

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(5-й семестр, лекции 34 ч., семинары 68 ч., экзамен.)

Программа курса лекций

Лектор — Доманова Елена Дмитриевна

1. Линейные уравнения в частных производных первого и второго порядков.

Классификация и постановка основных задач.

Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка: характеристики и первые интегралы, задача Коши. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача Коши для гиперболических и параболических уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений. Смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений. Корректность. Пример Адамара.

2. Гиперболические уравнения.

Задача Коши для волнового уравнения. Распространение волн в пространстве. Формулы Даламбера и Кирхгофа. Метод спуска. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Принцип Дюамеля. Смешанная задача для волнового уравнения.

3. Специальные функции математической физики.

Метод Фурье. Многомерная задача Штурма — Лиувилля. Разделение переменных для волнового уравнения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат. Функции Бесселя, полиномы Лежандра, присоединенные функции Лежандра.

4. Эллиптические уравнения.

Фундаментальное решение оператора Лапласа. Представление функции в виде суммы потенциалов. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Функции Грина. Теорема о

среднем. Принцип максимума для гармонических функций. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Формулы Пуассона для шара и полупространства. Применение потенциалов к решению краевых задач. Ньютонов потенциал, потенциалы простого и двойного слоя, их основные свойства. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Доказательство теорем существования и единственности с помощью теоремы Фредгольма.

5. Параболические уравнения

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Применение интегральных преобразований для построения фундаментального решения уравнения теплопроводности. Функция источника, или фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Функция ошибок. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Функция Грина. Задача без начальных данных.

6. Гиперболические системы уравнений первого порядка

Линейные и квазилинейные системы уравнений первого порядка. Характеристические поверхности. Уравнение характеристических нормалей. Классификация. Постановка задачи Коши. Система типа Коши — Ковалевской. Приведение гиперболической системы в двумерном случае к каноническому виду. Инварианты Римана. Соотношения на характеристиках. Симметрические t -гиперболические системы по Фридрихсу. Интеграл энергии и построение области единственности решения задачи Коши. Уравнение Гамильтона — Якоби. Постановка смешанных задач для гиперболических систем.

Основная литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк. 1970.
3. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
4. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

Дополнительная литература

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 1, 2.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985.
3. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982, 1984. Т. 1, 2.
4. Абашеева Н. Л., Сердюков А. С. Лекции по методам математической физики. Электронный лекционный курс, НГУ 2012. <http://www.phys.nsu.ru/ok03/Manuals.html>

Задачники

1. Абашеева Н. Л., Михайлова Т. Ю. Семинары по методам математической физики. Новосибирск: НГУ, 2012.
2. Сборник задач по уравнениям математической физики/ Под ред. В. С. Владимирова. М.: Наука, 1974.
3. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.
4. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.

Примерный план семинаров

- 1, 2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Задача Коши.
- 3, 4. Уравнения второго порядка. Классификация. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Общее решение.
5. Задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений.
6. Формула Даламбера и метод бегущих волн.
7. Сферически-симметричные решения трехмерного волнового уравнения. Плоские волны.
8. Задача Коши для двумерного и трехмерного волнового уравнения.
9. Контрольная работа.

Сдача 1-го задания

10. Метод Фурье решения задач Дирихле и Неймана на плоскости.
- 11, 12. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения. Вынужденные колебания и неоднородные граничные условия.

13. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.
- 14, 15. Сферические гармоники и собственные функции уравнения Гельмгольца.
16. Колебания шара и цилиндра.
17. Контрольная работа.

Сдача 2-го задания

18. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана на плоскости. Формулы Пуассона для круга и полуплоскости.
19. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана в пространстве. Формулы Пуассона для шара и полупространства.
20. Построение функции Грина для оператора Гельмгольца.
21. Ньютонов потенциал, его вычисление и свойства.
- 22, 23. Вычисление потенциалов простого и двойного слоя.
24. Применение потенциалов к решению краевых задач.
25. Контрольная работа.

Сдача 3-го задания

26. Применение преобразования Фурье к вычислению фундаментального решения уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формулы Пуассона.
- 27, 28. Применение преобразования Лапласа к решению задач математической физики.
29. Применение преобразования Фурье к решению задач математической физики.
30. Системы уравнений. Классификация. Характеристики и соотношения на них.
31. Канонический вид гиперболической системы. Римановы инварианты. Общее решение.
32. Задача Коши и смешанная задача для гиперболических систем. Правильная постановка граничных условий.
33. Контрольная работа.

Сдача 4-го задания

Программу составила Доманова Е.Д.