образная последовательность, тогда определена обобщенная функция $\delta(a(x))\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ формулой

$$\delta(a(x)) \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{k\to\infty} h_k(a(x)). \tag{4.3.2}$$

Мы не будем обсуждать деликатный момент о корректности этого определения, т.е. вопрос существования этого предела и его независимости от дельта-образной последовательности, однако используем его для получения полезной формулы.

Теорема 28. *Пусть $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция с простыми нулями (т.е. $a(x)=0, a'(x)\neq 0$). Тогда*

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}, \tag{4.3.3}$$

где x_k — нули функции a.

Доказательство теоремы 28. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi=[-R,R]$. В интервале $[-R,R]$ находится лишь конечное число нулей $x_k, k=0,\dots,m$ функции a. Если бы это было не так, то нашлась бы сходящаяся к нулю x_∞ функции a последовательность нулей x_j функции a, но тогда бы $a'(x_\infty)=0$, что противоречит условию теоремы о простоте нулей функции a.

Для простоты изложения будем считать, что функция a имеет лишь один нуль $x_0\in[-R,R]$. Тогда по теореме об обратной функции найдется окрестность J точки x_0, на которой функция a обратима. По определению дельта-образной последовательности h_k, начиная с некоторого номера k будем иметь

$$\operatorname{supp} h_k = [-\varepsilon_k,\varepsilon_k]\subset a(J).$$

Для любой $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ получаем

$$\begin{aligned}
(\delta(a(x)),\varphi(x)) &\overset{(4.3.2)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_k(a(x))\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-R}^{R} h_k(a(x))\varphi(x)dx = \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_J h_k(a(x))\varphi(x)dx + \underbrace{\lim_{k\to\infty}\int_{[-R,R]\setminus J} h_k(a(x))\varphi(x)dx}_{=0} = \\
&\overset{a(x)=y}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{a(J)} h_k(y)\varphi(a^{-1}(y))\frac{dy}{|a'(a^{-1}(y))|} = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(h_k, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|}\right) \overset{T.26}{=} \left(\delta, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|}\right) = \\
&= \frac{\varphi(a^{-1}(0))}{|a'(a^{-1}(0))|} = \frac{\varphi(x_0)}{|a'(x_0)|} = \left(\frac{\delta(x-x_0)}{|a'(x_0)|},\varphi\right).
\end{aligned}$$

□

4.3.2. Умножение. Наводящие соображения. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, и $g \in C^\infty(G)$, тогда для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $g(x)f(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(g(x)f(x), \varphi(x)) = \int_G g(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)g(x)\varphi(x)dx = (f(x), g(x)\varphi(x)).$$

Определение 37. Пусть $F, \Phi \in \mathcal{D}'(G)$, причем Φ — регулярная обобщенная функция, порожденная бесконечно дифференцируемой функцией (обозначаемой тем же символом Φ), тогда определена обобщенная функция

$$\Phi \cdot F = F \cdot \Phi \in \mathcal{D}'(G),$$

действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по формуле

$$(\Phi \cdot F, \varphi) = (F, \Phi\varphi) = (F \cdot \Phi, \varphi). \tag{4.3.4}$$

Упражнение 15. Доказать, что $\Phi \cdot F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 13.

$$(\Phi \cdot \delta, \varphi) = (\delta, \Phi\varphi) = \Phi(0)\varphi(0) = (\Phi(0)\delta, \varphi); \tag{4.3.5}$$

$$(0 \cdot F, \varphi) = (F, 0\varphi) = (F, 0) = 0(F, 1) = 0; \tag{4.3.6}$$

$$(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi}{x}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx = (1, \varphi). \tag{4.3.7}$$

Легко проверить, что так определенное умножение коммутативно и ассоциативно. Однако, его нельзя распространить на все пространство обобщенных функций с сохранением свойств коммутативности и ассоциативности. Если предположить, что мы смогли определить такое умножение, то сразу же пришли бы к противоречию

$$0 \overset{(4.3.6)}{=} 0\mathcal{P}\frac{1}{x} \overset{(4.3.5)}{=} (x\delta)\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta \cdot (x\mathcal{P}\frac{1}{x}) \overset{(4.3.7)}{=} \delta \cdot 1 \overset{(4.3.5)}{=} \delta.$$

4.3.3. Дифференцирование. Наводящие соображения. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f'(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(f', \varphi) = \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)\,|_{-R}^{R}}_{=0} - \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Определение 38. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ и $F \in \mathcal{D}'(G)$. Для любого мультииндекса α определена обобщенная функция $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$, которая называется *обобщенной производной* порядка α и действует на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по правилу

$$(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha \varphi). \tag{4.3.8}$$

Упражнение 16. Доказать, что $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 14.

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0);$$

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi) \overset{(2.5.1)}{=} -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi). \tag{4.3.9}$$

Следующая теорема проливает свет на взаимосвязь классической производной кусочно-гладкой функции и ее обобщенным вариантом.

Теорема 29. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, тогда ее классическая производная $f'_{кл}$, рассматриваемая как обобщенная функция, и ее обобщенная производная $f'_{об}$ связаны формулой*

$$f'_{об} \overset{\mathcal{D}'}{=} f'_{кл} + \sum_k [f]_k \delta(x - x_k), \tag{4.3.10}$$

где x_k — точки разрыва функции $f(x)$, и $[f]_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$ — скачок функции f в точке x_k.

Доказательство теоремы 29. Подействуем $f'_{\text{об}}$ на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi = [-R, R]$, получим

$$\begin{aligned}
(f'_{\text{об}}, \varphi) &\overset{(4.3.8)}{=} -(f, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)dx = \\
&= -\sum_{k: x_k \in [-R,R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx = -\sum_{k: x_k \in [-R,R]} f(x)\varphi(x) \Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} + \\
&+ \sum_{k: x_k \in [-R,R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)dx = -\sum_k (f(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k + 0)\varphi(x_k)) + \\
&+ (f'_{\text{кл}}, \varphi) = -\sum_k (f(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1}) + \sum_k f(x_k + 0)\varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&\overset{k+1 \to k}{=} -\sum_k (f(x_k - 0)\varphi(x_k) + \sum_k f(x_k + 0)\varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&= \sum_k (f(x_k + 0) - f(x_k - 0))(\delta(x - x_k), \varphi(x)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&= \left(\sum_k [f]_k \delta(x - x_k) + f'_{\text{кл}}, \varphi \right).
\end{aligned}$$

□

Пример 15. Плотность заряда электрического диполя. Поскольку δ функцию можно воспринимать как плотность распределения какой-либо величины в точке ноль, то с помощью нее можно записать плотность распределения заряда системы из двух заряженных частиц: с зарядом $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$

на расстоянии l. Такая система называется электрическим диполем. Помещая отрицательный заряд в точку $x = 0$, а положительный в точку $x = l$, получаем плотность системы

$$\varrho_l(x) = -\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x + l).$$

Моментом системы называется величина $p = \varepsilon l$. Точечным электрическим диполем называется предельное положение описанной системы при $l \to 0+$ с сохранением момента p. Вычислим плотность распределения заряда точечного электрического диполя ϱ_0 как предел (в $\mathcal{D}'$) плотности ϱ_l :

$$\begin{aligned}\lim_{l\to 0+}(\varrho_l(x), \varphi(x)) &= \lim_{l\to 0+}(-\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x + l), \varphi(x)) = \\ &= \lim_{l\to 0+}(\delta, \varepsilon(\varphi(x + l) - \varphi(x))) = \lim_{l\to 0+} p\frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{l} = \\ &= p\varphi'(0) = -(p\delta', \varphi).\end{aligned}$$

Таким образом, $\varrho_0 = -p\delta'$.

Лекция 12

4.4 Свертка обобщенных функций

Начнем с наводящих соображений. Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тогда их свертка $f * g$ существует и является элементом $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Подействуем регулярной обобщенной функцией $f * g$ на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n}(f * g)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy\right)\varphi(x)dx = \\ &\overset{T??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\varphi(x)dx\right)dy \overset{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(z + y)dz\right)dy = \\ &\overset{T??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(z + y)dy\right)dz = (f(z), (g(y), \varphi(y + z))).\end{aligned}$$

Определение 39. Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем G такая, что для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функция $(G(x), \varphi(x + y))$ является пробной функцией переменной y. Тогда определена новая обобщенная функция $F * G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которая называется *сверткой* F и G, и действует на пробную $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(F * G, \varphi) = (F(y), (G(x), \varphi(x + y))). \tag{4.4.1}$$

Рассмотрим по аналогии с обычной сверткой ее простейшие свойства.

0). **Свертка с δ-функцией.** Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тогда $F * \delta$ и $\delta * F$ существуют и

$$F * \delta = \delta * F = F. \tag{4.4.2}$$

Это равенство формально часто записывают как $F(x) = \int F(y)\delta(x - y)dy$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, тогда $(\delta(x), \varphi(x+y)) = \varphi(y)$ — пробная функция, следовательно определена свертка $F * \delta$, при этом

$$(F * \delta, \varphi) = (F(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) = (F(y), \varphi(0+y)) = (F, \varphi).$$

Функция $(F(x), \varphi(x+y))$ переменной y вообще говоря не является финитной, но она бесконечно дифференцируема, следовательно, непрерывна, поэтому δ-функция может на нее действовать, имеем

$$(\delta * F, \varphi) = (\delta(y), (F(x), \varphi(x+y))) = (F(x), \varphi(x+0)) = (F, \varphi).$$

□

Упражнение 17. Доказать, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и любой $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ функция $(F(x), \varphi(x+y))$ переменной y бесконечно дифференцируема.

1). **Линейность свертки.** Пусть $F_1, F_2, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F_1 * G$, $F_2 * G$ существуют, тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ существует свертка $(\alpha F_1 + \beta F_2) * G$, причем

$$(\alpha F_1 + \beta F_2) * G = \alpha(F_1 * G) + \beta(F_2 * G). \tag{4.4.3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$\begin{aligned}((\alpha F_1 + \beta F_2) * G, \varphi) &= ((\alpha F_1(y) + \beta F_2(y), (G(x), \varphi(x+y))) = \\ &= \alpha(F_1(y), (G(x), \varphi(x+y))) + \beta(F_2(y), (G(x), \varphi(x+y))) = \\ &= (\alpha(F_1 * G), \varphi) + (\beta(F_2 * G), \varphi) = (\alpha(F_1 * G) + \beta(F_2 * G), \varphi).\end{aligned}$$

□

2). **Коммутативность свертки.** Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F * G$ существует, тогда существует и свертка $G * F$, причем

$$F * G = G * F. \tag{4.4.4}$$

Без доказательства примем это свойство.

3). **Дифференцирование свертки.** Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F * G$ существует, тогда для любого мультииндекса α существуют свертки $D^\alpha(G * F)$, $D^\alpha G * F$ и $G * D^\alpha F$, причем

$$D^\alpha(D * G) = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G. \tag{4.4.5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ввиду свойства 2) достаточно установить одно из равенств, имеем

$$\begin{aligned}(D^\alpha(F * G), \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F * G, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F(y), (G(x), D^\alpha \varphi(x+y))) = \\ &= (F(y), (D^\alpha G(x), \varphi(x+y))) = (F * D^\alpha, \varphi).\end{aligned}$$

□

4). **Отсутствие ассоциативности.** Свертка в $\mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$ не ассоциативна.

Доказательство. Нужно предъявить обобщенные функции $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3).$$

Возьмем $F_1 = 1, F_2 = \delta'$ и $F_3 = H$, тогда

$$0 = 0*H = 1'*H = (1'*\delta)*H = (1*\delta')*H \neq 1*(\delta'*H) = 1*(\delta*H') = 1*\delta = 1.$$

□

Стоит отметить, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ существуют подмножества, на которых свертка ассоциативна, подробнее о таких обобщенных функциях можно посмотреть в книге [3, глава 2, §7, пункт 7], или других изданиях этой книги.

4.5 Фундаментальное решение дифференциального оператора

4.5.1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Под дифференциальным оператором в Ω мы будем понимать выражение

$$L(D) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha,$$

где $b_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ и D^α — символ производной порядка α. Попытаемся понять, как решают уравнения в пространстве обобщенных функций: как искать $X \in \mathcal{D}'(\Omega)$ такую, что

$$L(D)X = F, \quad \text{где} \quad F \in \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.5.1}$$

Начнем с "простых" правых частей F.

Определение 40. Обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *фундаментальным решением* оператора $L(D)$ в $\mathbb{R}^n$, если она является решением уравнения

$$L(D)X = \delta.$$

Фундаментальное решение не единственно, оно находится с точностью до обобщенной функции $E_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такой, что $L(D)E_0 = 0:$

$$L(D)(E + E_0) = L(D)E + L(D)E_0 = \delta + 0 = \delta.$$

Пример 16. Найдем фундаментальное решение для оператора $1 - \frac{d^2}{dx^2}$ в $\mathbb{R}$, т.е. решим уравнение

$$X - X'' = \delta.$$

Пока решать мы не умеем, но проверим, что две обобщенные функции E_1 и E_2 являются его решениями:

$$E_1 = -H\text{sh}x, \; E_2 = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E_1 - E_1'' &= -H\mathrm{sh}x + (H\mathrm{sh}x)'' = -H\mathrm{sh}x + (H'\mathrm{sh}x + H\mathrm{ch}x)' = \\ &= -H\mathrm{sh}x + (\mathrm{sh}x\delta + H\mathrm{ch}x)' = -H\mathrm{sh}x + (H\mathrm{ch}x)' = \\ &= -H\mathrm{sh}x + H'\mathrm{ch}x + H\mathrm{sh}x = \delta. \end{aligned}$$

Также имеем

$$E_2 - E_2'' = \frac{e^{-|x|}}{2} - \left(\frac{e^{-|x|}}{2}\right)'' = \frac{e^{-|x|}}{2} + \left(\operatorname{sgn} x \frac{e^{-|x|}}{2}\right)' = \frac{e^{-|x|}}{2} - \frac{e^{-|x|}}{2} + \delta.$$

Первое решение E_1 было найдено при помощи следующей теоремы о нахождении фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора.

Теорема 30. *Пусть* $L(D) = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x) \frac{d^j}{dx^j}$, *где* $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ *и* $a_0(0) = 1$, *тогда фундаментальное решение* E *оператора* $L(D)$ *задается равенством*

$$E = f(x)H(x),$$

где H *— функция Хевисайда* (2.5.1), *а* f *— решение задачи Коши*

$$\begin{cases} L(D)f = 0, \\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-2)}(0) = 0, \\ f^{(k-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 30. Вычислим все необходимые производные для E

$$\begin{array}{lll} E' & = & (Hf)' = H'f + f'H = f\delta + f'H = f(0)\delta + f'H = f'H, \\ E'' & = & (f'H)' = f'(0)\delta + f''H = f''H, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ E^{(k)} & = & (f^{(k-1)}H)' = f^{(k-1)}(0)\delta + f^k H = \delta + f^k H. \end{array}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} L(D)E = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x) \frac{d^j E}{dx^j} &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x) f^{(j)} H + a_0(x)\delta = \\ &= HL(D)f + a_0(0)\delta = H \cdot 0 + \delta = \delta. \end{aligned}$$

□

Наконец, отметим, что фундаментальное решение дифференциального оператора существует. Приведем без доказательства точную формулировку этого утверждения, известного как теорема Мальгранжа — Эренпрейса [7, стр.62].

Теорема 31. *Для любого дифференциального оператора* $L(D)$ *с постоянными коэффициентами существует фундаментальное решение* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

4.5.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

Для важных в математической физике дифференциальных операторов найдены фундаментальные решения. Здесь мы обсудим фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\triangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Для $n = 1$ фундаментальное решение E оператора $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ находится с помощью теоремы 30: $E = xH(x)$. Для $n = 2$ фундаментальное решение E оператора $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ непосредственным вычислением (проведенным на семинарских занятиях) получается равным $\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$. Покажем теперь, что для $n = 3$ фундаментальное решение задается формулой $E = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Заметим, что в области $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ функция E — гармоническая, т.е. $\triangle E = 0$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$\begin{aligned}
(\triangle E, \varphi) &= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \varphi\right) = \\
&\overset{(4.3.8)}{=} (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \\
&= (E, \triangle\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} E\triangle\varphi \, dx \, dy \, dz = \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} E\triangle\varphi \, dx \, dy \, dz = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2} E\triangle\varphi - \underbrace{\triangle E}_{=0} \varphi \, dx \, dy \, dz = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \triangle E & \triangle\varphi \end{vmatrix} dx \, dy \, dz.
\end{aligned}$$

Применим теперь следующую формулу Грина. Для любой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $S = \partial V$ и любых гладких в замыкании V функций E и φ справедливо равенство

$$\int_V \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \triangle E & \triangle\varphi \end{vmatrix} dV = \int_S \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix} dS, \tag{4.5.2}$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (\nabla\varphi, n)$ — производная по внешней нормали n к поверхности S.

В нашем случае поверхность S состоит из двух сфер $S_\varepsilon = \{x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2\}$ и $S_R = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Радиус R таков, что пробная функция φ зануляется на S_R, поэтому зануляется и интеграл в правой части формулы Грина (4.5.2). На поверхности S_ε нормаль n противоположна по направлению к радиус-вектору, поэтому

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) = -\frac{1}{4\pi r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}.$$

В итоге получаем

$$\int\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \triangle E & \triangle\varphi \end{vmatrix} dx\,dy\,dz = \int_{S_\varepsilon} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix} dS + \int_{S_R} \underbrace{\begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix}}_{=0} dS =$$

$$= \int_{r=\varepsilon} E\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial E}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi}\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{1}{\varepsilon^2} dS =$$

$$\overset{T.??}{=} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\xi) + \varphi(\xi)\frac{1}{\varepsilon^2}\right)4\pi\varepsilon^2 = \varphi(\xi) + \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\xi).$$

В последних равенствах мы использовали теорему о среднем, по которой найдется $\xi \in S_\varepsilon$, удовлетворяющая написанным равенствам. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем искомое равенство

$$(\Delta E, \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Приведем для полноты картины таблицу фундаментальных решений основных дифференциальных операторов математической физики. Вывод этих решений можно найти в монографии [3].

Дифференциальный оператор	**Фундаментальное решение**
Оператор Лапласа $\triangle$	$E_n(x) = -\Gamma(\frac{n}{2}-1)\frac{\|x\|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}},\ n \ge 3$
Оператор теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\triangle$	$E_n(x,t) = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}},\ n \ge 1$
Волновой оператор $\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial^2 t} - a^2\triangle$	$E_1(x,t) = \frac{1}{2a}H(at-\|x\|)$, $E_2(x,t) = \frac{H(at-\|x\|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-\|x\|^2}}$

4.5.3. Как решают обобщенные дифференциальные уравнения. Для нахождения частных обобщенных решений дифференциального уравнения (4.5.1) с постоянными коэффициентами полезно следующее утверждение.

Теорема 32. *Пусть $L(D)$ — дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с постоянными коэффициентами, и E — его фундаментальное решение. Тогда обобщенная функция $X = E * F$ является решением уравнения (4.5.1).*

Доказательство теоремы 32. Непосредственно вычисляя, получаем

$$L(D)X = L(D)(E*F) = \sum_{0\le|\alpha|\le k} b_\alpha D^\alpha(E*F) =$$

$$= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} b_\alpha D^\alpha E\right) * F = \delta * F = F.$$

□

Зачастую частные решения ищутся не во всем пространстве обобщенных функций, а на каком-нибудь его подпространстве. Одним из них является пространство Соболева.

Определение 41. *Пространством Соболева* $W_p^l(G), G \subseteq \mathbb{R}^n, p \in [1, +\infty)$ называется множество обобщенных функций $F \in \mathcal{D}'(G)$, у которых обобщенные производные $D^\alpha F$ для всех $0 \leq |\alpha| \leq l$ являются регулярными распределениями, порожденными функциями f_α, интегрируемыми в p-ой степени, т.е.

$$\int_G |f_\alpha(x)|^p < \infty.$$

Простейшая характеризация таких функций дается теоремой вложения Соболева.

Теорема 33. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклая область и $lp > n$, тогда для любой $F \in W_l^p(G)$ найдется непрерывная функция f такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(G)$*

$$(F, \varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx.$$

Лекция 13

4.6 Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

4.6.1. Наводящие соображения. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тогда, используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье (2.8.1), для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(\mathrm{F}_\pm[f], \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{F}_\pm[f](x)\overline{\overline{\varphi}}(x)dx \overset{(2.8.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{F}_\pm[\overline{\varphi}](x)dx \overset{(2.8.3)}{=}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{F}_\pm[\varphi](x)dx = (f, \mathrm{F}_\pm[\varphi]).$$

Из этих соображений уместно было бы определить преобразование Фурье от произвольной обобщенной функции следующим образом

$$(\mathrm{F}_\pm[G], \varphi) = (G, \mathrm{F}_\pm[\varphi])$$

для любых $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Однако, такое определение не совсем корректно, поскольку необходимо, чтобы пробная функция $\mathrm{F}_\pm[\varphi]$ лежала в области определения обобщенной функции G, т.е. в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Такое возможно только(!), если $\varphi \equiv 0$.

Такое определение станет корректным, если мы расширим множество пробных функций до пространства быстроубывающих функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Итак, на новом пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определим сходимость по аналогии со сходимостью в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 42. Пусть φ_n, φ — быстроубывающие функции. Говорят, что φ_n *сходится* к φ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если для любого мультииндекса α

$$D^\alpha \varphi(x) \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi(x)$$

при $n \to \infty$. Такую сходимость обозначают как

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x).$$

Теперь мы можем определить новый класс обобщенных функций.

Определение 43. Отображение $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ называется *обобщенной функцией медленного роста*, или *умеренным распределением* если
1) F — линейное отображение;
2) F — непрерывное отображение, т.е.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x) \Rightarrow F(\varphi_n) \to F(\varphi).$$

Множество всех обобщенных функций медленного роста обозначают через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Если говорить кратко, то обобщенные функции медленного роста — это линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4.6.2. Прежде, чем привести примеры обобщенных функций медленного роста, отметим следующий факт. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и сходимость $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$ влечет сходимость $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x)$, то

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

т.е. всякая обобщенная функция медленного роста остается обобщенной функцией.

Поясним теперь название обобщенных функций медленного роста.

Определение 44. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется *функцией медленного (степенного) роста*, если существует число $m = m(f) > 0$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|dx}{(1 + \|x\|)^m} < \infty.$$

Легко проверить, что любой полином и всякая быстроубывающая функция являются функциями медленного роста. А вот, например, при $n = 1$ функция e^x таковой не является.

Покажем, что всякое регулярное распределение, порождаемое функцией f медленного роста, является обобщенной функцией медленного роста. Для этого достаточно проверить конечность соответствующего интеграла: для любой пробной $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$|(f, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|\, dx \overset{O.21}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k(0,p)|f(x)|}{1 + \|x\|^p},$$

где p можно положить равным $m(f)$, что повлечет за собой конечность рассматриваемого интеграла.

Однако, не каждая регулярная обобщенная функция медленного роста порождается функцией медленного роста. Например, $f(x) = e^x \sin e^x$. И все же связь между ними определяется следующей теоремой Шварца, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 34. *Любое распределение $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ является обобщенной производной некоторой функции медленного роста.*

Упражнение 18. Проверьте утверждение теоремы для $f(x) = e^x \sin e^x$ и δ.

4.6.3. Операции над обобщенными функциями медленного роста. Теперь мы готовы корректно определить преобразование Фурье для обобщенных функций, но только медленного роста!

Определение 45. Пусть $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Обобщенная функция медленного роста $\mathcal{F}_\pm[\Phi]$, действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(\mathcal{F}_\pm[\Phi], \varphi) = (\Phi, \mathrm{F}_\pm[\varphi]), \tag{4.6.1}$$

называется преобразованием Фурье функции Φ.

Ясно, что для регулярных обобщенных функций, порожденных быстроубывающими функциями так определенное преобразование Фурье совпадает с классическим определением. Другими словами, если рассматривать преобразование Фурье как отображение

$$\mathcal{F}_\pm : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

то

$$\mathcal{F}_\pm|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathrm{F}_\pm.$$

Пример 17. Легко проверить, что δ-функция Дирака (напомним, что она определена для любой непрерывной функции) является обобщенной функцией медленного роста. Вычислим ее преобразование Фурье.

$$(\mathcal{F}_\pm[\delta], \varphi) = (\delta, \mathrm{F}_\pm[\varphi]) = \mathrm{F}_\pm[\varphi](0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\mp i(x,0)} dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = ((2\pi)^{-n/2}, \varphi).$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_\pm[\delta] = (2\pi)^{-n/2}. \tag{4.6.2}$$

Все операции, которые были определены для обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, справедливы и для обобщенных функций медленного роста с некоторыми уточнениями, при которых данные операции не выводят нас из

класса $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Например, при умножении на бесконечно дифференцируемую функцию нужно наложить условие, чтобы она была быстроубывающей. Действительно, рассматривая случай $n = 1$, если взять, в качестве $a = e^{2x^2}$, $F = e^{-x^2}$, то
$$aF = e^{x^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

4.6.4. Свойства $\mathcal{F}_\pm$.

Свойства преобразования $\mathcal{F}_\pm$ есть точные аналоги соответствующих свойств преобразования $\mathrm{F}_\pm$.

Для любых $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любого мультииндекса α справедливы следующие свойства

$$\mathcal{F}_\pm[aF + bG] = a\mathcal{F}_\pm[F] + b\mathcal{F}_\pm[G], \tag{4.6.3}$$

$$\mathcal{F}_\pm[x^\alpha F] = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}_\pm[F], \tag{4.6.4}$$

$$\mathcal{F}_\pm[D^\alpha F] = (\pm i x)^\alpha \mathcal{F}_\pm[F], \tag{4.6.5}$$

$$\mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[F]] = F, \tag{4.6.6}$$

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} F \Rightarrow \mathcal{F}_\pm[F_n] \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathcal{F}_\pm[F]. \tag{4.6.7}$$

Последние два свойства справедливы, если одна из функций F или G регулярная и порождена быстроубывающей функцией.

$$\mathcal{F}_\pm[(F * G)] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}_\pm[F] \cdot \mathcal{F}_\pm[G], \tag{4.6.8}$$

$$\mathcal{F}_\pm[F \cdot G] = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}_\pm[F] * \mathcal{F}_\pm[G]. \tag{4.6.9}$$

Доказательство. Приведем доказательство последнего свойства (4.6.9). Для определенности считаем F быстроубывающей, тогда для любой пробной $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\mp[F \cdot G], \varphi) &\overset{(4.6.1)}{=} (F \cdot G, \mathrm{F}_\pm[\varphi]) \overset{(4.3.4)}{=} (G, F \cdot \mathrm{F}_\pm[\varphi]) \overset{(2.6.7)}{=} (G, \mathrm{F}_\pm[\mathrm{F}_\mp[F]] \cdot \mathrm{F}_\pm[\varphi]) = \\
&\overset{(2.7.6)}{=} (G, (2\pi)^{-n/2} \mathrm{F}_\pm[\mathrm{F}_\mp[F] * \varphi]) \overset{(4.6.1)}{=} (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[G], \mathrm{F}_\mp[F] * \varphi) = \\
&= (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[G](x), (\mathrm{F}_\pm[F](z), \varphi(x+z))) = \\
&\overset{(4.4.1)}{=} (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[F] * \mathcal{F}_\pm[G], \varphi).
\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство вытекает из следующих выкладок:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_\mp[F] * \varphi(x) &\overset{O.25}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{F}_\mp[F](x-y)\varphi(y)dy \overset{(2.4.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{F}_\pm[F](y-x)\varphi(y)dy = \\
&\overset{z=y-x}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{F}_\pm[F](z)\varphi(x+z)dz = (\mathrm{F}_\pm[F](z), \varphi(x+z)).
\end{aligned}$$

□

4.6.5. Применение преобразования Фурье для нахождения фундаментального решения.

Фундаментальные решения дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами можно находить и в пространстве обобщенных функций медленного роста. Это позволяет делать следующая теорема Хёрмандера, сравните ее с теоремой 31.

Теорема 35. *Для ненулевого дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами существует фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Суть метода нахождения фундаментального решения в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ заключается в применении преобразования Фурье к уравнению

$$L(D)E = \delta.$$

Проделав это, получим

$$\mathcal{F}_+[L(D)E] = \mathcal{F}_+[\delta] \overset{(4.6.2)}{=} (2\pi)^{-n/2}.$$

Раскрывая левую часть, имеем

$$\mathcal{F}_+[L(D)E] = \mathcal{F}_+[\sum_{0\le|\alpha|\le k} b_\alpha D^\alpha E] \overset{(4.6.3)}{=} \sum_{0\le|\alpha|\le k} b_\alpha \mathcal{F}_+[D^\alpha E] =$$
$$\overset{(4.6.5)}{=} \sum_{0\le|\alpha|\le k} b_\alpha (ix)^\alpha \mathcal{F}_+[E] = L(ix)\mathcal{F}_+[E].$$

Откуда получаем, что

$$\mathcal{F}_+[E] = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{L(ix)}.$$

Если функция из правой части будет локально интегрируемой, то применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$E = \mathcal{F}_-\left[\frac{(2\pi)^{-n/2}}{L(ix)}\right]. \tag{4.6.10}$$

В противном случае, нужно использовать некоторые предельные переходы (отсюда возникает не единственность E), а потом уже применять обратное преобразование Фурье. В любом случае, как утверждает теорема 35 решение есть.

Покажем, что фундаментальное решение E_2 из примера 16 строится как раз таким образом. В этом случае $L(D)E = E - E''$. Тогда $L(ix) = 1 + x^2$ и

$$E = \mathrm{F}_-\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|} = \frac{e^{-|x|}}{2} = E_2.$$

Глава 5

Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1 Векторное пространство

Определение 46. Множество $\mathbf{L}$ называется *линейным (векторным)* пространством над числовым *полем* $\mathbb{F}$ (если не оговорено противное, то $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если выполнены условия:

1. Множество $\mathbf{L}$ – это *абелева группа по сложению*: на $\mathbf{L}$ определена операция *сложения* $+$, сопоставляющая двум элементам (*векторам*) $x, y \in \mathbf{L}$ новый элемент $x + y \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);

3) существует вектор $0 \in \mathbf{L}$ такой, что $0 + x = x$ для всех $x \in \mathbf{L}$ (существование нуля);

4) для каждого $x \in \mathbf{L}$ существует вектор $-x \in \mathbf{L}$ такой, что $(-x) + x = 0$ (существование обратного).

2. Определена операция *умножения* $\cdot$, сопоставляющая числу $\alpha \in \mathbb{F}$ и вектору $x \in \mathbf{L}$ новый вектор $\alpha \cdot x \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

5) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

6) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

8) $1 \cdot x = x$.

Следует различать умножение и сложение между числами и векторами.

Пример 18. 1). $\mathbf{L} = \mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_k \in \mathbb{F}\}$ — арифметическое n-мерное пространство. Операции

$$\begin{array}{lcl} x + y & = & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x & = & (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \\ 0 & = & (0, 0, \ldots, 0). \end{array}$$

2). $\mathbf{L} = M_n(\mathbb{F})$ — множество матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Можно рассматривать как "упакованное"предыдущее пространство. Операции

$$\begin{array}{lcl} A+B & = & [a_{ij}+b_{ij}], \\ \alpha \cdot A & = & [\alpha a_{ij}], \\ 0 & = & [0]. \end{array}$$

3). $\mathbf{L} = Y^X = \{f : X \to Y\}$ — пространство функций определенных на множестве X и действующих в линейное пространство Y. Операции

$$\begin{array}{lcl} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x), \\ (\alpha \cdot f)(x) & = & \alpha f(x), \\ 0(x) & = & 0. \end{array}$$

Определение 47. Пусть $\mathbf{L}$ — линейное пространство. Вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{L}$ называются *линейно независимыми*, если

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Бесконечная система векторов линейно независима, если каждая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система – *алгебраический базис*, или *базис Гамеля* линейного пространства. Число векторов в базисе – *размерность* линейного пространства, обозначают как $\dim \mathbf{L}$.

Из определения базиса ясно, что для любого вектора $x \in \mathbf{L}$ найдется конечное число $n \le \dim \mathbf{L}$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и вектора из базиса $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.

Пример 19. **1).** Размерность $\dim \mathbb{F}^n = n$, поскольку вектора

$$e_k = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{k-\text{ое место}}, \ldots, 0), \ 1 \le k \le n$$

образуют базис.

Упражнение 19. Докажите, что это базис.

2). Линейное пространство быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ бесконечномерно, поскольку система

$$\{x^k e^{-x^2}, \ k \ge 0\}$$

линейна независима.

Упражнение 20. Докажите, что эта система действительно линейно независима.

3). В линейном пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ функции

$$\delta, \ \mathcal{P}\frac{1}{x}, \ \text{и} \ \frac{1}{x \pm i0}$$

линейно зависимы, поскольку они удовлетворяют формулам Сохоцкого (см. теорему 27).

Определение 48. Пусть X — линейное пространство и $Y \subseteq X$, тогда Y называется линейным *подпространством* X, если для любых $x, y \in Y$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ следует, что

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y.$$

Пример 20. 1). $X = \mathbb{F}^n,\ Y = \mathbb{F}^k,\ 1 \le k \le n$. Действительно, всякий n-мерный вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$ можно считать k-мерным. Ясно, что операции сложения и умножения не выводят из этого множества.

2). $X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ Y = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3). $X = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ Y = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.2 Нормированное пространство

Определение 49. Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство и функция $\|\cdot\| : \mathbf{L} \mapsto \mathbb{R}^+$ обладает свойствами:

1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

2) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (неравенство треугольника);

3) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \|u\|$ (положительная однородность).

Тогда $\|\cdot\|$ – *норма* на $\mathbf{L}$, а $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ – линейное *нормированное пространство.*

Пример 21. 1). $\mathbf{N} = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p),\ n \in \mathbb{N},\ p \in [1, +\infty)$, где норма определяется равенствами

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \text{при } p \ne \infty \ \text{ и}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

2). Нормированным пространством будет $\mathbf{N} = (\ell_2, \|\cdot\|_2)$, где ℓ_2 есть линейное пространство последовательностей (или бесконечномерных векторов)

$$x = (x_1, x_2, \dots),\ x_k \in \mathbb{F},$$

у которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty;$$

а норма $\|\cdot\|_2$ есть бесконечномерный аналог евклидовой нормы из предыдущего примера:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что это, действительно, бесконечномерное линейное нормированное пространство. Пусть $x, y \in \ell_2$, тогда $x + y \in \ell_2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)(\overline{x_k+y_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{x_k}y_k+x_k\overline{y_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2+2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(\overline{x_k}y_k) \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2+2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k||y_k| \le \\ &\overset{2ab\le|a|^2+|b|^2}{\le} \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2<\infty.\end{aligned}$$

Вектора

$$e_k = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{k-\text{ое место}}, \ldots), \ k \in \mathbb{N}$$

являются линейно независимыми, поэтому $\dim \ell_2 = \infty$.

Первое и третье свойства нормы легко проверяются, а неравенство треугольника будет доказано позже.

3). Пусть X — (открытое) подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbf{N} = (C^k(X), \|\cdot\|)$, где $C^k(X)$ — линейное пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно, а норма определяется равенством

$$\|f\| = \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha|=k} \sup_{x\in X} |D^\alpha f(x)|.$$

Лекция 14

Наличие нормы позволяет определять такие понятие как предел, сходимость, фундаментальность, полнота, замкнутость, открытость и сепарабельность. Начнем по порядку.

Определение 50. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Говорят, что последовательность $x_n \in X$ *сходится* к $x_0 \in X$ при $n \to \infty$, если $\|x_n - x_0\|$ сходится к нулю при $n \to \infty$. При этом пишут

$$x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x_0,$$

или как обычно, если ясно о какой норме идет речь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Пример 22. Пусть $\mathbf{N} = (\ell_2, \|\cdot\|_2)$ и $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, тогда $x_n \overset{\|\cdot\|_2}{\to} x_0$, где $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

Действительно, $x_0 - x_n = (0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)$, поэтому

$$\|x_0 - x_n\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

как хвост сходящегося ряда.

Определение 51. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ линейного нормированного пространства называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n, m > n_0$ следует $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Легко понять, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной, обратное не верно.

Определение 52. Если в линейном нормированном пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится, то такое пространство называется *полным*. В честь С. Банаха его еще называют *банаховым*.

Обычный критерий Коши сходимости вещественных (комплексных) последовательностей показывает нам, что $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ является банаховым пространством. Приведем пример не полного нормированного пространства, показывающий, что такие пространства являются как бы "дырявыми".

Пример 23. Пусть $\mathbf{N} = (c_{fin}, \|\cdot\|_\infty)$, где c_{fin} есть линейное пространство последовательностей (или бесконечномерных векторов)

$$x = (x_1, x_2, \ldots), \ x_k \in \mathbb{F},$$

у которых лишь конечное число не нулевых координат x_k, а норма $\|\cdot\|_\infty$ определяется простым равенством

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Рассмотрим последовательность x_n как из примера 22. Покажем, что она фундаментальна, но не сходится. Для любого малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \frac{1}{\min\{n, m\} + 1} < \varepsilon$$

для всех $m, n > \left[\frac{1}{\varepsilon - 1}\right]$. Предположим, что у этой последовательности есть предел $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in c_{fin}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup\{|1 - \xi_1|, |1/2 - \xi_2|, \ldots, |1/n - \xi_n|, |\xi_k|, k > n\} = \\ = \sup_{n\geq 1} |1/n - \xi_n| = 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\xi_n = 1/n$ для всех $n \geq 1$. Но такого не должно быть, поскольку у x_0 лишь конечное число ненулевых координат ξ_n. Таким образом на месте предела $\lim x_n$ в пространстве c_{fin} стоит "дырка".

Определение 53. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство и $Y \subseteq X$. Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой множества* Y, если найдется последовательность $x_n \in Y$ сходящаяся к x_0.

Определение 54. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Множество $Y \subseteq X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Другими словами, если $x_n \in Y$ сходится, то ее предел x_0 также лежит в Y.

Множество $Y \subseteq X$ называется *открытым*, если его дополнение $X \setminus Y$ замкнуто. Эквивалентное определение: с каждой точкой $y \in Y$ в этом множестве содержится открытый шар с центром в y подходящего радиуса $\varepsilon > 0$:

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset Y.$$

Пример 24. Множество многочленов $P[0,1]$ не является замкнутым подпространством в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ с равномерной нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

.

Нужно показать, что это множество не замкнуто, т. е. найдется сходящаяся последовательность многочленов, пределом которой не будет многочлен. Возьмем $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получим:

$$\max_{x \in [0,1]} |e^x - p_n(x)| \le \max_{c \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^{n+1} e^c}{(n+1)!} \right| \le \frac{e}{(n+1)!} \to 0.$$

Таким образом, e^x есть предельная точка множества $P[0,1]$. На самом деле (как следует из теоремы Вейерштрасса (см. теорему 11)), замыкание множества $P[0,1]$ в $C[0,1]$ есть все пространство $C[0,1]$.

Определение 55. Нормированное пространство $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ называется *сепарабельным*, если найдется множество $Y \subseteq X$, которое является счетным и *всюду плотным*, т.е. его замыкание совпадает со всем X.

Пример 25. Пространство непрерывных функций $C[a,b]$ – сепарабельное банахово пространство. По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция может быть приближена равномерно многочленами. Поэтому счетным всюду плотным множеством в $C[a,b]$ будут опять многочлены с рациональными коэффициентами. Доказательство полноты можно посмотреть, например, в [P12, с. 32].

5.3 Лебеговские функциональные пространства

5.3.1. Пусть G –измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}^n$. *Лебеговским функциональным пространством* $\mathfrak{L}_p(G)$, $p \ge 1$ будем называть множество вещественнозначных (комплекснозначных) функций f, определенных на G и

$$\int_X |f|^p dx < \infty.$$

Функции, совпадающие на множестве меры ноль, будем считать одинаковыми (это задает отношение эквивалентности $\sim$). Факторизуя $\mathfrak{L}_p(G)$ по такому отношению эквивалентности, получим новое пространство

$$\mathrm{L}_p(G) = \mathfrak{L}_p(G)/\sim.$$

Таким образом, элементами этого нового пространства являются не функции, а классы (эквивалентности) функций. К примеру, в пространстве $\mathrm{L}_p([0,1])$ тождественная единица и функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

лежат в одном классе, поскольку мера Лебега рациональных чисел $\mathbb{Q}$ равна нулю.

Норму класса мы будем определять через норму любого его представителя. Нормой является функционал

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.3.1}$$

Первые два свойства легко проверяются. Однако, нужно подчеркнуть, что равенство нулю нормы влечет равенство нулю функции только почти всюду, но это как раз и определяет нулевой класс функций в $\mathrm{L}_p(G)$. Неравенство треугольника для этой нормы называется *неравенством Минковского.*

5.3.2. Неравенство Минковского

Для любых $f, g \in \mathrm{L_p(G)}$ справедливо неравенство Минковского

$$\left(\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_G |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{5.3.2}$$

Доказательство опирается на неравенство Гельдера, которое в свою очередь есть следствие неравенства Юнга — поэтому начнем по-порядку.

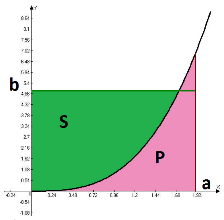
1. Докажем сначала **неравенство Юнга**: для любых $a, b \ge 0$

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{5.3.3}$$

где $p, q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Ясно, что если одно из чисел a или b равно нулю, то неравенство Юнга очевидно выполняется. Предположим, что и $a > 0$, и $b > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^{p-1}$. Посмотрев на график этой функции, заметим, что неравенство Юнга – это соотношение между площадью прямоугольника, равной ab, с одной стороны, а с другой — площадью P подграфика рассматриваемой функции и площадью S подграфика обратной к ней: $ab \le S + P$.



Действительно,

$$P = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p},$$

$$S = \int_0^a y^{1/(p-1)}\,dy = \frac{(p-1)b^{\frac{p}{p-1}}}{p}.$$

Остается лишь заметить, что $\frac{p}{p-1} = q$. $\square$

2. Докажем теперь **неравенство Гельдера** для интегралов: для любых $f \in \mathrm{L_p(G)}$ и $g \in \mathrm{L_q(G)}$ при $1/p + 1/q = 1$

$$\int_G |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_G |f(x)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_G |g(x)|^q\right)^{1/q}. \tag{5.3.4}$$

В терминах норм это неравенство имеет вид

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{5.3.5}$$

Доказательство. Положим

$$A = \|f\|_p, \quad B = \|g\|_q.$$

Ясно, что если одно из этих чисел равно нулю, то неравенство Гельдера очевидно выполняется. Предположим, что $A > 0$ и $B > 0$. Применяя неравенство Юнга (5.3.3) для чисел

$$a = \frac{|f(x)|}{A}, \quad b = \frac{|g(x)|}{B},$$

получаем

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB} \le \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}.$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\frac{\|fg\|_1}{AB} \le \frac{\|f\|_p^p}{pA^p} + \frac{\|g\|_q^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Остается только умножить получившееся соотношение на AB. $\square$

3. Теперь приступим к доказательству непосредственно самого неравенства Минковского.

Доказательство. Имеем

$$\int_G |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int_G |f(x)+g(x)|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)\,dx =$$

$$= \int_G |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_G |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx \le$$

$$\overset{(5.3.4)}{\le} \left(\int_G |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\right)^{1/q} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Переписывая в терминах норм, с учетом равенства $(p-1)q = p$, получим

$$\|f+g\|_p^p \le \|f+g\|_p^{p/q}(\|f\|_p + \|g\|_p),$$

что эквивалентно доказываемому неравенству. □

5.3.3. Полнота и сепарабельность лебеговских пространств.

Лебеговские функциональные пространства $\mathrm{L_p(G)}$ являются сепарабельными банаховыми пространствами. Полнота показывается нетривиально [5, с. 376, 383]. Счетным всюду плотным подмножеством (в случае, например, если $G = [a,b]$) является множество многочленов с рациональными коэффициентами или множество ступенчатых функций с рациональными значениями на отрезках с рациональными концами (или с двоично рациональными концами).

Действительно, в случае многочленов известно, что всякая непрерывная функция приближается многочленами по норме непрерывных функций и, следовательно, по норме пространства $\mathrm{L_p(a,b)}$, так как

$$\|\widetilde{f} - p\|_p \le \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{f}(x) - p(x)|(b-a)^{1/p},$$

где $\widetilde{f}(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, а $p(x)$ – многочлен, приближающий $\widetilde{f}(x)$. Всякую функцию $f \in \mathrm{L_p(a,b)}$ можно приблизить непрерывными функциями, например, такими:

$$\widetilde{f}_\delta(x) = \delta^{-1} \int_a^b f(y)\omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dy,$$

где $\omega(z)$ – *усредняющее ядро Соболева*, или *шапочка Соболева*, т. е. функция, обладающая свойствами:

1) $\omega(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция;
2) $\omega(z) \ge 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$;
3) $\omega(z) = 0$ для всех $|z| \ge 1$;
4) $\int_{-1}^1 \omega(z)\,dz = 1$.

На самом деле, функции $\widetilde{f}_\delta$ будут гладкими. Таким образом, всюду плотным множеством будут являться также гладкие функции.

5.4 Скалярное произведение и его свойства

5.4.1. Определение и примеры

Определение 56. Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство над числовым полем $\mathbb{F}(= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ и функция двух аргументов $(\cdot\,,\cdot) : \mathbf{L}\times\mathbf{L} \mapsto \mathbb{F}$ удовлетворяет свойствам:

1) $(x,x) \ge 0$ и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y) = \alpha_1(x_1,y) + \alpha_2(x_2,y)$ (лин-сть по 1-му аргументу);
3) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (эрмитова симметричность).

Тогда функция $(\cdot\,,\cdot)$ называется *скалярным произведением (или внутренним произведением)*, а пространство $\mathbf{L}$ *евклидовым* (над $\mathbb{R}$) или *унитарным* (над $\mathbb{C}$) пространством.

Отметим, что в физической литературе зачастую встречается скалярное произведение, линейное по второму аргументу, в этом случае комплексное сопряжение в рассматриваемых ниже примерах нужно навешивать на первый аргумент.

Пример 26. Рассмотрим несколько уже встречавшихся нам линейных пространств.

Линейное пространство		**Скалярное произведение**
арифметическое $n-$ мерное пространство (пример 18.1))	$\mathbb{F}^n$	$(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$
пространство матриц (пример 18.2))	$M_n(\mathbb{F})$	$(A,B) = \mathrm{tr}(A\overline{B}^T)$
пространство последовательностей (пример 21.2))	ℓ_2	$(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$
Лебеговское функциональное пространство (§ 5.3)	$\mathrm{L}_2(G)$	$(f,g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx$
пространство Соболева (определение 41)	$H^l(G) = W_2^l(G)$	$(f,g) = \sum\limits_{0\le\lvert\alpha\rvert\le l} \int_G D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx$

5.4.2. Неравенство Коши–Буняковского(–Шварца)

Для любых $x, y \in \mathbf{L}$ справедливо неравенство

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y). \tag{5.4.1}$$

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \overset{1)\text{св.}O.56}{\le} (x+ty, x+ty) \overset{2)\text{св.}O.56}{=} (x, x+ty) + t(y, x+ty) =$$
$$\overset{3)\text{св.}O.56}{=} \overline{(x+ty, x)} + t\overline{(x+ty, y)} = (x,x) + t\overline{(y,x)} + t\overline{(x,y)} + t^2(y,y) =$$
$$= t^2(y,y) + 2t\mathrm{Re}(x,y) + (x,x).$$

Предположим, что $(x,y) \in \mathbb{R}$, тогда из предыдущих выкладок следует, что дискриминант получившегося квадратного многочлена неотрицателен:

$$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \le 0,$$

что эквивалентно доказываемому неравенству. Предположим теперь, что $(x,y) \in \mathbb{C}$. Тогда обозначим $(x,y) = re^{i\phi}$ и рассмотрим новый вектор $\widetilde{x} = e^{-i\phi}x$. Имеем

$$(\widetilde{x}, y) = (e^{-i\phi}x, y) \overset{2)\text{св.}O.56}{=} e^{-i\phi}(x,y) = e^{-i\phi}e^{i\phi}r = r \in \mathbb{R},$$

поэтому по уже доказанному случаю, получаем

$$|(\widetilde{x}, y)|^2 = (\widetilde{x}, \widetilde{x})(y, y).$$

Остается заметить, что $|(\widetilde{x}, y)| = |(x, y)|$ и $(\widetilde{x}, \widetilde{x}) = (x, x)$. $\square$

5.4.3. Норма, порожденная скалярным произведением

Определение 57. Говорят, что норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ *порождена* скалярным произведением, или *согласована* со скалярным произведением.

Покажем, что это, действительно, норма.

1). Ясно, что $\|x\| \geq 0$. Если же $\|x\| = 0$, то $(x, x) = 0 \overset{1)\text{св.}O.56}{\Rightarrow} x = 0$.

2). Имеем

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} \overset{2)\text{св.}O.56}{=} \sqrt{\alpha(x, \alpha x)} = \\ \overset{3)\text{св.}O.56}{=} \sqrt{\alpha\overline{(\alpha x, x)}} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha|\|x\|.$$

3). Рассмотрим квадрат суммы:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + (y, y) \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \overset{(5.4.1)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Свойства нормы проверены. Отметим, что в обозначениях нормы, неравенство Коши–Буняковского принимает вид

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|. \tag{5.4.2}$$

Определение 58. Нормированное пространство $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ называется *гильбертовым*, если оно полно относительно этой нормы.

5.4.4. Тождество параллелограмма Для любых $x, y \in \mathbf{L}$ справедливо равенство

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2, \tag{5.4.3}$$

которое называется *тождеством параллелограмма*, в связи с его простой геометрической интерпретацией: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Тождество легко проверяется раскрытием нормы через соответствующее скалярное произведение.

Важность этого тождества заключается в том, что нормы, ему удовлетворяющие, обязательно согласованы с каким-нибудь скалярным произведением. Сформулируем этот результат в виде теоремы, доказанной фон Нейманом и Йорданом.

Теорема 36. *Пусть* $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ *– линейное нормированное пространство и норма* $\|\cdot\|$ *удовлетворяет тождеству параллелограмма* (5.4.3), *тогда существует скалярное произведение* $(\cdot,\cdot)$, *с которым эта норма согласована.*

Доказательство теоремы 36. Мы приведем лишь формулы для скалярного произведения, которые называются *поляризационными тождествами*:

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{над } \mathbb{R}, \tag{5.4.4}$$

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) \quad \text{над } \mathbb{C}. \tag{5.4.5}$$

□

5.4.5. Непрерывность скалярного произведения

Теорема 37. *Пусть* H *— гильбертово пространств, и* $x_n \to x$ *и* $y_m \to y$. *Тогда для любого* $z \in H$

$$(x_n, z) \to (x, z) \quad \text{– непрерывность по первому аргументу}; \tag{5.4.6}$$

$$(z, y_m) \to (z, y) \quad \text{– непрерывность по второму аргументу}; \tag{5.4.7}$$

$$(x_n, y_m) \to (x, y) \quad \text{– непрерывность по двум аргументам.} \tag{5.4.8}$$

Доказательство теоремы 37. Докажем лишь непрерывность по первому аргументу, остальные свойства доказываются почти аналогично. Имеем

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{(5.4.2)}{\leq} \|x_n - x\|\|y\| \to 0.$$

□

5.5 Ортогонализация Грама–Шмидта

Определение 59. Векторы x и y – *ортогональны* ($x \perp y$), если $(x,y) = 0$. Векторы x и y – *ортонормальны*, если они ортогональны, и норма каждого равна единице, т.е. $(z_i, z_j) = \delta_{ij}$.

Всякую счетную линейно независимую систему векторов $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ можно *ортонормировать* процессом Грама – Шмидта:

$$\begin{array}{ll} y_1 = x_1, & z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \\ y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1, & z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}, \\ \dots & \dots \\ y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k, & z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}. \\ \dots & \dots \end{array} \tag{5.5.1}$$

Теорема 38. *Получившиеся векторы z_k ортонормальны и для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{lin}\{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Доказательство теоремы 38. Применим индукцию по n. Легко проверяется база индукции. Предположим, что утверждение теоремы уже доказано для всех $1 \le k < n$. Докажем его для $k = n$. Для любого $1 \le j < n$ получаем

$$\begin{aligned}(z_n, z_j) \overset{(5.5.1)}{=} \frac{1}{\|y_n\|}\left(x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k, z_j\right) = \\ = \frac{1}{\|y_n\|}\left((x_n, z_j) - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)\delta_{kj}\right) = \\ = \frac{1}{\|y_n\|}\left((x_n, z_j) - (x_n, z_j)\right) = 0.\end{aligned}$$

Второе утверждение следует из соотношений

$$\operatorname{lin}\{z_1, \ldots, z_n\} = \operatorname{lin}\{\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, z_n\}$$

и

$$z_n \in \operatorname{lin}\{\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}, x_n\}.$$

□

По аналогии с вещественным арифметическим пространством в евклидовых пространствах можно ввести понятие угла.

Определение 60. *Углом* для ненулевых векторов x, y евклидова пространства называется величина $\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Ввиду неравенства Коши–Буняковского угол корректно определен. В связи с этим понятием ясно, что ортогональность двух векторов эквивалентна прямому углу между ними.

Пример 27. В пространстве Соболева $H^1(-1,1)$ рассмотрим систему функций $1, x$ и $|x|$. Ортонормируем ее относительно скалярного произведения в H^1 (см. пример 26).

Во-первых, ясно, что эта система линейно независима. Действительно, $\alpha 1 + \beta x + \gamma|x| \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha 1 + (\beta - \gamma)x \equiv 0, x < 0$ и $\alpha 1 + (\beta + \gamma)x \equiv 0, x \ge 0$, т. е. $\alpha = 0, \beta - \gamma = 0$ и $\beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Заметим также, что производные $1' = 0, x' = 1$ и $|x|' = \operatorname{sgn}(x)$ интегрируемы на интервале $(-1, 1)$, поэтому $1, x, |x| \in H^1(-1,1)$.

$$\begin{array}{ll}
y_1(x) = 1, & y_1'(x) = 0, \\
\|y_1\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_1^2(x)dx + (y_1'(x))^2\,dx = 2, & z_1(x) = \frac{y_1(x)}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
y_2(x) = x - (x, \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\,dx = x, & y_2'(x) = 1, \\
\|y_2\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_2^2(x)dx + (y_2'(x))^2\,dx = \frac{8}{3} & z_2 = \frac{y_2(x)}{\|y_2\|} = \frac{x\sqrt{6}}{4}. \\
y_3(x) = |x| - (|x|, \frac{1}{2}) - (|x|, \frac{x\sqrt{6}}{4})\frac{x\sqrt{6}}{4} = |x| - \frac{1}{2}, & y_3'(x) = \operatorname{sgn}(x), \\
\|y_3\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_3^2(x)dx + (y_3'(x))^2\,dx = \frac{13}{6}, & z_3 = (|x| - \frac{1}{2})\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.
\end{array}$$

Таким образом, получаем ортонормированную систему функций:

$$z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z_2(x) = \frac{x\sqrt{6}}{4} \text{ и } z_3(x) = \left(|x| - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.$$

5.6 Проектирование

5.6.1. Проекция и ближайший вектор

Определение 61. Пусть H — гильбертово пространство, $E \subset H$ — его линейное подпространство. Вектор $y \in E$ называется проекцией вектора $x \in H$ на множество E, если $x - y \perp E$, т.е. $(x - y, z) = 0$ для любых $z \in E$. Обозначают проекцию как $y = \mathrm{Pr}_E x$.

Проекция, вообще говоря, может не существовать (см.[P12, примеры 2.3.1. и 2.3.2.]). Однако, если она существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, что для вектора x найдется еще одна проекция $y' = \mathrm{Pr}_E x$, тогда из определения имеем: для любого $z \in E$

$$(x - y, z) = 0 = (x - y', z).$$

Откуда вычитая одно из другого и беря $z = y - y' \in E$, получаем

$$(y - y', y - y') = 0 \Rightarrow y = y'.$$

□

Определение 62. $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство, $Y \subset X$. Вектор $y \in Y$ называется вектором *наилучшего приближения* из Y для вектора $x \in X$ (или *ближайшим* к x вектором из множества Y), если

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Как и проекция ближайший вектор тоже может не существовать, а вот если существует, то может быть не единственным. Связь между проекцией и вектором наилучшего приближения заключена в следующей теореме.

Теорема 39. *Пусть H — гильбертово пространство, $E \subset H$ — его замкнутое линейное подпространство. Тогда для любого $x \in H$ проекция $y = \mathrm{Pr}_E x$ существует, единственна и является ближайшим вектором из E к x. Кроме того, справедлива теорема Пифагора:*

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2. \tag{5.6.1}$$

Доказательство теоремы 39. Докажем сначала теорему Пифагора. Имеем

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x - y, x) - (x - y, y) \overset{O.61}{=} (x - y, x) =$$
$$= (x, x) - \underbrace{(y, x)}_{=(y,y)} = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Существование проекции докажем лишь в важном случае конечномерного подпространства E. Ясно, что оно замкнуто. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — алгебраический базис E. Применяя к нему ортогонализацию Грама–Шмидта, получаем ортонормированную систему $e_1, \ldots, e_n$, которая также будет алгебраическим базисом E. Таким образом, всякий вектор $z \in E$ представляется в виде

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \ \ \alpha_k \in \mathbb{F}.$$

Покажем, что проекция задается равенством

$$y = \mathrm{Pr}_E x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \ \ \lambda_k = (x, e_k). \tag{5.6.2}$$

Имеем

$$(x - y, z) = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_m e_m \right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \overline{\alpha_m}(x, e_m) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \lambda_k \overline{\alpha_k}(e_k, e_m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \overline{\alpha_m} \lambda_m - \sum_{m=1}^{n} \overline{\alpha_m} \lambda_m = 0.$$

Кроме того, проекция есть вектор наилучшего приближения для x :

$$\|x - z\|^2 = (x - y - z + y, x - y - z + y) =$$
$$= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + \underbrace{(x - y, y - z) + (y - z, x - y)}_{=0} \geq \|x - y\|^2.$$

□

Пример 28. В пространстве Соболева $H^1(-1,1)$ найдем двумя способами проекцию вектора x^2 на подпространство $E = \mathrm{lin}\{1, x, |x|\}$.

`1 способ: использование формулы` (5.6.2). Ортонормированный алгебраический базис в пространстве E мы уже нашли в примере 27:

$$e_1 = z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ e_2 = z_2(x) = \frac{x\sqrt{6}}{4} \text{ и } e_3 = z_3(x) = \left(|x| - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.$$

Тогда

$$\mathrm{Pr}_E x^2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3,$$

где

$$\lambda_1 = (x^2, e_1) = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\lambda_2 = (x^2, e_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x\sqrt{6}}{4}\, dx + \int_{-1}^{1} 2x \frac{\sqrt{6}}{4}\, dx = 0,$$

$$\lambda_3 = (x^2, e_3) = \int_{-1}^{1} x^2 \left(|x| - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}\, dx + \int_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{sgn} x \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}\, dx = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Pr}_E x^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}}\left(|x| - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} = |x| - \frac{1}{6}.$$

`2 способ: использование понятие ближайшего.` Любой вектор $z \in E$ имеет вид

$$z = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot |x|.$$

Для нахождения ближайшего нужно определить числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ из условия наименьшего квадрата нормы $\|x^2 - z\|^2$. Имеем

$$F(a,b,c) = \|x^2 - z\|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - a - bx - c|x|)^2\, dx + \int_{-1}^{1} (2x - b - c\,\mathrm{sgn}\, x)^2\, dx.$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2\int_{-1}^{1} x^2 - a - bx - c|x|\, dx = -\frac{4}{3} + 4a + 2c = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2\int_{-1}^{1} (x^2 - a - bx - c|x|)x\, dx - 2\int_{-1}^{1} 2x - b - c\,\mathrm{sgn}\, x\, dx = \frac{16b}{3} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -2\int_{-1}^{1} (x^2 - a - bx - c|x|)|x|\, dx - 2\int_{-1}^{1} (2x - b - c\mathrm{sgn}\, x)\,\mathrm{sgn}\, x\, dx =$$
$$= 2a + \frac{16c}{3} - 5 = 0.$$

Решая эту систему из трех уравнений, получаем

$$a = -\frac{1}{6},\ b = 0,\ c = 1.$$

Таким образом, ближайший вектор имеет вид:

$$z = |x| - \frac{1}{6},$$

что, как видим, совпадает с найденной проекцией.

5.6.2. Ортогональное дополнение

Определение 63. Пусть H — гильбертово пространство и $E \subset H$. *Ортогональным дополнением* к множеству E называется множество

$$E^{\perp} = \{x \in H : \ x \perp E\}.$$

Упражнение 21. Показать, что ортогональное дополнение $E^{\perp}$ — замкнутое линейное подпространство H.

Теорема 40. *Пусть H — гильбертово пространство и E — его замкнутое линейное подпространство. Тогда H раскладывается в прямую сумму*

$$H = E \oplus E^{\perp},$$

т.е. для любого $x \in H$ найдутся вектора $y_1 \in E$ и $y_2 \in E^{\perp}$, что

$$x = y_1 + y_2$$

и такое представление x единственно.

Доказательство теоремы 40. Положим $y_1 = \mathrm{Pr}_E x$. По теореме 39 такой вектор существует и единственен. Остается показать, что вектор $y_2 = x - y_1 \in E^{\perp}$. Но это следует в точности из определения проекции 61: $x - y_1 \perp E$. Предположим теперь, что существует еще одно представление

$$x = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2, \ \tilde{y}_1 \in E, \ \tilde{y}_2 \in E^{\perp}.$$

Тогда вычитая одно представление из другого, получаем

$$\underbrace{y_1 - \tilde{y}_1}_{\in E} = \underbrace{\tilde{y}_2 - y_2}_{\in E^{\perp}},$$

откуда получаем

$$0 = (y_1 - \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 - y_2) = (y_1 - \tilde{y}_1, y_1 - \tilde{y}_1) \ \Rightarrow \ y_1 = \tilde{y}_1.$$

Аналогично получаем, что $y_2 = \tilde{y}_2$. □

5.7 Ортонормированный базис

5.7.1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{E} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — ортонормированная система векторов. Сепарабельность нашего пространства ограничивает количество векторов в этой системе. А именно, покажем, что эта ортонормированная система не более, чем счетна. Рассмотрим нормы разностей:

$$\|x_\alpha - x_\beta\|^2 = (x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta) = \underbrace{\|x_\alpha\|^2}_{=1} - \underbrace{(x_\alpha, x_\beta)}_{=0} - \underbrace{(x_\beta, x_\alpha)}_{=0} + \underbrace{\|x_\beta\|^2}_{=1} = 2.$$

Поскольку H сепарабельно, то найдется счетное всюду плотное множество $Y \subset H$ (см. определение 55). Это в частности означает, что в каждый открытый шар $B(x_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2})$ с центром в x_α и радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ попадает хотя бы одна точка $y \in Y$. А поскольку шары не пересекаются, то их количество не более чем счетно.

Упражнение 22. Докажите, что шары $B(x_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2})$ попарно не пересекаются.

Определение 64. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *ортонормированным базисом*, или *базисом Гильберта*, если для любого $x \in H$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, e_n,\ \ \lambda_n = (x, e_n). \tag{5.7.1}$$

Разложение (5.7.1) называется разложением вектора x в ряд Фурье по системе $\mathcal{E}$, а коэффициенты λ_n — коэффициенты Фурье.

Напомним, что равенство (5.7.1) в точности означает

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\, e_n\| = 0.$$

Теорема 41. *Пусть H — не нулевое сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированный базис существует.*

Доказательство теоремы 41. Приведем лишь индуктивную процедуру построения гильбертова базиса. Так как H нулевое пространство, то существует $e_1 \in H : \|e_1\| = 1$. Положим $E_1 = \operatorname{lin}\{e_1\}$. По теореме 40 имеем $H = E_1 \oplus E_1^\perp$. Если $E_1^\perp$ нулевое, то e_1 —базис. В противном случае существует $e_2 \in E_1^\perp$: $\|e_2\| = 1$. Продолжая, положим $E_2 = \operatorname{lin}\{e_1, e_2\}$. Опять по теореме 40 имеем $H = E_2 \oplus E_2^\perp$. И так далее. □

Ясно, что ортонормированный базис является линейно независимой системой, поэтому его можно включить в алгебраический базис (см. определение 47). Их мощности совпадают лишь в конечномерных пространствах.

5.7.2. Неравенство Бесселя и уравнение замкнутости

Теорема 42. *Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Для любого $x \in H$ справедливо неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2,\ \ \lambda_n = (x, e_n). \tag{5.7.2}$$

Доказательство теоремы 42. Рассмотрим конечномерные подпространства

$$E_n = \operatorname{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\},\ n \geq 1.$$

Ясно, что вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют ортонормированный базис E_n. Положим

$$y_n = \operatorname{Pr}_{E_n} x \overset{(5.6.2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Применяя теорему Пифагора, для каждого $n \geq 1$ получаем

$$\|x\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 \geq \|y_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_n|^2.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое. □

Определение 65. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in H$ выполняется *равенство Парсеваля*, или *уравнение замкнутости*:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^n,\ \lambda_n = (x, e_n). \tag{5.7.3}$$

Упражнение 23. Показать, что уравнение замкнутости (5.7.3) эквивалентно условию: для любых $x, y \in H$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu}_n, \quad \lambda_n = (x, e_n),\ \mu_n(y, e_n). \tag{5.7.4}$$

5.7.3. Эквивалентные определения ортонормированного базиса

Определение 66. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *полной*, если ее ортогональное дополнение $\mathcal{E}^\perp = 0$, т.е. если для любого $n \geq 1$ $(x, e_n) = 0$, то $x = 0$. Говорят также, что систему $\mathcal{E}$ нельзя пополнить.

Теорема 43. *Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Следующие условия эквивалентны:*

1). $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис;
2). $\mathcal{E}$ — замкнутая система;
3). $\mathcal{E}$ — полная система.

Доказательство теоремы 43. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис. Рассмотрим ряды Фурье по системе $\mathcal{E}$ двух произвольных векторов $x, y \in H$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n,\ \lambda_n = (x, e_n),$$

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m e_m,\ \mu_m = (y, e_m).$$

Имеем

$$(x,y) \overset{(5.4.8)}{=} \lim_{N,M\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n, \sum_{m=1}^{M}\mu_m e_m\right) =$$
$$= \lim_{N,M\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\lambda_n\overline{\mu}_m(e_n,e_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\overline{\mu}_n.$$

Это, учитывая (5.7.4), означает замкнутость системы $\mathcal{E}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутая система. Предположим, что она не полна. Тогда ее можно пополнить не нулевым вектором $x \in H$. Это означает, что все коэффициенты Фурье $\lambda_n = (x,e_n) = 0$. Но тогда из уравнения замкнутости следует, что

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2 = 0.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathcal{E}$ — полная система. Для любого $x \in H$ рассмотрим последовательность

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n, \;\; \lambda_n = (x,e_n).$$

Покажем, что эта последовательность сходится. Ввиду полноты пространства H для этого достаточно доказать фундаментальность S_N. Из неравенства Бесселя (5.7.2) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $M > N \geq n_0$

$$\sum_{n=N+1}^{M}|\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Тогда для таких же M и N имеем

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M}|\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Итак, последовательность S_N сходится. Обозначим ее предел через $\tilde{x}$. Для любого $m \geq 1$ имеем

$$(x-\tilde{x},e_m) = (x,e_m) - (\tilde{x},e_m) \overset{(5.4.6)}{=} \lambda_m - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n, e_m\right) =$$
$$= \lambda_m - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(e_n,e_m) = \lambda_m - \lambda_m = 0.$$

Таким образом, вектор $x-\tilde{x} \in \mathcal{E}^{\perp}$. Так как $\mathcal{E}$ полна, то это значит, что $x = \tilde{x}$. А это ввиду произвольности x означает, что $\mathcal{E}$ — гильбертов базис. $\square$

Пример 29. Пусть $H = \ell_2$ покажем, что система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n-\text{ое место}}, \dots),\ n \in \mathbb{N}$$

является ортонормированным базисом. В примере 21 мы уже рассматривали эту систему и поняли, что она линейно независима. Кроме того, легко посчитать, что она ортонормальна. Рассмотрим произвольный вектор

$$x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_2.$$

Коэффициенты Фурье легко считаются: $\lambda_n = (x, e_n) = x_n,\ n \geq 1$. Тогда

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n\|^2 = \|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \to 0$$

Таким образом, мы напрямую показали, что $\mathcal{E}$ — гильбертов базис. Уравнение замкнутости для $\mathcal{E}$ выглядит как

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Но это по сути определение нормы в ℓ_2. Полнота системы $\mathcal{E}$ также легко проверяется:

$$(x, e_n) = 0 \Rightarrow\ x_n = 0 \Rightarrow\ x = 0.$$

Пример 30. Пусть $H = \mathrm{L}_2[-\pi, \pi]$ покажем, что система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},\ n \in \mathbb{Z}$$

является ортонормированным базисом. Легко проверяется, что данная система ортонормальна. Запишем, каким должно быть равенство Парсеваля для этой системы:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

где

$$\lambda_n = (f, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx \overset{(1.4.1)}{=} \sqrt{2\pi} c_{-n},$$

а c_n — "старые" коэффициенты Фурье. Замечаем, что получившееся уравнение замкнутости лишь формой записи отличается от доказанного нами ранее равенства Ляпунова (1.9.4).

Аналогичные рассуждения справедливы для тригонометрической системы состоящей из косинусов и синусов (см. [P12, пример 2.4.2.]).

5.8 Изоморфизм гильбертовых пространств

Определение 67. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Они называются *изоморфными*, если существует отображение $\Phi : H_1 \to H_2$, удовлетворяющее свойствам

1). Φ — биекция;

2). Φ — линейное отображение;

3). Φ сохраняет скалярное произведение, т.е. для любых $x, y \in H_1$

$$(x, y)_{H_1} = (\Phi(x), \Phi(y))_{H_2}.$$

Отображение Φ называется при этом *изоморфизмом* между пространствами H_1 и H_2.

Для доказательства теоремы об изоморфизме нам понадобится теорема Рисса–Фишера.

Теорема 44. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \ell_2$ найдется вектор $x \in H$ такой, что*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \ \lambda_n = (x, e_n).$$

Доказательство теоремы 44. Как и при доказательстве теоремы 43 (пункт 3) $\Rightarrow$ 1)) покажем, что последовательность

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n$$

фундаментальна, а значит сходится в H. Так как $\lambda \in \ell_2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $M > N \geq n_0$

$$\sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Тогда для таких же M и N имеем

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Обозначим за x предел последовательности S_N. Это и есть искомый вектор из H. $\square$

Сформулируем и докажем теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Теорема 45. *Всякое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно ℓ_2.*

Доказательство теоремы 45. Зафиксируем в H какой-нибудь гильбертов базис $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Для любого $x \in H$, представляемым своим рядом Фурье по системе $\mathcal{E}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \;\; \lambda_n = (x, e_n),$$

определим отображение $\Phi : H \to \ell_2$ равенством

$$\Phi(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots).$$

Покажем, что это и есть изоморфизм. Линейность практически очевидна:

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = (\nu_1, \nu_2, \ldots) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) + \beta(\mu_1, \mu_2, \ldots) = a\Phi(x) + b\Phi(y).$$

Здесь мы воспользовались простыми соотношениями:

$$\nu_n = (\alpha x + \beta y, e_n) = \alpha(x, e_n) + \beta(y, e_n) = \alpha\lambda_n + \beta\mu_n.$$

Сохранение скалярного произведения:

$$(x, y)_H \overset{(5.7.4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \overline{\mu}_n = (\lambda, \mu)_{\ell_2} = (\Phi(x), \Phi(y))_{\ell_2}.$$

Инъективность: пусть $x \neq y$, тогда ввиду полноты системы $\mathcal{E}$ найдется номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\lambda_n = (x, e_n) \neq (y, e_n) = \mu_n.$$

Откуда следует, что $\lambda \neq \mu$. Сюръективность: по теореме 44 Рисса–Фишера для любого $\lambda \in \ell_2$ обязательно найдется вектор x такой, что $\Phi(x) = \lambda$. $\square$

Из доказательства теоремы видно, что изоморфизм не единственен (в теореме он строился, используя некоторый произвольный базис Гильберта). Поскольку отношение изоморфности транзитивно, то из теоремы следует, что любые два сепарабельных гильбертовых пространств изоморфны между собой.

Оглавление

Список литературы

Издания, подготовленные кафедрой высшей математики ФФ НГУ

[Ab07] Абашеева Н. Л., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2007; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAb07(djvu).

[A95] Александров В. А., *Геометрия пространств со скалярным произведением*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1995; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA95(pdf).

[A05] Александров В. А., *Обобщённые функции*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2005; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA05(ps).

[A96.1] Александров В. А., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996.

[A93] Александров В. А., *Ортогональные многочлены*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA93(pdf).

[A92] Александров В. А., *Преобразование Лапласа*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1992; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA92(pdf).

[A02] Александров В. А., *Преобразование Фурье*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2002; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA02(pdf).

[A96.2] Александров В. А., *Ряды Фурье*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA96.2(pdf).

[AK93] Александров В. А., Колесников Е. В., *Интегральные уравнения*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAK93(pdf).

[B11] Бельхеева Р. К., *Ряды Фурье в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2011; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB11(pdf).

[B14.1] Бельхеева Р. К., *Обобщенные функции в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2014; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.1(pdf).

[B14.2] Бельхеева Р. К., *Преобразование Фурье в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2014; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.2(pdf).

[P12] Подвигин И. В., *Гильбертовы пространства в примерах и задачах*, Учебно-метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2012; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsP12(pdf).

Издания, рекомендуемые кафедрой высшей математики ФФ НГУ

[1] Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В., *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Выш. шк, Минск, 1978; http://reslib.org/Antonevich78(e-djvu).

[2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Наука, М., 1987; http://reslib.org/Bakhvalov87(e-djvu).

[3] Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, издание 4, исправленное и дополненное, Наука, М., 1981; http://reslib.org/Vladivmirov81(e-djvu).

[4] Зорич В. А. Математический анализ, Часть II. Издание 4-е, исправленное, МЦНМО, М., 2002.

[5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы функционального анализа и теории функций, Издание 6-е, исправленное, Наука, М., 1989.

[6] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, Том 1. Функциональный анализ, Мир, М., 1977.

[7] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность, Мир, М., 1978.

[8] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том. 3. Издание 5-е, Наука, М., 1969.

Дополнительная литература, использованная при подготовке курса лекций