УДК 517.98

И. В. Подвигин

Основы функционального анализа

Версия от 18.12.2013

Глава I. Ряды Фурье

Введение

Представление функций в виде функциональных рядов в математике и ее приложениях играют не маловажную роль. К примеру, в курсе математического анализа была изучена тема рядов Тейлора (и Маклорена), из которой известно, что всякая бесконечно дифференцируемая функция $f \in C^\infty(a,b)$ может быть представлена в виде специального степенного ряда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

в каждой точке $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$, где $\delta = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\frac{f^{(n)}(x_0)|}{n!}}}$.

Зная поведение коэффициентов этого ряда можно судить о некоторых свойствах самой функции. Кроме того, использование степенных рядов было полезно при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В комплексном анализе важную роль играют ряды Лорана, частным случаем которых являются ряды Тейлора. В нашем же курсе центральную роль в первой главе будут играть специальные тригонометрические ряды — ряды Фурье. Они также как и степенные ряды будут использоваться нами при решении имеющих физический смысл дифференциальных уравнений, только уже в частных производных. Отметим также простую связь между рядами Фурье и рядами Лорана. Имея для некоторой функции $f(z)$ разложение в ряд Лорана в кольце $r < |z| < R$ комплексной плоскости

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

и рассматривая его на любой окружности $|z| = \rho$ внутри кольца сходимости, мы получаем ряд Фурье в комплексной форме для функции $g(\varphi) = f(\rho e^{i\varphi})$:

$$g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n e^{in\varphi}.$$

§ 1. Задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и предположим, что она представляется в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.1}$$

Нас будут интересовать два вопроса об этом разложении:

1) Какими свойствами должна обладать функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы разложение (1.1) было справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$? Другими словами это означает, определить классы функций для которых функциональный ряд из правой части равенства (1.1) с некоторыми определенными коэффициентами a_n и b_n сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и его сумма равна левой части равенства (1.1), т.е. значению в той же точке $x \in \mathbb{R}$ функции f.

На этот вопрос мы уже можем частично дать ответ: функция f должна быть 2π-периодической, поскольку правая часть равенства (1.1) такова и есть.

2) Как найти коэффициенты a_n, b_n?

Эти два вопроса и есть для нас задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье. Начнем мы со второго вопроса, т.е. с нахождения выражений для коэффициентов a_n и b_n.

Итак, пусть наша функция 2π-периодична и настолько замечательная (т.е. обладает всеми свойствами, необходимыми для строгости рассуждений), что справедливо равенство (1.1), которое к тому же мы можем интегрировать (для левой части нет никаких проблем, а вот для правой возникают вопросы о перестановки предельных переходов: бесконечного суммирования и интегрирования).

Проинтегрируем равенство (1.1) на периоде, например на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx dx \\ &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= a_0\pi,\end{aligned}$$

откуда находим формулу для коэффициента a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{1.2}$$

Домножим теперь равенство (1.1) на $\cos mx, m \geqslant 1$ и снова проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{nm} = a_m \pi.$$

Отсюда находим формулу для коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \ m \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Умножая равенство (1.1) на $\sin mx, m \geqslant 1$, интегрируя его и проделывая аналогичные выкладки, получаем формулу и для коэффициентов b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \ m \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n, найденные по формулам (1.2), (1.3) и (1.4), называются *коэффициентами Фурье* функции f, а сами формулы — *формулы Эйлера–Фурье*[1].

Заметим, что в формулах Эйлера–Фурье можно заменить интегрирование на любой отрезок длиной в период функции f.

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Говорят, что ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть *[формальный] ряд Фурье* функции f. При этом пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Из формул (1.2) и (1.3) видно, что первая является частным случаем второй при $m = 1$. Этим объясняется исторически сложившееся написание ряда Фурье с выделенным нулевым коэффициентом a_0.

---

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик, один из самых известных членов Российской Академии Наук; Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик, основоположник теории тригонометрических рядов.

Отметим в конце этого параграфа, что все выкладки этого параграфа (перестановка предельных переходов) были справедливы, например, если ряд Фурье сходился равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. О том, для каких функций имеет место такая сходимость ряда Фурье, и ответ на первый сформулированный вначале вопрос, мы будем обсуждать чуть позднее, в следующих параграфах. Отметим лишь, что для равенства (1.1) необходимо существование коэффициентов Фурье (1.2)–(1.4), для чего достаточно потребовать абсолютную интегрируемость функции f на своем периоде. Действительно, если $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty$, то

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)||\cos nx|dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty.$$

Аналогично показывается ограниченность коэффициентов b_n. Везде в дальнейшем, если это особо не оговорено, мы будем молчаливо предполагать, что коэффициенты Фурье существуют (читай f – абсолютно интегрируема на промежутке).

§ 2. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Аналогично рассуждениям предыдущего параграфа можно получить ряд Фурье и формулы коэффициентов Фурье для функций с произвольным периодом. Мы получим эти результаты, опираясь на уже имеющиеся формулы. Покажем, как это сделать. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2l$-периодическая (и абсолютно интегрируемая на своем периоде) функция, т.е. $f(x) = f(x + 2l)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Определим 2π-периодическую функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$g(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right).$$

Проверим, что g действительно периода $2l$:

$$g(y + 2\pi) = f\left(\frac{l(y + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{ly}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y).$$

Для 2π-периодической функции g мы можем записать формальный ряд Фурье:

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny$$

с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos nydy,\ \ n \geqslant 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin nydy,\ \ n \geqslant 1.$$

Сделав во всех выражениях замену переменных $x = \frac{ly}{\pi}$, получим формальный ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l} \tag{2.1}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ n \geqslant 0, \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2l$-периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n, найденные по формулам (2.2) и (2.3) называются *коэффициентами Фурье* функции f. При этом ряд (2.1) с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть *[формальный] ряд Фурье* функции f.

§ 3. Разложение в ряд Фурье на интервале

3.1. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция, абсолютно интегрируемая на нем. Положим $2l = b - a$. Функцию f можно продолжить на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ до $2l$-периодической функции f^*. Для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое единственное число $k_x \in \mathbb{Z}$, что $x + 2lk_x \in (a, b]$ (можно также брать полуоткрытый интервал $[a, b)$) тогда функция f^* определяется равенством

$$f^*(x) = f(x + 2lk_x).$$

Вся эта конструкция изображена на рис. 1.

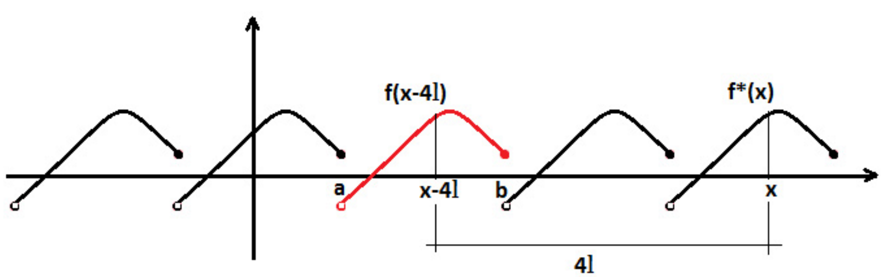

Рис. 1. Периодическое продолжение функции f на $\mathbb{R}$

Определение 4. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. *Разложить в [формальный] ряд Фурье* функцию f на отрезке $[a, b]$ означает разложение в [формальный] ряд Фурье $2l$-периодической функции f^*, $2l = b - a$.

При этом формулы (2.1)–(2.3) переписываются следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{b-a} \tag{3.1}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi n x}{b-a}dx,\ n \geqslant 0, \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}dx,\ \ n \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Отметим, что разница в построении периодической функции f^* заключается в определении ее значений на концах отрезка $[a,b]$ (в описанном выше случае мы брали $f^*(a) = f^*(b) = f(b)$); поскольку интегрирование не зависит от значений в одной точке, то формулы (3.1)–(3.3) не изменятся при рассмотрении f^* с какими-нибудь другими значениями в этих точках.

3.2. Рассмотрим теперь симметричный относительно нуля отрезок $[-a,a]$ и функцию $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$. Ряд Фурье (3.1) может выглядеть проще, если функция f обладает дополнительными свойствами четности или нечетности. Предположим, что f — четная функция, т.е. $f(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a,a]$. Тогда для всех $n \geqslant 1$ коэффициенты $b_n = 0$. Действительно, записывая формулу (3.3) (или (2.3)), получаем

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx \\
&= -\frac{1}{a}\int_a^0 f(-y)\sin\frac{\pi n(-y)}{a}dy + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx = 0.
\end{aligned}$$

Для коэффициентов $a_n,\ n \geqslant 0$ в этом случае справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx \\
&= -\frac{1}{a}\int_a^0 f(-y)\cos\frac{\pi n(-y)}{a}dy + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{a} \tag{3.4}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{\pi nx}{a}dx,\ \ n \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Аналогичным образом показывается, что для нечетной функции $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ (т.е. $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a,a]$) ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{a} \tag{3.6}$$

с коэффициентами

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi n x}{a}dx,\ n \geqslant 1. \tag{3.7}$$

3.3. Рассмотрим теперь отрезок $[0, a]$ и функцию $f : [0, a] \to \mathbb{R}$. Помимо разложения в ряд Фурье вида (3.1) для этой функции можно получить еще два разложения. Продолжим функцию f на отрезок $[-a, a]$ двумя способами четным и нечетным. Обозначим эти продолжения соответственно f_{even} и f_{odd}; смотрите пример на рис. 2 и 3.

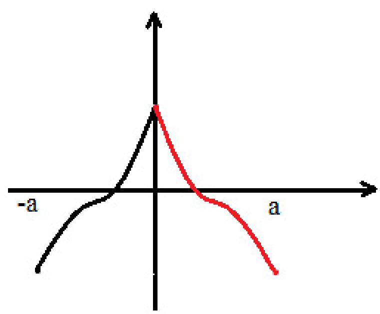

Рис. 2. Четное продолжение: $f_{even}(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0]$

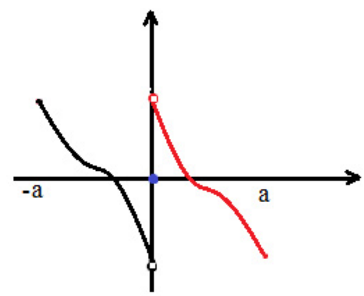

Рис. 3. Нечетное продолжение: $f_{odd}(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0)$

Определение 5. Разложение в ряд Фурье функций f_{even} и f_{odd} на отрезке $[-a, a]$ называется *разложением в ряд Фурье функции f по косинусам и по синусам* соответственно на отрезке $[0, a]$.

Принимая во внимание, что $f_{even}(x) = f_{odd}(x) = f(x)$ для любого $x \in (0, a]$, получаем, что непосредственно формулы этих разложений есть (3.4), (3.5) — по косинусам; (3.6), (3.7) — по синусам.

§ 4. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Запишем ее формальный ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

перепишем этот ряд в виде

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},
\end{aligned}
$$

где

$$
c_n = \left[\begin{array}{l} \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2},\ n < 0, \\ \frac{a_0}{2},\ n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2},\ n > 0. \end{array} \right.
$$

Легко проверить, что

$$
c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}
$$

К примеру, для $n < 0$ имеем

$$
c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(-n)x + i \sin(-n)x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nx} dx.
$$

Ясно, что формулу (4.1) можно применять и для комплекснозначных функций, поэтому введем следующее

Определение 6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодическая функция. Рядом Фурье *в комплексной форме* для этой функции называется ряд

$$
f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{4.2}
$$

с коэффициентами Фурье c_n, найденным по формуле (4.1).

По аналогии с предыдущими рассуждениями ряд Фурье в комплексной форме для $2l$-периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ находится по формуле

$$
f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} \tag{4.3}
$$

с коэффициентами Фурье

$$
c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{-i\pi nx}{l}} dx,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}
$$

§ 5. Лемма Римана–Лебега

Начнем отвечать на первый вопрос, сформулированный в §1. Но сначала докажем одну лемму[2], которую будем использовать в дальнейшем не один раз.

Лемма 1. *Пусть* $[a, b]$ *— отрезок вещественной прямой и* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— абсолютно интегрируемая функция, т.е.* $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, *тогда* $\int_a^b f(x) \cos pxdx \to 0$ *при* $p \to +\infty$.

Доказательство леммы 1. Предположим сначала, что f — гладкая на $[a, b]$ функция (обозначаем $f \in C^1[a, b]$), т.е. у нее существует непрерывная на $[a, b]$ производная f' (иногда так и говорят, f — непрерывно дифференцируема), причем производная на концах интервала понимается как односторонняя производная, и непрерывность в этих точках также односторонняя. Выпишем неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left| \int_a^b f(x) \cos pxdx \right| &= \left| \frac{1}{p} \int_a^b f(x) d \sin px \right| \\ &= \frac{1}{p} \left| f(b) \sin pb - f(a) \sin pa - \int_a^b \sin px f'(x) dx \right| \\ &\leqslant \frac{1}{p} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Поскольку выражение в скобках конечно, то по лемме о двух милиционерах заключаем, что лемма верна для гладкой функции f.

Для любой функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ такой, что $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется гладкая функция f_ε такая, что $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Мы не будем доказывать этот факт, но будем на него ссылаться (в дальнейшем) как о всюду плотности множества гладких функций в функциональном пространстве Лебега $L_1(a, b)$ (см. глава ? §?). Тогда получаем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left| \int_a^b f(x) \cos pxdx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \cos pxdx + \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos pxdx \right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos pxdx \right| \\ &\leqslant \varepsilon + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos pxdx \right|. \end{aligned}$$

По уже доказанному второе слагаемое стремится к нулю при $p \to +\infty$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, следовательно, лемма доказана. □

Следствие 1. Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, тогда

[2] Эта лемма называется *леммой Римана–Лебега* в честь выдающихся немецкого и французского математиков Георга Римана (1826–1886) и Анри Лебега (1875–1941).

1) ее коэффициенты Фурье $a_n, b_n \to 0$ при $n \to \infty$;
2) $\lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\sin px dx = \lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\cos px dx = \lim\limits_{p\to\pm\infty} \int_a^b f(x)e^{ipx}dx = 0.$

§ 6. Ядра Дирихле

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция. Используя формулы (1.2)–(1.4) коэффициентов Фурье, запишем частичную сумму ее ряда Фурье

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(\cos ky\cos kx + \sin ky \sin kx)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathcal{D}_n(y-x)dy, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kz\right). \tag{6.1}$$

Найдем компактное выражение для функции $\mathcal{D}_n(z)$. Домножим ее на $\sin\frac{z}{2}$ и, воспользовавшись тригонометрической формулой произведения косинус на синус, получим

$$\begin{aligned} \pi\mathcal{D}_n(z)\sin\frac{z}{2} &= \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \cos z\sin\frac{z}{2} + \ldots + \cos nz\sin\frac{z}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{3z}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)z}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)z}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)z}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi\sin\frac{z}{2}},\ z\in\mathbb{R},\ n\geqslant 1. \tag{6.2}$$

Тогда выражение для частичной суммы $T_n(x)$ имеет вид

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin\frac{(2n+1)(y-x)}{2}}{2\pi\sin\frac{y-x}{2}}dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi\sin\frac{z}{2}}dz, \tag{6.3}$$

где в последнем равенстве мы сделали замену переменных $z = y - x$ и воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Определение 7. Функция $\mathcal{D}_n(z)$, выражаемая формулами (6.1) и (6.2), называется n-ым *ядром Дирихле*[3]; а интеграл в формуле (6.3) — *интеграл Дирихле*.

Из определения следует, что ядра Дирихле обладают следующим свойством: для любого $n \geqslant 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(z)dz = 1. \tag{6.4}$$

§ 7. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье

Следующий класс функции играет важную роль на протяжении всей этой главы, а теорема 1 дает ответ на вопрос 1) из первого параграфа.

Определение 8. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой*, если существует конечное число точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

таких, что на каждом интервале $(x_j, x_{j+1}), j = 0, \ldots n-1$ функция f будет гладкой, а в точках x_j существуют и конечны следующие односторонние пределы

$$f(x_j \pm 0) := \lim_{x\to 0\pm} f(x_j + x),$$

$$f'(x_j \pm 0) := \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x_j + x) - f(x_j \pm 0)}{x},$$

причем в точках a и b нужно рассматривать только правые и, соответственно, левые пределы.

Упражнение 1. Верно ли, что $f'(x_j \pm 0) = \lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x_j + x)$?

Чтобы лучше понять это определение, приведем несколько примеров, отражающих каждую деталь этого определения.

Пример 1. На отрезке $[-2,2]$ рассмотрим четыре функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2,0), \\ x^2, & x \in [0,2], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{-2x - x^2}, & x \in [-2,0), \\ \sqrt{2x - x^2}, & x \in [0,2], \end{cases}$$

$$f_3(x) = \sin\frac{1}{x},\ f_4(x) = x \sin\frac{1}{x}.$$

Для каждой из них есть ровно одна особая точка $x_1 = 0$. Первая функция разрывна, но обладает всеми конечными односторонними пределами в x_1, поэтому она кусочно-гладкая. Вторая функция непрерывна, но в x_1 правая и левая производная бесконечны, следовательно, она не является кусочно-гладкой. Третья функция не кусочно-гладкая, поскольку правый и левый пределы функции в x_1 не существуют. Наконец, четвертая функция не является кусочно-гладкой, поскольку правый и левый пределы производной не существует в x_1. Графики функций изображены на рис. 4–7.

[3]Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, основные труды по теории чисел и математическому анализу.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно-гладкая на периоде функция, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{7.1}$$

Напомним, что $f(x \pm 0) = \lim\limits_{y \to 0\pm} f(x+y)$. Ясно, что для непрерывных функций левая часть равенства (7.1) равна $f(x)$. Таким образом равенство (1.1) справедливо, например, для непрерывных кусочно-гладких функций.

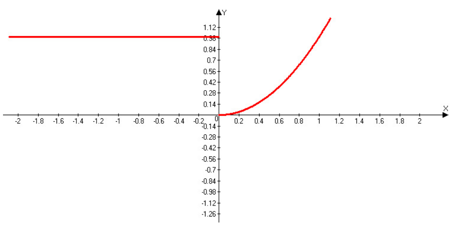

Рис. 4. Функция f_1 кусочно-гладкая, поскольку все односторонние пределы в $x_1 = 0$ конечны

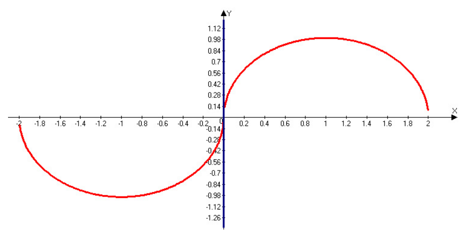

Рис. 5. Функция f_2 не кусочно-гладкая, так как пределы производных в $x_1 = 0$ бесконечны

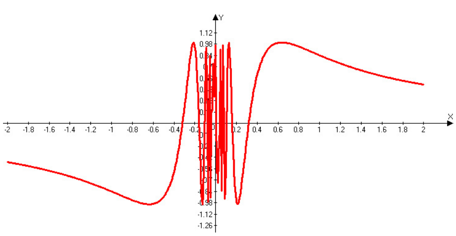

Рис. 6. Функция f_3 не кусочно-гладкая, так как пределы функции в $x_1 = 0$ не существуют

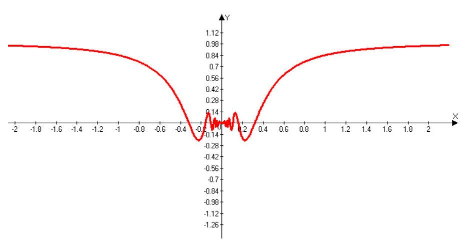

Рис. 7. Функция f_4 не кусочно-гладкая, поскольку пределы производной в $x_1 = 0$ не существуют

Доказательство теоремы 1. Нам нужно доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ равен $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Используя формулу (6.3) для выражения $T_n(x)$, а также свойство (6.4), получим

$$\begin{aligned}
&T_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\mathcal{D}_n(z)dz - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(z)dz = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz = \\
&\quad = \underbrace{\int_{-\pi}^{0}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz}_{z=-w} + \\
&\quad + \int_{0}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz = \\
&\quad = -\int_{\pi}^{0}\left(f(x-w) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(-w)dw + \\
&\quad + \int_{0}^{\pi}\left(f(x+z) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)\mathcal{D}_n(z)dz = \\
&\overset{z=w,\,\mathcal{D}_n(z)=\mathcal{D}_n(-z)}{=} \int_0^{\pi}\left(f(x+z)+f(x-z)-f(x+0)-f(x-0)\right)\mathcal{D}_n(z)dz = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(z)\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz,
\end{aligned}$$

где

$$g(z) = \left(\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z} + \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right)\frac{z}{\sin\frac{z}{2}}.$$

Из определения кусочно-гладкости следует, что функция g в окрестности нуля ограничена, а поскольку на остальном множестве интервала $(0,\pi)$ она кусочно-гладкая, то, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому по лемме 1 (Римана–Лебега) интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(z)\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz \to 0$$

при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим использующийся в дальнейшем пример нахождения ряда Фурье и его применение для суммирования числового ряда.

Пример 2. На интервале $(-\pi,\pi)$ определим функцию $\sigma(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}x$, и продолжим ее по периодичности на всю числовую прямую.

Поскольку $\sigma(x)$ — нечетная функция, то воспользовавшись формулой (3.7), получим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sigma(x)\sin nx\,dx = \int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{1-(-1)^n}{2},\ n \geqslant 1.$$

Так как $\sigma(x)$ кусочно-гладкая, и в точках разрыва выполняется равенство $\sigma(x) = \frac{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)}{2}$, то по теореме 1 для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x; \tag{7.2}$$

в частности, для любого $x \in (-\pi, \pi)$ верно равенство

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x. \tag{7.3}$$

Подставляя в равенство (7.3), например, точку $x = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

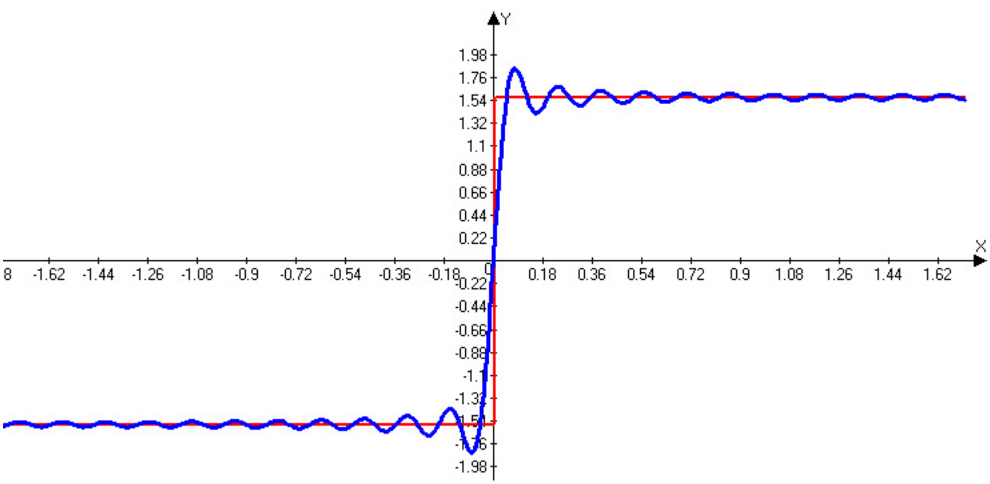

Рис. 8. График функции $\sigma(x)$ и частичной суммы $\sigma_{20} = \sum_{k=1}^{20} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x$ ее ряда Фурье в окрестности нуля

§ 8. Дифференцируемость и интегрируемость рядов Фурье

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ x \in \mathbb{R}$, тогда*

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx,$$

где

$$a'_n = nb_n,\ b'_n = -na_n,\ n \geqslant 1. \tag{8.1}$$

Доказательство теоремы 2. Поскольку производная f' непрерывна, то для нее можно построить формальный ряд Фурье. Поэтому остается лишь показать справедливость формул (8.1). Имеем

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \\ &= \frac{1}{\pi}\underbrace{(f(\pi)\cos\pi x - f(-\pi)\cos(-\pi x))}_{0} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = nb_n. \end{aligned}$$

Второе равенство из (8.1) доказывается аналогично. $\square$

Наложенные условия на функцию f в теореме 2 позволяют формально продифференцировать ее ряд Фурье и получить формальный ряд Фурье для ее производной f' :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{=} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \Big\downarrow \frac{d}{dx} & & \Big\downarrow \frac{d}{dx} \\ f'(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{nb_n}_{=a_n'} \cos nx + \underbrace{-na_n}_{=b_n'} \sin nx. \end{array}$$

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывная функция и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, при этом $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, тогда для функции $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ и для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

где

$$A_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \text{ и } A_n = -\frac{b_n}{n},\ B_n = \frac{a_n}{n},\ n \geqslant 1. \tag{8.2}$$

Доказательство теоремы 3. Поскольку $F(x)$ непрерывно дифференцируема и 2π-периодична:

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = F(x) + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)dt}_{0} = F(x),$$

то для нее применима теорема 2. Поэтому

$$a_n = nB_n \text{ и } b_n = -nA_n,\ n \geqslant 1,$$

откуда получаем последние два равенства из (8.2). Выражение для A_0 находим из следующего соотношения:

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad \square$$

Наложенные условия на функцию f в теореме 3 позволяют формально проинтегрировать ее формальный ряд Фурье и получить ряд Фурье для ее первообразной F :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \Big\downarrow \int_0^x & & \Big\downarrow \int_0^x \\ F(x) & \xrightarrow{=} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{=B_n} \sin nx + \underbrace{\frac{-b_n}{n}}_{=A_n} \cos nx + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}}_{\frac{A_0}{2}} . \end{array}$$

§ 9. Приближение функций тригонометрическими многочленами

Определение 9. Выражение вида $\mathcal{T}_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ будем называть вещественным *тригонометрическим многочленом* степени n.

Ясно, что частичная сумма ряда Фурье $T_n(x)$ интегрируемой функции является тригонометрическим многочленом. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Нужно найти тригонометрический многочлен $\mathcal{T}_n(x)$ такой, чтобы квадрат нормы (в $L_2(-\pi, \pi)$) разности

$$\|\mathcal{T}_n(x) - f(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 dx$$

был минимальным.

Имеем

$$\begin{aligned} &(\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 = \mathcal{T}_n^2(x) - 2\mathcal{T}_n(x)f(x) + f^2(x) = f^2(x) + \\ &+ \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right)^2 - 2f(x) \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) = \\ &\qquad = f^2(x) - \alpha_0 f(x) - 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x) \cos kx + \beta_k f(x) \sin kx \right) + \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx + \xi_n(x), \end{aligned}$$

где

$$\xi_n(x) = \alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx + \sum_{i \neq j} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)(\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx).$$

Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} \xi_n(x)dx = 0$, то, интегрируя на интервале $(-\pi, \pi)$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + \beta_k b_k + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \beta_k^2 =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Таким образом, минимум нормы разности достигается на тригонометрическом многочлене с коэффициентами $\alpha_0 = a_0,\ \alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k$. В этом случае мы получаем, что

$$\mathcal{T}_n(x) = T_n(x)$$

и для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_n(x) - f(x))^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2,$$

откуда для всех $n \geqslant 1$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем *неравенство Бесселя*[4]

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{9.1}$$

§ 10. Равномерная сходимость ряда Фурье

Напомним следующее определение.

Определение 10. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* $E \subseteq \mathbb{R}$ к функции $S(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| = 0,$$

при этом пишут

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) \text{ при } n \to \infty.$$

[4]Фридрих Вильгельм Бессель (1784–1846) — немецкий математик и астроном, был директором обсерватории в городе Кенигсберг (ныне Калининград).

Напомним также достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов — признак Вейерштрасса[5]: если для любого $x \in E$ верно $|f_n(x)| \leqslant M_n$, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E. Вспомнив определение и признак, мы теперь готовы сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 4. Положим $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $n \geqslant 1$. Используя признак Вейерштрасса, достаточно найти суммируемую мажоранту для функциональной последовательности $f_n(x)$. Имеем

$$|f_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n| \overset{(8.1)}{=} \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \leqslant$$
$$\overset{2st \leqslant s^2+t^2}{\leqslant} \frac{|b_n'|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{|a_n'|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{|b_n'|^2 + |a_n'|^2}{2} + \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся ряд, а по неравенству Бесселя (9.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n'|^2 + |a_n'|^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| dx < \infty,$$

то теорема доказана. $\square$

§ 11. Равенство Ляпунова

11.1. Оказывается в неравенстве Бесселя (9.1) на самом деле можно поставить равенство, что означает (как мы узнаем) полноту тригонометрической системы функций на интервале $[-\pi, \pi]$.

Теорема 5. *Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty$, и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье, тогда справедливо равенство Ляпунова*[6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{11.1}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ такая, что ее 2π-периодическое продолжение f^* на всю числовую прямую будет непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда по теореме 4 ряд Фурье этой функции будет

[5]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) — знаменитый немецкий математик, основоположник математического анализа и теории аналитических функций

[6]Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) – основатель строгой теории устойчивости равновесия и движения систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

равномерно на всей числовой прямой сходится к ней самой. Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_n(x)-f(x))^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}a_n^2+b_n^2,$$

то переходя к пределу при $n\to\infty$ и пронося предел внутрь интеграла ввиду равномерной сходимости, получим требуемое равенство.

Общий случай мы рассматривать не будем; отметим лишь, что его можно получить, приближая произвольную интегрируемую с квадратом функцию указанными в доказательстве гладкими функциями. □

Упражнение 2. Пусть $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ и f^* ее 2π-периодическое продолжение на всю числовую прямую. Верно ли следующее утверждение: $f^*\in C^1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $f\in C^1(-\pi,\pi)$ и $f(\pi)=f(\pi-0)=f(-\pi+0)=f(-\pi)$ и $f'(\pi-0)=f'(-\pi+0)$?

11.2. Обобщенное равенство Ляпунова

Теорема 6. *Пусть $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ и $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ — интегрируемые с квадратом функции, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx<\infty$ и $\int_{-\pi}^{\pi}g^2(x)dx<\infty$. Пусть, далее, a_n,b_n — коэффициенты Фурье функции f, а α_n,β_n — коэффициенты Фурье функции g. Тогда справедливо обобщенное равенство Ляпунова*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\alpha_n+b_n\beta_n. \tag{11.2}$$

Доказательство теоремы 6. Легко проверить, что коэффициенты Фурье функций $f\pm g$ будут $a_n\pm\alpha_n$ и $b_n\pm\beta_n$. Кроме того, используя неравенство $(a\pm b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, можно убедится, что указанные функции $f\pm g$ будут интегрируемые с квадратом. Тогда запишем для обеих функций равенство Ляпунова (11.1):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f+g)^2dx=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2dx=\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2.$$

Вычитая из первого неравенства второе, и деля получившееся равенство на 4, получаем требуемое равенство. □

11.3. Комплексная форма равенства Ляпунова

Если рассмотреть комплекснозначную функцию $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$, и сложить равенства Ляпунова для ее вещественной и мнимой частей, то получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2, \tag{11.3}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции f. Однако, для комплекснозначных функций ее ряд Фурье записывают обычно в комплексной форме (4.2). Используя ее, можно получить и равенство Ляпунова в комплексной форме.

Теорема 7. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ — *интегрируемая с квадратом функция, т.е.* $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty$, *и* c_n — *ее коэффициенты Фурье в комплексной форме, тогда справедливо равенство Ляпунова*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{11.4}$$

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим правую часть равенства (11.4). Вспоминая, что

$$c_n = \left[\begin{array}{l} \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2},\ n<0, \\ \frac{a_0}{2},\ n=0, \\ \frac{a_n-ib_n}{2},\ n>0. \end{array}\right. ,$$

получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}\right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2 + i(a_n\overline{b_n} - \overline{a_n}b_n)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2 - i(a_n\overline{b_n} - \overline{a_n}b_n)}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\right) \overset{(11.3)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx. \quad \square$$

§ 12. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Лемма 2. *Для любого* $\alpha > 0$ *при всех* $n \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}. \tag{12.1}$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 1/x^{\alpha+1}, x > 0$. Поскольку она убывающая, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \int_{n}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}. \quad \square$$

Теорема 8. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — 2π*-периодическая* $(k+1)$ *раз непрерывно дифференцируемая функция, тогда для скорости равномерной сходимости ряда Фурье к функции* f

$$R_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |T_n(x) - f(x)|$$

справедливо асимптотическое соотношение

$$R_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right) \ \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 8. Используя теорему 1 о представлении кусочно гладкой функции своим рядом Фурье и теорему 2 о дифференцировании ряда Фурье, получим для всякого $x \in \mathbb{R}$ неравенства

$$|T_n(x) - f(x)| \overset{T1}{=} \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j \cos jx| + |b_j \sin jx| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| + |b_j| \overset{T2}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} + \frac{|b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}},$$

где $a_j^{(k+1)}$ и $b_j^{(k+1)}$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k+1)}(x)$. Применив к последней сумме неравенство (**??**) Коши–Буняковского

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} u_j v_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2\right)^{1/2},$$

которое мы докажем позже; взяв за $u_j = |a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|$, а за $v_j = \frac{1}{j^{k+1}}$, получим

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} \leqslant \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k+2}}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\overset{(12.1)}{\leqslant} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2k+1}\; n^{k+1/2}}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$n^{k+1/2} R_n \leqslant \frac{\xi_n}{\sqrt{2k+1}},$$

где $\xi_n^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку это "хвост" сходящегося ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|\right)^2 \leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j^{(k+1)}\right)^2 + \left(b_j^{(k+1)}\right)^2 \overset{(11.1)}{=} \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^{(k+1)}\right)^2 dx < \infty.$$

Таким образом мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1/2} R_n = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

§ 13. Явление Гиббса

13.1. Частный случай

Рассмотрим функцию $\sigma(x)$ из примера 2. Было показано, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье (см. равенство (7.2) и график на рис. 8

$$\sigma(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Положим

$$\sigma_{2n-1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Найдем ее экстремумы. Имеем $\sigma'_{2n-1}(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$, где последнее равенство доказывается аналогично выводу формулы (6.2) для ядра Дирихле. Откуда находим, что точки $x_k = \pi k/2n, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ — это точки экстремума функции $\sigma'_{2n-1}(x)$. Кроме того, из формулы для производной заключаем, что

$$\sigma_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt \overset{2nt=u}{=} \frac{1}{2n}\int_0^{2nx} \frac{\sin u}{\sin u/2n}du. \tag{13.1}$$

Поскольку $\sigma_{2n-1}(x)$ нечетна и симметрична относительно $x = \pi/2$

$$\sigma_{2n-1}(\pi/2 - x) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((k\pi - \pi/2) - (2k-1)x)}{2k-1} =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((k\pi - \pi/2) + (2k-1)x)}{2k-1} = \sigma_{2n+1}(\pi/2 + x),$$

достаточно рассмотреть экстремумы на промежутке $[0, \pi/2]$, т.е. $x_k = \pi k/2n$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. Подставляя эти точки в (13.1), получаем, что

$$\sigma_{2n-1}(x_{k+1}) = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi(k+1)} \frac{\sin u}{\sin u/2n}du = \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{1}{2n}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin u}{\sin u/2n}du =$$
$$\overset{u=t+\pi k}{=} \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{(-1)^k}{2n}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n}dt =$$
$$= \sigma_{2n-1}(x_k) + (-1)^k v_k,$$

где $v_k = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n}dt$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Поскольку $v_k > 0$ и $v_{k+1} < v_k$, мы заключаем, что наибольшее значение функции $\sigma_{2n-1}(x)$ достигается в точке $x_1 = \pi/2n$.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2n-1}(x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin u/2n}du =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin u/2n}du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}du = \mathrm{Si}(\pi),$$

где $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}du$ — интегральный синус. Мы смогли внести предел под знак интеграла, поскольку по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для этого достаточно иметь интегрируемую мажоранту; для каждого $u \in [0, \pi]$ и $n \geqslant 1$ имеем

$$\left|\frac{\sin u}{2n\sin u/2n}\right| = \left|\frac{\sin u}{u}\frac{u/2n}{\sin u/2n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\left|\frac{\sin u}{u}\right|.$$

Таким образом, мы получили, что в некотором смысле предельным геометрическим образом в точке $x = 0$ является отрезок (вдоль оси OY) $[-\mathrm{Si}(\pi), \mathrm{Si}(\pi)]$

вместо имеющегося у функции σ — $[-\pi/2, \pi/2]$. Используя таблицу значений для интегрального синуса (отметим, что $\pi/2 = \mathrm{Si}(+\infty)$), получаем, что отличие составляет

$$\gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{Si}(\pi) - \pi/2}{\pi/2} \simeq 0,178, \tag{13.2}$$

т.е. на 18%. Ниже мы узнаем, что такой эффект типичен.

Определение 11. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно гладкая функция и x_0 — ее точка разрыва, причем для определенности считаем, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Явлением Гиббса [7] называется свойство

$$\varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0-0}} T_n(x) < f(x_0-0) < f(x_0+0) < \varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0+0}} T_n(x).$$

В рассмотренном нами примере, мы как раз и считали верхний (а ввиду нечетности и нижний) указанные пределы.

13.2. Общий случай

Пусть $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая кусочно-гладкая функция и x_0 — ее регулярная точка разрыва, т.е. $f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Без ограничения общности, будем предполагать, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Покажем, что здесь также имеет место явление Гиббса с теми же 18%.

Пусть $D = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции f в точке x_0. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(x - x_0) \tag{13.3}$$

и первым делом покажем, что она непрерывна в точке x_0, что нам существенно пригодится в дальнейших рассуждениях.

Имеем

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0 \pm 0) &= f(x_0 \pm 0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi}\sigma(\pm 0) = \\
&= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}(\pm\frac{\pi}{2}) = \\
&= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0+0)}{2} - \frac{f(x_0-0)}{2} \mp \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0 - 0)$, то непрерывность доказана. Из формулы (13.3) находим выражение для рассматриваемой функции f :

$$f(x) = \varphi(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi}\sigma(x - x_0),$$

откуда для частичных сумм рядов Фурье имеем равенство

$$T_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi}\sigma_{2n-1}(x - x_0).$$

7

Здесь $T_{2n-1}(x), \varphi_{2n-1}(x), \sigma_{2n-1}(x)$ — частичные суммы, соответственно, для $f(x), \varphi(x)$ и $\sigma(x)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}\varliminf_{\substack{n\to\infty\\x\to x_0-0}} T_{2n-1}(x) &= \varliminf_{\substack{n\to\infty\\x\to x_0-0}} \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi}\varliminf_{\substack{n\to\infty\\x\to x_0-0}} \sigma_{2n-1}(x-x_0) = \\ &= f(x_0) + \frac{D}{\pi}\varliminf_{\substack{n\to\infty\\x\to -0}} \sigma_{2n-1}(-0) \overset{(13.2)}{=} f(x_0) - \frac{D}{\pi}\frac{\pi}{2}(\gamma+1) = \\ &= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \frac{f(x_0+0)-f(x_0+0)}{2} - \frac{D\gamma}{2} = \\ &= f(x_0-0) - \frac{D\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равномерной сходимостью $\varphi_{2n-1}(x)$ к $\varphi(x)$ и непрерывностью $\varphi(x)$ в точке x_0 с нулевым значением.

Аналогично, имеет место равенство для верхнего предела

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\x\to x_0+0}} T_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{D}{\pi}\frac{\pi}{2}(\gamma+1) = f(x_0+0) + \frac{D\gamma}{2}.$$

Отсюда находим, что предельный геометрический образ отличается от имеющегося у функции f в точке x_0

$$\frac{f(x_0+0) + \frac{D\gamma}{2} - (f(x_0-0) - \frac{D\gamma}{2})}{D} = \gamma\text{-раз},$$

т.е. те же 18%.

Следствие 2. Справедливы формулы

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(T_{2n-1}(x_0+\frac{\pi}{2n}) - T_{2n-1}(x_0-\frac{\pi}{2n})\Big) = D(1+\frac{\gamma}{2}).$$

§ 14. Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро–Фейера

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция и $T_n(x)$ — n-ая частичная сумма ее ряда Фурье.

Определение 12. Функция

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) = \frac{T_0(x)+T_1(x)+\ldots+T_{n-1}(x)}{n}$$

называется *чезаровским* средним последовательности T_n, или *суммой Фейера*[8] порядка n.

[8]Липот Фейер (1880–1959) — венгерский математик, успешно применивший метод средних арифметических для исследования обобщенного суммирования рядов Фурье

Упражнение 3. Используя формулу (6.3) докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{\sin \frac{n(y-x)}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}} \right)^2 dy. \tag{14.1}$$

Определение 13. Интеграл (14.1) называется *интегралом Фейера*, а функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin \frac{nz}{2}}{\sin \frac{z}{2}}$$

называется *ядром Фейера*.

Упражнение 4. Проверьте свойство ядер Фейера

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = 1.$$

Теорема 9. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция такая, что в точке $x \in \mathbb{R}$ существуют и конечны односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, тогда*

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Если функция непрерывна во всех точках, то сходимость равномерная.

Эта теорема называется теоремой Фейера. Она, в частности, утверждает, что если ряд Фурье функции f сходится в какой-нибудь точке $x \in \mathbb{R}$, и при этом пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют и конечны, то он сходится непременно к их полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

§ 15. Применение рядов Фурье: решение задачи Дирихле в круге

Напомним следующее определение.

Определение 14. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если она дважды непрерывно дифференцируема в D, т.е. $f \in C^2(D)$, и удовлетворяет в D уравнению Лапласа $\triangle f = 0$.

Напомним также, что лапласиан $\triangle$ выглядит следующим образом:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{в декартовой системе координат,}$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{в полярной системе координат.}$$

Задача Дирихле в области D состоит в нахождении гармонической в области D функции f по ее значениям на границе области ∂D. Пусть $D = \{x^2+y^2 < 1\}$ – открытый единичный круг. Тогда задача Дирихле состоит в решении уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{cases} \triangle f = 0, \\ f(x,y)|_{x^2+y^2=1} = g(x,y), \end{cases}$$

где $g(x,y)$ — гладкая функция. Поскольку область симметрична относительно нуля, то задачу удобней решать в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0, \\ f(r,\varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \end{cases} \tag{15.1}$$

где $g(\varphi)$ — 2π-периодическая гладкая функция, которая раскладывается в ряд Фурье

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi. \tag{15.2}$$

Поскольку $f(r,\varphi)$ — гладкая и 2π-периодическая по φ функция, то для каждого $r \in [0,1]$ она представляется рядом Фурье

$$f(r,\varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi. \tag{15.3}$$

Предполагая, что ряд (15.3) можно почленно дифференцировать по обеим переменным, подставляя его в уравнение (15.1), получим равенство

$$\Big(r^2\frac{a_0''(r)}{2} + r\frac{a_0'(r)}{2}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r)\Big)\cos n\varphi + \\ + \Big(r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r)\Big)\sin n\varphi = 0,$$

откуда

$$r^2\frac{a_0''(r)}{2} + r\frac{a_0'(r)}{2} = 0,$$

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0, \quad n \geqslant 1$$

и

$$r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Переписывая условие $f(1,\varphi) = g(\varphi)$ в терминах рядов (15.2) и (15.3), получим начальные/граничные условия для этих уравнений:

$$a_n(0) < \infty,\ a_n(1) = \alpha_n,\ n \geqslant 0;$$

$$b_n(0) < \infty,\ b_n(1) = \beta_n,\ n \geqslant 1.$$

Первое уравнение легко решается методом разделения переменных и получается выражение

$$a_0(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

которое при удовлетворении краевых (начальных/граничных) условий становится $a_0(r) = \alpha_0$. Оставшиеся уравнения одного типа и являются уравнениями Эйлера, которые заменой $r = e^t$ сводятся к однородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, решив которое, мы получим

$$a_n(r) = D_1(n) r^n + D_2(n) r^{-n},\ n \geqslant 1,$$

$$b_n(r) = E_1(r)r^n + E_2(n)r^{-n},\ n \geqslant 1.$$

Константы D_1, D_2, E_1 и E_2 находятся из граничных условий, откуда получаем

$$a_n = \alpha_n r^n, \quad b_n = \beta_n r^n,\ n \geqslant 1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (15.3), получим решение задачи Дирихле в виде ряда

$$f(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n \cos n\varphi + \beta_n r^n \sin n\varphi,\ r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi]. \tag{15.4}$$

Однако, решение задачи можно представить и в интегральном виде. Покажем как это сделать. Подставим в формулу (15.4) выражения для коэффициентов α_n, β_n и проделаем простые выкладки, аналогичные тем, которые мы уже проделывали при выводе формулы для ядра Дирихле (6.1):

$$\begin{aligned}
f(r,\varphi) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^k \cos k\varphi + \beta_k r^k \sin k\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} g(t) r^k (\cos kt \cos k\varphi + \sin kt \sin k\varphi)dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-\varphi)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-\varphi)\right)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathcal{P}(r, t-\varphi)dt,
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{P}(r,z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kz. \tag{15.5}$$

Пусть $r \in [0,1)$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(r,z) &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikz} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{re^{iz}}_{\substack{=q\\|q|=|r|<1}})^k = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\frac{re^{iz}}{1-re^{iz}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Re}(re^{iz}(1-re^{-iz}))}{(1-re^{iz})(1-re^{-iz})} = \frac{1}{2} + \frac{r\cos z - r^2}{1-2r\cos z + r^2} = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos z + r^2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $r \in [0,1)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$

$$f(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(t)(1-r^2)dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}. \tag{15.6}$$

Определение 15. Интеграл в формуле (15.6) называется *интегралом Пуассона*, а функция $\mathcal{P}(r,z)$, задаваемая формулой (15.5) — *ядро Пуассона*.

Можно проверить прямой подстановкой, что функция $f(r,\varphi)$, представляемая своим интегралом Пуассона (15.6), действительно удовлетворяет уравнению (15.1). Кроме того, известно, что

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(t)(1-r^2)dt}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}=\frac{g(\varphi+0)+g(\varphi-0)}{2}=g(\varphi).$$

Поскольку задача Дирихле имеет единственное решение, то, следовательно, оно задается формулой (15.6).

Упражнение 5. Проверить, что интеграл Пуассона удовлетворяет уравнению Лапласа в единичном круге.

§ 16. Теоремы Вейерштрасса

16.1. Теорема о приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами

Теорема 10. *Пусть $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда найдется последовательность тригонометрических многочленов $S_n(x)$, равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.*

$$S_n(x)\overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)\quad \textit{при } n\to\infty.$$

Доказательство теоремы 10. Пусть f^* — 2π-периодическое продолжение функции f на всю числовую прямую. Ясно, что f^* непрерывна. Поэтому, взяв в качестве тригонометрических многочленов $S_n(x)$ средние по Чезаро–Фейеру ряда Фурье функции f^* и применив теорему 9, получим требуемое. □

Отметим, что построенная последовательность тригонометрических многочленов не единственна. Можно, например, в качестве $S_n(x)$ взять частичную сумму ряда Фурье функции $F_{1/n}(x)=\frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n}f^*(t)dt$. Такие функции называются средним по Стеклову. Доказательство равномерной сходимости можно посмотреть в [A96.2].

16.2. Теорема о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами

Теорема 11. *Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)=\sum_{k=0}^{M_n}c_{k,n}x^k$, равномерно на $[a,b]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.*

$$P_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)\quad \textit{при } n\to\infty.$$

Доказательство теоремы 11. Поскольку линейным (а значит непрерывным) преобразованием мы можем "пересадить" функцию $f(x)$ на любой другой отрезок, будем считать, что $[a,b]=[0,\pi]$. Продолжим функцию четным образом на отрезок $[-\pi,0]$. Получившаяся функция будет удовлетворять условию предыдущей теоремы 10, поэтому найдется последовательность $S_n(x)$ тригонометрических многочленов (возьмем такую же, которая строилась в теореме 10), равномерно на $[-\pi, \pi]$ (следовательно, и на $[0, \pi]$) приближающая непрерывную функцию $f(x)$. Пусть

$$S_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} \cos kx,$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $n \geqslant N_1$

$$\Big|\alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} \cos kx - f(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как для любого $k \geqslant 1$

$$\cos kx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!},$$

причем степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, в том числе и на $[0, \pi]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых $k, n \geqslant 1$ найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon, k, n) > 0$ такой, что и для всех $x \in [0, \pi]$ при всех $l \geqslant N_2$

$$\Big|\sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} - \cos kx\Big| < \frac{\varepsilon}{2n|\alpha_{k,n}|}.$$

Без ограничения общности считаем, что все $\alpha_{k,n} \neq 0$. Пусть

$$D_{k,n} = \sum_{m=0}^{N_2(1/n,k,n)} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!}$$

и

$$P_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} D_{k,n}.$$

Покажем, что $P_n(x)$ равномерно сходится на $[0, \pi]$ к $f(x)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \geqslant \max\{N_1(\varepsilon), 1/\varepsilon\}$ получим для всех $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &\leqslant |P_n(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - f(x)| \leqslant \\
&\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}(D_{k,n} - \cos kx)\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}|\,|D_{k,n} - \cos kx| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n}| \frac{1}{2n^2|\alpha_{k,n}|} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Глава II. Преобразование Фурье

§ 17. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда для любого $l > 0$ на интервале $[-l, l]$ она представляется своим рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Применяя формулы (2.2) и (2.3), перепишем это равенство в виде

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(y)\left(\cos\frac{\pi n y}{l}\cos\frac{\pi n x}{l} + \sin\frac{\pi n y}{l}dy \sin\frac{\pi n x}{l}\right)dy =$$
$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(y)\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n(y-x)}{l}.$$

Поскольку сумма $\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n(y-x)}{l}$ очень похожа на сумму Римана для функции $\cos z(y-x)$ от переменной z, то при стремлении $l \to \infty$, т.е. при измельчении разбиения всей $\mathbb{R}^+$ на отрезки $[\frac{\pi n}{l}, \frac{\pi(n+1)}{l}]$, мы "получим"интеграл $\int_0^{\infty}\cos z(y-x)dz$. Естественно, это — нестрогое рассуждение уже потому, что последний интеграл расходящийся. Однако, оно позволяет увидеть во что переходит ряд Фурье при увеличении периода функции до бесконечности.

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy < \infty$, то первое слагаемое стремится к нулю, и получается равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_0^{\infty}\cos z(y-x)dzdy.$$

Поменяв интегрирование местами, получим

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yxdy, \tag{17.1}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos zydz, \tag{17.2}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos zydz. \tag{17.3}$$

Определение 16. Функции $a(y)$ и $b(y)$, задаваемые формулами (17.2) и (17.3) называются прямым косинус и синус-преобразованием Фурье функции f. Интеграл в правой части (17.1) — интеграл Фурье, а сама формула (17.1) называется интегральной формулой Фурье, или интегральным представлением Фурье функции f.

§ 18. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье

Теорема 12. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\int_0^{+\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

где $a(y)$ и $b(y)$ — прямые косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 12. Нужно доказать, что

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Имеем

$$\Phi(A) = \int_0^{A} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos y(z-x)dz\right)dy \overset{\circledast}{=}$$
$$\overset{T23}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\left(\int_0^{A}\cos y(z-x)dy\right)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{\sin A(z-x)}{\pi(z-x)}dz =$$
$$\overset{z-x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\frac{\sin Ay}{\pi y}dy = \left(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{+\infty}\right) f(x+y)\frac{\sin Ay}{\pi y}dy =$$
$$= \int_0^{+\infty}(f(x+y)+f(x-y))\frac{\sin Ay}{\pi y}dy = I_1(A)+I_2(A),$$

где

$$I_1(A) = \int_1^{+\infty}(f(x+y)+f(x-y))\frac{\sin Ay}{\pi y}dy,$$

$$I_2(A) = \int_0^{1}(f(x+y)+f(x-y))\frac{\sin Ay}{\pi y}dy.$$

Первый интеграл $I_1(A)$ по лемме 1 Римана–Лебега сходится к нулю при $A \to +\infty$, поскольку функция $\frac{f(x+y)+f(x-y)}{\pi y}$ абсолютно интегрируема на $[1, +\infty)$:

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x+y)+f(x-y)}{\pi y}\right|dy \overset{y\geqslant 1}{\leqslant} \frac{1}{\pi}\left(\int_1^{+\infty}|f(x+y)|dy + \int_1^{+\infty}|f(x-y)|dy\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int_{1+x}^{+\infty}|f(y)|dy + \int_{-\infty}^{-1+x}|f(y)|dy\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|dy < \infty.$$

Второй интеграл $I_2(A)$ представим в виде суммы трех других интегралов $I_{21}(A)$, $I_{22}(A)$ и $I_{23}(A)$:

$$I_2(A) = \int_0^1 (f(x+y) - f(x+0) + f(x-y) - f(x-0) + f(x+0) + f(x-0)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+y)-f(x+0)}{y}\sin Ay dy}_{I_{21}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x-y)-f(x-0)}{y}\sin Ay dy}_{I_{22}} +$$
$$+ \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\frac{\sin Ay}{y}dy}_{I_{23}}.$$

Так как f кусочно-гладкая, то для любого $x \in \mathbb{R}$ будут ограниченными и, следовательно, абсолютно интегрируемыми на $[0,1]$ функции $g_{1,x}(y) = \frac{f(x+y)-f(x+0)}{y}$ и $g_{2,x}(y) = \frac{f(x-y)-f(x-0)}{y}$; поэтому по лемме 1 Римана–Лебега интегралы $I_{21}(A)$ и $I_{22}(A)$ стремятся к нулю при $A \to +\infty$. Предел для интеграла $I_{23}(A)$ находится непосредственным вычислением:

$$\lim_{A\to+\infty} I_{23}(A) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \lim_{A\to+\infty}\int_0^1 \frac{\sin Ay}{y}dy =$$
$$\overset{Ay=z}{=} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi} \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin z}{z}dz =$$
$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Для завершения доказательства нам осталось в равенстве ⊛ обосновать переход от одного повторного интеграла к другому. Для этого, используя теорему 23 Фубини–Тонелли, достаточно доказать сходимость двойного интеграла $\iint_D f(z)\cos y(z-x)dzdy$, где $D = [0,A]\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$. Это будет сделано, если мы докажем абсолютную сходимость этого двойного интеграла, которая в свою очередь ввиду теоремы 23 Фубини–Тонелли будет следовать, например, из сходимости повторного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| \left(\int_0^A |\cos y(z-x)|dy\right) dz \leqslant A\int_{-\infty}^{+\infty}|f(z)|dz < \infty.$$

Теорема доказана. □

§ 19. Интеграл Фурье на полупрямой

Пусть $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Продолжив ее четным образом на $(-\infty, 0]$, запишем для нее интегральное представление Фурье: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx + b(y)\sin yx dy = \int_0^{+\infty} a(y)\cos yx dy, \tag{19.1}$$

поскольку из-за четности

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \cos yz dz,$$

и

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{even}(z) \sin yz dz = 0.$$

Аналогичные формулы получаются, если сделать нечетное продолжение функции f на $(-\infty, 0]$: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \int_0^{+\infty} b(y) \sin yx dy, \tag{19.2}$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \sin yz dz,$$

и

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{odd}(z) \cos yz dz = 0.$$

Определение 17. Формулы (19.1) и (19.2) задают соответственно *обратное косинус-* и *синус-преобразование Фурье.*

Пример 3. Вычислим прямое косинус- и синус-преобразование Фурье, а также само интегральное представление Фурье для функции $f(x) = e^{-ax}$, $x \geqslant 0$, $a > 0$. Продолжив ее четным и нечетным образом, получим

$$\begin{aligned} a(y) + ib(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-az} (\cos yz + i \sin yz) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-az} e^{iyz} dz = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^{z(-a+iy)}}{-a+iy} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{a - iy} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2} + i \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2 + y^2}, \quad b(y) = \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2 + y^2};$$

и для любого $x \geqslant 0$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{a \cos yx}{a^2 + y^2} dy,$$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} b(y) \sin yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y \sin yx}{a^2 + y^2} dy.$$

Эти два последних интеграла называются *интегралами Лапласа.*

§ 20. Представление интеграла Фурье в комплексной форме

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда по теореме 12 для любого $x\in\mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(y)\cos yx+b(y)\sin yx dy.$$

Перепишем этот интеграл в комплексной форме, заменяя $\cos yx$ и $\sin yx$ по формулам Эйлера (мы уже проделывали такие выкладки при выводе формулы (4.2) для комплексной формы ряда Фурье). Имеем

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}+\frac{a(y)+ib(y)}{2}e^{-ixy}dy=\\&=\int_0^{+\infty}\frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy+\int_{-\infty}^{0}\frac{a(-y)+ib(-y)}{2}e^{ixy}dy=\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\begin{aligned}\frac{a(y)-ib(y)}{2}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)(\cos zy)-i\sin zy)dz=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-iyz}dz=\frac{a(-y)+ib(-y)}{2}.\end{aligned}$$

Определение 18. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-izy}dz\right)e^{iyx}dy \tag{20.1}$$

называется *комплексной формой интеграла Фурье*.

Определение 19. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_-, переводящие функцию f в функции $\hat f$ и $\check f$ соответственно, где

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x)=\hat f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-iyx}dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f, а

$$\mathrm{F}_-[f(y)](x)=\check f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{iyx}dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f.

Используя понятие прямого и обратного преобразования Фурье, формулу (20.1) можно переписать в виде

$$f(x) = \mathrm{F}_-[\mathrm{F}_+[f(z)](y)](x) = \mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(z)](y)](x). \tag{20.2}$$

Пример 4. Вычислим преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_+[e^{-ay^2}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{-iyx} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos yx dy + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \sin yx dy}_{=0} \right) = \\ &\overset{|x|y=z}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{az^2}{|x|^2}} \cos z dz.\end{aligned}$$

Таким образом нам нужно вычислить интеграл

$$J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Az^2} \cos z dz$$

в точке $A = \frac{a}{|x|^2}$. Покажем, что $J(A)$ – дифференцируемая функция. Действительно,

$$\frac{d}{dA} J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dA} e^{-Az^2} \cos z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} -z^2 e^{-Az^2} \cos z dz.$$

Смена мест интегрирования и дифференцирования законна, поскольку для любого $A_0 > 0$ и любого $A > A_0$

$$| - z^2 e^{-Az^2} \cos z| < z^2 e^{-A_0 z^2},$$

где последняя функция абсолютно интегрируема и не зависит от A. Далее, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}J(A) = \underbrace{e^{-Az^2} \sin z\Big|_0^{+\infty}}_{=0} &+ 2A \int_{-\infty}^{+\infty} z \sin z e^{-Az^2} dz = \\ &= -2A \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-Az^2} d\cos z = -2A \underbrace{z \cos z e^{-Az^2}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z d z e^{-Az^2} = \\ &= 2A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z e^{-Az^2} dz - 4A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cos z e^{-Az^2} dz = \\ &= 2AJ(A) + 4A^2 \frac{d}{dA} J(A),\end{aligned}$$

откуда

$$(1 - 2A)J = 4A^2 J'.$$

Решая это простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$J(A) = \frac{ce^{-1/4A}}{\sqrt{A}},$$

где c — некоторая константа, которую еще предстоит определить. Вспоминая равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} J\left(\frac{a}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos yx dy,$$

и подставляя после преобразований $x = 0$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

откуда $c = \sqrt{\pi}$ и

$$\mathrm{F}_+[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-x^2}{4a}}. \tag{20.3}$$

Поскольку легко проверить, что

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x) = \mathrm{F}_-[f(y)](-x), \tag{20.4}$$

то

$$\mathrm{F}_-[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-x^2}{4a}}. \tag{20.5}$$

Отметим также, что если $a = 1/2$, то формулы (20.3) и (20.5) становятся совсем легко запоминаемыми

$$\mathrm{F}_+[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = \mathrm{F}_-[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{20.6}$$

§ 21. Быстроубывающие функции

21.1. Здесь мы рассмотрим класс функций в $\mathbb{R}^n$, для которых можно определить преобразование Фурье, обладающее многими замечательными свойствами.

Определение 20. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с целочисленными координатами $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$ называется *мультииндексом.*

С мультииндексами связаны следующие операции и обозначения

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n);\\
&\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha_k \leqslant \beta_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n;\\
&\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!;\\
&|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n;\\
&x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\\
&D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Определение 21. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$, называется *быстроубывающей*, если

1) f — бесконечно дифференцируемая функция, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) для любых мультииндексов α, β существует константа $c = c(\alpha, \beta) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c < \infty.$$

Условие 2) эквивалентно

2') для любого мультииндекса α и любого $p > 0$ существует константа $k = k(\alpha, p) > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant \frac{k}{1 + \|x\|^p}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Множество быстроубывающих функций обозначают как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 3. *Условия 2) и 2') эквивалентны.*

Пример 5. Приведем примеры быстроубывающих функций.

1) Функция $f(x) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \ldots - a_n x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a_k > 0$, — быстроубывающая функция. Действительно, она бесконечно дифференцируема и для любого мультииндекса β производная $D^\beta f(x) = P_\beta(x) f(x)$, где $P_\beta(x)$ некоторый полином. Возьмем еще один мультииндекс — α. Поскольку $x^\alpha P_\beta(x) f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то найдется $R > 0$ такое, что

$$|x^\alpha P_\beta(x) f(x)| < 1 \text{ при всех } \|x\| > R.$$

Полагая $M(\alpha, \beta) = \sup\limits_{\|x\| \leqslant R} |x^\alpha P_\beta(x) f(x)|$, получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leqslant \max\{M, 1\} = c(\alpha, \beta) < \infty.$$

2) Всякая финитная функция в $\mathbb{R}^n$ является быстроубывающей. Чтобы это понять, достаточно вспомнить определение.

Определение 22. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *финитной* в D, если она бесконечно дифференцируема и ее носитель $\mathrm{supp} f = \mathrm{cl}\{x \in D : f(x \neq 0)\}$ является компактным подмножеством в D. Множество финитных функций обозначают как $C_0^\infty(D)$.

Примером финитной функции может служить

$$\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\varepsilon^2 - \|x - x_0\|^2}}, & \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \|x - x_0\| > \varepsilon, \end{cases}$$

поскольку $\mathrm{supp}\, \omega_{x_0,\varepsilon}$ есть замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0 и радиуса ε. А бесконечная дифференцируемость — это следствие бесконечной дифференцируемости для функции $f(x) = e^{-1/x} H(x)$, где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{21.1}$$

а значение $H(0)$ не столь важно и в разных ситуациях полагают равным либо 1, либо $1/2$.

Определение 23. Функция $H(x)$ называется функцией *Хевисайда.*

21.2. Свойства быстроубывающих функций

1°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$af + bg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $af + bg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(af(x) + bg(x))| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |ax^\alpha D^\beta f(x) + bx^\alpha D^\beta g(x)| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|ax^\alpha D^\beta f(x)| + |bx^\alpha D^\beta g(x)|) \leqslant \\ &\leqslant |a| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| + |b| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)| \leqslant \\ &\leqslant |a|c(\alpha, \beta, f) + |b|c(\alpha, \beta, g) < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — линейное пространство. $\square$

2°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ производная

$$D^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $D^\gamma f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(D^\gamma f(x))| \overset{(21.2)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta+\gamma} f(x)| < c(\alpha, \beta + \gamma) < \infty. \quad \square$$

Упражнение 6. Покажите, что для любых мультииндексов α и β верно равенство

$$D^\alpha(D^\beta f(x)) = D^{\alpha+\beta} f(x). \tag{21.2}$$

3°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ

$$x^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $x^\gamma f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(x^\gamma f(x))| &\overset{(21.4)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{0\leqslant\delta\leqslant\beta} C^\delta_\beta D^\delta x^\gamma D^{\beta-\delta} f(x)| = \\ &\overset{(21.3)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{\substack{0\leqslant\delta\leqslant\beta \\ \delta\leqslant\gamma}} \delta! C^\delta_\beta C^\delta_\gamma x^{\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant\delta\leqslant\beta \\ \delta\leqslant\gamma}} \delta! C^\delta_\beta C^\delta_\gamma \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha+\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| < \\ &< \sum_{\substack{0\leqslant\delta\leqslant\beta \\ \delta\leqslant\gamma}} \delta! C^\delta_\beta C^\delta_\gamma c(\alpha + \gamma - \delta, \beta - \delta) < \infty.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали легко проверяемое равенство

$$D^\delta x^\gamma = \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\delta)!} x^{\gamma-\delta}, & \text{если } \delta \leqslant \gamma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \square \tag{21.3}$$

Упражнение 7. Докажите многомерный аналог формулы Лейбница

$$D^\beta (f(x)g(x)) = \sum_{0 \leqslant \delta \leqslant \beta} C_\beta^\delta D^\delta f(x) D^{\beta-\delta} g(x), \tag{21.4}$$

где

$$C_\beta^\delta = \frac{\beta!}{\delta!(\beta-\delta)!} = \prod_{k=1}^n C_{\beta_k}^{\delta_k}.$$

4°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого полинома $P_m(x)$ степени m в $\mathbb{R}^n$

$$P_m(x) f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Поскольку $P_m(x) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C}$, то это свойство есть следствие свойств **1°** и **3°**. $\square$

Упражнение 8. Докажите, что верно следующее свойство в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x)g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстроубывающих функций замкнуто относительно следующих операций: сложения, умножения, умножения на полином и дифференцирования.

§ 22. Преобразование Фурье для быстроубывающих функций

22.1. По аналогии с преобразованием Фурье для абсолютно интегрируемых кусочно гладких функций определим его для быстроубывающих функций.

Определение 24. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_-, переводящие функцию f в функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно, где

$$\mathrm{F}_+[f(y)](x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y,x)} dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f, а

$$\mathrm{F}_-[f(y)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i(y,x)} dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f. Здесь (y, x) обозначает скалярное произведение векторов $y, x \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$(y, x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n.$$

Проверим, что интегралы, стоящие в определении функций $\hat{f}$ и $\check{f}$, сходящиеся. Действительно, по пункту 2') определения быстро убывающих функций для любого $p > 0$ существует константа $k > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)e^{\pm i(y,x)}|dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{kdy}{1+\|y\|^p}.$$

При подходящем выборе p $(p > n)$ этот интеграл сходится.

22.2. Свойства преобразования Фурье быстроубывающих функций

①. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{F}_\pm[af(y)+bg(y)](x) = a\mathrm{F}_\pm[f(y)](x) + b\mathrm{F}_\pm[g(y)](x). \tag{22.1}$$

Доказательство. Следует из свойства $\mathbf{1}^\circ$ быстроубывающих функций и линейности интеграла. □

②. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[y^\alpha f(y)](x) = (\pm i)^{|\alpha|}D^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x).} \tag{22.2}$$

Доказательство. Имеем

$$D^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x) = (2\pi)^{-n/2}D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{\mp(y,x)}dy = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)D^\alpha e^{\mp(y,x)}dy =$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\mp iy)^\alpha e^{\mp(y,x)}dy = (\mp i)^{|\alpha|}\mathrm{F}_\pm[y^\alpha f(y)](x).$$

Поскольку $|f(y)y^\alpha e^{\mp(y,x)}| \leqslant |f(y)y^\alpha|$, а $y^\alpha f(y)$ абсолютно интегрируемая (так как по свойству $\mathbf{3}^\circ$ быстроубывающих функций она быстроубывающая), то дифференцирование под знаком интеграла было законно. □

③. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[D^\alpha f(y)](x) = (\pm ix)^\alpha \mathrm{F}_\pm[f(y)](x).} \tag{22.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{F}_\pm[D^\alpha f(y)](x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(y)e^{\mp(y,x)}dy =$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}}(\underbrace{D^{(0,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}f(y)}_{:=g(y)})e^{\mp i(y,x)}dy_1\right)dy_2\dots dy_n.$$

Рассматривая внутренний интеграл и интегрируя по частям α_1-раз, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}}g(y)e^{\mp i(y,x)}dy_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{\mp i(y,x)}d\left(\frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}}g(y)\right) =$$
$$= \underbrace{e^{\mp i(y,x)}\ \frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}}g(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}}g(y)(\mp ix_1)e^{\mp i(y,x)}dy_1 =$$
$$\overset{\alpha_1-\text{раз}}{=} (-1)^{\alpha_1}(\mp ix_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{\mp i(y,x)}dy_1 = (\pm ix_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{\mp i(y,x)}dy_1.$$

Внеинтегральные члены занулялись, поскольку по свойству **2°** быстроубывающих функций g — быстроубывающая. Подставляя полученное выражение обратно в n-кратный интеграл, меняя интегрирование местами, проделываем тоже самое по переменной y_2, потом по y_3 и т.д. до y_n. В итоге получим требуемое свойство, выраженное формулой (22.3). □

④. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{F}_\pm[f(y)](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. По формуле (22.2) мы можем найти производную любого порядка для $\mathrm{F}_\pm[f(y)](x)$, поэтому она бесконечно дифференцируема. Докажем свойство 2) из определения быстроубывающих функций. Имеем, для любых мультииндексов α и β

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \mathrm{F}_\pm[f(y)](x)| \overset{(22.2)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \mathrm{F}_\pm[y^\beta f(y)](x)| =$$
$$\overset{(22.3)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathrm{F}_\pm[\underbrace{D^\alpha(y^\beta f(y))}_{:=g(y)}](x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathrm{F}_\pm[g(y)](x).$$

Поскольку по свойствам **2°** и **3°** быстроубывающих функций g — быстроубывающая, то для ограниченности последнего супремума, достаточно доказать, что $\mathrm{F}_\pm[g(y)](x)$ непрерывная функция, сходящаяся на бесконечности к нулю.

Непрерывность следует уже для абсолютно интегрируемых функций. Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{F}_\pm[g(y)](x) = \lim_{x\to x_0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \lim_{x\to x_0} e^{\mp i(y,x)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x_0)} dy =$$
$$= \mathrm{F}_\pm[g(y)](x_0).$$

Предел можно было внести под знак интеграла, так как $|g(y)e^{\mp i(y,x)}| \leqslant |g(y)|$. Докажем теперь сходимость к нулю. Пусть $x \to \infty$, следовательно, хотя бы одна координата $x_k \to \infty$. Пусть для определенности это будет координата x_1. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{F}_\pm[g(y)](x) = \lim_{x\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i y_1 x_1} dy_1}_{:=v(y_2,\ldots,y_n;x_1)} \underbrace{e^{\mp i((y,x)\pm y_1 x_1)}}_{:=u(y_2,\ldots,y_n;x_2,\ldots,x_n)} dy_2 \ldots dy_n =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{x\to\infty} uv dy_2 \ldots dy_n = 0,$$

поскольку $|uv| \leqslant |v| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy_1$ и $\lim_{x\to\infty} v = 0$ по лемме Римана–Лебега. □

⑤. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[f(Ay+b)](x) = \frac{e^{\pm i(x,A^{-1}b)}}{|\det A|} \mathrm{F}_\pm[f(y)]\big(\left(A^{-1}\right)^* x\big).} \qquad (22.4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\pm}[f(Ay+b)](x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(Ay+b)e^{\mp i(y,x)}dy = \\ \overset{Ay+b=u}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(A^{-1}(u-b),x)}\frac{du}{|\det A|} = \\ = (2\pi)^{-n/2}\frac{e^{\pm i(A^{-1}b,x)}}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(A^{-1}u,x)}du = \\ = (2\pi)^{-n/2}\frac{e^{\pm i(A^{-1}b,x)}}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(u,(A^{-1})^{*}x)}du. \quad \square\end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи формулы (22.4). Пусть $b = -x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ и A — тождественное преобразование, т.е. $A = I$, и $A^{-1} = I$ и $(A^{-1})^* = I$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_{\pm}[f(y-x_0)](x) = e^{\mp i(x,x_0)}\mathrm{F}_{\pm}[f(y)](x).} \tag{22.5}$$

Если рассмотреть $b = 0$ и $A = aI, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_{\pm}[f(ay)](x) = \frac{1}{|a|^n}\mathrm{F}_{\pm}[f(y)](\frac{x}{a}).} \tag{22.6}$$

Упражнение 9. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ доказать, что

$$f(Ax+b) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

22.3. Формула обращения

Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{\mathrm{F}_{+}[\mathrm{F}_{-}[f(z)](y)](x) = \mathrm{F}_{-}[\mathrm{F}_{+}[f(z)](y)](x) = f(x).} \tag{22.7}$$

Доказательство. Используем индукцию по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ это в точности формула (20.2), доказанная для абсолютно интегрируемых кусочно гладких непрерывных функций. Предполагая справедливость формулы для n, докажем ее для $n+1$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{+}[\mathrm{F}_{-}[f(z)](y)](x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z)e^{\mp i(z,y)}e^{\pm i(y,x)}dzdy = \\ = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\underbrace{\left((2\pi)^{-n+1}\int_{\mathbb{R}^{2n-2}} f(z)e^{\mp i(\widehat{z},\widehat{y})}e^{\pm i(\widehat{y},\widehat{x})}d\widehat{z}d\widehat{y}\right)}_{:=g(z_n,x_1,\dots,x_{n-1})}e^{\mp iz_ny_n}e^{\pm iy_nx_n}dy_ndz_n.\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $\widehat{y} = (y_1,\dots,y_{n-1})$ и аналогично для $\widehat{z}$ и $\widehat{x}$. Для функции g по предположению индукции, справедливо равенство

$$g(z_n,x_1,\dots,x_{n-1}) = \mathrm{F}_{+}[\mathrm{F}_{-}[f(\widehat{z},z_n)](\widehat{y})](\widehat{x}) = f(\widehat{x},z_n).$$

Подставляя это выражение в первоначальный интеграл, получаем

$$(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} g(z_n,\widehat{x})e^{\mp iz_ny_n}e^{\pm iy_nx_n}dy_ndz_n = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} f(\widehat{x},z_n)e^{\mp iz_ny_n}e^{\pm iy_nx_n}dy_ndz_n =$$
$$= \mathrm{F}_+[\mathrm{F}_-[f(\widehat{x},z_n)](y_n)](x_n) = f(x). \quad \square$$

§ 23. Свертка функций

23.1. Введем новую операцию для функций и изучим ее свойства.

Определение 25. Для $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ функция

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

называется *сверткой* функций f и g.

Легко заметить, что свертка двух функций существует, если, например, одна из функций ограничена, а другая — абсолютно интегрируема. Поэтому свертка двух быстроубывающих функций существует, более того, позже мы поймем, что она тоже является быстроубывающей функцией.

Упражнение 10. Доказать, что свертка двух быстроубывающих функций абсолютно интегрируема.

Рассмотрим простейшие свойства свертки, ограничившись рассмотрением быстроубывающих функций.

1) **Линейность свертки по обоим аргументам.** Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(\alpha f + \beta g) * \phi = \alpha(f * \phi) + \beta(g * \phi), \tag{23.1}$$

$$\phi * (\alpha f + \beta g) = \alpha(\phi * f) + \beta(\phi * g). \tag{23.2}$$

2) **Коммутативность свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f * g = g * f. \tag{23.3}$$

3) **Ассоциативность свертки.** Для любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g) * \phi = f * (g * \phi). \tag{23.4}$$

4) **Дифференцирование свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g) = (f * D^\alpha g). \tag{23.5}$$

Доказательство. Первое свойство следует из линейности интеграла и существования свертки для каждого слагаемого. Для второго имеем

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \overset{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = (g * f)(x).$$

Ассоциативность доказывается аналогично с помощью соответствующих замен переменных. Для дифференцирования имеем

$$D^\alpha(f*g)(x) = D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x-y)g(y)dy = (D^\alpha f * g)(x).$$

Вторая формула следует из коммутативности свертки. $\square$

23.2. Свертка и преобразование Фурье

Поскольку свертка двух быстро убывающих функций абсолютно интегрируема, то мы можем определить преобразование Фурье от такой свертки. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[(f*g)(y)](x) = (2\pi)^{n/2}\mathrm{F}_\pm[f(y)](x)\cdot \mathrm{F}_\pm[g(y)](x).} \tag{23.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_\pm[(f*g)(y)](x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz\right)e^{\mp i(y,x)}dy = \\
\stackrel{T.23}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)e^{\mp i(y,x)}dy\right)g(z)dz = \\
\stackrel{y-z=u}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(z+u,x)}du\right)g(z)dz = \\
= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(u,x)}du\cdot\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{\mp i(z,x)}dz = \\
= (2\pi)^{n/2}\mathrm{F}_\pm[f(u)](x)\cdot\mathrm{F}_\pm[g(z)](x). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствием доказанной формулы является формула для преобразования Фурье от произведения быстроубывающих функций. Напомним, что по свойству **5°** быстроубывающих функций произведение быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция и

$$\boxed{\mathrm{F}_\pm[(f\cdot g)(y)](x) = (2\pi)^{-n/2}(\mathrm{F}_\pm[f(y)] * \mathrm{F}_\pm[g(y)])(x).} \tag{23.7}$$

Доказательство. Заменим в формуле (23.6) функции $f(x)$ и $g(x)$ на их преобразования Фурье — $\mathrm{F}_\pm[f(y)](x)$ и $\mathrm{F}_\pm[g(y)](x)$ соответственно. Далее применим формулу обращения и, навесив преобразование Фурье к получившемуся равенству, получим требуемое равенство. $\square$.

Упражнение 11. Используя формулу (23.6) докажите, что свертка быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция.

В связи с этим упражнением отметим в заключение, что к дополнению к уже обсуждавшимся свойствам пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, оно замкнуто относительно взятия преобразования Фурье и операции свертки.

§ 24. Равенство Парсеваля

Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx. \tag{24.1}$$

Доказательство. Докажем равенство для обратного преобразования Фурье, для прямого доказательство аналогично. Покажем сначала, что для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx. \tag{24.2}$$

Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(y,x)}dy\right)g(x)dx =$$
$$\overset{T.23}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i(x,y)}dx\right)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Далее, легко проверить, что справедливы также формулы

$$\overline{\hat{f}(x)} = \check{\overline{f}}(x), \quad \overline{\check{f}(x)} = \hat{\overline{f}}(x) \tag{24.3}$$

Применяя обе формулы, а также формулу обращения, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \overset{(22.7)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\check{f}}(x)\overline{g(x)}dx \overset{(24.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\hat{\overline{g}}(x)dx \overset{(24.3)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx. \quad \square$$

§ 25. Формула Пуассона

Теорема 13. *Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедлива формула Пуассона*

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n). \tag{25.1}$$

Доказательство теоремы 13. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x)$$

вещественного переменного x. Поскольку

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(2\pi n + x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k(p)}{1 + |2\pi n + x|^p},$$

то функция F определена для всех $x \in \mathbb{R}$, более того эта функция непрерывно дифференцируема и 2π-периодична. Действительно,

$$F(x + 2\pi) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x + 2\pi) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi(n+1) + x) =$$
$$\overset{n+1=m}{=} \sqrt{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(2\pi m + x) = F(x)$$

и

$$F'(x) = \sqrt{2\pi}\frac{d}{dx}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(2\pi n + x).$$

Справедливость последнего равенства будет доказана, если мы покажем, что ряд из производных сходится равномерно в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ — этого будет достаточно. По определению быстроубывающей функции найдется константа $k > 0$ такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(2\pi n + x)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} =$$
$$= \frac{k}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} + \frac{k}{1 + (2\pi n - x)^2} =$$
$$\leqslant k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2k}{1 + (2\pi)^2(n-1)^2} < 3k + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k}{2\pi^2 n^2} < \infty.$$

По признаку Вейерштрасса ряд из производных сходится равномерно на $[-2\pi, 2\pi]$ и, следовательно, $F(x)$ непрерывно дифференцируема. Поэтому для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье в комплексной форме (4.2):

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Подставляя в это равенство значение $x = 0$, получаем

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.$$

Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что $c_n = \hat{f}(n)$. Имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x)\right) e^{-inx} dx =$$
$$\overset{\text{равн.сх.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(2\pi n + x) e^{-inx} dx =$$
$$\overset{x+2\pi n=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n}}_{=\int_{\mathbb{R}}} f(y) e^{-iny} \underbrace{e^{i2\pi n^2}}_{=1} dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iny} dy = \hat{f}(n). \quad \square$$

§ 26. Теорема Котельникова–Шеннона

Теорема 14. *Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ зануляется вне некоторого интервала $[-a, a]$, $a > 0$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \operatorname{sinc}(ax - \pi n),$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ *— функция отсчетов.*

Доказательство теоремы 14.
Имеем

$$f(x) \overset{(22.7)}{=} \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \hat{f}(y) e^{iyx} dy =$$

$$\overset{(4.3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{-i\pi n x}{a}} dx \overset{T.4}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-a}^{a} e^{\frac{-i\pi n x}{a}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2a \frac{\sin(ax - \pi n)}{ax - \pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(ax - \pi n).$$

Здесь мы воспользовались разложением гладкой функции $\hat{f}(x)$ в комплексный ряд Фурье на отрезке $[-a, a]$. Остается только показать, что $\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} = f\left(\frac{\pi n}{a}\right)$:

$$\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} \overset{(4.4)}{=} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \hat{f}(x) e^{\frac{i\pi n x}{a}} dx = \check{\hat{f}}\left(\frac{\pi n}{a}\right) = f\left(\frac{\pi n}{a}\right). \quad \square$$

§ 27. Решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу о распределении температуры в пространстве без источников тепла или холода. Обозначим через $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — температуру в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ в момент времени $t \geqslant 0$. Известно, что закон изменения температуры определяется *уравнением теплопроводности* и начальным распределением температуры:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u = a^2 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right), \ a > 0; \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \tag{27.1}$$

Предположим, что f достаточно хорошая (гладкая и абсолютно интегрируемая), чтобы можно было применить преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Естественно предполагать, что функция $u(x,t)$ унаследует эти свойства. Обозначим через

$$v(x,t) = \mathrm{F}_+[u(z,t)](x)$$

прямое преобразование Фурье функции $u(x,t)$ по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Применив такое преобразование Фурье к уравнению (27.1), получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{F}_+[u(z,t)](x) = \mathrm{F}_+\left[\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right](x) \overset{(27.1)}{=} \mathrm{F}_+[a^2\triangle u(z,t)](x) =$$
$$\overset{(22.1)}{=} a^2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{F}_+\left[\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z_k^2}\right](x) \overset{(22.3)}{=} a^2\sum_{k=1}^{n}(ix_k)^2\mathrm{F}_+[u(z,t)](x) = -\|x\|^2 v$$

и $v(x,0) = \hat{f}(x)$. Таким образом, мы получили параметрическое семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (с параметром $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -a^2\|x\|^2 v, \\ v(0) = \hat{f}(x), \end{cases}$$

решая которые, получаем

$$v(x,t) = \hat{f}(x)e^{-a^2\|x\|^2 t}, \ x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0.$$

Применив к последнему соотношению обратное преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$u(x,t) \overset{(22.7)}{=} \mathrm{F}_-[\mathrm{F}_+[u(z,t)](y)](x) = \mathrm{F}_-[v(y,t)](x) = \mathrm{F}_-[\hat{f}(y)e^{-a^2\|y\|^2 t}](x) =$$
$$\overset{(23.7)}{=} (2\pi)^{-n/2}(\mathrm{F}_-[\hat{f}] * \mathrm{F}_-[e^{-a^2\|y\|^2 t}])(x) = (2\pi)^{-n/2}(f * \mathrm{F}_-[e^{-a^2\|y\|^2 t}])(x) =$$
$$\overset{(20.5)}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)(2a^2t)^{-n/2}e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2t}}\,dz =$$
$$= (4\pi a^2 t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2t}}\,dz.$$

Полученная формула для $u(x,t)$ называется *формулой Пуассона* решения уравнения теплопроводности (27.1). Поскольку решение единственно, то подставив это решение, можно убедиться, что оно действительно удовлетворяет уравнению и начальному условию.

§ 28. Понятие о дискретном преобразовании Фурье

Смотрите [А02; с.52].

Глава III. Обобщенные функции

§ 29. Основные и обобщенные функции

29.1. Пробные функции. На протяжении этой главы $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ — это открытое множество.

Определение 26. Функция $\varphi : G \to \mathbb{C}$ называется основной, или пробной, в G, если она финитна в G, т.е. если она бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель в G.

Определение 27. Пусть φ_n, φ – пробные функции в G. Говорят, что φ_n сходится к φ в пространстве основных функций, если

1) существует компакт $K \subset G$, содержащий носители функций φ и φ_n, $n \in \mathbb{N}$,

2) для любого мультииндекса α

$$D^\alpha \varphi(x) \overset{G}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi(x)$$

при $n \to \infty$. Множество основных функций с такой сходимостью обозначают как $\mathcal{D}(G)$, при этом сходимость обозначают как

$$\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\longrightarrow} \varphi(x).$$

Пример 6. Пусть $\varphi_n(x) = \omega_{n,1}(x)$. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $\varphi_n(x)$ финитна и $\operatorname{supp} \varphi = [n-1, n+1]$. Легко проверить, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$\varphi_n(x) \to 0,$$

но

$$\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\not\longrightarrow} 0.$$

29.2. Основные функции.

Определение 28. Отображение $F : \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ называется обобщенной функцией, или распределением, если

1) F — линейное отображение, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi);$$

2) F — непрерывное отображение, т.е.

$$\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\longrightarrow} \varphi(x) \Rightarrow F(\varphi_n) \to F(\varphi).$$

Множество всех обобщенных функций обозначают через $\mathcal{D}'(G)$. Кратко, обобщенные функции можно называть линейными непрерывными функционалами на $\mathcal{D}(G)$.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных функций.

Пример 7. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — локально (абсолютно) интегрируемая функция. Это значит, что для любой точки $x \in G$ существует открытая окрестность U_x в G такая, что $\int_{U_x} |f(x)|dx < \infty$. Множество таких функций обозначают как $L_{1,\mathrm{loc}}(G)$. С помощью функции f определим обобщенную функцию F_f (обозначаемую часто той же буквой f), действующую по правилу

$$F_f(\varphi) := f(\varphi) := (f, \varphi) := \int_G f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G). \tag{29.1}$$

Покажем, что это, действительно, обобщенная функция. Сначала нужно убедиться, что интеграл в (29.1) сходится для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Для этого достаточно доказать, что всякая локально интегрируемая функция абсолютно интегрируема на любом компакте $K \subset G$. Поскольку

$$K \subset G = \bigcup_{x \in G} U_x \Rightarrow K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k},$$

тогда

$$\int_K |f(x)|dx \leqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{U_{x_k}} |f(x)|dx < \infty.$$

Взяв теперь произвольную $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, получим

$$\left| \int_G f(x)\varphi(x)dx \right| \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)||\varphi(x)|dx \leqslant \max|\varphi(x)| \int_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)|dx < \infty.$$

Линейность функционала F_f следует из линейности интеграла. Осталось проверить непрерывность. Пусть $\varphi_n(x) \overset{\mathcal{D}(G)}{\to} \varphi(x)$, и K — компакт, содержащий носители этих функций. Тогда

$$|(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| = |(f, \varphi_n - \varphi)| \leqslant \int_K |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx,$$

поскольку подинтегральная функция не превосходит абсолютно интегрируемую на K функцию $C|f(x)|$ с константой $C = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \max\limits_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить требуемый ноль.

Определение 29. Всякая обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(G)$, для которой найдется функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ такая, что $F = F_f$ называется регулярной обобщенной функцией (распределением). Если такой функции f нет, то обобщенная функция называется сингулярной.

Пример 8. Пусть $G = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\delta \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$\delta(\varphi) = \varphi(0). \tag{29.2}$$

Эта сингулярная обобщенная функция называется *δ-функцией Дирака*. В физической литературе часто про действие такой функции пишут

$$\int \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

однако, пользуясь такой записью, всегда нужно четко понимать, что это означает (29.2). Сингулярность δ следует из следующих рассуждений. Предположим, что существует $f_\delta \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ такая, что для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(\delta, \varphi) = \int_G f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Тогда функция $\sin x_1 f_\delta(x)$ будет нулевой почти всюду по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$0 = \sin 0\varphi(0) = (\delta, \sin x_1\varphi(x)) = \int_G \sin x_1 f_\delta(x)\varphi(x)dx.$$

Таким образом, $f_\delta(x) = 0$ почти всюду, что противоречит определению для δ.

Упражнение 12. Доказать, что $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 9. Пусть $G = \mathbb{R}$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) \frac{\varphi(x)}{x}dx. \tag{29.3}$$

Символ $\mathcal{P}$ показывает, что $1/x$ не является локально интегрируемой, поэтому нужно использовать предел в виде главного значения по Коши. В дальнейшем, при возникновении функций, не являющихся локально интегрируемыми, мы уже не будем использовать этот символ, но будем понимать действие порождаемых ими обобщенных функций в виде соответствующего предела.

Поскольку функция φ финитна, то начиная с некоторого $R > 0$ будем иметь включение $\mathrm{supp}\varphi \subset [-R, R]$, поэтому предел по R можно не рассматривать. А предел при $\varepsilon \to +0$ существует и конечен, поскольку

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(-y)}{y}dy + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}dx,$$

а функция $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ интегрируема на отрезке $[0, R]$.

Линейность и непрерывность $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ практически очевидна.

Упражнение 13. Показать, что

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx. \tag{29.4}$$

§ 30. Сходимость обобщенных функций

30.1. Все операции, определяемые для обобщенных функций, мотивированы аналогиями, возникающими при рассмотрении регулярных обобщенных функции. Мы будем называть такие аналогии наводящими соображениями. Первой операцией рассмотрим предельный переход в $\mathcal{D}'(G)$.

Наводящие соображения. Пусть f_n, f — абсолютно интегрируемые на G функции, и $f_n \to f$ почти всюду, причем $|f_n| < |f|$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(f_n, \varphi) = \int_G f_n(x)\varphi(x)dx \to \int_G f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi).$$

Определение 30. Пусть $F_n, F \in \mathcal{D}'(G)$. Говорят, что F_n сходится к F при $n \to \infty$, если

$$(F_n, \varphi) \to (F, \varphi) \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

При этом пишут $F_n \overset{\mathcal{D}'(G)}{\longrightarrow} F$.

30.2. Дельта-образные последовательности. Рассмотрим несколько примеров сходимости обобщенных функций.

Определение 31. Последовательность функций $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дельта-образной последовательностью, если выполнены следующие условия:

1) $h_k(x) \geqslant 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^n$;

2) существует последовательность $\varepsilon_k > 0$ такая, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, и для всех $k \in \mathbb{N}$ носитель $\operatorname{supp} h_k = \overline{B}(0, \varepsilon_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant \varepsilon_k\}$;

3) $\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)dx = 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 15. *Всякая дельта-образная последовательность сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ-функции.*

Доказательство теоремы 15. Пусть $h_k(x)$ — дельта-образная последовательность. Нужно показать, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(h_k, \varphi) \to (\delta, \varphi) \quad \text{т.е.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x)dx \to \varphi(0).$$

Используя теорему о среднем и свойства дельта-образной последовательности, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\overline{B}(0,\varepsilon_k)} h_k(x)\varphi(x)dx =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi_k) \int_{\overline{B}(0,\varepsilon_k)} h_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi_k) = \varphi(0),$$

поскольку $\xi_k \in \overline{B}(0, \varepsilon_k)$ и $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$. □

Поскольку предельным геометрическим образом графиков функций из дельта-образной последовательности (см., например, рис. 9) является $+\infty$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) = 0$, то часто δ-функцию графически так и изображают — вертикальной стрелкой $x_k = 0, k = 1, \ldots, n-1$ по x_n от 0 до $+\infty$.

30.3. Формулы Сохоцкого.

Теорема 16. *В $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливы формулы Сохоцкого*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} := \frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{30.1}$$

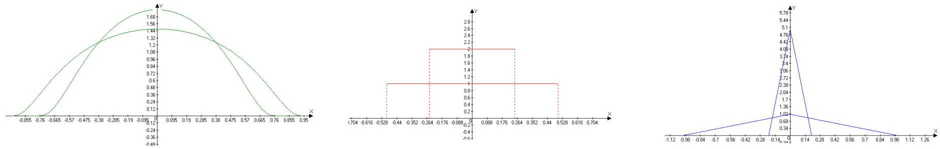

Рис. 9. Графики дельта-образных последовательностей в $\mathbb{R}$ $h_k(x) = c_k e^{\frac{-1}{\varepsilon_k^2 - x^2}} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$, $h_k(x) = \frac{H(\varepsilon_k^2 - x^2)}{2\varepsilon_k}$, $h_k(x) = \frac{\varepsilon_k - |x|}{\varepsilon_k^2} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$.

Доказательство теоремы 16. Для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]$ имеем

$$(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} (\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx =$$
$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{I_1} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{I_2},$$

где

$$I_2 = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx}_{=0} +$$
$$+ \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{\mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx \overset{x = y\varepsilon}{=} \mp i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} \frac{dy}{y^2 + 1} =$$
$$= \mp i\varphi(0) \operatorname{arctg} |_{-\infty}^{+\infty} = \mp i\varphi(0)\pi = (\mp i\pi\delta, \varphi).$$

Для вычисления первого предела воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leqslant \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x|},$$

а интеграл от последней функции конечен, то

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \overset{R \to \infty}{=}$$
$$= \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \overset{(29.4)}{=} (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi). \quad \square$$

§ 31. Операции с обобщенными функциями

31.1. Линейная замена переменных. Начнем с наводящих соображений. Пусть $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, A — невырожденная $n \times n$ матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f(Ax+b)$ на $\varphi(x)$:

$$(f(Ax+b),\varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\varphi(x)dx \overset{Ax+b=y}{=}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))\frac{dy}{|\det A|} = \left(f(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}\right).$$

Определение 32. Для любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, невырожденной $n\times n$ матрицы A и вектора $b\in\mathbb{R}^n$ определена новая обобщенная функция $F(Ax+b)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующая на пробную функцию $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(F(Ax+b),\varphi(x)) = \left(F(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x-b))}{|\det A|}\right). \tag{31.1}$$

Упражнение 14. Доказать, что $F(Ax+b)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 10. $(\delta(x-x_0),\varphi(x)) \overset{(31.1)}{=} (\delta(x),\varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$.

31.2. Нелинейная замена переменных в δ-функции.

Определение 33. Пусть $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и h_k — произвольная дельта-образная последовательность, тогда определена обобщенная функция $\delta(a(x))\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ формулой

$$\delta(a(x)) \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{k\to\infty} h_k(a(x)). \tag{31.2}$$

Мы не будем обсуждать деликатный момент о корректности этого определения, т.е. вопрос существования этого предела и его независимости от дельта-образной последовательности, однако используем его для получения полезной формулы.

Теорема 17. *Пусть $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция с простыми нулями (т.е. $a(x)=0, a'(x)\neq 0$). Тогда*

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}, \tag{31.3}$$

где x_k — нули функции a.

Доказательство теоремы 17. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi=[-R,R]$. В интервале $[-R,R]$ находится лишь конечное число нулей $x_k, k=0,\dots,m$ функции a. Если бы это было не так, то нашлась бы сходящаяся к нулю x_∞ функции a последовательность нулей x_j функции a, но тогда бы $a'(x_\infty)=0$, что противоречит условию теоремы о простоте нулей функции a.

Для простоты изложения будем считать, что функция a имеет лишь один нуль $x_0\in[-R,R]$. Тогда по теореме об обратной функции найдется окрестность J точки x_0, на которой функция a обратима. По определению дельта-образной последовательности h_k, начиная с некоторого номера k будем иметь

$$\operatorname{supp} h_k = [-\varepsilon_k,\varepsilon_k]\subset a(J).$$

Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ получаем

$$\begin{aligned}(\delta(a(x)), \varphi(x)) &\overset{(31.2)}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_k(a(x))\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-R}^{R} h_k(a(x))\varphi(x)dx = \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_J h_k(a(x))\varphi(x)dx + \underbrace{\lim_{k\to\infty}\int_{[-R,R]\setminus J} h_k(a(x))\varphi(x)dx}_{=0} = \\ &\overset{a(x)=y}{=} \lim_{k\to\infty}\int_{a(J)} h_k(y)\varphi(a^{-1}(y))\frac{dy}{|a'(a^{-1}(y))|} = \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(h_k, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|}\right) \overset{T.15}{=} \left(\delta, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|}\right) = \\ &= \frac{\varphi(a^{-1}(0))}{|a'(a^{-1}(0))|} = \frac{\varphi(x_0)}{|a'(x_0)|} = \left(\frac{\delta(x-x_0)}{|a'(x_0)|}, \varphi\right). \quad \square\end{aligned}$$

31.2. Умножение. Наводящие соображения. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$, и $g \in C^\infty(G)$, тогда для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $g(x)f(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(g(x)f(x), \varphi(x)) = \int_G g(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)g(x)\varphi(x)dx = (f(x), g(x)\varphi(x)).$$

Определение 34. Пусть $F, \Phi \in \mathcal{D}'(G)$, причем Φ — регулярная обобщенная функция, порожденная бесконечно дифференцируемой функцией (обозначаемой тем же символом Φ), тогда определена обобщенная функция

$$\Phi \cdot F = F \cdot \Phi \in \mathcal{D}'(G),$$

действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по формуле

$$(\Phi \cdot F, \varphi) = (F, \Phi\varphi) = (F \cdot \Phi, \varphi). \tag{31.4}$$

Упражнение 15. Доказать, что $\Phi \cdot F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 11.

$$(\Phi \cdot \delta, \varphi) = (\delta, \Phi\varphi) = \Phi(0)\varphi(0) = (\Phi(0)\delta, \varphi); \tag{31.5}$$

$$(0 \cdot F, \varphi) = (F, 0\varphi) = (F, 0) = 0(F, 1) = 0; \tag{31.6}$$

$$(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi}{x}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx = (1, \varphi). \tag{31.7}$$

Легко проверить, что так определенное умножение коммутативно и ассоциативно. Однако, его нельзя распространить на все пространство обобщенных функций с сохранением свойств коммутативности и ассоциативности. Если предположить, что мы смогли определить такое умножение, то сразу же пришли бы к противоречию

$$0 \overset{(31.6)}{=} 0\mathcal{P}\frac{1}{x} \overset{(31.5)}{=} (x\delta)\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta \cdot (x\mathcal{P}\frac{1}{x}) \overset{(31.7)}{=} \delta \cdot 1 \overset{(31.5)}{=} \delta.$$

31.3. Дифференцирование. Наводящие соображения. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f'(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(f', \varphi) = \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x) \mid_{-R}^{R}}_{=0} - \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Определение 35. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ и $F \in \mathcal{D}'(G)$. Для любого мультииндекса α определена обобщенная функция $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$, которая называется обобщенной производной порядка α и действует на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по правилу

$$(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F, D^\alpha \varphi). \tag{31.8}$$

Упражнение 16. Доказать, что $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 12.

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0);$$

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi) \overset{(21.1)}{=} -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi). \tag{31.9}$$

Следующая теорема проливает свет на взаимосвязь классической производной кусочно-гладкой функции и ее обобщенным вариантом.

Теорема 18. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, тогда ее классическая производная $f'_{кл}$, рассматриваемая как обобщенная функция, и ее обобщенная производная $f'_{об}$ связаны формулой*

$$f'_{об} \overset{\mathcal{D}'}{=} f'_{кл} + \sum_k [f]_k \delta(x - x_k), \tag{31.10}$$

где x_k — точки разрыва функции $f(x)$, и $[f]_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$ —скачок функции f в точке x_k.

Доказательство теоремы 18. Подействуем $f'_{\text{об}}$ на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi = [-R, R]$, получим

$$
\begin{aligned}
(f'_{\text{об}}, \varphi) &\overset{(31.8)}{=} -(f, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)dx = \\
&= -\sum_{k: x_k \in [-R,R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx = -\sum_{k: x_k \in [-R,R]} f(x)\varphi(x)\,\Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} + \\
&+ \sum_{k: x_k \in [-R,R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)dx = -\sum_k (f(x_{k+1}-0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\varphi(x_k)) + \\
&+ (f'_{\text{кл}}, \varphi) = -\sum_k (f(x_{k+1}-0)\varphi(x_{k+1}) + \sum_k f(x_k+0)\varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&\overset{k+1\to k}{=} -\sum_k (f(x_k-0)\varphi(x_k) + \sum_k f(x_k+0)\varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&= \sum_k (f(x_k+0) - f(x_k-0))(\delta(x-x_k), \varphi(x)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\
&= \left(\sum_k [f]_k \delta(x-x_k) + f'_{\text{кл}}, \varphi\right). \quad \square
\end{aligned}
$$

Пример 13. **Плотность заряда электрического диполя.** Поскольку δ функцию можно воспринимать как плотность распределения какой-либо величины в точке ноль, то с помощью нее можно записать плотность распределения заряда системы из двух заряженных частиц: с зарядом $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ на расстоянии l. Такая система называется электрическим диполем. Помещая отрицательный заряд в точку $x = 0$, а положительный в точку $x = l$, получаем плотность системы

$$\varrho_l(x) = -\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x+l).$$

Моментом системы называется величина $p = \varepsilon l$. Точечным электрическим диполем называется предельное положение описанной системы при $l \to 0+$ с сохранением момента p. Вычислим плотность распределения заряда точечного электрического диполя ϱ_0 как предел (в $\mathcal{D}'$) плотности ϱ_l :

$$
\begin{aligned}
\lim_{l\to 0+} (\varrho_l(x), \varphi(x)) &= \lim_{l\to 0+} (-\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x+l), \varphi(x)) = \\
&= \lim_{l\to 0+} (\delta, \varepsilon(\varphi(x+l) - \varphi(x))) = \lim_{l\to 0+} p\frac{\varphi(l)-\varphi(0)}{l} = \\
&= p\varphi'(0) = -(p\delta', \varphi).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\varrho_0 = -p\delta'$.

§ 32. Свертка обобщенных функций

Начнем с наводящих соображений. Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тогда их свертка $f * g$ существует и является элементом $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Подействуем регулярной обобщенной функцией $f * g$ на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(f*g,\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)\varphi(x)dx=$$
$$\overset{T23}{=}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\varphi(x)dx\right)dy\overset{x-y=z}{=}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\varphi(z+y)dz\right)dy=$$
$$\overset{T23}{=}\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\varphi(z+y)dy\right)dz=(f(z),(g(y),\varphi(y+z))).$$

Определение 36. Пусть $F,G\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем G такая, что для любой пробной функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функция $(G(x),\varphi(x+y))$ является пробной функцией переменной y. Тогда определена новая обобщенная функция $F*G\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которая называется сверткой F и G, и действует на пробную $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу
$$(F*G,\varphi)=(F(y),(G(x),\varphi(x+y))).\tag{32.1}$$

Рассмотрим по аналогии с обычной сверткой ее простейшие свойства.

0). **Свертка с δ-функцией.** Пусть $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тогда $F*\delta$ и $\delta*F$ существуют и
$$F*\delta=\delta*F=F.\tag{32.2}$$

Это равенство формально часто записывают как $F(x)=\int F(y)\delta(x-y)dy$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, тогда $(\delta(x),\varphi(x+y))=\varphi(y)$ — пробная функция, следовательно определена свертка $F*\delta$, при этом
$$(F*\delta,\varphi)=(F(y),(\delta(x),\varphi(x+y)))=(F(y),\varphi(0+y))=(F,\varphi).$$
Функция $(F(x),\varphi(x+y))$ переменной y вообще говоря не является финитной, но она бесконечно дифференцируема, следовательно, непрерывна, поэтому δ-функция может на нее действовать, имеем
$$(\delta*F,\varphi)=(\delta(y),(F(x),\varphi(x+y)))=(F(x),\varphi(x+0))=(F,\varphi).\quad\square$$

Упражнение 17. Доказать, что для любой $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и любой $F\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ функция $(F(x),\varphi(x+y))$ переменной y бесконечно дифференцируема.

1). **Линейность свертки.** Пусть $F_1,F_2,G\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и F_1*G, F_2*G существуют, тогда для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ существует свертка $(\alpha F_1+\beta F_2)*G$, причем
$$(\alpha F_1+\beta F_2)*G=\alpha(F_1*G)+\beta(F_2*G).\tag{32.3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, имеем
$$\begin{aligned}((\alpha F_1+\beta F_2)*G,\varphi)&=((\alpha F_1(y)+\beta F_2(y),(G(x),\varphi(x+y)))=\\&=\alpha(F_1(y),(G(x),\varphi(x+y)))+\beta(F_2(y),(G(x),\varphi(x+y)))=\\&=(\alpha(F_1*G),\varphi)+(\beta(F_2*G),\varphi)=(\alpha(F_1*G)+\beta(F_2*G),\varphi).\quad\square\end{aligned}$$

2). **Коммутативность свертки.** Пусть $F,G\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F*G$ существует, тогда существует и свертка $G*F$, причем
$$F*G=G*F.\tag{32.4}$$

Без доказательства примем это свойство.

3). **Дифференцирование свертки.** Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F * G$ существует, тогда для любого мультииндекса α существуют свертки $D^\alpha(G * F)$, $D^\alpha G * F$ и $G * D^\alpha F$, причем

$$D^\alpha(D * G) = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G. \tag{32.5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ввиду свойства 2) достаточно установить одно из равенств, имеем

$$\begin{aligned}(D^\alpha(F * G), \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F * G, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F(y), (G(x), D^\alpha \varphi(x+y))) = \\ = (F(y), (D^\alpha G(x), \varphi(x+y))) = (F * D^\alpha, \varphi). \quad \square\end{aligned}$$

4). **Отсутствие ассоциативности.** Свертка в $\mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$ не ассоциативна.

Доказательство. Нужно предъявить обобщенные функции $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3).$$

Возьмем $F_1 = 1, F_2 = \delta'$ и $F_3 = H$, тогда

$$0 = 0 * H = 1' * H = (1' * \delta) * H = (1 * \delta') * H \neq 1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H') = 1 * \delta = 1. \quad \square$$

Стоит отметить, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ существуют подмножества, на которых свертка ассоциативна, подробнее о таких обобщенных функциях можно посмотреть в книге [3; глава 2, §7, пункт 7], или других изданиях этой книги.

§ 33. Фундаментальное решение дифференциального оператора

33.1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Под дифференциальным оператором в Ω мы будем понимать выражение

$$L(D) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} b_\alpha D^\alpha,$$

где $b_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ и D^α — символ производной порядка α. Попытаемся понять, как решают уравнения в пространстве обобщенных функций: как искать $X \in \mathcal{D}'(\Omega)$ такую, что

$$L(D)X = F, \quad \text{где} \quad F \in \mathcal{D}'(\Omega). \tag{33.1}$$

Начнем с "простых" правых частей F.

Определение 37. Обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется фундаментальным решением оператора $L(D)$ в $\mathbb{R}^n$, если она является решением уравнения

$$L(D)X = \delta.$$

Фундаментальное решение не единственно, оно находится с точностью до обобщенной функции $E_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такой, что $L(D)E_0 = 0:$

$$L(D)(E + E_0) = L(D)E + L(D)E_0 = \delta + 0 = \delta.$$

Пример 14. Найдем фундаментальное решение для оператора $1-\frac{d^2}{dx^2}$ в $\mathbb{R}$, т.е. решим уравнение

$$X - X'' = \delta.$$

Пока решать мы не умеем, но проверим, что две обобщенные функции E_1 и E_2 являются его решениями:

$$E_1 = -H\mathrm{sh}x,\ E_2 = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E_1 - E_1'' &= -H\mathrm{sh}x + (H\mathrm{sh}x)'' = -H\mathrm{sh}x + (H'\mathrm{sh}x + H\mathrm{ch}x)' = \\ &= -H\mathrm{sh}x + (\mathrm{sh}x\delta + H\mathrm{ch}x)' = -H\mathrm{sh}x + (H\mathrm{ch}x)' = \\ &= -H\mathrm{sh}x + H'\mathrm{ch}x + H\mathrm{sh}x = \delta. \end{aligned}$$

Также имеем

$$E_2 - E_2'' = \frac{e^{-|x|}}{2} - \left(\frac{e^{-|x|}}{2}\right)'' = \frac{e^{-|x|}}{2} + \left(\operatorname{sgn} x\frac{e^{-|x|}}{2}\right)' = \frac{e^{-|x|}}{2} - \frac{e^{-|x|}}{2} + \delta.$$

Первое решение E_1 было найдено при помощи следующей теоремы о нахождении фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора.

Теорема 19. *Пусть* $L(D) = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x)\frac{d^j}{dx^j}$, *где* $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ *и* $a_0(0) = 1$, *тогда фундаментальное решение* E *оператора* $L(D)$ *задается равенством*

$$E = f(x)H(x),$$

где H *— функция Хевисайда (21.1), а* f *— решение задачи Коши*

$$\begin{cases} L(D)f = 0, \\ f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-2)}(0) = 0, \\ f^{(k-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 19. Вычислим все необходимые производные для E

$$\begin{array}{lll} E' & = & (Hf)' = H'f + f'H = f\delta + f'H = f(0)\delta + f'H = f'H, \\ E'' & = & (f'H)' = f'(0)\delta + f''H = f''H, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ E^{(k)} & = & (f^{(k-1)}H)' = f^{(k-1)}(0)\delta + f^kH = \delta + f^kH. \end{array}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} L(D)E = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x)\frac{d^jE}{dx^j} &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}(x)f^{(j)}H + a_0(x)\delta = \\ &= HL(D)f + a_0(0)\delta = H\cdot 0 + \delta = \delta. \quad \square \end{aligned}$$

33.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

Для важных в математической физике дифференциальных операторов найдены фундаментальные решения. Здесь мы обсудим фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\triangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Для $n = 1$ фундаментальное решение E оператора $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$ находится с помощью теоремы 19: $E = xH(x)$. Для $n = 2$ фундаментальное решение E оператора $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ непосредственным вычислением (проведенным на семинарских занятиях) получается равным $\frac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$. Покажем теперь, что для $n = 3$ фундаментальное решение задается формулой $E = -\frac{1}{4\pi(x^2+y^2+z^2)}$.

Заметим, что в области $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ функция E — гармоническая, т.е. $\triangle E = 0$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$\begin{aligned}
(\triangle E, \varphi) &= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \varphi\right) = \\
&\overset{(31.8)}{=} (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \\
&= (E, \triangle\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} E\triangle\varphi\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} E\triangle\varphi\, dx\, dy\, dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\varepsilon^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} E\triangle\varphi - \underbrace{\triangle E}_{=0}\varphi\, dx\, dy\, dz = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\varepsilon^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \triangle E & \triangle\varphi \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \\
&=
\end{aligned}$$

33.3. Как решают обобщенные дифференциальные уравнения.

Для нахождения частных обобщенных решений дифференциального уравнения (33.1) с постоянными коэффициентами полезно следующее утверждение.

Теорема 20. *Пусть $L(D)$ — дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с постоянными коэффициентами, и E — его фундаментальное решение. Тогда обобщенная функция $X = E * F$ является решением уравнения* (33.1).

Доказательство теоремы 20. Непосредственно вычисляя, получаем

$$L(D)X = L(D)(E * F) = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} b_\alpha D^\alpha (E * F) =$$

$$= \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} b_\alpha D^\alpha E\right) * F = \delta * F = F. \quad \square$$

Зачастую частные решения ищутся не во всем пространстве обобщенных функций, а на каком-нибудь его подпространстве. Одним из них является пространство Соболева.

Определение 38. Пространством Соболева $W_l^p(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in [1, +\infty)$ называется множество обобщенных функций $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, у которых обобщенные производные $D^\alpha F$ для всех $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ являются регулярными распределениями, порожденными функциями f_α, интегрируемыми в p-ой степени, т.е. $\int_\Omega |f_\alpha(x)|^p < \infty$.

Простейшая характеризация таких функций дается теоремой вложения Соболева.

Теорема 21. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклая область и $lp > n$, тогда для любой $F \in W_l^p(\Omega)$ найдется непрерывная функция f такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$(F, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

§ 34. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Глава IV. Геометрия пространств со скалярным произведением

§ A. Теорема о среднем

Теорема 22.

§ B. Теорема Шварца

§ C. Теорема Фубини–Тонелли

Теорема 23. *Пусть* $D = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ *и* $f : D \to \mathbb{R}$. *Положим*

$$J_1 = \iint_D f(x, y)dxdy, \quad J_2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx, \quad J_3 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Если $J_1 < \infty$, *то* $J_2, J_3 < \infty$ *и* $J_1 = J_2 = J_3$. *Обратно, если* $f \geqslant 0$ *почти всюду в* D *и* $J_2 < \infty$ *(или* $J_3 < \infty$*), то* $J_1 < \infty$ *и* $J_1 = J_2 = J_3$.

Содержание

Глава I. Ряды Фурье 1
Введение 1
1. Задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье 2
2. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом 4
3. Разложение в ряд Фурье на интервале 5
4. Комплексная форма ряда Фурье 7
5. Лемма Римана–Лебега 9
6. Ядра Дирихле 10
7. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье 11
8. Дифференцируемость и интегрируемость рядов Фурье 14
9. Приближение функций тригонометрическими многочленами 16
10. Равномерная сходимость ряда Фурье 17
11. Равенство Ляпунова 18
12. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье 20
13. Явление Гиббса 21
14. Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро–Фейера 24
15. Применение рядов Фурье: решение задачи Дирихле в круге 25
16. Теоремы Вейерштрасса 28
Глава II. Преобразование Фурье 30
17. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье 30
18. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье 31
19. Интеграл Фурье на полупрямой 32
20. Представление интеграла Фурье в комплексной форме 34
21. Быстроубывающие функции 36
22. Преобразование Фурье для быстроубывающих функций 39
23. Свертка функций 43
24. Равенство Парсеваля 45
25. Формула Пуассона 45
26. Теорема Котельникова–Шеннона 47
27. Решение уравнения теплопроводности 47
28. Понятие о дискретном преобразовании Фурье 48
Глава III. Обобщенные функции 49
29. Основные и обобщенные функции 49
30. Сходимость обобщенных функций 51
31. Операции с обобщенными функциями 53
32. Свертка обобщенных функций 57
33. Фундаментальное решение дифференциального оператора 59
34. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста 62
Глава IV. Геометрия пространств со скалярным произведением 62
A. Теорема о среднем 63
B. Теорема Шварца 63
C. Теорема Фубини–Тонелли 63
Содержание 64
Список литературы 65

Список литературы

Издания, подготовленные кафедрой высшей математики ФФ НГУ

[Ab07] Абашеева Н. Л., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2007; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAb07(djvu).

[A95] Александров В. А., *Геометрия пространств со скалярным произведением*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1995; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA95(pdf).

[A05] Александров В. А., *Обобщённые функции*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2005; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA05(ps).

[A96.1] Александров В. А., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996.

[A93] Александров В. А., *Ортогональные многочлены*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA93(pdf).

[A02] Александров В. А., *Преобразование Фурье*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2002; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA02(pdf).

[A96.2] Александров В. А., *Ряды Фурье*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA96.2(pdf).

[AK93] Александров В. А., Колесников Е. В., *Интегральные уравнения*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAK93(pdf).

[B11] Бельхеева Р. К., *Ряды Фурье в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2011; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB11(pdf).

[P12] Подвигин И. В., *Гильбертовы пространства в примерах и задачах*, Учебно-метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2012; www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsP12(pdf).

Издания, рекомендуемые кафедрой высшей математики ФФ НГУ

[1] Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В., *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Выш. шк, Минск, 1978; http://reslib.org/Antonevich78(e-djvu).

[2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Наука, М., 1987; http://reslib.org/Bakhvalov87(e-djvu).

[3] Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, издание 4, исправленное и дополненное, Наука, М., 1981; http://reslib.org/Vladivmirov81(e-djvu).

Дополнительная литература, использованная при подготовке курса лекций

И. В. Подвигин (I. V. Podvigin)
Новосибирский государственный университет, физический факультет, кафедра высшей математики
E-mail: ivan_podvigin@ngs.ru